Theoretische Physik C **(15. Dezember 2020)**

Präsenzübung 9

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Aufwärmübungen mit dem harmonische Oszillator

In dieser Aufgabe führen Sie kleine Fingerübungen zum eindimensionalen quantenmechanischen Oszillator aus und wiederholen einige Resultate aus der Vorlesung. Der Hamilton-Operator lautet:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \,.$$

[PÜ 1.1] Warum ist der harmonische Oszillator ein besonders wichtiges Beispiel für Quantensysteme? Überlegen Sie sich mögliche physikalische Anwendungen.

Zur Lösung der stationären Schrödingergleichung haben Sie die Leiteroperatoren a und $a^\dagger$ definiert:

$$\begin{aligned} a &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{X} + \mathrm{i}\tilde{P}\right) \\ a^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{X} - \mathrm{i}\tilde{P}\right) \,. \end{aligned}$$

Sie haben gelernt, dass $a|n\rangle = \sqrt{n}|n{-}1\rangle$ sowie $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n{+}1}|n{+}1\rangle$ gilt, wobei $|n\rangle$ der n-te normierte Eigenzustand von H ist.

[PÜ 1.2] Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle l|\Omega|m\rangle$ für $\Omega \in \{a, a^\dagger, X, P\}$ und finden Sie damit eine Matrixdarstellung der Operatoren.

Bemerkung: In der letzten Präsenzübung haben Sie zur Abschätzung der Vakuumsenergie verwendet, dass $\langle X\rangle = 0 = \langle P\rangle$ für alle Eigenzustände des Hamilton-Operators gilt. Dies haben Sie soeben noch einmal nachgewiesen.

Aufgabe 2: Separationsansatz

Bevor wir uns nächste Woche mit dreidimensionalen Problemen beschäftigen, machen wir uns näher mit einer wichtigen Rechentechnik vertraut, dem Separationsansatz.

Dazu betrachten wir ein Teilchen, das sich in zwei Raumdimensionen in einem Potential der Form $V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$ bewegt.

[PÜ 2.1] Wie lautet der Hamilton-Operator? Schreiben Sie ihn als $H = H_x + H_y$.

[PÜ 2.2] Verwenden Sie den Produktansatz

$$\psi(x,y) \equiv \langle x,y|\psi\rangle = \phi(x)\,\xi(y)$$

und separieren Sie damit die zeitabhängige Schrödingergleichung, d.h. reduzieren Sie das Problem auf die Lösung der Gleichungen $(H_x\,\phi)(x) = E_x\,\phi(x)$ und $(H_y\,\xi)(y) = E_y\,\xi(y)$. Wie hängt die Gesamtenergie E mit E_x und E_y zusammen?

[PÜ 2.3] Finden Sie alle Eigenwerte von H_x und H_y und geben Sie die zugehörigen Ortswellenfunktionen an. Sie sollten dabei $E_x = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2})$ und $E_y = \hbar\omega(n_y + \frac{1}{2})$ erhalten mit $n_{x/y} = 0, 1, \ldots$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von H durch $E_n = \hbar\omega(n+1)$ mit $n = 0, 1, \ldots$ gegeben sind.

Hinweis: Sie müssen hier (fast) nichts rechnen, sondern können direkt Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden.

[PÜ 2.4] Definieren Sie für jede der beiden Koordinaten die Leiteroperatoren $(a_x, a_x^\dagger)$ sowie $(a_y, a_y^\dagger)$ und stellen Sie deren Vertauschungsrelationen auf. Nutzen Sie diese, um zu zeigen, dass die Eigenzustände durch

$$|n_x, n_y\rangle = \frac{(a_x^\dagger)^{n_x}(a_y^\dagger)^{n_y}}{\sqrt{n_x!}\sqrt{n_y!}}|0,0\rangle$$

gegeben sind. Diskutieren Sie die Entartung.