Theoretische Physik C	(3. November 2020)

Präsenzübung 3

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Der Hilbertraum $\mathbb{C}^2$

In dieser Aufgabe studieren wir den Vektorraum $\mathbb{C}^2$. Dazu fixieren wir zwei Objekte, die wir mit $|1\rangle$ und $|2\rangle$ bezeichnen. Damit definieren wir $\mathbb{C}^2 := \{|1\rangle\, c_1 + |2\rangle\, c_2 \,|\, c_i \in \mathbb{C}\}$. Offensichtlich können Sie somit jeden Vektor identifizieren mit einem Zweitupel komplexer Zahlen. Für zwei Vektoren $|\psi\rangle = |1\rangle\, \psi_1 + |2\rangle\, \psi_2$ und $|\phi\rangle = |1\rangle\, \phi_1 + |2\rangle\, \phi_2$ sowie eine beliebige komplexe Zahl λ definiert man

$$|\psi\rangle + |\phi\rangle := |1\rangle(\psi_1 + \phi_1) + |2\rangle(\psi_2 + \phi_2)\,,$$
$$|\psi\rangle\, \lambda := |1\rangle\, \psi_1\, \lambda + |2\rangle\, \psi_2\, \lambda\,,$$

wodurch $\mathbb{C}^2$ zu einem Vektorraum wird.

Wir definieren ein Skalarprodukt

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}\,,\ (|\psi\rangle\,,\, |\phi\rangle) \mapsto \langle \psi | \phi \rangle$$

durch

$$\langle \psi | \phi \rangle := \sum_{i=1}^{2} \psi_i^*\, \phi_i\,.$$

Per Definition ist $\{|1\rangle\,,\, |2\rangle\}$ somit eine Orthonormalbasis.

[PÜ 1.1] Prüfen Sie dies nach. Berechnen Sie außerdem das Skalarprodukt der beiden Vektoren $|\psi\rangle = |1\rangle\,(1 - \mathrm{i}) + |2\rangle\, 2$ und $|\phi\rangle = |1\rangle\,(2 + 3\mathrm{i})$.

[PÜ 1.2] Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften für beliebige Vektoren $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$:

- Das Skalarprodukt ist linear im zweiten Argument.
- $\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^*$
- $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $|\psi\rangle$ der Nullvektor ist.

Die Zahl $\|\psi\| := \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ nennt man die Norm des Vektors $|\psi\rangle$.

Wir nutzen durchweg die sehr nützliche Bra-Ket-Notation. Mit $\langle\psi|$ wird der zum Vektor $|\psi\rangle$ duale Vektor bezeichnet. Dieser ist eine lineare Abbildung:

$$\langle\psi| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ |\phi\rangle \mapsto \langle\psi|\phi\rangle\,. \tag{0.1}$$

Ein Bra $\langle\psi|$ wartet also darauf, einen Vektor (=Ket) $|\phi\rangle$ vorgesetzt zu bekommen, und zusammen ergeben sie dann eine Zahl, nämlich das Skalarprodukt $\langle \psi | \phi \rangle$ (auf Englisch *bracket*=Klammer).

[PÜ 1.3] Gegeben sei ein beliebiger Vektor $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$.

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{2} |j\rangle\, \psi_j$$

Nutzen Sie das Skalarprodukt um eine Gleichung für die Koeffizienten $\psi_i \in \mathbb{C}$ zu bestimmen.

Hinweis: Betrachten Sie das Skalarprodukt $\langle i|\psi\rangle$.

Im Rahmen der Bra-Ket-Notation kann man auch das Objekt $|\psi\rangle\langle\phi|$ definieren (manchmal auch Ket-Bra genannt), das aus zwei Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ aus $\mathbb{C}^2$ die lineare Abbildung

$$|\psi\rangle\langle\phi| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ |\chi\rangle \mapsto |\psi\rangle\ \cdot\ \langle\phi|\chi\rangle$$

bildet. Beachten Sie, dass $\langle\phi|\chi\rangle$ einfach das Skalarprodukt (also eine Zahl) der beiden Vektoren $|\phi\rangle$ und $|\chi\rangle$ ist.

[PÜ 1.4] Schreiben Sie Ihr Ergebnis aus **[PÜ 1.3]** mithilfe von Ket-Bras um und folgern Sie:

$$\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{2} |i\rangle\langle i|.$$

Dieses Resultat ist offensichtlich für jede Orthonormalbasis gültig (warum?).

[PÜ 1.5] Es sei $\{|1'\rangle, |2'\rangle\}$ eine weitere Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$. Nutzen Sie Ihr Resultat, um einen Basiswechsel durchzuführen. Berechnen Sie dazu:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{2} \mathbb{1}|j\rangle\, \psi_j$$

und setzen Sie $\mathbb{1} = \sum\limits_{i=1}^{2} |i'\rangle\langle i'|$ ein. Basiswechsel können Sie also einfach durch Einfügen der Identität durchführen.

[PÜ 1.6] Wir wollen nun einen konkreten Basiswechsel durchführen. Als neue Basis wählen wir

$$\left\{ |1'\rangle := \Big(|1\rangle + |2\rangle\Big)\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ |2'\rangle := \Big(|1\rangle - |2\rangle\Big)\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Zeigen Sie zunächst, dass es sich hierbei um eine Orthonormalbasis handelt. Der Vektor $|\psi\rangle$ sei gegeben durch $|\psi\rangle = \Big(2|1\rangle - \mathrm{i}|2\rangle\Big)\frac{1}{\sqrt{5}}$. Drücken Sie diesen in der neuen Basis aus. Schreiben Sie also

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{2} |i'\rangle\, \psi'_i$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten ψ'_i.