

Aufgabe 10: Feldinhalt von Superstring-Theorien

Bestimmen Sie den bosonischen Feldinhalt von Typ-IIA-Stringtheorie, also die Zerlegung der Produkte $\mathbf{8}_v \otimes \mathbf{8}_v$ und $\mathbf{8}_s \otimes \mathbf{8}_c$ in irreduzible $SO(8)$ -Darstellungen. Betrachten Sie zunächst das Produkt $\mathbf{8}_v \otimes \mathbf{8}_v$:

1. Ein beliebiger n -dimensionaler Rang-2-Tensor zerfällt unter $SO(n)$ -Wirkung in drei irreduzible Darstellungen:

$$M_{ij} = \underbrace{M_{(ij)} - \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta^{mn} M_{mn}}_{\text{symmetrisch, spurfrei}} + \underbrace{M_{[ij]}}_{\text{antisymmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{n} \delta_{ij} \delta^{mn} M_{mn}}_{\text{Spur}} \quad (1)$$

Die Erzeuger Λ_i^k der $SO(n)$ wirken auf diesen Tensor als

$$\widetilde{M}_{ij} = \Lambda_i^k \Lambda_j^l M_{kl}. \quad (2)$$

Mit der Zerlegung aus Gleichung (1) erhält man die irreduziblen Komponenten der Tensor Darstellung. Zeigen Sie, dass die Spurkomponente und die antisymmetrische Komponente tatsächlich invariant unter $SO(n)$ -Wirkung sind.

2. Zerlegen Sie mit diesem Wissen das Tensorprodukt $\mathbf{8}_v \otimes \mathbf{8}_v$ in eine Summe aus irreduziblen $SO(8)$ -Darstellungen. Benennen Sie die Darstellungen nach ihrer Dimension.
3. Das Produkt zweier $SO(8)$ -Spinoren $\psi_a \in \mathbf{8}_s$ und $\lambda_b \in \mathbf{8}_c$ zerfällt unter $SO(8)$ -Wirkung folgendermaßen in antisymmetrische Tensoren:

$$\psi_a \lambda_b = \sum_p (\gamma^{i_1 \dots i_p} C^{-1})_{ab} \psi C \gamma_{i_1 \dots i_p} \lambda \quad (3)$$

Dabei bezeichnet C die Ladungskonjugationsmatrix und $\gamma_{i_1 \dots i_p}$ ein antisymmetrisches Produkt aus p γ -Matrizen. Die Koeffizienten $(\gamma^{i_1 \dots i_p} C^{-1})_{ab}$ sind 8×8 -Matrizen. In einer geeigneten Basis zerfällt die 16-dimensionale Majorana-Weyl-Darstellung in $10D$ folgendermaßen in diese 8-dimensionalen Blöcke:

$$(\gamma^{i_1 \dots i_p} C^{-1})_{AB} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{ab}^{i_1 \dots i_p} \\ \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^{i_1 \dots i_p} & 0 \end{pmatrix}, p \text{ ungerade} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{ab}^{i_1 \dots i_p} & 0 \\ 0 & \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^{i_1 \dots i_p} \end{pmatrix}, p \text{ gerade} \end{cases} \quad (4)$$

Wir benutzen die Indexnotation: $A = (a, \dot{a})$, um die gepunkteten und ungepunkteten Indizes zusammenzufassen. Mit dieser Zerlegung kann man die Summe über p in Gleichung (3) genauer beschreiben. Welche Summanden treten auf? Bezeichnen Sie die irreduziblen Darstellungen wieder mit ihrer Dimension.

4. Wie sieht die Summe in Typ-IIB-Theorie aus (Zerlegung von $\mathbf{8}_s \otimes \mathbf{8}_s$)?

Aufgabe 11: Zustandssumme für Typ-I-Theorie

Die Zustandssumme für Typ I-Zustände wird beschrieben durch die erzeugende Funktion

$$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+w^n}{1-w^n} \right)^8, \quad (5)$$

wobei d_n die Anzahl der Zustände mit Masse $\alpha' M^2 = n - 1$ bezeichnet. Entwickeln Sie $G(w)$ bis zur Ordnung w^2 .