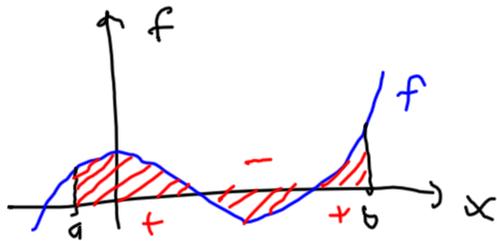


VI. Integrale

VI.1 Gewöhnliche Integrale

ein Ziel: Berechnen von Flächen unter Graphen von Funktionen

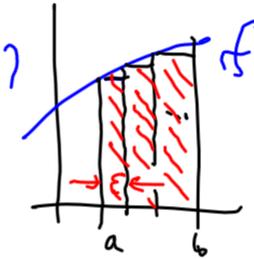


Fläche $F_a^b =: \int_a^b dx f(x)$

\int ← stilisiertes Σ
 dx ← Differential
 $f(x)$ ← Integrand

Beziehung zu Σ : $\int_a^b dx f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \cdot f(a+n\varepsilon)$

$N\varepsilon = b-a$



Eigenschaften: (G.W.)

$$\int_a^b dx f(x) := - \int_b^a dx f(x) \quad \rightarrow \quad \int_a^a dx f(x) = 0$$

$$\int_a^b dx \text{ konst.} = \text{konst.} \cdot (b-a)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \rightarrow \quad \int_{-a}^a dx f(x) = 0$$

$$\int_a^b dx (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx f + \beta \int_a^b dx g$$

$$\int_a^b dx f + \int_b^c dx f = \int_a^c dx f$$

$$\int_a^b dx f(x) = \int_{a+c}^{b+c} dx f(x-c)$$

$$\int_a^b dx f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx f(\lambda x)$$

Hauptsatz: betrachte $\int_a^b dx f(x)$ als Funktion von b :

$$\int_a^b dx f(x) =: I(b, a) \quad \text{Wackele an oberer Grenze } b:$$

$$I(b+\varepsilon, a) - I(b, a) = \left(\int_a^{b+\varepsilon} - \int_a^b \right) dx f(x) = \int_b^{b+\varepsilon} dx f(x) = \varepsilon \cdot f(b) + O(\varepsilon^2)$$

$$\rightarrow \partial_b I(b, a) = \partial_b \int_a^b dx f(x) = f(b)$$

Def.: eine Stammfunktion F zu einer Funktion f
erfüllt $F' = f$

„Anti-Ableitung“, nur bis auf Konstante C festgelegt

$$\rightarrow I(b, a) = F(b) + C \quad \left. \begin{array}{l} \text{für } b=a: I(a, a) = 0 = F(a) + C \\ \phantom{\text{für } b=a: I(a, a) = 0 = F(a) + C} \end{array} \right\} \Rightarrow I(b, a) = F(b) - F(a)$$

$$\text{Fazit: } \int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \frac{dF}{dx}(x) = \int_{F(a)}^{F(b)} dF = F \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(5.2)

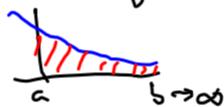
Integrieren ist eine Kunst. Aber es gibt Tricks!

z.B. Symmetrie: $\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin x}{1+x^2} = 0$ weil $f(-x) = -f(x)$

Lösungsstrategie: f skizzieren, umformen, Ansätze probieren

BSP.: $\int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx \tan x \stackrel{\text{sym}}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \tan x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \frac{\sin x}{\cos x}$
 $\stackrel{\text{raten}}{=} - \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \frac{1}{\cos x} \stackrel{\text{Haupt-}}{\text{satz}} = - \ln \cos x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4}$
 $= - \ln \cos \frac{\pi}{4} + \ln \cos \frac{\pi}{6} = - \ln \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) + \ln \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \right)$
 $= \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

uneigentliche Integrale: Flächen, die bis ∞ sich erstrecken



definiert als Grenzwert $\int_a^{\infty} dx f(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x)$

muss nicht existieren! ($\infty \rightarrow \infty$ möglich)

Beispiele; $\lambda > 0$

$$\cdot \int_0^{\infty} dx e^{-\lambda x} = \int_0^{\infty} dx \partial_x \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) = \left. -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{\lambda}$$

$$\cdot \int_0^{\infty} dx \{ \ln(1+e^x) - x \} < \infty ? \quad \text{untersuche Integrand bei } x \rightarrow \infty$$

$$\{ \dots \} = \ln(e^x + 1) - x = \ln[e^x(1+e^{-x})] - x$$

$$= \underbrace{\ln e^x}_x + \ln(1+e^{-x}) - x = \ln(1+e^{-x})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_z \text{ klein}$

$$= e^{-x} - \frac{1}{2}(e^{-x})^2 + \frac{1}{3}(e^{-x})^3 - \dots \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \rightarrow \int \text{existiert}$$

VI.2 Beispiele

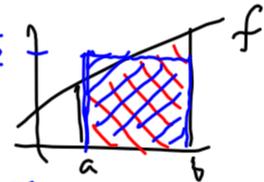
a) Mittelung

Grenzwert des arithmetische Mittels auf kontinuierliche Mengen

$$\bar{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n f_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_n f_n \cdot dx}{N \cdot dx} = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx f(x)$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx f(x)^2 \neq \bar{f}^2 = \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b dx f(x) \right)^2 \quad (6.3)$$

$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{\alpha f} = \alpha \cdot \bar{f}, \quad \bar{1} = 1, \quad \overline{\bar{f}} = \bar{f}$$



Schwankung:

$$\Delta f := \sqrt{\overline{(f - \bar{f})^2}} = \sqrt{\overline{f^2} - 2\bar{f}\bar{f} + \bar{f}^2} = \sqrt{\overline{f^2} - \bar{f}^2} \quad (6.4)$$

Bsp.: harmonische Oszillator $x(t) = A \cos \omega t$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T dt A \cos \omega t = 0, \quad (\Delta x)^2 = \overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T dt A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} A^2$$

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{4} A^2 \quad \text{potentielle Energie}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{m}{2} (A\omega \sin \omega t)^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{4} A^2$$

$m\omega^2 = k$

kinetische Energie

b) Lineare Massenverteilung  x
 $m_i \quad i=1, \dots, N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma(x), \quad x \in [0, L]$ Massendichte

$\rightarrow \sigma(x) dx$ Masse zwischen x und $x+dx$

$\rightarrow M = \sum_{i=1}^N m_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} M = \int_0^L dx \sigma(x)$ Gesamtmasse

Beispiele:

Schwerpunkt

$$R_S = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R_S = \bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^L dx \sigma(x) \cdot x \quad (6.5)$$

Trägheitsmoment um $x=0$:

$$I = \sum_i m_i x_i^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} I = M \cdot \bar{x}^2 = \int_0^L dx \sigma(x) \cdot x^2 \quad (6.6)$$

c) Überlagerung

Zwei Kraftfelder $\vec{F}_{(1)}$ & $\vec{F}_{(2)} \rightsquigarrow$ Summe $\vec{F} = \vec{F}_{(1)} + \vec{F}_{(2)}$

Seien konservativ: $\vec{F}_{(i)}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_{(i)}(\vec{r}) \quad i=1,2$

$\rightsquigarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V$ mit $V = V_{(1)} + V_{(2)}$

Bsp.: Gravitationspotenzial einer linearen Massenverteilung

eine Masse (M_0, \vec{r}_0) : $V(\vec{r}) = -\frac{\gamma m M_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

viele Massen (M_i, \vec{r}_i) : $V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{-\gamma m M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$

kontinuierliche Massenverteilung ($\sigma(x')$ entlang $x' \in [0, L]$):

$$V(\vec{r}) = -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{|\vec{r} - \vec{r}(x')|} = -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}}$$

$\vec{r} = (x, y, z)$ (6.7)

VI.3 Integrationsmethoden

a) Partialbruch-Zerlegung

Beispiel: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x^2}$ mit $A, B = \text{Polynom}$

finde A, B : $1 = A(1+x^2) + Bx = A + x \cdot (B + Ax)$

$\leadsto A=1, B=-x \leadsto \text{d.h. } \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

b) Partielle Integration nutze Produktregel

$$f = u \cdot v \leadsto f' = u'v + uv' \leadsto \int_a^b dx (uv)' = [u \cdot v]_a^b = \int_a^b dx u'v + \int_a^b dx uv'$$

$$\leadsto \int_a^b dx u'v = [uv]_a^b - \int_a^b dx uv' \quad (6.8)$$

Beispiel: $\int_0^y dx \ln x = \int_0^y dx 1 \cdot \ln x = [x \ln x]_0^y - \int_0^y dx x \cdot \frac{1}{x}$
 $= y \ln y - y$

c) Substitution = Wechsel der Integrationsvariablen

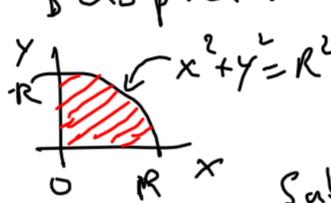
$$I = \int_a^b dx f(x) \quad \text{Substitution: } \begin{cases} x \rightarrow t \\ x = x(t) \Leftrightarrow t = t(x) \\ dx = \frac{dx}{dt} dt = dt \dot{x}(t) \end{cases}$$

$$I = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \dot{x}(t) f(x(t)) =: \int_{t(a)}^{t(b)} dt \dot{x}(t) g(t) \quad (5.9)$$

Grenzen: $x=a \Leftrightarrow t=t(a)$ und $x=b \Leftrightarrow t=t(b)$

Vorsicht, wenn $x(t)$ nicht monoton!

Beispiel: Kreisfläche


$$F_0 = 4 \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2} = 4 \int_0^{\pi/2} dy R \cos y \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 y}$$

Sub.: $x = R \sin y$
 $dx = R \cos y dy$
 $[0, R] \rightarrow [0, \pi/2]$

$$= 4R^2 \int_0^{\pi/2} dy \cos y \sqrt{1 - \sin^2 y}$$
$$= 4R^2 \int_0^{\pi/2} dy \cos^2 y$$
$$= 4R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi R^2$$

d) Differenzieren nach Parameter

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \int_0^{\infty} dx x^n e^{-x} &= \int_0^{\infty} dx x^n e^{-\alpha x} \Big|_{\alpha=1} \\ (n=0,1,2,\dots) & \\ &= \left[(-\partial_{\alpha})^n \int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x} \right] \Big|_{\alpha=1} = \left[(-\partial_{\alpha})^n \frac{1}{\alpha} \right] \Big|_{\alpha=1} \\ &= n! \alpha^{-(n+1)} \Big|_{\alpha=1} = n! \end{aligned}$$

e) Parameter-Abhängigkeit

... falls nur Abhängigkeit von einem Parameter gesucht...

Beispiel: T-Abh. der Energie E eines Achtkammstrahlers

$$E = \frac{V}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{(hc)^3} \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/T} + 1} \stackrel{\varepsilon=Tx}{=} \frac{V}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{T dx}{(hc)^3} \frac{(Tx)^3}{e^x + 1} = \frac{VT^4}{(hc)^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx x^3}{e^x + 1}$$

f) Reihenentwicklung eines Integranden

$$\text{Beispiel: } \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x + 1} = \int_0^{\infty} dx \frac{x^3 e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dots = 6 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^4} = 6 \cdot \frac{7\pi^4}{720}$$

Bemerkung: Hauptsatz als Substitution

$$\underline{I} = \int_a^b dx f(x)$$

Substitution: $x = x(t)$ mit $t = F$

$$\leadsto dx = \frac{dx}{dF} dF \quad (\Leftrightarrow) \quad \dot{x} = \frac{dx}{dF} = \frac{1}{f}$$

$$\begin{aligned} \leadsto I &= \int_{F(a)}^{F(b)} dF \cdot \frac{dx}{dF} f(x(F)) = \int_{F(a)}^{F(b)} dF \frac{1}{\cancel{f}} \cdot \cancel{f} \\ &= \int_{F(a)}^{F(b)} dF \cdot 1 = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

VI.4 Kurven, Volumen, Flächen

Verallgemeinerungen, die sich auf gewöhnliche Integrale reduzieren

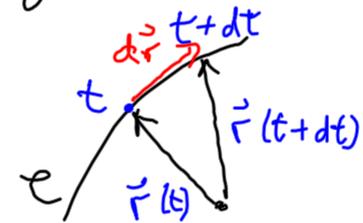
a) Vektor-Integral

$$\int_a^b dx \vec{f}(x) \hat{=} \int_a^b dx (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = \left(\int_a^b dx f_1, \int_a^b dx f_2, \int_a^b dx f_3 \right)$$

b) Kurven- oder Weg-Integral

Beiträge werden entlang einer Kurve aufgesammelt

Kurve \mathcal{C} , parametrisiert durch
 $\vec{r}(t)$ $t \in [t_1, t_2]$



im Zeitraum $[t, t+dt]$ ändert sich \vec{r} um

$$\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) dt = d\vec{r}(t)$$

$$(dx)^2 \neq d(x^2) = 2x dx$$

Länge des Verschiebvektors $d\vec{r} \hat{=} (dx, dy, dz)$

$$ds := |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = v(t) dt \quad (6.10) \quad v = |\dot{\vec{r}}|$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} ds f(\vec{r}) := \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) f(\vec{r}(t)) \quad (6.11) \quad f(\vec{r}(t)) =: g(t)$$

Beispiele:

• Länge von \mathcal{C} : $L = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t)$ mit $v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{\vec{r}}^2}$

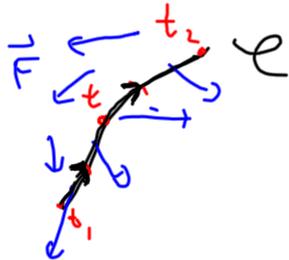
• Masse eines Drahts: $M = \int_{\mathcal{C}} ds \sigma(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) \sigma(\vec{r}(t))$

• Gravitationspotential eines Drahts: $V(\vec{r}) = -\gamma m \int_{\mathcal{C}} ds \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\gamma m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{|\dot{\vec{r}}'(t)| \sigma(\vec{r}'(t))}{|\vec{r} - \vec{r}'(t)|}$

(6.12)



• Arbeit längs \mathcal{C} :



$$A = \int_{\mathcal{C}} ds F_{\parallel}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} \underbrace{|\dot{\vec{r}}|}_{\substack{\text{Tangenteneinheitsvektor} \\ \downarrow}} \vec{e}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) F_{\parallel}(\vec{r}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad (6.13)$$

für konservative $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$: $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\partial_t V(\vec{r}(t))$

$$\rightarrow A = \int_{t_1}^{t_2} dt (-\partial_t V(\vec{r}(t))) = V(\vec{r}(t_1)) - V(\vec{r}(t_2)) = V(1) - V(2) \quad (6.14)$$

c) Ebenes Flächenintegral

sammle Integranden $f(x,y)$ auf in einem Gebiet

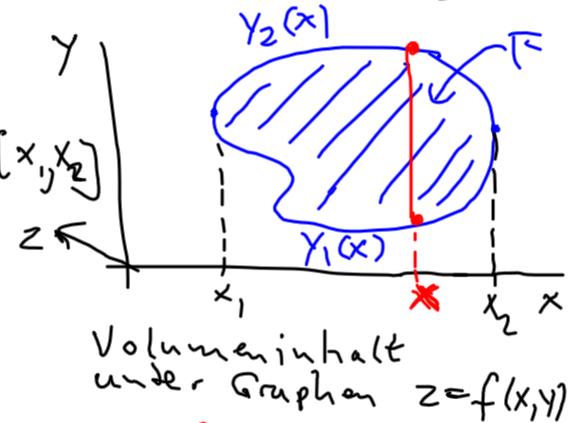
$$(x,y) \in F \subseteq \mathbb{R}^2$$

erst $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x,y)$ für jeder feste $x \in [x_1, x_2]$

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x,y)$$

dann $\int_{x_1}^{x_2} dx F(x) = I$, d.h.

$$I = \int_F d^2r f(x,y) := \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x,y) \quad (6.15)$$

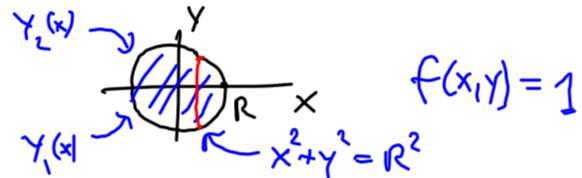


Beispiele

• Flächeninhalt einer Kreisscheibe

$$F = \int_F d^2r 1 = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy 1 = \int_{-R}^R dx 2\sqrt{R^2-x^2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} R^2$$

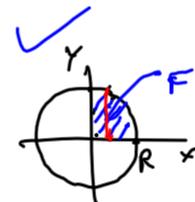
S.O. ✓



• Volumen einer Kugel

$$V = \int_F d^2r \sqrt{R^2-x^2-y^2} = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \sqrt{R^2-x^2-y^2} = \int_0^R dx \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2 \varphi \sqrt{R^2-x^2} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

sub: $y = \sqrt{R^2-x^2} \cos \varphi$



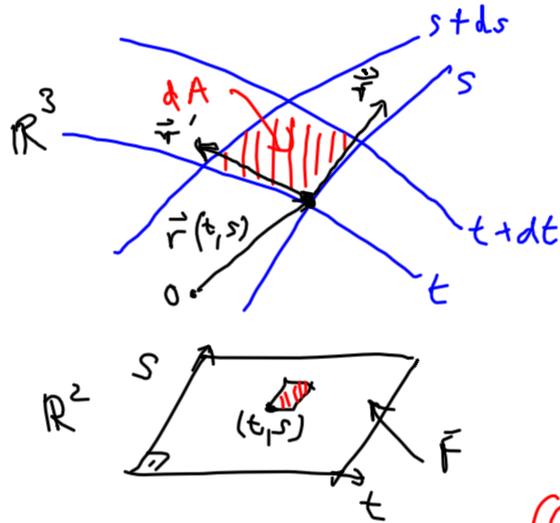
d) Oberflächenintegral

Beiträge zu einem 2-dim. Integral können entlang einer beliebigen Fläche im \mathbb{R}^3 aufgesammelt werden

Oberfläche S , parametrisiere als $\vec{r}(t,s) \in \mathbb{R}^3$

Koordinaten $(t,s) \in F \subseteq \mathbb{R}^2$

zum Bereich $[t, t+dt] \times [s, s+ds]$ gehört infinitesimale Fläche dA gegeben durch die Länge des Normalenvektors $d\vec{A}$



$$d\vec{A} = [\vec{r}(t+dt, s) - \vec{r}(t, s)] \times [\vec{r}(t, s+ds) - \vec{r}(t, s)]$$

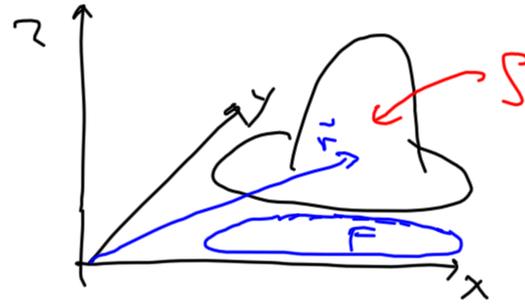
$$(6.16) = \left(\partial_t \vec{r}(t, s) \times \partial_s \vec{r}(t, s) \right) dt ds =: \vec{n} dA$$

also:

$$dA = |d\vec{A}| = \left| \partial_t \vec{r} \times \partial_s \vec{r} \right| dt ds, \quad \vec{n} = \frac{\partial_t \vec{r} \times \partial_s \vec{r}}{|\partial_t \vec{r} \times \partial_s \vec{r}|} \quad (6.16')$$

$$\text{Integral: } \int_S dA f(\vec{r}) := \int_F dt ds \left| \vec{r}'_t \times \vec{r}'_s \right| (t, s) \cdot f(\vec{r}(t, s)) \quad (6.17)$$

Beispiel:
 Masse eines Huttes S
 parametrisiere durch
 Projektion in xy -Ebene:



$$(t, s) = (x, y)$$

$$\vec{r}(x, y) \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x, y) \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in F$$

Massenwichte
 $\sigma(x, y)$

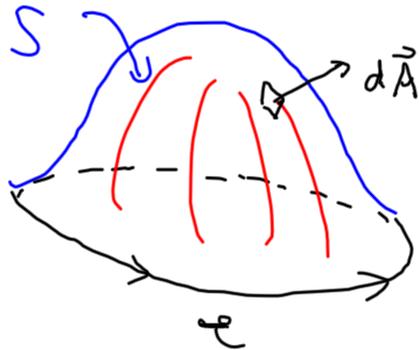
$$M = \int_S dA \sigma(\vec{r}) = \int_F d^2\vec{r} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| \sigma(x, y)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y h \end{pmatrix} \right| \cdot \sigma(x, y)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \sqrt{1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2} \sigma(x, y)$$

Orientierung: Vorzeichenwahl von $d\vec{A}$ ist Konvention,

falls ohne Rand, aber orientiert,
zeige $d\vec{A}$ nach außen.



Notation $\oint_S d\vec{A} \dots$

Beispiel: Strom I durch eine Fläche S

vektorielle Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$

Normaleneinheits-
vektor

nur die zur Fläche senkrechte Komponente $j_n = \vec{j} \cdot \vec{n}$

trägt zu I bei:

$$I = \int_S dA j_n(\vec{r}) = \int_S dA \vec{n} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \int_S d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

$$= \int_F dt ds (\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}) \quad (6.18)$$

$x_2, y_2(x), z_2(x, y)$

e) Volumen-Integral $I = \int_V d^3r f(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz f(x, y, z) \quad (6.19)$

VI.5 Krummlinige Koordinaten

zunächst im flachen Raum, zweidimensional

Beispiel: Polarkoordinaten $(x, y) \mapsto (r, \varphi)$

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \stackrel{(6.20)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{array} \right.$$

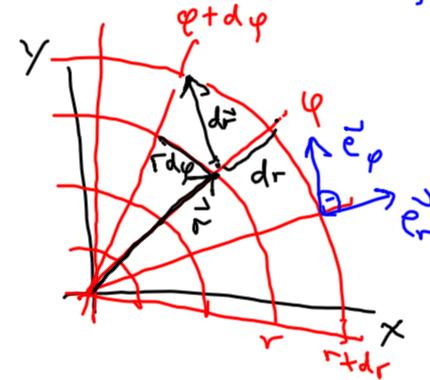
$$\vec{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

neue Basisvektoren:

$$\partial_r \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \vec{e}_r b_r \rightarrow b_r = 1$$

$$\partial_\varphi \vec{r} = r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \vec{e}_\varphi b_\varphi \rightarrow b_\varphi = r$$

$$c_{r\varphi} := \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi \quad \text{hier: } c_{r\varphi} = 0$$



Vorsicht: $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y \neq \vec{e}_r r + \vec{e}_\varphi \varphi$

statt \vec{r} studiert besser Änderungen $d\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ etc.,

$$d\vec{r} = \partial_x \vec{r} \cdot dx + \partial_y \vec{r} \cdot dy = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy \leftarrow \vec{r}(x, y)$$

$$\stackrel{\text{oder}}{=} \partial_r \vec{r} \cdot dr + \partial_\varphi \vec{r} \cdot d\varphi = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\varphi r d\varphi \leftarrow \vec{r}(r, \varphi)$$

$$\vec{dr} \doteq \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dr - r s d\varphi \\ s dr + r c d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

teile durch dt für Funktional- oder Jacobi-Matrix

$$\dot{\vec{r}} = \vec{e}_r \dot{r} + \vec{e}_\varphi r \dot{\varphi} \doteq \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (6.21')$$

$$v^2(t) = \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Linienelement: } (ds)^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 & (6.22) \\ &= \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} (dt)^2 = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) (dt)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Flächenelement: } dA = dx dy = r dr d\varphi \quad (6.23)$$

↖ kein üblicher Produkt!

Anwendungen:

$$\text{- Kugelvolumen: } V = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr r \overset{\text{Höhe}}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{1}{3}\right) \partial_r (R^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$\begin{aligned} \text{- Gauß-Integral: } I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2r e^{-r^2/a^2} \stackrel{r \rightarrow r, a}{=} a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr r e^{-r^2} \\ \text{Bem.: } I_1 &= I_2 \\ &= a^2 \cdot 2\pi \int_0^\infty dr \left(-\frac{1}{2}\right) \partial_r e^{-r^2} = \pi a^2 \quad (6.24) \end{aligned}$$

allgemeine Situation:

krummlinige Koordinaten im \mathbb{R}^2 , $(x, y) \mapsto (u, v)$

$$\vec{r} \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \quad [\text{nicht } \vec{r} \doteq (u, v) \text{ schreiben!}]$$

• Basisvektoren:

$$\partial_u \vec{r} = \vec{e}_u b_u, \quad \partial_v \vec{r} = \vec{e}_v b_v \quad \text{so dass} \quad \begin{cases} \vec{e}_u^2 = \vec{e}_v^2 = 1 \\ \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = c_{uv} \end{cases}$$

$$\text{d.h. } b_u(u, v) = |\partial_u \vec{r}|, \quad b_v(u, v) = |\partial_v \vec{r}| \quad (6.25)$$

• Differential: $d\vec{r} = \partial_u \vec{r} du + \partial_v \vec{r} dv$
 $= \vec{e}_u b_u du + \vec{e}_v b_v dv$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u x du + \partial_v x dv \\ \partial_u y du + \partial_v y dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =: J \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

analog: $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}$ $\hookrightarrow (dx, dy) = (du, dv) \cdot J^T$

• Linienelement:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx, dy) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (du, dv) J^T J \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} & (6.27) \\ &= (\partial_u \vec{r} du + \partial_v \vec{r} dv)^2 = (du, dv) \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv) G \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

induzierte Metrik:

$$G = \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_u^2 & b_u b_v c_{uv} \\ b_v b_u c_{uv} & b_v^2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} = J^T \cdot J \quad (6.27')$$

also

$$(ds)^2 = g_{uu}(du)^2 + 2g_{uv}dudv + g_{vv}(dv)^2 = g_{ij}du_i du_j$$

mit $i, j \in \{u, v\} = \{u_1, u_2\}$ und $g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}$

Kurven in \mathbb{R}^2 : $\vec{r}(t) \rightsquigarrow (x(t), y(t)) \rightsquigarrow (u(t), v(t)) \rightsquigarrow du_i = \dot{u}_i dt$

$$ds = \sqrt{g_{ij} du_i du_j} = \sqrt{g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j} dt = v(t) dt \quad \text{mit } v^2 = (\dot{u}, \dot{v})_G(\dot{u}, \dot{v}) \quad (6.28)$$

wichtige Kurvenintegrale:

Bogenlänge: $s(1,2) = \int_1^2 ds = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{ij}(t) \dot{u}_i \dot{u}_j} \quad (6.29)$

Wirkung: $w(1,2) = \int_1^2 \dot{\vec{p}} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \dot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}}^2 = m \int_{t_1}^{t_2} dt g_{ij}(t) \dot{u}_i \dot{u}_j \quad (6.30)$

• Flächenelement

lese $\vec{r}(u,v) \equiv \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v)=0 \end{pmatrix}$ wie Oberfläche im \mathbb{R}^3 , nur mit $z=0$ und (u,v) statt (t,s)

$$dA = |\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}| du dv = \sqrt{(\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r})^2} du dv$$

$$= \sqrt{(\partial_u \vec{r})^2 (\partial_v \vec{r})^2 - (\partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r})^2} du dv$$

$$= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix}} du dv = \sqrt{\det G} du dv \quad (6.31)$$

$$= \sqrt{\det(J^T J)} du dv = \sqrt{(\det J^T)(\det J)} du dv = |\det J| du dv$$

das heißt:

$$dx dy = |\det J| du dv = \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \quad \text{mit} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv J$$

Substitutionsregel:

$$\int_F dx dy f(x,y) = \int_{\tilde{F}} du dv \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| f(x(u,v), y(u,v)) \quad (6.32)$$

• Beispiel Polarkoordinaten: $(x, y) \mapsto (r, \varphi)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \rightarrow |\det J| = \sqrt{\det G} = r$$

$$\rightarrow dx dy = r dr d\varphi \quad \checkmark$$

• Verkettung: $(x, y) \mapsto (u, v) \mapsto (t, s)$

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \right| = \left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \right) \right|$$

rechnerisch
=
nach!

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} \right|$$

- Erweiterung auf 3 Dimensionen

$$(x, y, z) \mapsto (u, v, w) \quad \vec{r}(u, v, w)$$

alles analog zu 2 Dimensionen: J, G sind 3×3 Matrizen

Linienelement entsprechend

Volumenelement

$$\begin{aligned} dV &= dx dy dz = \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \\ &= |(\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}) \cdot \partial_w \vec{r}| du dv dw \end{aligned} \quad (6.33)$$

Oberflächenelement: Einbettung einer Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{r} \doteq \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{hatten wir schon: } \vec{r}(t, s) \quad \nexists J$$

$$dA = |\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}| du dv = \sqrt{\det G} du dv \quad \text{mit } g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}$$

• Beispiel: Kugelkoordinaten

$$(x, y, z) = (r, \vartheta, \varphi)$$

$$\begin{array}{ccc} & / & \backslash \\ [0, \infty) & & [0, \pi] \\ & \backslash & / \\ & & [0, 2\pi) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} = \underline{r}$$

$$\partial_r \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \partial_\vartheta \vec{r} = r \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi \vec{r} = r \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alle orthogonal}$$

$$b_r = 1$$

$$b_\vartheta = r$$

$$b_\varphi = r \sin \vartheta \quad \downarrow$$

$$J = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \partial_r \vec{r} & \partial_\vartheta \vec{r} & \partial_\varphi \vec{r} \\ | & | & | \end{pmatrix} \rightsquigarrow J^T J = G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 + r \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2$$

$$|\det J| = \sqrt{\det G} = r^2 \sin \vartheta$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = -r^2 dr d(\cos \vartheta) d\varphi =: r^2 dr d\Omega$$

$$(6.34)$$

since $d\vartheta d\varphi$
↓

$$(6.35)$$

Anwendungen S^2

- Kugeloberfläche $r = R = \text{konst.}$

$$dA = \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=R} = R^2 \sin v \, dv \, d\varphi \quad (v, \varphi) \in F: [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

$$A_R = \int_{S^2} dA = \int_F R^2 \sin v \, dv \, d\varphi = R^2 \int_0^\pi \sin v \, dv \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi \quad \checkmark$$

- Kugelvolumen B^3

$r \in [0, R]$ sowie $(v, \varphi) \in S^2$

$$V_R = \int_{B^3} dV = \int_0^R dr \, r^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin v \, dv \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi} = 4\pi \cdot \left. \frac{1}{3} r^3 \right|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \checkmark$$

VI.6 Delta-Distribution

Beschreibung von Massen- oder Ladungsdichten von Objekten, die nicht dreidimensional sind

Beispiel: Grav.-Potential eines Massepunkts M bei \vec{r}_0

$$V(\vec{r}) = -\gamma m \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\gamma m \frac{M}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

\uparrow
Testmasse



Wie muß $\rho(\vec{r}')$ beschaffen sein, damit das stimmt?

notwendig: $\rho(\vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \neq \vec{r}_0$ konzentriert

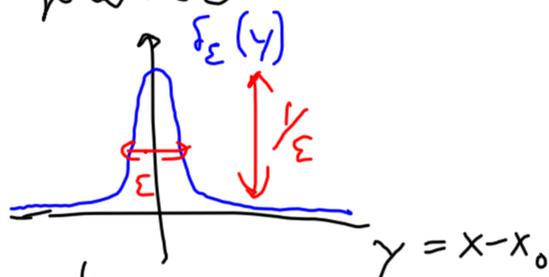
$$\int d^3r' \rho(\vec{r}') = M \quad \text{Gesamtmasse}$$

vereinfachte Diskussion auf eine Dimension

gesucht ist „Funktion“ $\rho(x)$ mit
$$\begin{cases} \rho(x) = 0 & \forall x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) = 1 \end{cases}$$

Ä solche Funktion, aber näherungsweise

$$p_\varepsilon(x) =: \delta_\varepsilon(x-x_0)$$



Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ existiert nicht

als Funktion, aber verallgemeinerte

Funktion, sog. „Distribution“

$$\delta_0(x-x_0) =: \delta(x-x_0)$$

wird eigentlich nur unter dem Integral gebraucht

Definition:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0) \quad (6.36)$$

für alle vernünftigen Funktionen f : „ δ erschlägt ein Integral“
 („Testfunktion“)

Verschiedene Darstellungen von δ_ε :

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kastenfunktion

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2}$$

Gaußfunktion

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

Lorentzkurve

(6.37)

Eigenschaften: (6.38)

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-x_0) = 1$$

$$(ii) \int_a^b dx \delta(x-x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} f(x_0) & x_0 = a \text{ oder } x_0 = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(iii) \delta(-x) = \delta(x)$$

$$(iv) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$(v) \delta(h(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|h'(x_n)|} \quad \text{mit } h(x_n) = 0, h'(x_n) \neq 0$$

$$(vi) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta'(x-x_0) f(x) = -f'(x_0)$$

$$(vii) \Theta'(x) = \delta(x) \quad \text{mit } \Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Heaviside-} \\ \text{oder} \\ \text{Stufenfunktion} \end{array}$$

Von einer Dimension zurück nach drei Dimensionen
in kartesischen Koordinaten

$$\begin{array}{l} \delta(x) \text{ reduziert } \int d^3r \rightarrow \int dy/dz \quad yz\text{-Ebene} \\ \delta(x)\delta(y) \text{ " " " } \rightarrow \int dz \quad z\text{-Achse} \\ \delta(x)\delta(y)\delta(z) \text{ " " " } \rightarrow \text{Punkt } \vec{r}=0 \end{array}$$

"Träger"

allgemeiner: $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ für punktförmigen Träger

Eigenschaft: $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) \quad (6.39)$

in krummlinigen Koordinaten

$$\begin{aligned} f(\vec{r}_0) &= \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz f(x,y,z) \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \\ &= \int du dv dw \underbrace{f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))}_{\text{Wendepf}} \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \\ &= \int du dv dw g(u,v,w) \delta(u-u_0) \delta(v-v_0) \delta(w-w_0) = g(u_0, v_0, w_0) \end{aligned}$$

Wendepf
 $(x,y,z) \mapsto (u,v,w)$
 $\vec{r}_0 = (u_0, v_0, w_0)$

$$\rightarrow \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(u-u_0) \delta(v-v_0) \delta(w-w_0) / \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \quad (6.40)$$