Theoretische Physik C **(Abgabe bis 29. Januar 2021, 23:59)**

Hausübung 13

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Entropiemaximierung (2+3=5 Punkte)

Betrachten Sie eine Zufallsvariable X, die nur diskrete Werte x_i mit Wahrscheinlichkeit w_i annimmt. Die *Shannon-Entropie* ist definiert durch

$$S = -\sum_i w_i \ln(w_i) \ .$$

[**HÜ 1.1**] Für welche Wahrscheinlichkeitsverteilung wird die Entropie ohne weitere Nebenbedingungen maximal?

[**HÜ 1.2**] Maximieren Sie die Entropie unter den Nebenbedingungen

$$\langle E \rangle = \sum_i E_i \, w_i \stackrel{!}{=} \bar{E}$$

$$\langle N \rangle = \sum_i n_i \, w_i \stackrel{!}{=} \bar{N} \,,$$

wobei $E_i = E(x_i)$ und $n_i = N(x_i)$ ist, wogegen $\bar{E}$ und $\bar{N}$ positive Konstanten seien.

Hinweis: Zur Bearbeitung beider Aufgaben ist die Methode der Lagrange-Multiplikatoren nützlich. Auf einen Beweis, dass der Extrempunkt tatsächlich ein Maximum ist, dürfen Sie verzichten.

Aufgabe 2: Ideales einatomiges Gas (1+2+2=5 Punkte)

Die kanonische Zustandssumme eines klassischen idealen einatomigen Gases bestehend aus N Teilchen der Masse m in einem Volumen V ist durch

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \quad \text{mit} \quad \lambda = \hbar\sqrt{\frac{2\pi}{m k_B T}}$$

gegeben.

[**HÜ 2.1**] Berechnen Sie zunächst die mittlere Energie des Gases und zeigen Sie so die kalorische Zustandsgleichung

$$\bar{E} = \frac{3}{2} N k_B T \,.$$

[**HÜ 2.2**] Berechnen Sie die Entropie des Gases. Nähern Sie Ihr Ergebnis für große Teilchenzahlen $N \gg 1$ mithilfe der Stirling-Formel.

[**HÜ 2.3**] Nutzen Sie Ihr Ergebnis, um den Druck mit Hilfe von

$$p = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{\bar{E},N}$$

zu bestimmen. Zeigen Sie damit die ideale Gasgleichung $p\,V = N\,k_B\,T$.