Theoretische Physik C **(19. Januar 2021)**

Präsenzübung 12

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Poisson-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein durch die Wahrscheinlichkeit p charakterisiertes Ereignis bei N Versuchen genau n-mal auftritt, ist durch die Binomialverteilung

$$W_N(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

gegeben. In dieser Aufgabe untersuchen Sie diese Verteilung für sehr kleine Wahrscheinlichkeiten $p \ll 1$.

[PÜ 1.1] Nutzen Sie $\ln(1-p) = -p + O(p^2)$, um $(1-p)^{N-n} \approx \mathrm{e}^{-Np}$ zu zeigen.

[PÜ 1.2] Zeigen Sie, dass $N!/(N-n)! \approx N^n$ ist.

[PÜ 1.3] Zeigen Sie damit, dass sich die Binomialverteilung für $p \ll 1$ auf

$$W_N(n) \approx \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

reduziert, wobei $\lambda \equiv Np$ ist. Man nennt diese Verteilung die Poisson-Verteilung.

Aufgabe 2: Oszillator im kanonischen Ensemble

Betrachten Sie einen quantenmechanischen Oszillator, der schwach mit seiner Umgebung wechselwirkt, in der die Temperatur T herrsche. Die Wechselwirkung habe aber keinen Einfluss auf die Energieeigenwerte

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) .$$

Aufgrund der Wechselwirkung mit der Umgebung, die wie ein Wärmebad wirkt, behandeln wir das System im Rahmen des kanonischen Ensembles. Wie Sie nächste Woche lernen werden, ist $\beta = 1/k_B T$ die inverse Temperatur.

[HÜ 2.1] Berechnen Sie die Zustandssumme.

[HÜ 2.2] Berechnen Sie daraus die mittlere Energie $\langle H \rangle$ des Systems.

Hinweis: Differenzieren Sie die Zustandssumme nach β.

[HÜ 2.3] Berechnen Sie ferner die Streuung $\sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$ der Energie.

[HÜ 2.4] Untersuchen Sie Ihre Ergebnisse für tiefe und hohe Temperaturen, berechnen Sie also die Grenzwerte $T \to 0$ und $T \to \infty$. Sind sie plausibel?