RdP 1 Sonderübung 6 WS 08/09

① **Logistische Differenzialgleichung.** Eine Population entwickelt sich gemäß $\dot{P}(t) = \alpha P(t)\,(\beta - P(t))$ mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$.
Der Faktor $\beta - P(t)$ hemmt das Wachstum großer Populationen.

a) Lösen Sie die ODE auf zweierlei Weisen: durch Trennung der Variablen und vermittels der Substitution $P(t) = 1/y(t)$.

b) Welchen Grenzwert erreicht $P(t)$ für $t \to \infty$? Auch direkt aus ODE?

c) Starten Sie mit einer kleinen Population $0 < P(0) \ll \beta$. Bei welcher charakteristischen Population P_{cr} verlangsamt sich das Wachstum? Skizze $P(t)$!

② **Eulersche Differenzialgleichung.** Welche Methode aus der Vorlesung greift im Falle der folgenden Differenzialgleichung? Lösen Sie diese auf dem Intervall $x \in (0, \infty)$:

$$x y''' + 2y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0.$$

③ **Erzwungene Schwingungen.** Der getriebene harmonische Oszillator genügt der Differenzialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t) \longleftarrow$ (äußere Kraft).

a) Machen Sie den Ansatz $z(t) = \dot{x}(t) + i\omega x(t) \in \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ ODE für $z(t)$?

b) Lösen Sie zunächst die homogene ODE, suchen Sie dann die allgemeine Lösung vermöge der Variation der Konstanten.

c) Drücken Sie die Gesamtenergie $E(t)$ durch z aus.

d) Bei $t = -\infty$ sei der Oszillator in Ruhe. Wieviel E wird bis $t = \infty$ zugeführt?

④ **Bank.** Mit $\dot{N} = \alpha N + \beta\sqrt{N}$ will eine Bank Kunden ohne Kapital gewinnen: $N(0) = 0$. Welche Potenz γ im Ansatz $N = y^\gamma$ führt zu einer <u>linearen</u> ODE? Zu Beginn ist $N(t) = c \cdot t^\lambda + \mathcal{O}(t^\mu)$ mit $c, \lambda, \mu = ?$ $N(t \to \infty) \approx ?$
Welchen Gewinn $G = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 (e^{\alpha t} - 1) - N(t)$ macht die Bank? Skizze!

⑤ **Zerfallskette.** Eine radioaktives Nuklid A zerfällt mit der Rate γ_A, d.h. die Teilchenzahl $N_A(t)$ entwickelt sich gemäß $\dot{N}_A = -\gamma_A N_A$, wobei $N_A(0) = N_0$. Das Zerfallsprodukt ist ein radioaktives Nuklid B, dessen Teilchenzahl also der Gleichung $\dot{N}_B = -\dot{N}_A - \gamma_B N_B$ genügt, wobei $N_B(0) = 0$. [A: „Mutter", B: „Tochter"]

a) Bestimmen Sie $N_A(t)$. b) Lösen Sie die ODE für $N_B(t)$ mit dem Ergebnis aus (a) und skizzieren Sie $N_B(t)$. Wie verhält sich $N_B(t)$ für kleine/große Zeiten?