

Präsenzübung 11

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Austauschwechselwirkung

Das Symmetrisierungspostulat für identische Teilchen hat messbare Auswirkungen. In dieser Aufgabe vollziehen wir die sogenannte Austauschwechselwirkung nach, die im eigentlichen Sinne keine Wechselwirkung ist, sondern eine unmittelbare Konsequenz aus dem Symmetrisierungspostulat.

Betrachten Sie zunächst zwei unterscheidbare Teilchen in einer Dimension, wobei sich das erste im Zustand $|\phi\rangle$ und das zweite im dazu orthonormalen Zustand $|\xi\rangle$ befinde. Der Gesamtzustand ist also $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\xi\rangle$.

[PÜ 1.1] Berechnen Sie den mittleren quadratischen Abstand der Teilchen, also $\langle (X_1 - X_2)^2 \rangle$.

Betrachten Sie nun zwei identische Bosonen in einer Dimension in denselben Zuständen. Da es sich um identische Bosonen handelt, ist der obige Zustand $|\psi\rangle$ nicht mit dem Symmetrisierungspostulat vereinbar.

[PÜ 1.2] Geben Sie den symmetrisierten Zustand an. Berechnen Sie auch in diesem Fall den mittleren quadratischen Abstand. Zeigen Sie, dass er kleiner ist als für unterscheidbare Teilchen. Es scheint also, als würden sich Bosonen gegenseitig anziehen. Auch wenn dies lediglich ein Resultat der Symmetrisierung ist, nennt man diesen Effekt Austauschwechselwirkung.

[PÜ 1.3] Nehmen Sie nun an, dass zwei identische Fermionen vorliegen und wiederholen Sie die entsprechenden Schritte aus dem vorherigen Aufgabenteil. Fermionen scheinen sich also abzustößeln. Was ergibt sich für $|\phi\rangle = |\xi\rangle$? Erklären Sie damit das Pauli-Prinzip.

[PÜ 1.4] Führen Sie obige Rechnungen konkret für zwei Teilchen in einem eindimensionalen harmonischen Oszillator durch. Dabei sei $|\phi\rangle := |0\rangle$ der Grundzustand und $|\xi\rangle := |1\rangle$ der erste angeregte Zustand.

Aufgabe 2: Zwei farbige Teilchen

Wir betrachten zwei nicht-wechselwirkende Teilchen, welche eine Eigenschaft „Farbe“ in den drei Ausprägungen R, G und B tragen können. Dementsprechend sind die Ein-Teilchen-Zustände Elemente eines drei-dimensionalen „Farbraums“ mit Basis $\{|\mathbf{R}\rangle, |\mathbf{G}\rangle, |\mathbf{B}\rangle\}$. Welche Dimension hat der Zwei-Teilchen-Zustandsraum, wenn es sich um (a) unterscheidbare Teilchen (b) identische Bosonen oder (c) identische Fermionen handelt? Beantworten Sie die Frage durch Angabe einer jeweiligen Basis.

Können Sie das Resultat verallgemeinern auf k Farben und n Teilchen?