Einführung in die Stringtheorie

Übung, Blatt 11 **SS 06 07.07.06**

[P21] Geistkorrelationsfunktion

Berechnen Sie die Korrelationsfunktion dreier Geistfelder im SL(2)-invarianten Vakuum, die am Rand $\sigma = 0$ des offenen Strings eingesetzt werden, also

$$\langle 0|c(\tau_1)c(\tau_2)c(\tau_4)|0\rangle \ .$$

Zeigen Sie, dass mit $y_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_k}$ das Ergebnis auf die Form

$$\langle 0|c(\tau_1)c(\tau_2)c(\tau_4)|0\rangle \ = \ \frac{(y_1-y_2)(y_1-y_4)(y_2-y_4)}{y_1\ y_2\ y_4}$$

gebracht werden kann. Verwenden Sie

$$c(\tau) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau} \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, y^{-n} \qquad \text{und} \qquad \langle 0|c_{-1}\ c_0\ c_1|0\rangle = 1 \ .$$

[P22] Veneziano-Amplitude, Vier-Tachyon-Streuung

Die Tree-level Amplitude einer Vier-Tachyon-Streuung ist wie folgt gegeben[1]:

$$A_4^{\mathrm{tree}}(k_1,k_2,k_4,k_4) \ = \ \int_{\tau_4}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau_3\ \langle 0|cV^X(\tau_1)\ cV^X(\tau_2)\ V^X(\tau_3)\ cV^X(\tau_4)|0\rangle \ ,$$

mit $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4$ geordnet und den Vertexoperatoren

$$V^X(\tau) \ = \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\, :\!\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot X(\tau)}\!: \ = \ y\, :\!\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot X(\tau)}\!: \ .$$

(a) Berechnen Sie vorerst den Erwartungswert

$$\langle 0|\, :\!\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\cdot X(\tau_1)}\!:\ :\!\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2\cdot X(\tau_2)}\!:\, |0\rangle \ .$$

Hinweis: Die normalgeordnete Exponentialfunktion für den offenen String ist

$$:\!\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot X(\tau)}\!: \ = \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot X_<}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot q}\ y^{2\alpha' k\cdot p}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot X_>} \ ,$$

wobei die Fourierzerlegung für $\sigma = 0$ sich vereinfacht zu

$$k\cdot X_< \ = \ \sqrt{2\alpha'} \sum_{n>0} \frac{-i}{n}\, k\cdot\alpha_{-n}\, y^n \qquad \text{und} \qquad k\cdot X_> \ = \ \sqrt{2\alpha'} \sum_{n>0} \frac{i}{n}\, k\cdot\alpha_n y^{-n} \ .$$

(b) Allgemein ergibt sich für das Produkt beliebig vieler normalgeordneter Exponentialfunktionen obiger Art:

$$\langle 0|\prod_{i=1}^{N} :\!\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i\cdot X(\tau_i)}\!:\, |0\rangle \ = \ \delta(k_1+k_2+\ldots+k_N)\ \prod_{i<j}(y_i-y_j)^{2\alpha' k_i\cdot k_j} \qquad \text{mit} \quad y_i > y_{i+1} \ .$$

Verwenden Sie dieses und die obigen Ergebnisse, um die Amplitude $A_4^{\mathrm{tree}}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ zu bestimmen. Vereinfachen Sie diesen Ausdruck, indem Sie die SL(2)-Invarianz ausnutzen, um

$$y_1 = \infty \ , \quad y_2 = 1 \ , \quad y_4 = 0$$

zu fixieren, und integrieren Sie über die verbleibende Variable $y_3 \equiv x \in [0,1]$.

Vorlesung: O. Lechtenfeld - Übungen: R. Wimmer

[1] Die Gesamtamplitude ergibt sich als die Summe über nicht-zyklische Permutationen der Argumente dieser Einzelamplitude mal einen Faktor, der die Kopplungskonstante enthält.