## REIHEN & TAYLORENTWICKLUNG

Wir beschäftigen uns weiter mit elementaren Funktionen, Reihen- und Taylorentwicklung, sowie dem asymptotischen Verhalten von Funktionen.

**[P21]** *Taylorreihen*
In der Vorlesung wurden einige grundlegende Eigenschaften von Funktionen vorgestellt, so die Ableitung von Umkehrfunktionen, Reihenentwicklungen usw.

(a) Bestimmen Sie die Reihenentwicklung von $\arctan y$ aus derjenigen von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\arctan y = \frac{1}{1+y^2}$.

(b) Gehen Sie mit dem Ansatz $\tan\,x = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \ldots$ und der Reihenentwicklung von $\arctan y$ aus (a) in die Gleichung $x = \arctan(\tan\,x)$ und bestimmen Sie $c_1$, $c_3$ und $c_5$.

*Hinweis*: Erinnern Sie sich an die geometrische Reihe $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots$, wobei diese Gleichheit nur für $|q| < 1$ gilt.

**[P22]** *Asymptotisches Verhalten*
Geben Sie das asymptotische Verhalten für große $x$ für die folgenden Funktionen an:

(a) $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ ,
(b) $\ln(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$ ,
(c) $\dfrac{x}{\ln\,\sinh x}$ .

**[P22]** *Umkehrfunktionen*
Drücken Sie die Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} y$ von $\sinh x$ durch den natürlichen Logarithmus $\ln$ aus. Bestimmen Sie daraus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\operatorname{arsinh} y$. Welches Resultat erhalten Sie, wenn Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\operatorname{arsinh} y$ mit Hilfe von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$ bestimmen?