MEHR INTEGRALE

Integrieren kann man wirklich nicht genug üben. Hier beschäftigen wir uns auch mit Integralen, in denen vektorwertige Größen auftreten.

[P27] *Der Tag, an dem die Erde stillstand*
Der Filmklassiker von 1951 mit obigem Titel und seine weniger gute Neuverfilmung aus dem Jahre 2008 bringen den Aufgabensteller auf folgende perfide Idee: Eine uns technisch sehr weit überlegene Zivilisation ist mit unserem Betragen dermaßen unzufrieden, dass sie kurzerhand die Erde zum Stillstand bringt. Gemeint ist, dass unsere Erde aufhört, sich um die Sonne zu drehen. Wie viele Tage bleiben uns noch bis zum Untergang in die Sonne? Anfangsbedingungen also: $z(0) = a$ und $\dot{z}(0) = 0$ mit den Zahlwerten

- $a \approx 1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$,
- $M_{\text{Sonne}} \approx 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$,
- $\gamma \approx 6.7 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2\mathrm{kg}}$.

[P28] *Wegintegral*
Ein kreisförmiger Draht $\mathcal{C}$ mit Radius R und Zentrum im Ursprung ist einem elektrischen Wirbelfeld $\vec{E}(\vec{r}) \doteq \alpha(-y, x)$ ausgesetzt (dies ist ein zwei-dimensionales Problem). Berechnen Sie die Ringspannung $U = \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ entlang $\mathcal{C}$ wie folgt.

(a) Skizzieren Sie den Draht und das elektrische Feld in der Ebene.

(b) Parametrisieren Sie die Kurve $\mathcal{C}$ als $\vec{r}(t) \doteq ?$ und geben Sie $\dot{\vec{r}}(t)$ an.

(c) Legen Sie die Randwerte fest: $\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_1) \doteq R(1, 0)$.

(d) Schreiben Sie U als ein Integral über die Parametrisierung t, also $U = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \cdot \vec{E}(\vec{r}(t))$, und berechnen Sie es.

(e) Nutzen Sie die Kenntnis $\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{r}$, um die Rechnung abzukürzen.

(f) Was ergibt sich analog für das Integral $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{E}(\vec{r})$?