Theoretische Physik C **(Abgabe bis 11. Dezember 2020, 23:59)**

Hausübung 8

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Modell für H_2^+-Ion (1+1+1+2=5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im doppelten δ-Potential

$$V(x) = -V_0 \, \big(\delta(x+a) + \delta(x-a)\big)$$

mit $V_0 > 0$ und $a > 0$. Dies ist ein einfaches Modell für das H_2^+-Ion. Wir wollen in dieser Aufgabe untersuchen, wie viele gebundene Zustände, also solche mit $E < 0$, es gibt.

[HÜ 1.1] Wie lauten die (Un-)Stetigkeitsbedingungen und Randbedingungen für physikalische Lösungen der stationären Schrödingergleichung?

[HÜ 1.2] Machen Sie den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x), & x < -a \\ \psi_{II}(x), & -a \le x \le a \\ \psi_{III}(x), & x > a \end{cases}$$

und finden Sie so die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung in allen 3 Bereichen. Sortieren Sie unphysikalische Lösungen aus. Sie sollten dabei

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\kappa x}, & x < -a \\ Be^{-\kappa x} + Ce^{\kappa x}, & -a \le x \le a \\ De^{-\kappa x}, & x > a \end{cases}$$

erhalten.

[HÜ 1.3] Das Potential ist symmetrisch $V(x) = V(-x)$, und somit kommutiert H mit dem Paritätsoperator. Zeigen Sie, dass Sie $\psi_{II}(x) = B_+ \cosh(\kappa x) + B_- \sinh(\kappa x)$ schreiben können. Begründen Sie damit die Ansätze

$$\psi_+(x) = \begin{cases} A_+ e^{\kappa_+ x}, & x \le -a \\ B_+ \cosh(\kappa_+ x), & -a \le x \le a \\ A_+ e^{-\kappa_+ x}, & x > a \end{cases} \quad \text{und} \quad \psi_-(x) = \begin{cases} -A_- e^{\kappa_- x}, & x < -a \\ B_- \sinh(\kappa_- x), & -a \le x \le a \\ A_- e^{-\kappa_- x}, & x \ge a \end{cases}$$

für gerade und ungerade Lösungen der Schrödingergleichung.

[HÜ 1.4] Werten Sie die Anschlussbedingungen aus und zeigen Sie, dass es gebundene Eigenzustände gibt, falls

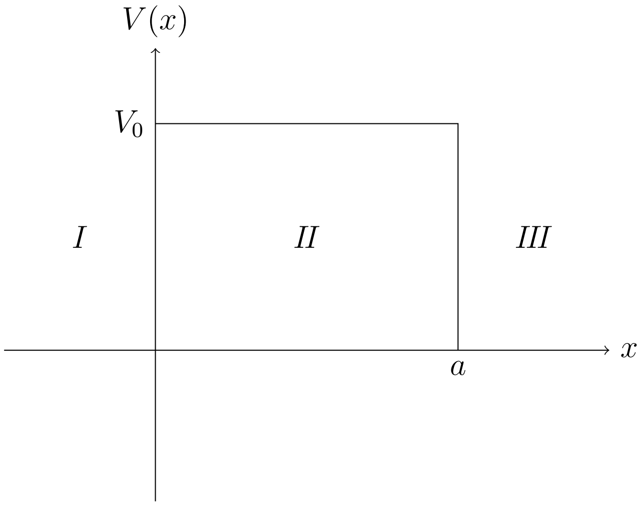
$$\frac{\kappa_+\hbar^2}{mV_0} = 1 + \exp(-2\kappa_+ a) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\kappa_-\hbar^2}{mV_0} = 1 - \exp(-2\kappa_- a)$$

gilt. Diskutieren Sie die Lösbarkeit dieser Gleichungen und damit die Existenz von gebundenen Zuständen graphisch. Unter welchen Bedingungen existieren gerade bzw. ungerade Eigenzustände. Lösen Sie die Gleichungen für die Grenzwerte $a \to 0$ und $a \to \infty$.

Aufgabe 2: Potentialschwelle

(3+1+1=5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m wird von $x = -\infty$ kommend an der abgebildeten Potentialschwelle gestreut. Unterscheiden Sie im folgenden die Fälle $E \geq V_0$ und $0 < E < V_0$.



Setzen Sie an:

$$\psi_I(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \ , \quad \psi_{II}(x) = ? \ , \quad \psi_{III}(x) = t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad \text{mit} \quad k^2 = 2mE/\hbar^2 \ .$$

[HÜ 2.1] Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung in den drei Bereichen $I-III$. Berücksichtigen Sie die Anschlussbedingungen beim Übergang zwischen den drei Bereichen.

[HÜ 2.2] Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten T und den Reflexionskoeffizienten R. Zeigen Sie, dass $R + T = 1$.

[HÜ 2.3] Welche Werte bekommen T und R bei $E \to \infty$, $E \to 0$ und $a\sqrt{2m(E-V_0)} = n\pi\hbar$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. (Resonanzstreuung)?