## Clifford-Algebren und Spinordarstellungen der Lorentzgruppe

Zeigen Sie, dass die Operatoren $\Sigma^{ab} := \frac{i}{4}[\Gamma^a, \Gamma^b]$ eine Spinordarstellung der Lorentzgruppe $SO(1, d-1)$ erzeugen, wenn die $\Gamma^a$ die Antivertauschungsrelationen der Cliffordalgebra erfüllen:

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\eta^{ab}, \qquad a, b = 0, 1, \ldots, d-1 \tag{1}$$

1. Zeigen Sie zuerst nur unter Verwendung von (1), dass folgende Relation erfüllt ist:

   $$[\Sigma^{ab}, \Gamma^c] = i\left(\Gamma^a \eta^{bc} - \Gamma^b \eta^{ac}\right).$$

   **Hinweis:** Es gilt $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$.

2. Zeigen Sie mit obigem Ergebnis, dass die Matrizen $\Sigma^{ab}$ eine Darstellung der Lorentzalgebra bilden:

   $$[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}] = i\left(\eta^{bc}\Sigma^{ad} - \eta^{ac}\Sigma^{bd} - \eta^{bd}\Sigma^{ac} + \eta^{ad}\Sigma^{bc}\right). \tag{2}$$

3. Prüfen Sie nun, dass die $\Sigma^{ab}$ tatsächlich eine *Spinor*darstellung der Lorentzgruppe erzeugen. Berechnen Sie dazu den Drehoperator in der $(x^1, x^2)$-Ebene,

   $$\Lambda(\theta) = \exp(i\theta\Sigma^{12}),$$

   wobei $\theta$ der (endliche) Drehwinkel ist. Benutzen Sie (1), um das Matrixexponential auszuwerten und zeigen Sie, dass

   $$\Lambda(\theta) = \mathbf{1} f(\theta) + \Sigma^{12} g(\theta),$$

   mit Funktionen $f(\theta)$ und $g(\theta)$ gilt. Bestimmen Sie $f(\theta)$ und $g(\theta)$.

4. Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus Teil 3, dass $\Lambda(\theta = 2\pi) = -\mathbf{1}$, also dass es sich wirklich um eine Spinordarstellung handelt.

## Majorana-Bedingung

In geraden Dimensionen $d$ sind die Darstellungsmatrizen $\Gamma^a$ der Clifford-Algebra $Cl(d-1, 1)$ äquivalent zu ihren komplex Konjugierten $\pm\Gamma^{a*}$, d.h. es gibt eine Matrix $B$, sodass

$$\Gamma^{a*} = \eta B \Gamma^a B^{-1} \tag{3}$$

mit $\eta = \pm 1$.

1. Benutzen Sie Gleichung (3) und Schurs Lemma, um zu zeigen, dass $B^*B$ proportional zur Identität ist:
$$B^*B = \epsilon \mathbf{1} \tag{4}$$
für ein $\epsilon \in \mathbb{C}$.

2. Benutzen Sie Gleichung (4) und die Normierung $|\det B| = 1$, um zu zeigen, dass $\epsilon$ die Werte $\pm 1$ annimmt.

3. In ungeraden Dimensionen $d$ konstruiert man Darstellungen der Cliffordalgebra, indem man zu den Matrizen $\Gamma^a, a = 0, 1, ...d-2$, eine weitere Matrix
$$\Gamma := (-i)^{\frac{d+1}{2}} \Gamma^0 \Gamma^1 \cdots \Gamma^{d-2} \tag{5}$$
hinzunimmt. Um die Majoranabedingung an die Darstellungen stellen zu können, muss diese Matrix ebenfalls eine Bedingung wie in Gleichung (3) erfüllen. Zeigen Sie unter Verwendung von (5) und (3), dass $\Gamma$ die Bedingung
$$\Gamma^* = (-1)^{\frac{d+1}{2}} B \Gamma B^{-1} \tag{6}$$
erfüllt.

## Diracmatrizen in vier Dimensionen

Die Diracmatrizen in $d = 2k+2$ Dimensionen können nach folgender Vorschrift aus den Diracmatrizen in $d = 2$ Dimensionen konstruiert werden:

$$d = 2: \qquad \Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$
$$d = 2k+2: \qquad \Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu = 0, 1, ...d-3 \tag{8}$$
$$\Gamma^{d-2} = \mathbf{1}_{2^k \times 2^k} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$
$$\Gamma^{d-1} = \mathbf{1}_{2^k \times 2^k} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$\gamma^\mu$ bezeichnen dabei die Dirac-Matrizen in $d-2$ Dimensionen.

1. Zeigen Sie, dass $\Gamma^0$ und $\Gamma^1$ die Clifford-Relationen erfüllen, dass sie also eine mögliche Wahl von Erzeugern in $d = 2$ sind.

2. Berechnen Sie $\Gamma$ für $d = 3$.

3. Konstruieren Sie nach obiger Vorschrift die Dirac-Matrizen in vier Dimensionen.