11. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik II Abgabe: Mo 22.06.09

Aufgabe 84: Die Bogenlänge L einer ebenen Kurve C in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ mit festen Endpunkten $\vec{r}_i \doteq (r_i \cos\varphi_i, r_i \sin\varphi_i)$ für $i = 1, 2$ berechnet sich bekanntlich gemäß (3)

$$L[C] \;=\; \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{d}\varphi\, \sqrt{r'^2 + r^2} \qquad \text{mit} \quad r' = \tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \quad \text{und} \quad r(\varphi_i) = r_i\ .$$

Minimierung von $L[C]$ sollte als kürzeste Verbindung eine Gerade (in Polarkoordinaten) geben.

(a) Ersetzen Sie $r(\varphi) \to r(\varphi) + \eta(\varphi)$ mit $\eta(\varphi_i) = 0$ und führen Sie die Variation von $L[C]$ aus, indem Sie den Integranden bis zur ersten Ordnung in η und η' entwickeln. Integrieren Sie den Term mit η' partiell. Die Forderung nach einer verschwindenden Variation bedeutet, dass der Koeffizient von η identisch verschwindet. Zeigen Sie, dass dies die Differenzialgleichung $rr'' - 2r'^2 - r^2 = 0$ für das Minimum $r = \overline{r}$ nach sich zieht.

(b) Weisen Sie nach, dass vermöge der Substitution $r(\varphi) = 1/u(\varphi)$ obige Differenzialgleichung in $u'' + u = 0$ übergeht. Lösen Sie diese für $r(\varphi_1{=}0) = r_0$ und $r(\varphi_2{=}\frac{\pi}{2}) = \infty$, und geben Sie die Minimumsfunktion $\overline{r}(\varphi)$ an. Wo liegt die kürzeste Kurve $\overline{C}$?

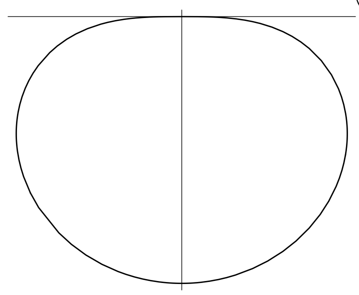
Aufgabe 85: Eine Seifenhaut ist zwischen zwei festen kreisförmigen Drähten eingespannt. Die Oberflächenspannung führt zu einer Rotationsfläche (um die x-Achse) mit minimalem Flächeninhalt. Beschreiben Sie die Flächenkontur durch eine Funktion $y(x)$ mit $x \in [x_1, x_2]$. (4)

(a) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt gegeben ist durch $A[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\ y(x)\, \sqrt{1 + y'(x)^2}$.

(b) Die Minimierung $\delta A = 0$ führt zur Euler-Lagrange-Gleichung für den Integranden $L(y, y')$ von A. Bestimmen Sie diese Differenzialgleichung für $y(x)$.

(c) Verifizieren Sie, dass Ihre Differenzialgleichung integriert werden kann zu $L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = c$ mit $c =$ konstant, und dass letztere gelöst wird durch die Kettenlinie $y(x) = c \cosh \frac{x-b}{c}$.

Aufgabe 86: Ein Asteroid mit homogener Massenverteilung ρ und fester Gesamtmasse μ wird von einer fortgeschrittenen Zivilisation so geformt, dass an einem Punkt der Oberfläche die Schwerkraft möglichst groß wird. Legen Sie den Oberflächenpunkt in den Ursprung. Überzeugen Sie sich durch ein Symmetrieargument davon, dass die Oberfläche rotationssymmetrisch um die z-Achse ist. Es genügt also, einen Schnitt mit der xz-Ebene zu betrachten. Setzen Sie die Randkurve als $R(\vartheta)$ an, wobei ϑ den Winkel gegen die negative z-Achse bezeichnet. (5)



(a) Durch welches Integral $F[R]$ wird die im Ursprung wirkende z-Komponente der Gravitationskraft beschrieben? Mit welchem Integral $M[R]$ berechnet sich die Gesamtmasse μ? Führen Sie die Integrationen über φ und r aus. Berechnen Sie $F[R]$ für den Fall einer Kugel K mit dem Radius $r_{\mathrm{K}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu}{4\pi\rho}}$, also für $R(\vartheta) = R_{\mathrm{K}}(\vartheta) \equiv 2\, r_{\mathrm{K}} \cos\vartheta$.

(b) Gesucht ist aber eine Randkurve $\overline{R}(\vartheta)$, die das Funktional $F[R]$ maximiert, wobei nur solche Kurven zur Variation zugelassen sind, die auf die Gesamtmasse $M[R] = \mu$ führen. Beide Bedingungen lassen sich gleichzeitig erfüllen, indem man nach einem Extremum von $U[R] = F[R] - \lambda(M[R]{-}\mu)$ sucht, wobei λ eine (noch offene) reelle Konstante darstellt. Welche Gleichung ergibt sich für $\overline{R}(\vartheta)$ aus der Forderung nach einer verschwindenden Variation $\delta U = 0$? Die Lösung $\overline{R}_\lambda(\vartheta)$ enthält noch die Unbekannte λ. Bestimmen Sie diese, indem Sie mit dem erhaltenen $\overline{R}_\lambda(\vartheta)$ die Nebenbedingung $M[\overline{R}_\lambda] = \mu$ auswerten.

(c) Wie hoch ist der Wert der Oberflächen-Gravitation $F[\overline{R}]$? Vergleichen Sie mit $F[R_{\mathrm{K}}]$.
Ergebnis: $F[\overline{R}] \approx 1.026\, F[R_{\mathrm{K}}]$.