RECHNEN MIT VEKTOREN

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind einfache Rechnungen mit Vektoren. Sie sollen helfen, sich mit dem Konzept von Vektoren vertraut zu machen.

[P1] *Höhenbestimmung*

Betrachten Sie folgende Aussage des Leuchtturmwächters: "Von diesem Stein bis zur Spitze des Leuchtturms sind es genau 130 m. Der Strand liegt 40 m nach Norden, und von dort aus 120 m nach Osten steht der Turm."

Geben Sie Ortsvektoren zu allen in dieser Aussage angegebenen Punkten an, sowie den Einheitsvektor, der von der Turmspitze auf den Stein zeigt. Wie hoch ist der Turm?

[P2] *Fingerübungen zu Vektoren*

(a) Sind die folgenden drei Vektoren linear unabhängig?

$$1.)\quad \vec{a} \doteq \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{b} \doteq \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{c} \doteq \begin{pmatrix}-10\\-4\\2\end{pmatrix};\qquad 2.)\quad \vec{a} \doteq \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{b} \doteq \begin{pmatrix}-15\\-9\\6\end{pmatrix},\ \vec{c} \doteq \begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix}.$$

(b) Wie lauten die Komponenten des Vektors $\vec{a} \doteq \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ bezüglich einer neuen Basis, gegeben als $\vec{f}_1 \doteq \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 \doteq \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$?

(c) Zeigen Sie, dass zwei Vektoren orthogonal sein müssen, wenn ihre Summe und Differenz den gleichen Betrag haben.

(d) Beweisen Sie den Satz des Thales.

(e) Leiten Sie die Dreiecks-Ungleichung aus der Schwarzschen Ungleichung ab:

$$-a\,b \le \vec{a}\cdot\vec{b} \le a\,b \qquad \Longrightarrow \qquad |a-b| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le a+b\,.$$

(f) Beweisen Sie den Sinussatz für ein ebenes Dreieck:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

[P3] *Spinne im Wind*

An einem Ast hängt eine Spinne mit der Masse m. An ihr zerrt der Wind mit einer Kraft $\vec{F}$. Die Windrichtung wurde durch Pollen bestimmt, von denen welche erst am Ort $\vec{r}_1 \doteq \begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}$ und dann am Ort $\vec{r}_2 \doteq \begin{pmatrix}-10\\4\\4\end{pmatrix}$ gesichtet wurden (die z-Achse zeige senkrecht nach oben). Berechnen Sie die Auslenkung φ der Spinne als Funktion von $F/(mg)$, mit $F = |\vec{F}|$. Testen Sie Ihr Ergebnis in den Spezialfällen $F = 0$ und $F \to \infty$.