7. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik II — Abgabe: Mo 18.05.09

Aufgabe 72: Die Ausbreitung eines Temperaturfeldes $T(x,t)$ in einem eindimensionalen Medium mit Temperaturleitfähigkeit κ wird beschrieben durch die Diffusionsgleichung (3)

$$\frac{1}{\kappa}\,\partial_t T(x,t) \;=\; \partial_x^2 T(x,t)\;.$$

Für eine Wand der Dicke L, deren Ränder wärmedicht abgeschlossen sind, möchten wir die zeitliche Entwicklung der Anfangs-Temperaturverteilung $T(x,0) = T_0\,\frac{x}{L}$ bestimmen.

(a) Da nur das Intervall $[0,L]$ von Interesse ist, kann $T(x,0)$ zu $T_0\,|\frac{x}{L}|$ erweitert und außerhalb $[-L,+L]$ periodisch fortgesetzt und dadurch in eine Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$T(x,0) \;=\; \tfrac{1}{2}T_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \qquad \text{mit} \qquad a_n = \begin{cases} -\frac{4\,T_0}{n^2\pi^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}\;.$$

Leiten Sie diese Reihendarstellung ab (siehe auch Aufgabe 70).

(b) Für $t > 0$ ist die Reihenentwicklung weiterhin gültig, bloß werden die Fourier-Koeffizienten zeitabhängig, d.h. $a_n = a_n(t)$. Berechnen Sie $a_n(t)$ aus der Forderung, dass zu jedem Zeitpunkt die Diffusionsgleichung gilt. Welches Temperaturprofil stellt sich für $t \to \infty$ ein?

Aufgabe 73: Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluss des Potenzials $V(x) = -\frac{1}{2}\lambda^2 x^2$ (Skizze!) auf der x-Achse. Zusätzlich wirke in dem Zeitraum $0 \le t \le 1$ eine konstante Kraft f auf das Teilchen ein. Damit nimmt die Bewegungsgleichung die folgende Form an: (6)

$$\ddot{x}(t) \;-\; \lambda^2\,x(t) \;=\; F(t) \qquad \text{mit} \qquad F(t) \;=\; \begin{cases} f & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\;.$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung an.

(b) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung soll konstruiert werden mit Hilfe einer Greensfunktion $G(t)$, definiert als Lösung von $\ddot{G} - \lambda^2 G = \delta(t)$. Welche Gleichung erhalten Sie für $\widetilde{G}(\omega)$ durch Fourier-Transformation der Differenzialgleichung für G? Führen Sie die Rücktransformation durch mit Hilfe von $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2+a^2} \;=\; \frac{\pi}{a}\,\mathrm{e}^{-a|x|}$. Eine spezielle Lösung erhalten Sie nun gemäß $x_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t'\,G(t-t')\,F(t')$. Achtung: Fallunterscheidung! Welche Randbedingungen zeichnen diese Lösung aus?

(c) Finden Sie die konkrete Lösung mit $x(0) = -x_0 < 0$ und $\dot{x}(0) = 0$, indem Sie diese Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung einarbeiten. Welchem Schicksal geht das Teilchen für $t \to \infty$ entgegen, und welche Kraft f ist mindestens aufzuwenden, um das Teilchen über den Berg zu stoßen?

Aufgabe 74: Eine positive Punktladung q wird in einem unendlich ausgedehnten Metall am Ursprung hinzugefügt: $\rho_p = q\,\delta(\vec{r})$. Dadurch verschieben sich die Elektronen des Metalls gegen die Atomrümpfe, so dass zusätzlich eine ortsabhängige Ladungsdichte ρ_e entsteht, die das Potenzial ϕ verändert: $-\triangle\phi = 4\pi(\rho_p+\rho_e)$. Die Ladungsdichte ρ_e stellt sich dabei ihrerseits so ein, dass sie proportional zum Potenzial ist: $4\pi\rho_e = -\lambda^2\phi$. Welche selbstkonsistente Gleichung ergibt sich für das Potenzial? Lösen Sie diese durch (dreidimensionale) Fourier-Transformation. Gehen Sie in dem resultierenden $\vec{k}$-Integral zu Kugelkoordinaten über, führen Sie die Winkel-Integrationen durch und verwenden Sie dann die Identität $\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{x\,\sin(bx)}{a^2+x^2} \;=\; \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(b)\,\mathrm{e}^{-|ab|}$. (3)

Zur Interpretation: Die zusätzliche Ladung kann man sich aus dem Unendlichen kommend denken.