Veneziano-Amplitude, Vier-Tachyon-Streuung

Die Tree-level Amplitude einer Vier-Tachyon-Streuung ist wie folgt gegeben [1]:

$$A_4^{tree}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \int_{y_4}^{y_2} dy_3 (y_1-y_2)(y_1-y_4)(y_2-y_4)\langle 0|V(y_1)V(y_2)V(y_3)V(y_4)|0\rangle \quad (1)$$

mit $y_1 > y_2 > y_3 > y_4$ geordnet und den Vertexoperatoren

$$V(y) =: e^{ik\cdot X} : (y). \quad (2)$$

1. Berechnen Sie vorerst den Erwartungswert

$$\langle 0| : e^{ik_1\cdot X} : (y_1) : e^{ik_2\cdot X} : (y_2)|0\rangle \quad (3)$$

Hinweis: Die normalgeordnete Exponentialfunktion für den offenen String ist

$$: e^{ik\cdot X} : (y) \ = e^{ik\cdot X_<} e^{ik\cdot q} y^{2\alpha' k\cdot p} e^{ik\cdot X_>}, \quad (4)$$

wobei die Fourierzerlegung für $\sigma = 0$ sich vereinfacht zu

$$k\cdot X_< = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n>0}\frac{-i}{n} k\cdot\alpha_{-n} y^n \qquad \text{und} \qquad k\cdot X_> = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n>0}\frac{i}{n} k\cdot\alpha_n y^{-n}. \quad (5)$$

2. Allgemein ergibt sich für das Produkt beliebig vieler normalgeordneter Exponentialfunktionen obiger Art:

$$\langle 0|\prod_{i=1}^{N} : e^{ik_i\cdot X} : (y)|0\rangle = \prod_{i<j}(y_i-y_j)^{2\alpha' k_i\cdot k_j} \qquad \text{mit } y_i > y_{i+1} \text{ sowie } \sum_i k_i = 0. \quad (6)$$

Verwenden Sie dieses und die obigen Ergebnisse, um die Amplitude $A_4^{tree}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ zu bestimmen. Vereinfachen Sie den Ausdruck, indem Sie die $SL(2)$-Invarianz ausnutzen, um

$$y_1 = \infty, \qquad y_2 = 1, \qquad y_4 = 0 \quad (7)$$

zu fixieren. Drücken Sie die Impulse $k_i \cdot k_j$ durch die Mandelstam-Variablen s und t aus, die wie folgt definiert sind:

$$2\alpha' k_2\cdot k_3 = \alpha'(k_2+k_3)^2 - 2 = -\alpha' t - 2, \quad (8)$$
$$2\alpha' k_3\cdot k_4 = \alpha'(k_3+k_4)^2 - 2 = -\alpha' s - 2. \quad (9)$$

Schreiben Sie die Amplitude als Integral über die verbleibende Variable $y_3 \equiv x \in [0,1]$.

[1] Die Gesamtamplitude ergibt sich als die Summe über nicht-zyklische Permutationen der Argumente dieser Einzelamplitude mal einen Faktor, der die Kopplungskonstante enthält.