Statistische Physik

Hausübung, Blatt 12 **WiSe 2018/19** **Abgabe: 24.1.2019**

[H21] Transfermatrix für das Isingmodell (12 Punkte)

Betrachten Sie das eindimensionale Ising-Modell mit N Gitterplätzen und Hamiltonoperator

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} \,, \qquad J > 0 \,, \tag{1}$$

mit periodischen Randbedingungen, so dass $\sigma_{N+1} \equiv \sigma_1$. Für dieses System existiert eine diagonalisierbare $2{\times}2$ *Transfermatrix* T, welche es erlaubt, die Zustandssumme Z exakt zu bestimmen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$Z = \mathrm{tr}(T^N) \,, \tag{2}$$

mit der Transfermatrix

$$T = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{+J/\tau} & \mathrm{e}^{-J/\tau} \\ \mathrm{e}^{-J/\tau} & \mathrm{e}^{+J/\tau} \end{pmatrix} . \tag{3}$$

(b) Drücken Sie Z durch J, τ und N aus, indem Sie die Spur in (2) auswerten.

Hinweis: Berechnen Sie die Eigenwerte von T.

(c) Berechnen Sie die freie Energie je Spin im thermodynamischen Limes $N \to \infty$. Gibt es einen Phasenübergang?

(d) Benutzen Sie die Transfermatrix, um die Korrelationsfunktion $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ für beliebige i und j zu berechnen.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = Z^{-1}\,\mathrm{tr}(P_z T^{j-i} P_z T^{N-(j-i)})$, wobei

$$P_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Nutzen Sie aus, dass die Eigenvektoren von T unabhängig von τ und J sind.

(e) Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes $N \to \infty$ für endliche $|j-i|$ gilt:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \mathrm{e}^{-|j-i|/\xi(\tau)} \,, \tag{5}$$

wobei $\xi(\tau)$ die Korrelationslänge ist. Berechnen sie $\xi(\tau)$.