Theoretische Physik C **(Abgabe bis 22. Januar 2021, 23:59)**

Hausübung 12

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Zählen und dessen Asymptotik (3+2=5 Punkte)

[HÜ 1.1] Zählen Sie die Anzahl der Möglichkeiten $\Gamma(N, M)$,

1. N unterscheidbare Teilchen auf M verschiedene und mehrfach besetzbare Zustände zu verteilen,
2. N unterscheidbare Teilchen auf M verschiedene und nur einfach besetzbare Zustände zu verteilen,
3. N ununterscheidbare Teilchen auf M verschiedene und nur einfach besetzbare Zustände zu verteilen.

[HÜ 1.2] Benutzen Sie die Stirling-Formel $\ln(k!) \approx k \ln(k) - k$, um die Asymptotik ($N, M \gg 1$ aber $z = N/M$ endlich) der obigen Resultate zu berechnen. Bringen Sie $\Gamma(N, M)$ in die Form $\mathrm{e}^{-Mf(N,M)}$ und bestimmen Sie $\lim_{M\to\infty} f(N = zM, M)$.

Aufgabe 2: Spins im Magnetfeld (1+1+1+1+1=5 Punkte)

Betrachten Sie das kanonische Ensemble bestehend aus N wechselwirkungsfreien und räumlich fixierten (d.h. unterscheidbaren) Spin-1/2 Teilchen. Diese befinden sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}) = B\,\vec{e}_z$. Der Hamilton-Operator ist durch

$$H = -\gamma\, B \sum_{i=1}^{N} S_{iz}$$

gegeben, wobei γ eine positive Konstante ist.

[HÜ 2.1] Zeigen Sie, dass die Eigenzustände von H durch $|s_1, s_2 \ldots, s_N\rangle$ mit $s_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ gegeben sind.

Bemerkung: Wir nutzen die Notation $|s_1, s_2 \ldots, s_N\rangle := |s_1\rangle \otimes \cdots \otimes |s_N\rangle$. *Auf diese wirkt bekanntermaßen* S_{iz} *durch* $S_{iz}|s_1, s_2 \ldots, s_N\rangle = |s_1\rangle \otimes \cdots \otimes \frac{\hbar}{2}\,\sigma_z|s_i\rangle \otimes \cdots \otimes |s_N\rangle$.

[HÜ 2.2] Bestimmen Sie die möglichen Energien und deren Entartungsgrade.

Hinweis: Sei n *die Anzahl der nach oben ausgerichteten Spins. Können Sie die Energie durch* n *ausdrücken?*

[HÜ 2.3] Nutzen Sie Ihr Ergebnis, um die kanonische Zustandssumme bei einer Temperatur $T = 1/k_B\beta$ zu berechnen.

Hinweis: Nutzen Sie für die Summe den binomischen Lehrsatz $(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^{N-n} q^n$.

[HÜ 2.4] Berechnen Sie den Energieerwartungswert $\langle H \rangle$.

[HÜ 2.5] Die Magnetisierung ist durch $M = \langle \gamma \sum_{i=1}^{N} S_{iz} \rangle$ definiert. Zeigen Sie, dass

$$M = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

gilt. Berechnen Sie damit die Magnetisierung und diskutieren Sie die Fälle sehr hoher und sehr niedriger Temperaturen.