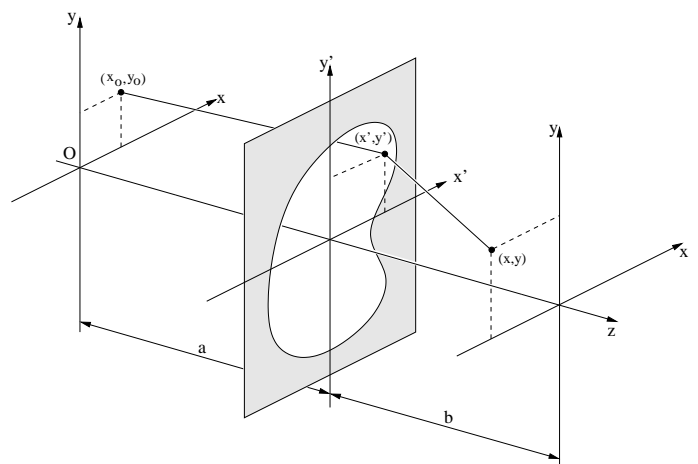


5

Aufgabe 78: Eine Punktlichtquelle bei $(x_0, y_0, 0)$ sende monochromatisches Licht der Wellenlänge λ aus. Dieses trifft in der Ebene $z = a$ auf eine Linse der Brennweite f und wird (idealisiert) in der Bildebene $z = a + b$ wieder zu einem Lichtpunkt gebündelt, wobei die Abbildungsgleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt. Das Lichtfeld in der Bildebene setzt sich nach dem Huygensschen Prinzip aus vielen ebenen Wellen zusammen, die von den Linsenpunkten ausgehen, so dass die Helligkeit $u(x, y)$ in der Bildebene sich formal auffassen lässt als Fourier-Integral

$$u(x, y) = \iint \frac{dx' dy'}{(2\pi)^2} \exp \left\{ - \left(\frac{x_0}{a} + \frac{x}{b} \right) \frac{2\pi i x'}{\lambda} - \left(\frac{y_0}{a} + \frac{y}{b} \right) \frac{2\pi i y'}{\lambda} \right\} p(x', y') .$$

Hierbei legt die so genannte Pupillenfunktion $p(x', y')$ fest, wo Licht durchgelassen wird und wo nicht, z.B. durch eine Blende ($p = 0$ oder 1).



- (a) Zeigen Sie, dass eine unendlich ausgedehnte Linse ($p \equiv 1$) wieder zu einem Lichtpunkt (δ -Funktion, wo lokalisiert?) führt.
- (b) Wir vereinfachen nun zu $x_0 = y_0 = 0$. Die Kontur jedes Objektes in der Linsenebene ist als Teil der Pupillenfunktion zu sehen und wird – Fourier-transformiert – in der Bildebene direkt sichtbar. Aus quadratischen Dias der Kantenlänge d wird ein Poster zusammengeklebt und in die Linsenebene verbracht. Berechnen und skizzieren Sie die Bildfunktion u der Klebekanten $p(x', y') = \sum_n \delta(x' - nd) + \sum_n \delta(y' - nd)$.

$$p(x', y') = \sum_n \delta(x' - nd) + \sum_n \delta(y' - nd) .$$

Erinnerung: $\frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n x / L} = \delta_L(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x - mL)$ und $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$.

- (c) Die Fourier-Transformierte des Posters kann mit einer weiteren Linse aufgefangen und in das ursprüngliche Bild zurück verwandelt werden. Durch welche Maßnahmen lassen sich gezielt Strukturen aus dem Bild entfernen, wie etwa die unerwünschten Klebekanten?

2

Aufgabe 79: Der Wellenausbreitungskern $u_\delta(t, \vec{r})$ wurde eingeführt als Lösung der *homogenen* Wellengleichung (in beliebiger Raumdimension) mit den Anfangsdaten

$$u_\delta(0, \vec{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{u}_\delta(0, \vec{r}) = \delta(\vec{r}) .$$

Beweisen Sie, dass $G_R(t, \vec{r}) := c^2 \Theta(t) u_\delta(t, \vec{r})$ die *inhomogene* Wellengleichung mit der Inhomogenität $h(t, \vec{r}) = \delta(t) \delta(\vec{r})$ erfüllt, also tatsächlich die retardierte Greensfunktion ist.

5

Aufgabe 80: Lösen Sie die zweidimensionale homogene Wellengleichung $\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$ für die Funktion $u(t, x, y)$ auf dem Quadrat $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ mit

Neumann-Randbedingungen $\partial_x u(t, 0, y) = \partial_x u(t, \pi, y) = \partial_y u(t, x, 0) = \partial_y u(t, x, \pi) = 0$
 und Anfangsbedingungen $u(0, x, y) = 4(\cos x \cos y + 1)^2$ und $\partial_t u(0, x, y) = 0$.

Tipp: Separationsansatz. Randbedingungen \rightarrow Fouriermoden. Welche Moden enthält die Anfangsbedingung?