Parsevalsches Theorem

Der Spannungsabfall $U(t)$ am Widerstand R=1 eines sich entladenden Kondensators sei

$$U(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ \mathrm{e}^{-\gamma t} & \text{für } t>0 \end{cases} ,$$

wobei $\frac{1}{\gamma}>0$ die Zeitkonstante ist. Bestimme die Fourier-Transformierte $\widetilde{U}(\omega)$ entsprechend dem Zusammenhang

$$U(t) \;=\; \int \tfrac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \widetilde{U}(\omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widetilde{U}(\omega) \;=\; \int \mathrm{d}t\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, U(t) \;.$$

Die momentan am Widerstand in Wärme umgesetzte Leistung ist $|U(t)|^2$, die über die gesamte Zeit umgewandelte Wärmemenge damit

$$Q \;=\; \int \mathrm{d}t\; |U(t)|^2 \;=\; \int \tfrac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\; |\widetilde{U}(\omega)|^2 \;,$$

wobei die letzte Gleichheit das Parsevalschen Theorem ist. Man kann also $|\widetilde{U}(\omega)|^2$ als im Frequenzintervall $[\omega, \omega{+}\mathrm{d}\omega]$ umgesetzte Wärmemenge interpretieren und für Q anstatt über die Zeit über alle Frequenzen integrieren. Verifizieren Sie das Parsevalsche Theorem explizit an diesem Beispiel. Alle Integrale laufen von $-\infty$ bis $+\infty$.

Lösung einer Differenzialgleichung durch Fourier-Transformation

Eine Spannungsquelle $U(t)$ lädt über einen Widerstand R einen Kondensator der Kapazität C auf. Die Ladung $q(t)$ auf dem Kondensator genügt damit der Differenzialgleichung

$$\dot{q}(t) \;+\; \tfrac{1}{RC}\, q(t) \;=\; \tfrac{1}{R}\, U(t) \;.$$

Die Spannungsquelle erzeuge die Spannung $U(t) \;=\; U_0\, \Theta(-t)\, \mathrm{e}^{\Omega t}$ mit $\Omega > 0$. Lösen Sie die Differenzialgleichung mittels Fourier-Transformation in den folgenden Schritten.

(a) Welche Gleichung ergibt sich für $\widetilde{q}(\omega)$?

(b) Berechnen Sie eine spezielle Lösung $q_s(t)$ der Differenzialgleichung, indem Sie die Rücktransformation durchführen mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\mathrm{i}}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega \mp \mathrm{i}\alpha} \;=\; \pm\, \mathrm{e}^{\mp\alpha t}\, \Theta(\pm t) \qquad \text{mit} \quad \alpha > 0 \;.$$

(c) Die Lösung der Differenzialgleichung ist die Summe der erhaltenen speziellen Lösung $q_s(t)$ und der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung. Bestimmen Sie die konkrete Lösung zu der Randbedingung $q(-\infty) = 0$.