2. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik II Abgabe: Di 14.04.09

Aufgabe 58: Ein Berg mit dem Höhenprofil $z(x,y) = \frac{h}{\rho_0^2}(\rho_0^2 - x^2 - y^2)$ soll erklommen werden. Ein Wechsel zu Polarkoordinaten (ρ, φ) in der xy-Ebene führt zur Parametrisierung $\vec{r} \doteq (x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi), z(\rho,\varphi))$. Der Bergsteiger wählt aus Bequemlichkeit den Weg so, dass er mit konstantem Höhenzuwachs α pro Schritt gehen kann. Bestimmen Sie seinen Pfad. 4

(a) Setzen Sie die Koordinaten (ρ, φ) an als Funktion der Weglänge s und drücken Sie damit die Bedingung der konstanten Steigrate aus. Lösen Sie die resultierende Gleichung für die Radialkoordinate $\rho = \rho(s)$.

(b) Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve wird stets mit konstanter Geschwindigkeit^2 $= (\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s})^2 = 1$ durchlaufen. Daraus erhalten Sie eine Gleichung für $\pm\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$, die Sie nicht lösen. Was ist die Ursache für die Zweideutigkeit?

(c) Die konstante Steigrate lässt sich ab einem bestimmten $\rho_1 < \rho_0$ nicht mehr erfüllen. Wieso? Ermitteln Sie aus der Gleichung für $\rho_1 =: \rho(s_1)$ die zurückgelegte Wegstrecke s_1.

Sonderpunkt: Skizzieren Sie die Lösung projiziert auf die xy-Ebene. Achten Sie dabei auf den Endpunkt ρ_1.

Aufgabe 59: Eine nichtlineare Differenzialgleichung erster Ordnung für $y(x)$ in der Form 4

$$P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

heißt „exakt“, falls

$$P = \partial_x F \quad \text{und} \quad Q = \partial_y F \qquad \Longleftrightarrow \qquad P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \partial_x F\,\mathrm{d}x + \partial_y F\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}F = 0\ .$$

Die (notwendige) Bedingung hierfür lautet $\partial_y P = \partial_y\partial_x F = \partial_x\partial_y F = \partial_x Q$. In diesem Fall ist die Lösung $y(x)$ implizit bestimmt durch $F(x,y) = \text{konst.}$, und F findet man folgendermaßen:

$$F(x,y) = \int^x \mathrm{d}x'\,P(x',y) + \phi(y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y}(y) = Q(x,y) - \partial_y \int^x \mathrm{d}x'\,P(x',y) \quad \Longrightarrow \quad \phi(y)\ .$$

Erproben Sie diese Technik an den folgenden Beispielen. Prüfen Sie zunächst deren Exaktheit.

(a) $(12xy+3)\mathrm{d}x + 6x^2\mathrm{d}y = 0$ (b) $(2x\mathrm{e}^y - 1)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = 0$, jeweils $y(1) = 0$.

Aufgabe 60: Für ein kompressibles Gas mit Teilchenzahlerhaltung gilt die Kontinuitätsgleichung 4

$$0 = \dot{n} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} \qquad \text{mit} \quad \vec{j} = n\,\vec{v} \ , \qquad \text{wobei} \quad n = n(\vec{r},t) \quad \text{und} \quad \vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$$

die Teilchendichte und Geschwindigkeit am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t beschreiben.

(a) Bekanntlich sind Schallwellen Druck- bzw. Dichteschwankungen der Luft. Ausgehend vom Ursprung erzeugt ein kontinuierlicher Ton der Frequenz $\omega = k\,c$ die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r},t) = [kr\cos(kr{-}\omega t) - \sin(kr{-}\omega t)]\,r^{-2}\,\alpha\,\vec{e}_r \qquad \text{mit } \alpha = \text{konst.}\ .$$

Welche Dichteverteilung $n(\vec{r},t)$ hat die Kugelwelle?

(b) Wenn Autos über schief aufliegende Kanaldeckel fahren, pflanzt sich im anschließenden Kanal $(x > 0)$ das Klappern in den Rohren linear fort als Dichteschwankung

$$n(x,t) = n_0 + n_1\,f(x{-}ct) \qquad \text{mit} \quad f(z) = \alpha\,z\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\ .$$

Skizzieren Sie für eine feste Zeit t den Verlauf der Dichte $n(x)$. Welche Stromdichte $j(x,t)$ begleitet die Störung? Das Problem ist ein-dimensional.