## Wellenausbreitungskern in drei Dimensionen

Der Wellenausbreitungskern $u_\delta(t,\vec{r})$ wurde eingeführt als Lösung der homogenen Wellengleichung mit den Anfangsdaten $u_\delta(0,\vec{r}) = 0$ und $\dot{u}_\delta(0,\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ . Es ist leicht zu sehen, dass

$$u_\delta(t,\vec{r}) \;=\; \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \, \frac{1}{2\mathrm{i}\,\omega(\vec{k})} \, (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\vec{k})t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\vec{k})t}) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad \text{mit} \quad \omega(\vec{k}) = c\,|\vec{k}|$$

in $D$ Raumdimensionen. Führen Sie das Fourier-Integral im Fall von $d$=3 aus, indem Sie

(a) Kugelkoordinaten $(k,\vartheta,\varphi)$ im $\vec{k}$-Raum einführen
(b) dort die $z$-Achse in $\vec{r}$-Richtung legen, so dass $\vec{k}\cdot\vec{r} = k\,r\,\cos\vartheta$
(c) die $\varphi$- und $\vartheta$-Integrationen ausführen; mit $\cos\vartheta =: z \;\rightarrow\; \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta \ldots = \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}z \ldots$
(d) mit Symmetrie unter $k \leftrightarrow -k$ das $k$-Intervall verdoppeln: $\int_0^\infty \mathrm{d}k \ldots \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \ldots$
(e) die Formeln $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\,x} = 2\pi\,\delta(x)$ und $\delta(a\,x) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x)$ nutzen.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

## Separation in Polarkoordinaten

Separieren Sie die zweidimensionale Wellengleichung in Polarkoordinaten

$$(\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2 \;-\; \tfrac{1}{r}\partial_r r \partial_r \;-\; \tfrac{1}{r^2}\partial_\varphi^2)\, u(t,r,\varphi) \;=\; 0\;.$$

Machen Sie hierzu den Ansatz $u(t,r,\varphi) = T(t)\,v(r,\varphi)$. Dies sollte Sie zur Helmholtz-Gleichung

$$(\tfrac{1}{r}\partial_r r \partial_r \;+\; \tfrac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 \;+\; k^2)\; v(r,\varphi) \;=\; 0 \qquad \text{sowie zu} \qquad \ddot{T} \;+\; c^2 k^2\, T \;=\; 0$$

mit einer beliebigen reellen Konstante $k$ bringen.

Machen Sie nun einen erneuten Separationsansatz $v(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ und geben Sie die Lösung für $\Phi$ an. Welche (gewöhnliche) Differenzialgleichung erhalten Sie für $R$?

Im Spezialfall $k^2$=0 (d.h. $\dot{u}$=0, $u$=$v$, $\triangle v$=0) führt ein Potenzansatz $R = r^\lambda$ zur Lösung. Geben Sie die allgemeine Lösung für $v$ an und drücken sie durch die komplexe Variable $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ aus.