Statistische Physik

Präsenzübung, Blatt 11 **WiSe 2018/19** **10.1.2019**

[P25] Bethe–Peierls Näherung für das Ising-Modell

Das Ising-Modell für ein Gitter aus Spinfreiheitsgraden ist durch den Hamiltonoperator $H_{\mathrm{exakt}} = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j$ gegeben, wobei $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ die z-Komponente des Spins am Gitterplatz i ist und die Summation über Paare (i, j) direkt benachbarter Gitterplätze läuft. Eine verbesserte Molekularfeldtheorie für dieses Modell lässt sich wie folgt konstruieren: Die Wechselwirkung eines ausgewählten Spins σ_0 mit seinen n direkten Nachbarn wird exakt behandelt. Den Wechselwirkungen dieser Nachbarn mit weiteren Gitterplätzen wird durch das Molekularfeld h' Rechnung getragen, welches nur auf die n Nachbarn $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ von σ_0 wirkt. Der resultierende Hamiltonoperator für den Spin σ_0 und seine direkten Nachbarn lautet also

$$H_{\mathrm{BP}} = -h' \sum_{j=1}^{n} \sigma_j - J \sum_{j=1}^{n} \sigma_0 \sigma_j = -(h' + J\sigma_0) \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \,. \tag{1}$$

Der Hamiltonoperator für das Gesamtsystem wir angenähert durch

$$H_{\mathrm{exakt}} \simeq \frac{N}{n+1} H_{\mathrm{BP}} \,. \tag{2}$$

Der exakte Hamiltonoperator H_{exakt} ist translationsinvariant, also sollte es keine Rolle spielen, welcher Spin σ_0 ausgewählt wird. Dies ergibt die Konsistenzbedingung $\langle \sigma_0 \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ (für beliebiges j), welche das Molekularfeld h' festlegt.

(a) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme $Z(h', \tau)$ für H_{BP} die Form $Z = Z_+ + Z_-$ hat, mit

$$Z_{\pm} = \left[2 \cosh \left(\frac{h' \pm J}{\tau} \right) \right]^n \,. \tag{3}$$

(b) Drücken Sie die Erwartungswerte $\langle \sigma_0 \rangle$ und $\langle \sigma_j \rangle$ als Funktionen von h' aus.

(c) Zeigen Sie, dass $h' = 0$ eine Lösung der Konsistenzbedingung $\langle \sigma_0 \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Konsistenzbedingung äquivalent ist zu

$$\frac{h'}{\tau} = \frac{n-1}{2} \ln \frac{\cosh(h'/\tau + J/\tau)}{\cosh(h'/\tau - J/\tau)} \,. \tag{4}$$

(e) Die Bedingung (4) hat eine nichttriviale Lösung, falls $\tau < \tau_{\mathrm{c}}$, mit einer Übergangstemperatur τ_{c}. Überprüfen Sie diese Feststellung, indem Sie die rechte Seite von (4) in h'/τ bis zur Ordnung $(h'/\tau)^3$ entwickeln. Finden Sie so Näherungen für τ_{c} sowie für h' nahe $\tau = \tau_{\mathrm{c}}$. Überzeugen Sie sich, dass die Reihenentwicklung für $\tau \simeq \tau_{\mathrm{c}}$ verlässlich ist und darum ein sinnvolles Ergebnis liefert.