EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Man findet sehr viel über eine lineare Abbildung heraus, wenn man sie in der Eigenbasis betrachtet. Dann wird nämlich die Matrix, die die lineare Abbildung darstellt, diagonal.
In der Vorlesung wird am Freitag das allgemeine Verfahren vorgestellt. Hier greifen wir ein wenig vor und studieren das Problem, Eigenwerte und Eigenvektoren zu finden, in ein paar einfachen und speziellen Situationen.

[P17] *Diagonalisieren mit Störung*
Wir betrachten eine Reihe von 2×2 Matrizen. Zu jeder dieser *symmetrischen* Matrizen sollen die Eigenwerte λ_1, λ_2 und die jeweils dazu gehörenden normierten Eigenvektoren $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ in ihren Komponentendarstellungen $\underline{f}_1$ und $\underline{f}_2$ ermittelt werden, so dass für die Matrix M dann gilt: $M\,\underline{f}_i = \lambda_i\,\underline{f}_i$.

Wie in der Vorlesung noch genauer erklärt wird, ergeben sich die Eigenwerte der Matrix M als die Nullstellen des Polynoms $\det(M - \lambda\,\mathbb{1})$. Kennt man die Eigenwerte $\{\lambda_i\}$, so lassen sich die zugehörigen Eigenvektoren jeweils als Lösung des linearen Gleichungssystems $(M - \lambda_i\,\mathbb{1})\,\underline{f}_i = \underline{0}$ finden.

Überprüfen Sie, ob im Falle $\lambda_1 \neq \lambda_2$ auch wirklich $\vec{f_1} \cdot \vec{f_2} = 0$ gilt. Was lernen Sie aus der Betrachtung des Grenzwertes $\epsilon \to 0$ in den letzten beiden Beispielen?

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+3\epsilon & 4\epsilon \\ 4\epsilon & 1-3\epsilon \end{pmatrix}.$$

[P18] *Drehungen*
Zeigen Sie, dass eine 3×3 Drehmatrix im Allgemeinen *nur einen* reellen Eigenwert $\lambda = +1$ hat. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie dies erst am konkreten Beispiel $\bar{D} = D_{\varphi,\vec{e}_1}$.
(b) Zeigen Sie den allgemeinen Fall, indem Sie die allgemeine Drehung D geschickt aus anderen Drehungen zusammensetzen und damit das Problem auf (a) zurückführen.
(c) Zeigen Sie den allgemeinen Fall direkt, indem Sie $\det(D - \lambda\mathbb{1})$ als ein Polynom in λ schreiben, dessen Koeffizienten allein durch $\det(D)$ und $\mathrm{sp}(D)$ ausgedrückt sind.