# Einführung in die Stringtheorie

**Übung, Blatt 2** **SS 06 28.04.06**

**[P3] Konforme Flachheit von Riemann-Flächen**

In der Vorlesung wurde argumentiert, dass die Reparametrisierungsinvarianz in zwei Dimensionen ausreicht, um die Metrik lokal, d.h. in einer Koordinaten-Umgebung (*patch*), auf konform flache Gestalt zu bringen. In euklidischer Signatur hat man also

$$g_{\alpha\beta} = \lambda(x,y)\delta_{\alpha\beta} \ .$$

Beweisen Sie diese Aussage. Gehen Sie dazu von einer allgemeinen Metrik mit Komponenten $g_{\alpha\beta}$ aus und zeigen Sie, dass diese in zwei Dimensionen „faktorisiert“:

$$g = \tfrac{1}{2}(\omega \otimes \bar{\omega} + \bar{\omega} \otimes \omega) \ ,$$

wobei $\omega$ eine (komplexe) Eins-Form ist. Das Linienelement schreibt sich dann

$$ds^2 = \omega\bar{\omega} \ .$$

Des weiteren verwenden Sie die Tatsache, dass in zwei Dimensionen ein *integrierender Faktor* $\mu$ existiert. Dies heißt, dass es zu einer gegebenen Eins-Form [1] $\omega = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$ eine nichtverschwindende Funktion $\mu(x,y)$ gibt, mit der $\mu\omega$ lokal exakt wird, also

$$\mu\omega = \mathrm{d}u(x,y) \ .$$

Anders ausgedrückt: Die folgende Differentialgleichung besitzt eine Lösung:

$$\alpha\frac{\partial\mu}{\partial y} - \beta\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) \ .$$

Wenden Sie das Ergebnis auf die Sphäre mit der Standardmetrik

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

an. Wie sieht die zugehörige Koordinatentransformation aus?

**[P4] Virasoro-Zwangsbedingungen, Variation nach der Metrik**

Zeigen Sie, dass für die Variation der Metrik folgende Identitäten gelten:

$$\delta h_{\alpha\beta} = -h_{\alpha\rho}h_{\beta\lambda}\delta h^{\rho\lambda} \quad , \quad \delta h = -h h_{\alpha\beta}\delta h^{\alpha\beta} \ ,$$

wobei $h$ die Determinante von $h_{\alpha\beta}$ ist. Verwenden Sie $\ln(det\ h_{\alpha\beta}) = tr(\ln h_{\alpha\beta})$. Verwenden Sie diese Identitäten um die Virasoro-Zwangsbedingungen herzuleiten:

$$\alpha' T_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\rho\lambda}\gamma_{\alpha\beta} = 0 \ ,$$

wobei

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{\sqrt{-h}}\frac{\delta S_0}{\delta h^{\alpha\beta}}$$

und $S_0$ die Polyakov-Wirkung ist.

*Vorlesung: O. Lechtenfeld - Übungen: R. Wimmer*

[1] Die Komponenten $\alpha, \beta$ müssen in der Koordinatenumgebung stetig differenzierbar und $|\alpha| + |\beta| > 0$ sein. (Kamke, Differentialgleichungen).