Lösungen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1: Physikalische Level-Zwei-Zustände

Für Level-zwei-Zustände ($N = 2$) des offenen und geschlossenen Strings lautet die Massen-schalen-Bedingung mit $a = 1, k_{int}^2 + w^2 = 0$:

$$\frac{\alpha'}{\beta^2}M^2 = -\frac{\alpha'}{\beta^2}k^2 = -\frac{1}{2}\alpha_0^2 = 1. \tag{1}$$

Der allgemeinste rechtslaufende Zustand in kovarianter Quantisierung ist gegeben durch

$$|\beta, \epsilon, k\rangle = (\beta_{\mu\nu}\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu} + \epsilon_{\mu}\alpha_{-2}^{\mu})|k\rangle. \tag{2}$$

Dieser Zustand ist physikalisch, wenn er die Bedingungen $L_1|\beta, \epsilon, k\rangle = 0$ und $L_2|\beta, \epsilon, k\rangle = 0$ erfüllt. Anwenden von L_1 und L_2 auf $|\beta, \epsilon, k\rangle$ ergibt

$$\begin{aligned}
L_1|\beta, \epsilon, k\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} :\alpha_{1-m}\cdot\alpha_m: (\beta_{\mu\nu}\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu} + \epsilon_{\mu}\alpha_{-2}^{\mu})|k\rangle \\
&= (\beta_{\mu\nu}\alpha_0\cdot\alpha_1\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu} + \epsilon_{\mu}\alpha_{-1}\cdot\alpha_2\alpha_{-2}^{\mu})|k\rangle \\
&= (\beta_{\mu\nu}(\alpha_0^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu} + \alpha_{-1}^{\mu}\alpha_0^{\nu}) + 2\epsilon_{\mu}\alpha_{-1}^{\mu})|k\rangle \\
&= 2(\beta_{\mu\nu}\alpha_0^{\nu} + \epsilon_{\mu})\alpha_{-1}^{\mu}|k\rangle \\
&\overset{!}{=} 0 && (3) \\
L_2|\beta, \epsilon, k\rangle &= \left(\frac{1}{2}\beta_{\mu\nu}\alpha_1\cdot\alpha_1\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu} + \epsilon_{\mu}\alpha_0\cdot\alpha_2\alpha_{-1}^{\mu}\right)|k\rangle \\
&= (\beta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} + 2\epsilon_{\mu}\alpha_0^{\mu})|k\rangle \\
&\overset{!}{=} 0 && (4)
\end{aligned}$$

Daraus liest man die folgenden Bedingungen an β, ϵ ab:

$$\beta_{\mu\nu}\alpha_0^{\nu} + \epsilon_{\mu} = 0 \tag{5}$$
$$\beta_{\mu}{}^{\mu} + 2\epsilon_{\mu}\alpha_0^{\mu} = 0 \tag{6}$$

Aufabe 2: Marginale Zustände auf Level zwei

Mit derselben Methode schreiben wir die marginalen Zustände explizit aus:

$$\begin{aligned}
L_{-1}\lambda\cdot\alpha_{-1}|k\rangle &= (\alpha_0\cdot\alpha_{-1} + \alpha_{-2}\cdot\alpha_1)\lambda\cdot a_{-1}|k\rangle \\
&= \left(\lambda_{\mu}\alpha_{0\nu}\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu} + \lambda_{\mu}\alpha_{-2}^{\mu}\right)|k\rangle && (7) \\
L_{-2}\gamma L_{-1}L_{-1}|k\rangle &= \alpha_0\cdot\alpha_{-2} + \frac{1}{2}\alpha_{-1}\cdot\alpha_{-1} + \gamma(\alpha_{-2}\cdot\alpha_1 + \alpha_0\cdot\alpha_{-1})\alpha_0\cdot\alpha_{-1}|k\rangle \\
&= \left((1+\gamma)\alpha_{0\mu}\alpha_{-2}^{\mu} + \left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} + \gamma\alpha_{0\mu}\alpha_{0\nu}\right)\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu}\right)|k\rangle && (8)
\end{aligned}$$

Vergleich mit Gleichung (2) ergibt die gesuchten Ausdrücke für β und ϵ:

$$\left(\beta_{marg}\right)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\lambda_\mu \alpha_{0\nu} + \lambda_\nu \alpha_{0\mu}) \qquad \left(\epsilon_{marg}\right)_\mu = \lambda_\mu \tag{9}$$

$$\left(\beta_{marg}\right)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} + \gamma \alpha_{0\mu}\alpha_{0\nu} \qquad \left(\epsilon_{marg}\right)_\mu = (1+\gamma)\alpha_{0\mu} \tag{10}$$

Aufabe 3: Null-Zustände auf Level zwei

Es bleibt zu bestimmen, unter welchen Bedingungen diese Zustände Nullzustände sind. Um die Bedingung $L_1(L_{-1}\lambda \cdot \alpha_{-1})|k\rangle = 0$ auszuwerten, setzen wir Gleichung (9) in Gleichung (5) ein und multiplizieren mit α_0^μ. Das ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(\lambda_\mu \alpha_{0\nu} + \lambda_\nu \alpha_{0\mu})\alpha_0^\nu \alpha_0^\mu + \lambda_\mu \alpha_0^\mu \\ &= \lambda \cdot \alpha_0 \left(\alpha_0^2 + 1\right) \\ &= -\lambda \cdot \alpha_0 \end{aligned} \tag{11}$$

Das gleiche Ergebnis, $\lambda \cdot \alpha_0 = 0$, bekommt man aus der Bedingung $L_2(L_{-1}\lambda \cdot \alpha_{-1})|k\rangle = 0$, indem man Gleichung (9) in Gleichung (6) einsetzt. Für die Bedingungen an die Zustände $L_1(L_{-2} + \gamma L_{-1}L_{-1})|k\rangle$ setzen wir Gleichung (10) in Gleichung (5), multiplizieren mit α_0^μ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} + \gamma\alpha_{0\mu}\alpha_{0\nu}\right)\alpha_0^\mu \alpha_0^\nu + (1+\gamma)\alpha_{0\mu}\alpha_0^\mu \\ &= \left(\frac{3}{2} + \gamma\right)\alpha_0^2 + \gamma\alpha_0^4 \\ &= 3 - 2\gamma \end{aligned} \tag{12}$$

Mit Gleichungen (10), (6) und dem eben ausgerechneten Ergebnis (12) erhalten wir schließlich die Bedingung für $L_2(L_{-2} + \gamma L_{-1}L_{-1})|k\rangle = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2}\eta_\mu{}^\mu + \gamma\alpha_0^2\right) + 2(1+\gamma)\alpha_0^2 \\ &= \frac{D}{2} - 2(3\gamma + 2) \\ &= \frac{D}{2} - 13. \end{aligned} \tag{13}$$