Theoretische Physik C	**(1. Dezember 2020)**

Präsenzübung 7

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Diese Präsenzübung ist etwas technischer als sonst und macht Sie mit der δ-Funktion sowie der Fourier-Transformation vertraut.

Aufgabe 1: Die δ-Funktion

Die δ-Funktion ist definiert durch die Forderung, dass für jede Testfunktion (=mathematisch besonders gutartige Funktion, die im Unendlichen schnell gegen 0 läuft) f gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x-y) f(x) = f(y)\,.$$

Die δ-Funktion kann man sich vorstellen als einen unendlich schmalen und unendlich hohen Peak, der um den Wert y zentriert ist. Sie ist aber keine Funktion im eigentlichen Sinn, lässt sich aber als Grenzwert von Funktionen darstellen.

[PÜ 1.1] Skizzieren Sie die Funktion $\delta_\epsilon(x) := \frac{1}{\pi x}\sin(\frac{x}{\epsilon})$. Was passiert für $\epsilon \to 0$?

Man kann zeigen, dass tatsächlich $\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(x)$ gilt, d.h.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta_\epsilon(x-y) f(x) = f(y)\,.$$

[PÜ 1.2] Zeigen Sie

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\epsilon}^{1/\epsilon} \mathrm{d}k\, \cos(kx)\,.$$

[Pü 1.3] Setzen Sie $L = \frac{1}{\epsilon}$ und folgern Sie die Integraldarstellung der δ-Funktion:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

Aufgabe 2: Die Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation einer Funktion f ist definiert durch

$$\widetilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,.$$

[PÜ 2.1] Nutzen Sie Ihr Resultat aus der vorherigen Aufgabe, um die Fourier-Transformation der 1-Funktion $f(x) = 1$ zu bestimmen.

[PÜ 2.2] Berechnen Sie die Fourier-Transformation von $g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x}$ mit $\kappa \in \mathbb{R}$ sowie von $h(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$.

Hinweis: Nutzen Sie für das zweite Integral quadratische Ergänzung im Exponenten.

Aufgabe 3: Freies Teilchen mit scharfem Impuls

Die zeitabhängige Wellenfunktion eines freien Teilchens der Masse m kann bestimmt werden mittels

$$\psi(x,t) \equiv \langle x|\psi(t)\rangle = \int \mathrm{d}p\, \langle x|p\rangle \langle p|\psi(t)\rangle\,.$$

Berechnen Sie $\psi(x,t)$ für den Fall, dass das Teilchen zur Zeit $t = 0$ einen scharfen Impuls $p_0 = \hbar k_0$ hat, also

$$|\psi(0)\rangle = |p_0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle x|\psi(0)\rangle = \langle x|p_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp(\mathrm{i}k_0 x)\,.$$

Entwickeln Sie dazu $|\psi(t)\rangle$ nach den Eigenzuständen $|p\rangle$ des Hamilton-Operators $H = \frac{P^2}{2m}$ und verwenden Sie, dass

$$\langle p|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t E(p)\right) \langle p|\psi(0)\rangle\,.$$

Hinweise: $E(p) = ?\quad \langle p|p_0\rangle = ?$