

[P24] Ginsburg–Landau Theorie der Supraleitung

Die Ginsburg–Landau Theorie (aufgestellt 1950 von Witali Ginsburg und Lew Landau, Nobelpreis für Ginsburg 2003) ist ein phänomenologisches Modell der Supraleitung. In diesem Modell wird der lokale Zustand eines (dreidimensionalen) Supraleiters durch einen ortsabhängigen Ordnungsparameter  $\psi(x) \in \mathbb{C}$  beschrieben. Der Parameter  $\psi(x)$  hat Ähnlichkeit mit einer quantenmechanischen Wellenfunktion, ist aber kein reiner Quantenzustand. Sein Betragsquadrat  $|\psi(x)|^2$  kann als lokale Dichte mikroskopischer Träger der Supraleitung aufgefasst werden. Der normalleitende Zustand ist durch  $\psi(x) = 0$  für alle  $x$  gegeben.

Das Landau-Funktional für die freie Energie bei Temperatur  $\tau$  in Abhängigkeit der Funktion  $\psi(x)$  und des elektromagnetischen Potentials  $\vec{A}(x)$  (einem reellen Vektorfeld) ist

$$F(\psi, \vec{A}) = F_0 + \alpha(\tau)\|\psi\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\psi^2\|^2 + \frac{1}{2m}\|(-i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})\psi\|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\|\vec{\nabla} \times \vec{A}\|^2. \quad (1)$$

Hierbei sind

$$\|\psi\|^2 := \int d^3x |\psi(x)|^2 \quad \text{und} \quad \|\vec{v}\|^2 := \int d^3x \sum_{i=1}^3 |v_i(x)|^2 \quad (2)$$

die (quadrierten) Normen für (komplexe) Skalarfelder  $\psi(x)$  und Vektorfelder  $\vec{v}(x)$ . Der Integrationsbereich ist jeweils das gesamte Volumen  $V$  des Materials. Weiter ist  $\vec{\nabla}$  („nabla“) der Gradientenoperator, und  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  ist die Rotation des Vektorfeldes  $\vec{A}$ . Die Parameter  $m$  und  $q$  sind die effektive Masse und die Ladung der mikroskopischen Träger der Supraleitung. Außerdem ist

$$\alpha(\tau) = \alpha_0(\tau - \tau_c) \quad \text{mit} \quad \alpha_0 > 0 \quad \text{und} \quad \tau_c > 0, \quad (3)$$

und  $\beta > 0$  ist *nicht* die inverse Temperatur, sondern eine phänomenologische Konstante.  $F_0$  ist die (von  $\tau$  unabhängige) freie Energie der normalleitenden Phase.

Der Gleichgewichtszustand von  $\psi(x)$  ist derjenige Zustand, welcher die freie Energie  $F(\psi)$  minimiert.

- (a) Betrachten Sie den Fall ohne elektromagnetisches Potential ( $\vec{A}(x) = 0$  für alle  $x$ ). Charakterisieren Sie alle homogenen (im Raum konstanten) Gleichgewichtszustände  $\psi$  als Funktion von  $\alpha_0$  und  $\tau$ .
- (b) Nehmen Sie triviale (Dirichlet) Randbedingungen an. Zeigen Sie, dass  $F$  stationär gegenüber Variationen von  $\psi$  ist falls

$$0 = \alpha(\tau)\psi(x) + \beta|\psi(x)|^2\psi(x) + \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})^2\psi. \quad (4)$$

Hierbei steht  $(-i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})^2$  für die zweimalige Hintereinanderausführung des Differentialoperators  $(-i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})$ .

- (c) Es sei  $\psi_\infty$  eine der in (a) gefundenen nichttrivialen Gleichgewichtslösungen für  $\tau < \tau_c$ . Betrachten Sie kleine Störungen

$$\psi(x) = \psi_\infty(1 - g(x)) \quad (5)$$

dieser Lösung, wobei  $g(x)$  reell ist. Zeigen Sie durch Linearisieren von (4), dass  $g(x)$  für  $\vec{A} = 0$  die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta g(x) \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})g(x) = -\frac{4m\alpha}{\hbar^2}g(x) \quad (6)$$

erfüllen muss.

- (d) Betrachten Sie die supraleitende Phase in der linearisierten Form wie in (c), und nehmen Sie an, dass  $g$  nur entlang der Richtung  $x = (0, 0, z)$  variiert, ansonsten aber konstant ist. Zeigen Sie, dass

$$g(0, 0, z) = g(0) e^{-\sqrt{2}z/\xi} \quad (7)$$

eine Lösung ist, und bestimmen Sie die *Kohärenzlänge*  $\xi$ .

- (e) Nehmen Sie an,  $\psi$  sei homogen (also konstant), und zeigen Sie, dass  $F(\psi, \vec{A})$  stationär gegenüber lokalen Variationen des elektromagnetischen Potentials  $\vec{A}(x)$  ist, falls

$$\vec{j} \equiv \frac{\vec{\nabla} \times B}{\mu_0} \equiv \frac{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times A)}{\mu_0} = -\frac{q^2}{m}|\psi|^2\vec{A}. \quad (8)$$

Dies ist die *London-Gleichung*. Sie beschreibt das Potential  $\vec{A}$  innerhalb des Supraleiters und erklärt, warum Supraleiter Magnetfelder abschirmen: Weil Ströme im ungehindert (ohne Widerstand) fließen können, werden eindringende Magnetfelder durch kompensierende Ströme ausgeglichen (ähnlich wie elektrische Felder in Normalleitern durch Verschiebung der elektrischen Ladungen ausgeglichen werden).