

---

---

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Dies ist ein reines Bonusblatt. Es kann helfen, noch notwendige Punkte für die Studienleistung zu erlangen. Die Tutor\*innen werden Ihre Lösung allerdings nur dann korrigieren, wenn Ihnen tatsächlich noch Punkte für die Studienleistung fehlen, da sie selbst studieren, und nun auch Zeit brauchen, sich auf ihre eigenen Prüfungen vorzubereiten. Dennoch ist es zur Vorbereitung auf die Prüfungsleistung sinnvoll, das Blatt zu bearbeiten, denn alle Arbeitsblätter sind relevant für die Klausur!

**[H34] Freier Fall mit Newtonscher Reibung** **[2\* + 2\* + 4\* + 4\* = 12\* Punkte]**

Bei größeren Geschwindigkeiten ist die Newtonsche Reibung  $F_{\text{Newton}} = -\alpha |\dot{x}| \dot{x}$  realistischer, als die Stokesche Reibung aus [P31], die proportional zur Geschwindigkeit ist. Wir betrachten einen Körper der Masse  $m$  im Schwerfeld der Erde unter Einfluss Newtonscher Reibung.

- Wie lautet die Bewegungsgleichung des Körpers für eine rein vertikale Bewegung?
- Bei welcher Anfangsgeschwindigkeit würde sich eine geradlinig gleichförmige Bewegung ergeben?
- Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit, wenn der Körper zur Zeit  $t = 0$  mit der Geschwindigkeit  $v(t = 0) = 0$  zu fallen beginnt. Gehen Sie dabei analog zur Lösung von [P31] durch Integration vor. In den Lehrbüchern wird dieses Vorgehen die *Methode der Trennung der Variablen* genannt, ist aber nichts anderes als Integration durch Substitution.
- Berechnen Sie die Fallstrecke als Funktion der Zeit, wenn der Körper zur Zeit  $t = 0$  in der Höhe  $h$  losgelassen wird. Diskutieren Sie auch den Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$ .

*Hinweis:* Wenn Sie Schwierigkeiten mit den Integrationen in (c) und (d) haben, dürfen Sie gerne Formelsammlungen oder das Modul SymPy für symbolische Computeralgebra in Python verwenden, solange Sie in Ihrer Lösung klar kenntlich machen, welche Hilfsmittel Sie genutzt haben.

**[H35] Radioaktive Zerfallskette** **[2\* + 3\* + 4\* + 3\* = 12\* Punkte]**

Das radioaktive Element  $A$  zerfällt in ein ebenfalls radioaktives Element  $B$ . Die Zerfallskonstanten seien durch  $\lambda_A$  und  $\lambda_B$  gegeben. Zur Zeit  $t = 0$  gebe es  $N_0$  Atome des Elementes  $A$  und noch keine des Elementes  $B$ .

- Argumentieren Sie, dass für die Anzahlen  $N_A$  und  $N_B$  der Atome der beiden Elemente das folgende Differentialgleichungssystem gilt:

$$\dot{N}_A = -\lambda_A N_A, \tag{1}$$

$$\dot{N}_B = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B. \tag{2}$$

Formulieren Sie auch die Anfangsbedingungen für  $N_A$  und  $N_B$ .

- Geben Sie die Lösung von (1) für die zu Beginn beschriebene Anfangssituation an.
- Mit der Lösung aus (b) wird Gleichung (2) eine inhomogene Differentialgleichung. Lösen Sie diese durch die Methode der Variation der Konstanten.
- Diskutieren Sie Ihre Lösung aus (c) für die zu Beginn beschriebene Anfangssituation in den Fällen  $\lambda_A \gg \lambda_B$  und  $\lambda_A \ll \lambda_B$ .

**[H36] Von der Erde zum Mond** **[2\* + 4\* + 2\* + 4\* = 12\* Punkte]**

In dem Roman *Von der Erde zum Mond* von Jules Verne werden Astronauten mit Hilfe einer gigantischen Kanone zum Mond geschossen. Wir wollen überprüfen, ob das technisch möglich ist. Dazu diskutieren wir den vertikalen Wurf einer Masse  $m$  im Gravitationsfeld der Erde. Die Gravitationskraft ist hierbei

gegeben durch  $F = -\gamma \frac{mM}{r^2}$  und zeigt zum Erdmittelpunkt. Hierbei ist  $\gamma$  die Newtonsche Gravitations-

konstante und  $M$  die Masse der Erde.

- (a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $\gamma$ ,  $M$  sowie dem Erdradius  $R$  und der Erdbeschleunigung  $g$ ?
- (b) Die Anfangsgeschwindigkeit beim Abschuss, mit der die Masse  $m$  die Kanone und damit die Erdoberfläche verlässt, sei  $v_0$ . Gesucht ist die Geschwindigkeit  $v$  der Masse als Funktion ihres Abstandes  $z$  vom Erdmittelpunkt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung als Differentialgleichung für  $v(z)$  auf und verwenden Sie zur Lösung die Methode der Trennung der Variablen.
- (c) Wie groß muss  $v_0$  mindestens sein, damit die Masse den Schwerebereich der Erde verlässt?
- (d) Nehmen Sie an, dass ein Mensch für kurze Zeit, und in Flüssigkeit gelagert, eine Beschleunigung von  $20g$  aushalten kann. Wie lang müsste die Kanone sein, um das in (c) berechnete  $v_0$  erreichen zu können, wenn die Beschleunigung von  $20g$  nicht überschritten wird? Wir nehmen hierbei an, dass innerhalb der Kanone eine konstante Beschleunigung herrsche.  
*Hinweis:* Unter dem Stichwort „Railgun“ finden Sie moderne Ideen, wie man mit Hilfe elektromagnetischer Felder Projektile beschleunigen kann. Im Prinzip ließe sich so eine „Kanone“ realisieren, die Astronauten lebend zum Mond befördern könnte. Ob Elon Musk Jules Verne gelesen hat?

[!] *Ausführung*

[6\* Punkte]

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

[C6] *Schräger Wurf mit Reibung*

[6\* + 5\* + 6\* + 5\* = 22\* Computerpunkte]

Dies ist die Bonus-Computerübung. Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe von Computerübungen in Abschnitt 5 der Informations-Seiten zur Vorlesung im Stud.IP, den Sie im Kapitel „Abgabe von Übungen“ finden. Die Computerübung ist in *Python* zu lösen. Ihre Lösung dokumentieren und kommentieren Sie bitte ausführlich in einem Jupyter-Notebook. Wir betrachten die Bewegung eines Massepunktes der Masse  $m$  im Gravitationsfeld in der Nähe der Erdoberfläche unter Einfluss von Reibung. Wir wollen zwei verschiedene Ansätze für Reibung vergleichen, einmal die Stokessche Reibung  $\vec{F}_S = -\beta \vec{v}$ , und einmal die Newtonsche Reibung  $\vec{F}_N = -\beta v \vec{v}$ . Typischerweise ist die Stokessche Reibung für kleine Geschwindigkeiten eine brauchbare Näherung, die Newtonsche Reibung hingegen mehr für den Fall größerer Geschwindigkeiten, bei denen auch Turbulenz auftritt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf einen Wurfwinkel von  $\alpha = 45^\circ$ .

- (a) Beginnen Sie mit Stokesscher Reibung. Erstellen Sie vergleichende Plots, die für verschiedene Werte des Reibungskoeffizienten  $\beta$  die Wurfbahn zeigen. Der Vergleich sollte auch den Fall ohne Reibung ( $\beta = 0$ ) enthalten. Das zwei-dimensionale System der Bewegungsgleichungen lassen Sie wieder von `solve_ivp` lösen. Als Anfangsbedingungen verwenden Sie eine Starthöhe  $z_0 = 10$  m und Startgeschwindigkeiten von  $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$  sowie  $v_0 = 100 \text{ m s}^{-1}$  sowie  $v_0 = 300 \text{ m s}^{-1}$  und  $v_0 = 1000 \text{ m s}^{-1}$ . Wählen Sie zunächst eine kleine Masse  $m = 1$  kg.
- (b) Vergleichen Sie mit mittelalterlichen Darstellungen der Flugbahnen von Kanonenkugeln. Entsprechen die Resultate Ihren Erwartungen an Schussweiten von Kanonen? Welche der verwendeten Anfangsgeschwindigkeiten ist am ehesten physikalisch sinnvoll? Recherchieren Sie hierfür selbstständig zu mittelalterlichen Schusswaffen. Wie sehr reduziert sich der Einfluss der Reibung, wenn Sie eine für mittelalterliche Kanonenkugeln realistische Masse von  $m = 200$  kg ansetzen?
- (c) Wiederholen Sie die Berechnungen nun für den Fall Newtonscher Reibung. Dies ist ein Beispiel eines Systems von gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichung, das aber von `solve_ivp` genauso leicht gelöst werden kann. Verwenden Sie wieder zunächst die kleine Masse  $m = 1$  kg wie in (a).
- (d) Wiederholen Sie die Diskussion aus (b). Welches Modell für Reibung ist offensichtlich realistischer? Recherchieren Sie dazu auch, welche Werte für  $\beta$  für (rauhe) Kugeln realistisch sind. Überlegen Sie auch hier, in wie weit die Wahl einer realistischen Masse  $m = 200$  kg für eine mittelalterliche Kanonenkugel Ihre Diskussion beeinflusst.

*Achtung:* Der Parameter  $\beta$  hat bei Stokesscher Reibung eine andere Einheit, als bei Newtonscher Reibung. Man kann diese Reibungskoeffizienten also *nicht* direkt miteinander vergleichen!

*Hinweis:* Lesen Sie die Dokumentation zu `solve_ivp`, zum Beispiel unter [docs.scipy.org](https://docs.scipy.org) oder unter [pundit.pratt.duke.edu](https://pundit.pratt.duke.edu). Weitere Informationen finden Sie auch in Lektion IX der *Einführung in Python*, sowie in dem bereits für Aufgabe [C2] von Aufgabenblatt VI zur Verfügung gestellte Template.

**HINWEIS:** Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben! Lösungen nur als PDF!