RdP 1 — Sonderübung 1 — WS 08/09

(1) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benutzung der Index-Schreibweise:

a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$

b) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$

c) $\vec{a}\times[(\vec{b}\circ\vec{b})\vec{c}]$

d) $Sp\,(A\cdot B)$ für $A_{ij}=\varepsilon_{ijk}a_k$, $B_{ij}=\varepsilon_{ijk}b_k$

(2) Die Determinante einer 3x3-Matrix $A=(A_{ij})$ ist definiert über $\det A = \varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$. Bestimmen Sie $\det A$ für

a) $A=\begin{bmatrix} -\underline{u}- \\ -\underline{v}- \\ -\underline{w}- \end{bmatrix}$ b) $A=\vec{r}\circ\vec{r}$ c) $A=I=m(\vec{r}^{\,2}\mathbb{1}-\vec{r}\circ\vec{r})$

(3) Für einen Vektor $\vec{\omega}$ sei ein Tensor $\hat{\Omega}$ definiert über $\vec{a}\cdot\hat{\Omega}\vec{b}=\vec{a}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{b})$ für beliebige $\vec{a},\vec{b}$. Geben Sie die Komponenten von $\hat{\Omega}$ an.

(4) Projektoren P sind definiert über die Eigenschaft $P^2=P$. Beweisen Sie, daß $Q=\mathbb{1}-P$ ebenfalls ein Projektor ist. Welche Eigenwerte kann P haben, welche $\Gamma=\mathbb{1}-2P$? Was folgt daraus für Γ^2? Berechnen Sie auch Γ^2 direkt.

(5) Aus einem Vektor $\vec{a}$ läßt sich eine Dyade $D_a=\vec{a}\circ\vec{a}$ basteln. Bestimmen Sie a) $Sp\,D_a$ b) D_a^2 c) D_aD_b d) $D_aD_bD_a$.
e) Welche Wirkung auf Vektoren hat $P_a=\vec{e}_a\circ\vec{e}_a=\frac{1}{a^2}D_a$? f) Welche $P_r=\vec{e}_r\circ\vec{e}_r$?

(6) Der Trägheitstensor einer Punktmasse bzgl. des Ursprungs ist definiert als $I_{ij}=m(\vec{r}^{\,2}\delta_{ij}-x_ix_j)$. Berechnen Sie in Index-Schreibweise:
a) $Sp\,I$ b) I^2 c) $\vec{a}\cdot\hat{I}\vec{a}$ d) $P_\perp=\frac{I}{m\vec{r}^{\,2}}$ Worauf projiziert $P_\perp$?
Erklären Sie das Resultat b) mit Hilfe von d).

(7) Jede $n\times n$ Matrix M läßt sich eindeutig zerlegen als $M=M_A+M_S+M_{\mathbb{1}}$, wobei $M_A^T=-M_A$, $M_S^T=M_S$, $Sp\,M_S=0$, $M_{\mathbb{1}}=\lambda\cdot\mathbb{1}$.
Drücken Sie $M_A, M_S, M_{\mathbb{1}}$ durch M aus!