Rechenmethoden der Physik II

Sonderübungen, Zettel 01 **Vorrechnung der Lösungen ab dem 11.08.2009**

[SÜ1]

Wir betrachten die folgende zeitabhängigen Vektorfelder:

$$\vec{B}(x) = \vec{B}_0 \ \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t\right),$$
$$\vec{E}(x) = \vec{E}_0 \ \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t\right).$$

Da es sich um eine elektromagnetische Welle handeln soll, müssen die Maxwellgleichungen erfüllt sein. Nehmen Sie an, dass sich die beiden Felder im Vakuum befinden und leiten Sie aus den entsprechenden Maxwellgleichungen Einschränkungen für $\vec{B}_0,\ \vec{E}_0,\ \vec{k}$ und ω her. Was folgt für die Beträge von $\vec{B}(x)$ und $\vec{E}(x)$?

[SÜ2]

Gegeben seien das folgende Skalarpotential ϕ sowie das Vektorpotential $\vec{A}$:

$$\phi \ = \ x^2 + y^2 t + 3\delta t^2 + 2\gamma z t\,, \qquad (1)$$

$$\vec{A} \ \doteq \ -\begin{pmatrix} z^3 t + xyzt^2 + 2\alpha x + \alpha\beta y \\ y^2 x + z^2 x t + \alpha\beta x \\ \gamma t^2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Für diese Aufgabe sei das Einheitensystem so gewählt, dass die Lichtgeschwindigkeit gerade den Wert 1 annimmt ($c = 1$).

1. Bestimmen Sie die elektrische und magnetische Feldstärke $\vec{E}$ und $\vec{B}$.
2. Leiten Sie mit Hilfe der Maxwellgleichungen die entsprechenden Ausdrücke für ρ und $\vec{j}$ her und überprüfen Sie die Kontinuitätsgleichung.
3. Setzen Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Feld ebenfalls in die homogenen Maxwellgleichungen ein und zeigen Sie ihre Gültigkeit.
4. Bestimmen Sie die Lorentzkraft zur Zeit $t = 0$.
5. Die Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$, die in Gleichung (1) und (2) auftauchten, verschwanden bei der Berechnung der Feldstärken. Es gibt also eine so genannte Eichtransformation

   $$\phi \mapsto \phi - \partial_t \chi, \quad \vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla}\chi\,,$$

   die diese Konstanten entfernt. Bestimmen sie ein solches χ.

Bitte wenden

[SÜ3]

Skalarfelder sind Abbildungen von einem beispielsweise dreidimensionalen Raum in die reellen Zahlen, $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Sie ordnen demnach jedem Raumpunkt einen bestimmten Wert zu. Man kann also den Luftdruck als ein solches skalares Feld darstellen. Betrachten Sie die folgende Druckverteilung eines Tiefdruckgebiets zu einem festen Zeitpunkt:

$$\phi(\vec{r}) = (4x^2 + 9y^2)\, \mathrm{e}^{-z}, \quad \text{für} \quad \vec{r} \doteq (x, y, z)\,.$$

1. Zeichnen Sie die Schnittkurven der Flächen gleichen Drucks (Äquipotentialflächen) mit der xy-Ebene.
2. Entstehender Wind resultiert aus Druckunterschieden in der Verteilungsfunktion und weht entgegen der Richtung des steilsten Anstiegs. In welche Richtung $\vec{w}$ weht der Wind im Punkt $\vec{r}_0 \doteq (2, 1, 0)$?
3. Parametrisieren Sie diejenige Schnittkurve aus Teil 1, welche durch $\vec{r}_0$ geht, und zeigen Sie explizit, dass die Windrichtung $\vec{w}$ in diesem Punkt senkrecht zum Tangentialvektor der Schnittkurve steht.