

## DREHUNGEN UND MATRIZEN

Mit diesen Aufgaben lernen wir Matrizen und insbesondere Drehungen kennen. Wie in der Vorlesung erklärt, unterscheiden wir ab jetzt zwischen einem abstrakten Vektor  $\vec{a}$  und seiner Komponentendarstellung  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ , die von der Wahl der Basis abhängt. Matrizen wenden wir auf Komponenten  $\underline{a}$  durch Multiplikation "Zeile mal Spalte" an, so dass  $\underline{a}' = M\underline{a}$ .

**[P18]** Matrixgruppe

Wir wollen hier ein erstes Beispiel einer Matrixgruppe studieren: invertierbare Matrizen bilden unter Matrixmultiplikation in natürlicher Weise eine Gruppe.

- (a) Multiplizieren Sie Matrizen von der Form

$$r \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass das Ergebnis wieder von dieser Form ist.

- (b) Für welches  $r$  und welches  $\varphi$  sind die Quadrate solcher Matrizen gleich

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ?$$

- (c) Was passiert mit einer Basis  $\vec{e}_i$ , wenn man auf sie Matrizen von der Form wie in (a) anwendet? Zur Erinnerung: Matrizen  $M$  wirken auf Basisvektoren  $\vec{e}_i$  mittels  $\vec{e}_i' = M_{ik}\vec{e}_k$ .

**[P19]** Drehungen

Untersuchen Sie eine Matrix  $D$ , die die Standardbasis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  eines dreidimensionalen Raumes zyklisch vertauscht.

- (a) Gegeben seien Komponenten  $\underline{a}$ . Wie schreiben sich dann die Komponenten  $\underline{a}'$  als Produkt dieser Matrix  $D$  mit den Komponenten  $\underline{a}$ ?
- (b) Zeigen Sie, dass  $D$  eine Drehung ist, also Längen unverändert lässt.
- (c) Bestimmen Sie Komponenten  $\underline{n}$  mit  $|\underline{n}| = 1$ , die von  $D$  nicht geändert werden,  $D\underline{n} = \underline{n}$ . Dann stellt  $\vec{n} = n_i\vec{e}_i$  die Drehachse dar.
- (d) Finden Sie Komponenten  $\underline{b}$ , so dass  $\underline{b} \perp \underline{n}$  und  $|\underline{b}| = 1$  ist. Geben Sie die transformierten Komponenten  $\underline{b}' = D\underline{b}$  an. Berechnen Sie abschließend mit dem Skalarprodukt  $\underline{b}' \cdot \underline{b}$  den Drehwinkel.

**ANKÜNDIGUNG: Die jDPG Hannover präsentiert am 10.12.2013 das**

**"DUELL DER PHYSIKER — Das etwas andere Weihnachtsquiz".**

**Professor Haug und Professor Lechtenfeld werden sich um 18 Uhr c.t. im großen Physikhörsaal mit ihren Teams begegnen.**