Rechenmethoden der Physik II

Sonderübungen, Zettel 02 Vorrechnung der Lösungen ab dem 18.08.2008

[SÜ4]

Zeigen Sie, dass für beliebige Vektorfelder $\vec{v}$, $\vec{w}$ die folgende Identität Gültigkeit hat:

$$\int_V \mathrm{d}^3 r\; \vec{w} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) = \int_V \mathrm{d}^3 r\; \vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{w} \right) + \oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\,.$$

Hinweis: Index-Notation ist hier hilfreich.

[SÜ5]

Es sei ein beliebiges Volumen V mit Rand ∂V. Zeigen Sie, dass dann das Integral des vektoriellen Flächenelements $\mathrm{d}\vec{f}$ stets verschwindet, also

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} = 0\,.$$

Hinweis: Bilden Sie das Skalarprodukt mit einem beliebigen konstanten Vektor $\vec{a}$.

[SÜ6]

Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) \doteq \begin{pmatrix} x^3 \sin z + y^4 x^2 \\ x \ \arctan z^2 - \frac{2}{5} x y^5 \\ 3x^2 \cos z \end{pmatrix}.$$

Die Oberfläche eines halben Ellipsoiden ist gegeben durch

$$F = \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,\ z \geq 0 \right\}.$$

Setzen Sie $a = b = 1$ und führen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß das Flussintegral

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{v}$$

auf ein Integral über die Kreisfläche $\{x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$ zurück und werten Sie dieses aus. Auf welche Weise darf das Vektorfeld $\vec{v}$ geändert werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert? Welche Deformationen der Oberfläche des halben Ellipsoiden darf man durchführen, ebenfalls ohne den Wert des Integrals zu verändern?

Bitte wenden

[SÜ7]

Bestimmen Sie für das halbe Ellipsoid aus [SÜ6] das infinitesimale Flächenelement $\mathrm{d}\vec{f}$ (jetzt $a \neq 1 \neq b$). Verwenden Sie hierzu die Parametrisierung

$$u = x = a\ r \cos\varphi,\ \ v = y = b\ r \sin\varphi\,,$$

so dass $z = z(r,\varphi)$, und gehen Sie nach dem Rezept aus dem Wintersemester vor. Setzen Sie schließlich $a = b = c = R$ (Halbkugel) und werten Sie das Oberflächenintegral aus.

[SÜ8]

Bestimmen Sie das Integral

$$\oint_S \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v}$$

für einen Kreis S mit Radius R in der xy-Ebene und das Vektorfeld

$$\vec{v} \doteq \begin{pmatrix} -y\ (x^2+y^2) \\ x\ (x^2+y^2) \\ xyz \end{pmatrix}$$

einmal direkt und ein zweites Mal mit Hilfe des Stokesschen Satzes.