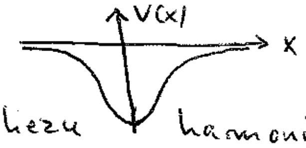
RdP 1 Sonderübung 4 WS 08/09

① Ein Teilchen (m) bewegt sich in einer eindimensionalen Potenzialmulde
$V(x) = \kappa a^2 f(x/a)$ mit $f(s) = -\frac{\ln(1+\operatorname{ch} s)}{\operatorname{ch} s}$.



Bei kleiner Amplitude ($|x| \ll a$) wird die Schwingung nahezu harmonisch.

a) Wir entwickeln f um $s=0$ bis einschließlich $\mathcal{O}(s^2)$ und geben durch Vergleich mit dem Federpotenzial die Kreisfrequenz ω der Schwingung an. Wieso muß man und wie kann man sich hiebei vergewissern, dass $\ln 2 > 1/2$?

b) Alternativ kann man zunächst die Kraft $F = -\partial_x V$ bilden, diese sodann (bis wohin?) entwickeln, die Bewegungsgleichung in harmonischer Näherung aufschreiben und aus dieser auf ω schließen.

② Auf einem winterlichen Parkplatz erlebt man bei Vollbremsung mit Geschwindigkeit $\vec{v} \doteq v_0(u,w)$ die Reibungskraft

$$\vec{R} \doteq -m\alpha v_0 \left(10 \operatorname{sh}\frac{u}{2} + \frac{2w}{1+2uw}, \frac{2u}{1+2uw} + \frac{2w}{\sqrt{1+w^2}}\right) =: -m\alpha v_0 \left(\partial_u V, \partial_w V\right).$$

Welches „Potenzial" $V(u,w)$ liegt vor? Man entwickle V bis zu quadratischen Termen in u und v und bringe es in die Form

$V = \text{konst.} + \frac{1}{2}(u,w)\, H \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$, mit 2×2-Matrix $H = ?$

③ Durch masselose Drähte sind drei Massenpunkte starr miteinander verbunden: $M_1 = m$, $M_2 = \frac{4}{3}M$, $M_3 = 6M$ bei $\vec{r}_1 \doteq (1,-1,0)a$, $\vec{r}_2 \doteq (-\frac{3}{4},0,0)a$, $\vec{r}_3 \doteq (0,\frac{1}{6},0)a$.
Geben Sie das Gravitationspotenzial $V(x,y,z) = -\gamma m \sum_i \frac{M_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$ explizit an.
Welche Kraft $\vec{F}(x)$ wirkt auf eine Testmasse (m) auf der x-Achse?
Stimmt es, dass $\vec{F}(x) = -(\vec{\nabla} V)|_{y=z=0} = -\vec{\nabla}(V|_{y=z=0})$? Welche Bedeutung hat $V(x, y=0, z=0)$? Plot! Sind Schwingungen möglich?
Wie schnell muss m den Ursprung durchlaufen, um nach ∞ zu entkommen?

[siehe H 32]

④ Welches Gravitationspotenzial $V(x,y,z)$ produziert ein dünner ellipsenförmiger „Saturn-Ring" (mit konstanter Masse pro Länge σ_0 und Halbachsen a und b) in der xy-Ebene für eine Probemasse m? a) Berechnen Sie das Integral für den Spezialfall $a=b=R$ (Kreisring) und $x=y=0$ (Probemasse auf z-Achse gezwungen). b) Gegen welchen Ausdruck strebt das Integral für $|\vec{r}| \gg a,b$ (Probemasse weit außerhalb des Rings)?