ITP-UH-96/02
DESY 96-034

Phasenübergänge in Matrixmodellen

Vom Fachbereich Physik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Phys. Gernot Akemann
geboren am 20. April 1966 in Hannover

1996

Abstract

In this thesis multi-cut solutions of hermitian and complex one matrix models are discussed with analytical and numerical methods. Even for simple matrix potentials there may be several phases (numbers of cuts) consistent, with possible transitions occurring. In this context there have been found instabilities when solving the string equation numerically.

The aim of this thesis has been to get a deeper understanding of these instabilities or respectively to circumvent these difficulties by alternative methods. The symmetric sextic potential is calculated with orthogonal polynomials and in the saddle-point approximation as an example. A relationship between the phase boundaries and the instabilities is confirmed numerically very well.

In the second part the iterative solution of the loop equations is generalized to multi-cut solutions. Passing from coupling constants to moments a $\frac{1}{N}$-expansion of the free energy and correlation functions is achieved, which is non-perturbative in the couplings. The framework for the solution of the hermitian as well as the complex model is set up and the planar solution is obtained for an arbitrary number of cuts. However there occur zero modes when inverting the loop equations, which have not been fixed yet. As a special result the one-loop correlator of genus one with two cuts can be obtained unambiguously for an arbitrary symmetric potential. Finally some conditions are formulated under which the iterative procedure will be possible, when the zero modes are being fixed.

Referent: Prof. Dr. O. Lechtenfeld

Koreferent: Prof. Dr. N. Dragon

Tag der Promotion: 5.2.1996

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Mehrbandlösungen von hermiteschen und komplexen Einmatrixmodellen mit analytischen und numerischen Methoden untersucht. Matrixmodelle stellen diskretisierte Modelle zweidimensionaler Quantengravitation dar, sie können aber ebensogut zum Studium kritischer Phänomene verwendet werden.

Schon für einfache Matrixpotentiale können verschiedene, zum Teil konkurrierende Phasen (Bänder) vorliegen, zwischen denen es zu Übergängen kommt. In diesem Zusammenhang sind in der Literatur bei der numerischen Lösung der Stringgleichung Instabilitäten gefunden worden. Die Stringgleichung ist eine Bestimmungsgleichung für die Normen der orthogonalen Polynome, mit deren Hilfe die Zustandssumme berechnet werden kann.

Das Ziel dieser Arbeit ist es gewesen, den Ursprung dieser Instabilitäten besser zu verstehen, beziehungsweise alternative Lösungsmethoden zur Überwindung dieser Schwierigkeiten zu entwickeln. Dazu wurde zunächst die Sattelpunktsnäherung sowie die Lösung mittels orthogonaler Polynome am Beispiel des hermiteschen Matrixmodells mit symmetrischem sextischen Potential eingehend untersucht. Dabei konnten strittige Fragen bezüglich des numerischen Näherungsverfahrens geklärt werden. Ferner wurden bestehende Vermutungen über den Zusammenhang zwischen den Instabilitäten und den Phasengrenzen numerisch besser bestätigt.

Im zweiten Teil wurde die für die Einbandlösung erfolgreiche iterative Lösung der Dyson-Schwinger- oder Loopgleichungen auf Mehrbandlösungen verallgemeinert. Im Grenzwert unendlicher Matrixgröße N wird durch Einführung geeigneter Momente eine in den Kopplungen nicht störungstheoretische Berechnung der $\frac{1}{N}$-Entwicklung der freien Energie sowie aller Korrelationsfunktionen erreicht. Sowohl für das hermitesche als auch das komplexe Matrixmodell konnte das prinzipielle Lösungsverfahren sowie die Lösung in führender Ordnung für eine beliebige Anzahl von Bändern angegeben werden. Bei der Invertierung der Loopgleichung treten jedoch Nullmoden auf, deren Festlegung bisher noch nicht gelungen ist. Aus diesem Grund konnte bislang nur die erste Ordnung des erzeugenden Funktionals der Zweibandlösung bestimmt werden, allerdings für ein beliebiges symmetrisches Potential. Schließlich wurden Bedingungen hergeleitet, unter denen das angegebene Iterationsverfahren durchführbar ist, wenn eine Fixierung der Nullmoden gelingt.

gewidmet
meinem Großvater
Hans Schäffer

Danksagung

Zunächst möchte ich mich herzlich bei Prof. Dr. O. Lechtenfeld für die Betreuung meiner Arbeit und die vielfältige Unterstützung bedanken.

Weiterhin gilt mein Dank P. Adamietz, J. Ambjørn, J. Bischoff, N. Dragon, P. Kostädt und J. Plefka für die hilfreichen Diskussionen, Kommentare und Anmerkungen.

Meiner lieben Sunčana möchte ich für die zahllosen Aufmunterungen in den schwierigen Zeiten dieser Arbeit danken.

Schließlich möchte ich mich bei der Studienstiftung des Deutschen Volkes für die großzügige finanzielle Unterstützung bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I:

Einleitung

Integrable Modelle besitzen den großen Vorzug, daß sie exakt lösbar sind. Dafür ist es meistens sehr schwierig, physikalische Systeme zu finden, die sich durch diese Modelle beschreiben lassen. Matrixmodelle sind ein Beispiel für solche integrablen Modelle. Sie lassen sich unter gewissen Annahmen, die in dieser Arbeit genauer untersucht werden sollen, im Limes unendlicher Matrixgröße N lösen.

Die Motivationen, sich mit Matrixmodellen zu beschäftigen, sind vielfältig und haben sich im Laufe der Zeit mehrfach gewandelt. Beginnend in den fünfziger Jahren wurde von Wigner, Dyson [1] und anderen versucht, mit Zufallsmatrizen die Energiezustände von Vielnukleonensystemen zu beschreiben. In den siebziger Jahren wurde unter anderem von t'Hooft vorgeschlagen, die Techniken von Matrixmodellen auf die Quantenchromodynamik anzuwenden. Im Zuge dessen wurden bereits die sogenannten Loopgleichungen als Lösungsmethode von Migdal entwickelt [2].

Mitte der achtziger Jahre erlebten die Matrixmodelle eine Renaissance, als erkannt wurde, daß sie einen Zugang zur zweidimensionalen Quantengravitation liefern und somit die Möglichkeit bieten, niedrigdimensionale ($D \leq 1$) bosonische Stringtheorie zu lösen. Mittlerweile sind vielfältige Bezüge zwischen Matrixmodellen und den klassischen integrablen Hierarchien wie der Toda-Hierarchie hergestellt worden [3]. Gleichzeitig stellen sie eine Nahtstelle zwischen Quantengravitation und statistischer Physik dar, da sie die Berechnung von Korrelationsfunktionen und kritischen Exponenten von konformer Materie gekoppelt an Gravitation erlauben. Das vielleicht eindrucksvollste Beispiel in dieser Beziehung ist die Lösung des zweidimensionalen Ising-Modells gekoppelt an Gravitation durch Kazakov [4].

Entwicklungen aus jüngster Zeit auf dem Gebiet der Matrixmodelle sind beispielsweise Anwendungen auf Probleme in der Polymerphysik [5]. Ferner wird weiterhin versucht, Lösungen für realistischere Raum-Zeit-Dimensionen ($D > 1$) des bosonischen Strings zu finden. Die Lösung von supersymmetrischen Matrixmodellen [6] stellt einen Bezug zur Superstringtheorie her, welche gegenüber dem bosonischen String ein aussichtsreicherer Kandidat für eine Theorie der Quantengravitation ist.

Allerdings ist selbst das einfachste Modell wie das hermiteschen Einmatrixmodell bislang nur sehr unvollständig gelöst worden. Bereits für einfache Matrixpotentiale gibt es verschiedene Phasen (Bänder) und nur für den Fall der sogenannten Einbandlösung existiert eine vollständige Lösung [7]. Bei numerischen Untersuchungen sind im Bereich der Mehrbandlösungen Instabilitäten gefunden worden [8]. Aus diesem Grund sind hier bisher nur Lösungen in führender Ordnung im Limes $N \to \infty$ bekannt. Das Ziel dieser Arbeit wird sein, das Verständnis im Bereich der Mehrbandlösungen zu vertiefen, sowie die sehr erfolgreiche iterative $\frac{1}{N}$-Entwicklung der Loopgleichung für die Einbandlösung von Ambjørn et al. [7] zu verallgemeinern.

Die Arbeit gliedert sich dabei wie folgt: Zunächst wird direkt im Anschluß an die Einleitung kurz der Zusammenhang zwischen Matrixmodellen und zweidimensionaler Quantengravitation dargestellt.

Im ersten Teil (Kap.II-III) werden die aus der Literatur bekannten Probleme im Mehrbandbereich auf analytischem und numerischem Wege untersucht. Dies geschieht im wesentlichen am Beispiel des hermiteschen Modells mit symmetrischem sextischen Potential. In diesem Beispiel ist das Phasendiagramm für die verschiedenen Mehrbandlösungen noch recht einfach, es besitzt jedoch schon alle zu untersuchenden Eigenschaften.

In Kapitel II wird in einer Sattelpunktsnäherung die führende Ordnung in $\frac{1}{N}$ bestimmt. Die Lösungen für die verschiedenen möglichen Phasen werden angegeben. Die Phasengrenzen werden hergeleitet und für den relevanten Bereich der Kopplungen in einem Phasendiagramm dargestellt.

Das Kapitel III beschäftigt sich mit der Lösung der Zustandssumme durch Einführung orthogonaler Polynome. Bei diesem Verfahren können im Prinzip auch höhere Ordnungen in $\frac{1}{N}$ berechnet werden. Die Stringgleichung, welche die dazu benötigten Polynomnormen liefert, wird sowohl analytisch per Ansatz als auch numerisch gelöst. Bei der numerischen Lösung treten in dem Bereich, wo mehrere Phasen selbstkonsistent sind, Instabilitäten auf. Diese werden im Zusammenhang mit den Phasengrenzen aus Kapitel II diskutiert und mit den aus der Literatur bekannten Ergebnissen verglichen.

Der zweite Teil der Arbeit (Kap.IV-VI) beinhaltet eine Verallgemeinerung der iterativen Lösung der Loopgleichungen auf Mehrbandlösungen, und zwar sowohl für das hermitesche wie das komplexe Einmatrixmodell. Dabei werden die freie Energie sowie die erzeugenden Funktionale für Korrelationsfunktionen nicht störungstheoretisch in den Kopplungen des Matrixpotentials berechnet.

Nach der Angabe des allgemeinen Verfahrens für eine beliebige Anzahl von Bändern für das hermitesche Modell in Kapitel IV werden in Kapitel V exemplarisch am Beispiel der

Zweibandlösung die Probleme bei der Verallgemeinerung diskutiert. Für ein beliebiges symmetrisches Potential wird dort der Einloopkorrelator in erster Ordnung berechnet und mit der bekannten Lösung für den Einbandfall verglichen.

In Kapitel VI wird schließlich das komplexe Matrixmodell mit einer beliebigen Anzahl von Bändern behandelt. Nach der Diskussion der teilweisen Äquivalenz zum hermiteschen Modell wird auch hier das prinzipielle Lösungsverfahren für die Loopgleichung präsentiert. Ferner werden die möglichen Phasenübergänge zur bekannten Einbandlösung charakterisiert.

Teilergebnisse aus dem Kapitel VI über das komplexe Matrixmodell sind bereits vorab in [9] veröffentlicht worden.

1. Matrixmodelle als diskrete Quantengravitation

Für den einfachsten Fall reiner Gravitation ohne zusätzliche Materiefelder ist die Wirkung der zweidimensionalen euklidischen Gravitation gegeben durch

$$S \;=\; -\frac{1}{4\pi G_N}\int d^2x\sqrt{\det g_{\mu\nu}}\;R \;\;+\;\lambda\int d^2x\sqrt{\det g_{\mu\nu}}\;. \tag{1.1.1}$$

Der erste Teil ist die Einstein-Hilbert-Wirkung mit Gravitationskonstante G_N, λ bezeichnet die kosmologische Konstante[1]. Dabei wird über eine kompakte Mannigfaltigkeit vom Geschlecht g der Fläche A integriert. In zwei Dimensionen ist diese Wirkung über das Gauß-Bonnet-Theorem ausschließlich durch die topologischen Größen A und g gegeben,

$$S \;=\; -\frac{1}{G_N}(2-2g)\;+\;\lambda A\;. \tag{1.1.2}$$

Die Euler-Zahl $\chi = 2-2g$ charakterisiert für $g=0$ die Kugel, $g=1$ den Torus, usw. .

In der Pfadintegralquantisierung ist die Zustandssumme der zweidimensionalen Quantengravitation gegeben durch

$$Z_{QG}[G_N,\lambda] \;\equiv\; \int\frac{Dg_{\mu\nu}}{\mathrm{Vol(Diff)}}\mathrm{e}^{-S} \;=\; \sum_{g=0}^{\infty}\int_0^{\infty}dA\;\mathrm{e}^{(2-2g)/G_N-\lambda A}\int_{\Sigma_{g,A}}\frac{Dg_{\mu\nu}}{\mathrm{Vol(Diff)}}\;. \tag{1.1.3}$$

Im Integrationsmaß ist dabei formal durch das Volumen der Diffeomorphismengruppe geteilt worden, da nur über nicht äquivalente Parametrisierungen der Metrik integriert werden soll. Im Kontinuumszugang besteht die Schwierigkeit darin, dem Integrationsmaß beziehungsweise dem sogenannten Volumen des Moduliraumes

$$\mathrm{Vol}(\Sigma_{g,A}) \;\equiv\; \int_{\Sigma_{g,A}}\frac{Dg_{\mu\nu}}{\mathrm{Vol(Diff)}} \tag{1.1.4}$$

einen wohldefinierten Sinn zu geben. Dieser Weg wird meist über die Quantisierung der Liouville-Theorie beschritten[2]. Im Zugang über diskrete Zufallsflächen treten diese Schwierigkeiten nicht auf. Das Pfadintegral ist hier von vornherein wohldefiniert. Das Volumen des Moduliraumes kann gerade mit Hilfe von Matrixmodellen berechnet werden, wie nun gezeigt wird. Ein einfaches Beispiel für das hermitesche Einmatrixmodell ist definiert durch

$$Z\,[N,\alpha] \;\equiv\; \mathrm{e}^{N^2F[N,\alpha]} \;=\; \int d\phi\,\exp\big(-N\mathrm{Tr}(\frac{1}{2}\phi^2+\alpha\phi^4)\big)\;. \tag{1.1.5}$$

Dabei sind die Variablen ϕ hermitesche $N\times N$-Matrizen, die Integration läuft über alle unabhängigen reellen Matrixkomponenten. Es wird sich herausstellen, daß die freie Energie $F[N,\alpha]$ im Limes $N\to\infty$ berechnet werden kann und eine diskrete Version der Zustandssumme (1.1.3) der Quantengravitation liefert.

Hierzu betrachte man die feldtheoretische Lösung des Matrixmodells. Die freie Energie ist das erzeugende Funktional für zusammenhängende Feynman-Graphen. Die Feynman-Regeln für die matrixwertigen Felder ϕ lauten: Ein beliebiger zusammenhängender Graph

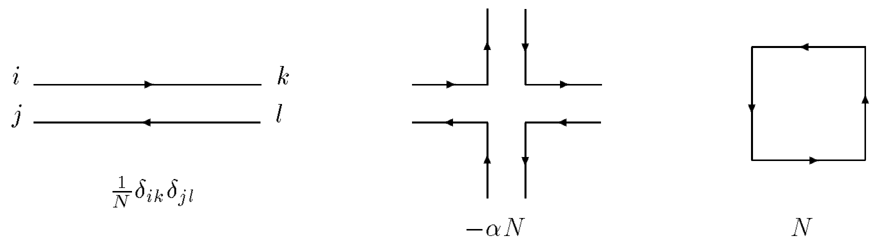

Abbildung 1: Die Feynman-Regeln für das Matrixmodell mit quartischem Potential

beschreibt eine geschlossene, orientierbare zweidimensionale Fläche vom Genus g und ergibt sich mit den Feynman-Regeln zu

$$(-\alpha)^V N^{V-P+L} \;=\; (-\alpha)^V N^{2-2g}\;. \tag{1.1.6}$$

[1] In der Stringtheorie wird so die zweidimensionale Weltfläche von Teilchen beschrieben, die Materiefelder $X^\mu(x)$ entsprechen den Raum-Zeit-Koordinaten der Teilchen. Matrixmodelle sind jedoch bislang nur in der Lage, Stringtheorie in $D\leq 1$ Dimensionen zu beschreiben, weshalb hier $(D=0)$ die Materiewirkung wegfällt. Für $0<D<1$ wird sogenannte konforme Materie gekoppelt an Gravitation beschrieben, jedoch ohne Raum-Zeit-Interpretation.

[2] Der aktuelle Stand dort findet sich z.B. in [10].

Dabei bezeichnet V die Anzahl der Vertizes, P die der Propagatoren und L die der Loops. Aus der Euler-Relation $V - P + L = \chi$ folgt der Zusammenhang zum Genus des Graphen. Es werden solche Graphen, die sich auf einer Kugel ($g = 0$) und damit in der Ebene zeichnen lassen, als *planare* Graphen bezeichnet. Flächen mit Rändern erhält man dadurch, daß man die Erwartungswerte der entsprechenden Anzahl von $\mathrm{Tr}\phi^4$ bildet.

Betrachtet man nun eine Störungsentwicklung von $F[N,\alpha]$ in der Kopplungskonstanten α, so ergibt sich

$$N^2 F[N,\alpha] \;=\; \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_g[\alpha] \;=\; \sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} N^{2-2g}(-\alpha)^k F_{g,k} \;, \tag{1.1.7}$$

wobei $F_{g,k}$ die Anzahl von Graphen mit k Vertizes auf einer Fläche Σ_g vom Genus g angibt. Wenn man den zum Feynman-Graphen *dualen* einfachen Graph betrachtet, so vertauschen dort gerade Vertizes und Loops ihre Rolle[3].

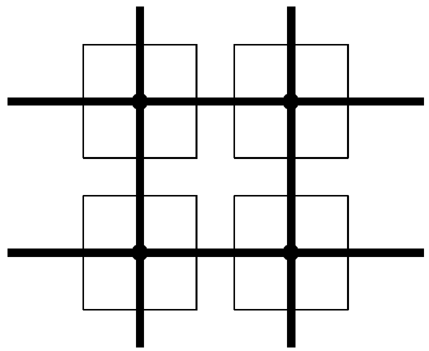

Abbildung 2: Der duale Graph (fett) zum Feynman-Graphen des Matrixmodells

Führt man nun in der Zustandssumme der Quantengravitation (1.1.3) eine Diskretisierung der Mannigfaltigkeit $\Sigma_{g,A}$ in k Quadrate der Fläche ϵ ein, $A = \epsilon k$, so ergibt sich mit der Identifikation[4]

$$N \;=\; \mathrm{e}^{1/G_N} \quad , \quad -\alpha \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda\epsilon} \;, \tag{1.1.8}$$

das folgende Resultat

$$Z_{QG}^{diskr}[G_N,\lambda] \;=\; N^2 F[N,\alpha] \;=\; \sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} N^{2-2g}(-\alpha)^k F_{g,k} \;. \tag{1.1.9}$$

[3] $V \to \tilde{L}$, $P \to \tilde{P}$ und $L \to \tilde{V}$

[4] Wie man sieht, ist dies nur durch eine analytische Fortsetzung des Matrixmodells zu negativem α zu erreichen.

Dabei entspricht die Diskretisierung von $\Sigma_{g,A}$ dem dualen Feynman-Graphen des Matrixmodells. Damit ist die Berechnung der Zustandssumme der zweidimensionalen Quantengravitation aus Gl. (1.1.3) auf die Lösung eines kombinatorischen Problems im Matrixmodell zurückgeführt worden, welches sich lösen läßt.

Um nun umgekehrt vom diskreten Modell einen Kontinuumslimes durchzuführen, müssen die Graphen immer feiner gemacht werden, d.h. $\epsilon \to 0$ und $k \to \infty$, so daß $A = \epsilon k$ endlich bleibt. Dabei leuchtet ein, daß in diesem Limes unerheblich ist, ob die Diskretisierung von $\Sigma_{g,A}$ aus Dreiecken, Vierecken oder beliebigen Polygonen besteht. Deshalb kann anstelle des quadratischen Potentials auch mit einem beliebigen Matrixpotential gearbeitet werden.

Im Limes $N \to \infty$ läßt sich ausrechnen (s. Kapitel III), daß die freie Energie kritisches Verhalten zeigt,

$$F_0[\alpha] \;\sim\; (\alpha_{krit} - \alpha)^{2-\gamma_{str}} \;, \tag{1.1.10}$$

wobei γ_{str} der entsprechende kritische Exponent ist. Für den Erwartungswert der Fläche A folgt damit

$$\langle A\rangle_{QG} \;=\; \epsilon\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln F_0[\alpha] \;\sim\; \frac{\epsilon}{\alpha - \alpha_{krit}} \;. \tag{1.1.11}$$

Im gleichzeitigen Limes $\epsilon \to 0$ und $\alpha \to \alpha_{krit}$ behält also $\langle A\rangle_{QG}$ einen endlichen Wert. Für beliebigen Genus ergibt sich [11]

$$F_g[\alpha] \;\sim\; (\alpha_{krit} - \alpha)^{(2-\gamma_{str})(1-g)} \;. \tag{1.1.12}$$

Dies läßt sich nach Ausführung der Integration in Gl. (1.1.3) mit den Ergebnissen der Liouville-Theorie vergleichen,

$$\mathrm{Vol}(\Sigma_{g,A}) \;\sim\; A^{(2-\gamma_{str})(1-g)-1} \;. \tag{1.1.13}$$

Es wird γ_{str} als Stringsuszeptibilität bezeichnet und ist dort gegeben durch

$$\gamma_{str} \;=\; \frac{1}{12}\left(D - 1 - \sqrt{(D-1)(D-25)}\right) \;, \tag{1.1.14}$$

wobei D die zentrale Ladung oder auch kritische Dimension der entsprechenden konformen Feldtheorie ist. Für $D = 0$, das heißt reine Gravitation, ergibt sich $\gamma_{str} = -\frac{1}{2}$.

Um den Kontinuumslimes durchzuführen, setzte man (1.1.12) in Gl. (1.1.7) ein. Im *Doppelskalenlimes*

$$\begin{aligned} N \;&\to\; \infty \quad , \quad \alpha \;\to\; \alpha_{krit} \;, \\ N\,(\alpha - \alpha_{krit})^{(2-\gamma_{str})/2} \;&=\; \text{konst.} \;, \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

erhält man so für jeden Genus einen endlichen Beitrag zu $N^2 F[N,\alpha]$ und damit zu $Z_{QG}^{diskr}[G_N,\lambda]$[5].

[5] Im naiven Limes $N \to \infty$ bleiben in Gl. (1.1.7) nur die planaren Graphen übrig.

Kapitel II:
Die Sattelpunktsmethode

In diesem Kapitel wird die Lösung des hermitesche Einmatrixmodells in niedrigster Ordnung in $\frac{1}{N}$ vorgestellt, dem sogenannten planaren Limes $N \to \infty$. In der einfachsten Näherung wird in diesem Limes eine Sattelpunktsnäherung der Zustandssumme gemacht. Bei diesem Verfahren wird bereits deutlich, daß das Modell zu einem gegebenen Potential in Abhängigkeit von den Kopplungen in verschiedenen Phasen vorliegen kann. Dieser Komplexität des Lösungsraumes wird dann in den folgenden Kapiteln bei der Berechnung höherer Ordnungen in $\frac{1}{N}$ Rechnung getragen werden müssen. Am Beispiel des symmetrischen sextischen Potentials wird hier erläutert, wie die planare Lösung zu den verschiedenen Phasen bestimmt wird und wie in diesem konkreten Fall das Phasendiagramm aussieht. Bei dem vorgeführten Beispiel handelt es sich im wesentlichen um die analytischen und numerischen Ergebnisse aus der Arbeit [12], die vollständig verifiziert werden konnten.

1. Die Sattelpunktsgleichung

Die Zustandssumme des hermiteschen Matrixmodells lautet

$$Z\,[N,\{g_i\}] \;\equiv\; e^{N^2 F[N,\{g_i\}]} \;\equiv\; \int d\phi \,\exp(-N\;\mathrm{Tr}V(\phi)) \;. \tag{2.1.1}$$

Dabei sind die Variablen ϕ hermitesche $N \times N$ Matrizen. Das Integrationsmaß und das Matrixpotential sind gegeben durch

$$d\phi \;\equiv\; \prod_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha\leq\beta}}^{N} d\mathrm{Re}\phi_{\alpha\beta} \prod_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha<\beta}}^{N} d\mathrm{Im}\phi_{\alpha\beta} \;,$$

$$V(\phi) \;\equiv\; \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j}{j}\phi^j \;, \tag{2.1.2}$$

wobei q der Grad des Potentials ist. Die hermiteschen Matrizen ϕ in der Zustandssumme in Gl. (2.1.1) lassen sich durch eine unitäre Transformation

$$\phi \;\to\; U^\dagger \phi U \tag{2.1.3}$$

diagonalisieren. Die Zustandssumme ist danach bis auf einen N-abhängigen Faktor durch das Integral über die N reellen Eigenwerte der Matrix ϕ gegeben [13],

$$Z\,[N,\{g_i\}] \;=\; c_N \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \;\Delta^2(\lambda)\,\exp(-N\sum_{j=1}^{N} V(\lambda_j)) \;. \tag{2.1.4}$$

Dabei ist $\Delta^2(\lambda)$ die Jacobi-Determinante der Transformation (2.1.3),

$$\Delta(\lambda) \;\equiv\; \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} (\lambda_i - \lambda_j) \;, \tag{2.1.5}$$

und $V(\lambda) = \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j}{j}\lambda^j$ ist das Potential der Eigenwerte. Die Wirkung des hermiteschen Matrixmodells S_N ist damit gegeben durch

$$S_N \;\equiv\; N\sum_{i=1}^{N} V(\lambda_i) \;-2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \ln|\lambda_i - \lambda_j| \;, \tag{2.1.6}$$

$$Z\,[N,\{g_i\}] \;=\; c_N \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \;\mathrm{e}^{-S_N} \;. \tag{2.1.7}$$

Dies entspricht gerade einem zweidimensionalen, auf eine Linie beschränkten Coulomb-Gas von Fermionen, dem sogenannten Dyson-Gas [1], im Potential $V(\lambda)$. Der führende Beitrag zum Integral stammt nun in erster Näherung vom Sattelpunkt, das heißt dem Minimum der Wirkung

$$\frac{\delta}{\delta\lambda_k} S_N \;=\; 0 \;. \tag{2.1.8}$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert dann im Limes $N \to \infty$ den planaren Beitrag zur freien Energie,

$$F_0 \;=\; -\lim_{N\to\infty} \min(\frac{1}{N^2} S_N) \;. \tag{2.1.9}$$

Für das Beispiel eines rein quadratischen Potentials, dem Gaußschen Modell, läßt sich die Zustandssumme in Gl. (2.1.4) explizit lösen (s. Kapitel III). In diesem Fall stellt sich heraus, daß für $N \to \infty$ die Eigenwerte λ_i kontinuierlich werden und auf ein endliches Intervall beschränkt bleiben. Für dieses endliche Kontinuum von Eigenwerten kann man eine Eigenwertdichte $\rho(\lambda)$ einführen [14].

Unter der Voraussetzung, daß sich der Limes $N \to \infty$ und die Minimierung der Wirkung S_N vertauschen lassen[1], liefert die Sattelpunktsgleichung (2.1.8) eine Bestimmungsgleichung für die Eigenwertdichte $\rho(\lambda)$. Die Wirkung lautet zunächst im planaren Limes von Gl. (2.1.6)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} S_N = \int_\sigma d\lambda \rho(\lambda) V(\lambda) - \int_\sigma d\lambda d\lambda' \rho(\lambda) \ln|\lambda - \lambda'| \rho(\lambda') \; + \; \sum_{i=1}^s \mu_i (\alpha_i - \int_{\sigma_i} d\lambda \rho(\lambda)) \; ,$$

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1 \; , \quad \alpha_i \in [0,1] \; , \quad i = 1, \ldots, s \; . \tag{2.1.10}$$

Die Normiertheit der Eigenwertdichte ist mittels der Lagrange-Multiplikatoren μ_i erzwungen. Diese spielen die Rolle von chemischen Potentialen. Es ist $\sigma = \cup_{i=1}^s \sigma_i$ der Träger der Eigenwertdichte $\rho(\lambda)$. Für kompliziertere Potentiale als das rein quadratische stellt sich heraus, daß dieser aus der disjunkten Vereinigung mehrerer endlicher Intervalle bestehen kann [16]. In dem Fall spricht man von einer Mehrbandlösung. Grob gesagt existieren soviele Bänder, wie das Potential Minima besitzt[2]. Die Eigenwerte verteilen sich dann auf die Minima.

Die Sattelpunktsbedingung erhält man nun dadurch aus Gl. (2.1.10), daß die Variation der planaren Wirkung nach $\rho(\lambda)$ verschwinden muß:

$$V(\lambda) - \mu_i \;=\; 2 \int_\sigma d\lambda' \rho(\lambda') \ln|\lambda - \lambda'| \;\; , \; \lambda \in \sigma_i \; . \tag{2.1.11}$$

Dabei können die Konstanten μ_i zunächst für verschiedene σ_i unterschiedliche Werte annehmen. Die planare freie Energie F_0 ergibt sich dann aus der Dichte $\rho(\lambda)$ durch Einsetzen von Gl. (2.1.11) in die Gleichungen (2.1.10) und (2.1.9):

$$F_0 \;=\; -\frac{1}{2} \int_\sigma d\lambda \rho(\lambda) V(\lambda) - \sum_{i=1}^s \frac{\mu_i}{2} \int_{\sigma_i} d\lambda \rho(\lambda) \; . \tag{2.1.12}$$

[1] Unter welchen Bedingungen dies erlaubt ist, wird im folgenden noch diskutiert, siehe auch [15].

[2] Am Beispiel des sextischen Potentials zeigt sich allerdings, daß der Übergang von der Einband- zur Dreibandlösung stattfindet, bevor das Potential bei $G = \frac{g_4}{\sqrt{g_6}} = -2$ von einem zu drei Minima übergeht [17].

Die Lösung für die Eigenwertdichte $\rho(\lambda)$ aus Gl. (2.1.11) erhält man am einfachsten über das erzeugende Funktional für die Momente

$$W_0(p) \;\equiv\; \int_\sigma d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{p - \lambda} \;\; , \; p \notin \sigma \; . \tag{2.1.13}$$

Offensichtlich besitzt $W_0(p)$ als Funktion in der komplexen Ebene genau s Schnitte, wobei s die Anzahl der Zusammenhangskomponenten σ_i von σ ist. Auf dem komplexen Komplement von σ ist $W_0(p)$ analytisch. Ferner erfüllt es wegen der Normiertheit der Eigenwertdichte die asymptotische Bedingung

$$\lim_{p\to\pm\infty} W_0(p) \;=\; \frac{1}{p} \; . \tag{2.1.14}$$

Die Dichte $\rho(\lambda)$ ist dann über die folgende Beziehung aus dem erzeugenden Funktional $W_0(p)$ rekonstruierbar,

$$\rho(\lambda) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon\to 0} \Big(W_0(\lambda - i\epsilon) - W_0(\lambda + i\epsilon) \Big) \; , \quad \lambda \in \sigma \; . \tag{2.1.15}$$

Die Bestimmungsgleichung für $W_0(p)$ erhält man nun dadurch, daß man die Sattelpunktsgleichung (2.1.11) nach λ differenziert:

$$\frac{1}{2} V'(\lambda) \;=\; \mathrm{P} \int_\sigma d\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{\lambda - \lambda'} \;=\; \mathrm{Re}(W_0(\lambda)) \;\; , \; \lambda \in \sigma \; . \tag{2.1.16}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet für s Schnitte (s. Kapitel IV Abschnitt 4)

$$W_0(p) \;=\; \frac{1}{2} \left(V'(p) - M(p) \sqrt{\prod\nolimits_{i=1}^{2s} (p - x_i)} \right) \; . \tag{2.1.17}$$

$M(p)$ ist für ein gegebenes Potential ein bestimmbares endliches Polynom, dessen Koeffizienten Funktionen der Schnittgrenzen x_i der Kopplungskonstanten g_j sind. Die Eigenwertdichte $\rho(\lambda)$ ergibt sich mit Gl. (2.1.15) und (2.1.17) zu[3]

$$\rho(\lambda) \;=\; \frac{1}{2\pi} |M(\lambda)| \sqrt{(x_1 - \lambda) \prod\nolimits_{i=2}^{2s} (\lambda - x_i)} \; , \quad \lambda \in \sigma \; . \tag{2.1.18}$$

Auf dem Komplement $\mathrm{R} \backslash \sigma$ ist $\rho(\lambda) \equiv 0$. Wie man anhand von Gl. (2.1.17) sieht, ist die Anzahl der möglichen Bänder beschränkt. Aufgrund der Analytizität von $W_0(p)$ außerhalb von σ und der Asymptotik Gl. (2.1.14) gilt

$$s \;\leq\; q - 1 \; , \tag{2.1.19}$$

[3] In der Definition (2.1.15) ist $\rho(\lambda)$ immer positiv. Um $\rho(\lambda)$ mittels Gl. (2.1.17) explizit auszudrücken, müssen um $M(\lambda)$ Beträge stehen. Der Radikand der positiven reellen Wurzel ist für $\lambda \in \sigma$ immer ≥ 0.

damit $M(p)$ ein Polynom von positivem Grad ist. Dabei ist q der Grad des Potentials $V(\lambda)$. Wenn man das Bild des Coulomb-Gases vor Augen hat, dürfte jedoch klar sein, daß es höchstens so viele Bänder wie die maximale Anzahl von Potentialminima geben kann.

Für den Fall, daß σ aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten besteht, ist $W_0(p)$ durch die Gleichungen (2.1.17) und (2.1.14) nicht mehr eindeutig als Funktion der Kopplungskonstanten bestimmt, und damit auch $\rho(\lambda)$ nicht[4]. Der Grund hierfür liegt darin, daß das Vertauschen des Limes $N \to \infty$ mit dem Bilden des Minimums der Wirkung bei der Herleitung von Gl. (2.1.11) dann nicht mehr gerechtfertigt ist. Diese Mehrdeutigkeit kann durch die Forderung behoben werden, daß alle chemischen Potentiale μ_i denselben Wert annehmen [12, 17]:

$$\mu_i - \mu_{i+1} \;\equiv\; \Delta\mu_i \;=\; 0 \quad , \; i = 1, \ldots, s-1 \; . \tag{2.1.20}$$

Anschaulich gesehen können nämlich für endliches N die Eigenwerte von einem Minimum ins andere tunneln, so daß nur der Limes $N \to \infty$ mit der Nebenbedingung $\Delta\mu_i = 0$ der physikalisch sinnvolle ist. In [17] wird an einem Beispiel numerisch verifiziert, daß in der Schar von Lösungen für $\rho(\lambda)$ diejenige zur minimalen freien Energie F_0 gehört, die die Gl. (2.1.20) erfüllt. Diese Bedingung läßt sich auf folgende Weise als Einschränkung an die Eigenwertdichte formulieren [12]. Man betrachte das Funktional

$$\Psi(\lambda) \;\equiv\; \mathrm{Re}\left(-2 \int_\sigma d\lambda' \rho(\lambda') \ln|\lambda - \lambda'| \;+\; V(\lambda) \right) \; . \tag{2.1.21}$$

Es ist $\Psi(\lambda) = \mu_i$ für $\lambda \in \sigma_i$, insgesamt gilt

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(\lambda)}{d\lambda} \;&=\; 0 \qquad , \; \lambda \in \sigma \; , \\ \frac{d\Psi(\lambda)}{d\lambda} \;&=\; M(\lambda) \sqrt{\prod\nolimits_{i=1}^{2s} (\lambda - x_i)} \;\; , \; \lambda \notin \sigma \; . \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Die zweite Gleichung erhält man aus dem Vergleich mit Gl. (2.1.17). Die Gleichheit der chemischen Potentiale läßt sich also schreiben als

$$\Delta\mu_i \;=\; \Psi(\sigma_i) - \Psi(\sigma_{i+1}) \;=\; \int_{\bar\sigma_i} d\lambda \frac{d\Psi(\lambda)}{d\lambda} \;=\; \int_{\bar\sigma_i} d\lambda \; M(\lambda) \sqrt{\prod\nolimits_{i=1}^{2s} (\lambda - x_i)} \;=\; 0 \; . \tag{2.1.23}$$

Die $\bar\sigma_i$ sind der Abschluß der beschränkten Zusammenhangskomponenten des reellen Komplements von σ.

Der Beweis, daß $W_0(p)$ und damit $\rho(\lambda)$ durch die Gleichung (2.1.14) zusammen mit der Bedingung (2.1.23) eindeutig bestimmt ist, findet sich in Kapitel IV Abschnitt 4.

[4] Außer für ein symmetrisches Potential, dort erst ab $s \geq 3$.

Dort sind $W_0(p)$, $M(p)$ sowie die Bestimmungsgleichungen für die Schnittgrenzen x_i für ein beliebiges Potential mit einer beliebigen Anzahl von Schnitten in Abhängigkeit von den Kopplungskonstanten angegeben. Im nun folgenden Abschnitt wird am Beispiel des symmetrischen sextischen Potentials explizit die Sattelpunktslösung vorgeführt.

2. Beispiel: Das sextische Potential

In diesem Abschnitt werden die möglichen verschiedenen Lösungen für die Eigenwertdichte des symmetrischen sextischen Potentials angegeben,

$$V(\lambda) \;=\; \frac{1}{2}\lambda^2 \;+\; \frac{1}{4} g_4 \lambda^4 \;+\; \frac{1}{6} g_6 \lambda^6 \; . \tag{2.2.1}$$

Dabei wurde die Kopplung des quadratischen Terms $g_2 \equiv 1$ gesetzt, was durch eine Reskalierung der Eigenwerte immer erreicht werden kann. Im folgenden wird nur der Fall $g_6 > 0$ betrachtet werden, da dann die Integrale in Gl. (2.1.4) konvergent sind.

Das Potential (2.2.1) besitzt für den betreffenden Parameterbereich der Kopplungen maximal drei Minima. Wie bereits erwähnt erlaubt dies die Existenz einer Ein- bis Dreibandlösung [18], die von nun an mit $\rho_s(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|M_s(\lambda)| \sqrt{(x_1^2 - \lambda^2) \prod_{i=2}^{s} (\lambda^2 - x_i^2)}$ bezeichnet wird, wobei $s = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$. Aufgrund der Symmetrie des Potentials sind die $\rho_s(\lambda)$ ebenfalls symmetrisch zum Ursprung.

Zunächst wird das Polynom $M(p)$ in Gl. (2.1.17) bestimmt. Durch die Asymptotik von $W_0(p)$ in Gl. (2.1.14) kann $M(p)$ maximal vom Grad $q - 1 - s$ sein, wobei der Grad des Potentials hier $q = 6$ ist. Entwickelt man die Wurzel in Gl. (2.1.17) für $p \to \infty$ und fordert, daß die erste nichtverschwindende Ordnung $\frac{1}{p}$ ist, so erhält man die Koeffizienten des Polynoms $M(p)$ als Funktion der Kopplungen g_4 und g_6 und der Schnittgrenzen x_i. Die verbleibenden Gleichungen ergeben zusammen mit der Bedingung (2.1.23) die x_i als Funktionen der Kopplungskonstanten.

Die Ergebnisse für die Dichten $\rho_s(\lambda)$, $s = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$, findet man [12]. Die Eigenwertdichte der *Einbandlösung* lautet

$$\rho_{\mathrm{I}}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} g_4 x_1^2 + \frac{3}{16} g_6 x_1^4 + \left(\frac{1}{2} g_4 + \frac{1}{4} g_6 x_1^2 \right) \lambda^2 + \frac{1}{2} g_6 \lambda^4 \right| \sqrt{x_1^2 - \lambda^2} \; , \tag{2.2.2}$$

wobei der Schnitt $\sigma = [-x_1, x_1]$ durch die folgende Gleichung bestimmt ist:

$$1 = \frac{1}{4} x_1^2 + \frac{3}{16} g_4 x_1^4 + \frac{5}{32} g_6 x_1^6 \; . \tag{2.2.3}$$

Die *Zweibandlösung* ist gegeben durch

$$\rho_{\mathrm{II}}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left| \left(\frac{1}{2} g_4 + \frac{1}{4} g_6 (x_1^2 + x_2^2) \right) \lambda + \frac{1}{2} g_6 \lambda^3 \right| \sqrt{(x_1^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - x_2^2)} \; . \tag{2.2.4}$$

Da das Potential (2.2.1) symmetrisch ist, liefert in diesem Spezialfall die Asymptotik von $W_0(p)$ genügend Bestimmungsgleichungen für die Schnittgrenzen:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{16}\Big(g_4 + g_6(x_1^2+x_2^2)\Big)(x_1^2-x_2^2)^2 \ , \\ 0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}g_4(x_1^2+x_2^2) + \frac{1}{8}g_6(x_1^2+x_2^2)^2 + \frac{1}{16}g_6(x_1^2-x_2^2)^2 \ . \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Aufgrund der Symmetrie von $\sigma = [-x_1,-x_2] \cup [x_2,x_1]$ ist klar, daß die chemischen Potentiale automatisch gleich sind.

Das Ergebnis für die *Dreibandlösung* lautet

$$\rho_{\text{III}}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{2}g_4 + \frac{1}{4}g_6 x_i x_i + \frac{1}{2}g_6\lambda^2\right| \sqrt{(x_1^2-\lambda^2)(\lambda^2-x_2^2)(\lambda^2-x_3^2)} \ , \tag{2.2.6}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{16}(g_4 + g_6 x_l x_l)(x_k^2 x_k^2 - 2\sum_{i<j} x_i^2 x_j^2) + \frac{1}{4}g_6 x_1^2 x_2^2 x_3^2 \ , \\ 0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_i x_i + \frac{3}{16}g_6 x_i^2 x_i^2 + \frac{1}{8}g_6 \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 \ . \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Über doppelt auftretende Indizes ist hier zu summieren. Die dritte Gleichung für die Grenzen x_1, x_2 und x_3 ist durch die implizite Bedingung (2.1.23) gegeben:

$$0 \ = \ \int_{x_3}^{x_2} d\lambda \left(\frac{1}{2}g_4 + \frac{1}{4}g_6 x_i x_i + \frac{1}{2}g_6\lambda^2\right) \sqrt{(\lambda^2-x_1^2)(\lambda^2-x_2^2)(\lambda^2-x_3^2)} \ . \tag{2.2.8}$$

Dieses elliptische Integral läßt sich nur an den Phasengrenzen analytisch lösen. Auch die freie Energie ist mit Gl. (2.1.12)[5] außer im Einbandfall nur auf elliptische Standardintegrale zurückführbar.

Das Phasendiagramm

Nachdem die möglichen Lösungen für die Eigenwertdichte angegeben worden sind, soll nun untersucht werden, welche Lösung jeweils in Abhängigkeit von den Kopplungskonstanten vorliegt. Hierzu ist es zweckmäßig, die folgenden Funktionen h und G der Kopplungen g_4 und g_6 einzuführen[6]:

$$G \ = \ \frac{g_4}{\sqrt{g_6}} \ , \quad h \ = \ \sqrt{g_6} \ . \tag{2.2.9}$$

[5]Bei bekanntem $\rho_s(\lambda)$ ergibt sich μ_i durch Einsetzen für ein festes $\lambda \in \sigma_i$ in Gl. (2.1.11).

[6]Für $g_2 \neq 1$ behalten mit $G = \frac{g_4}{\sqrt{g_2 g_6}}$ und $h = \frac{1}{g_2}\sqrt{\frac{g_6}{g_2}}$ alle Ergebnisse für die Phasengrenzen ihre Gültigkeit

In diesen Variablen nehmen die Phasengrenzen eine etwas einfachere Gestalt an.

Zunächst müssen zwei verschiedene Arten von Phasengrenzen unterschieden werden. Die Eigenwertdichten $\rho_s(\lambda)$ sind per Definition auf ihrem Träger reell und positiv. Folglich wird eine Phasengrenze erreicht, wenn $\rho_s(\lambda)$ dort eine Nullstelle entwickelt. Dieser Typ wird als *Existenzgrenze* bezeichnet. Wenn zwei oder mehrere Phasen selbstkonsistent sind, wird diejenige Lösung angenommen, welche die niedrigste freie Energie F_0 in Gl. (2.1.12) liefert. Solche Phasengrenzen werden als *Dominanzgrenzen* bezeichnet. Selbstverständlich können Dominanz- und Existenzgrenzen zusammenfallen (siehe Abbildung 3).

Eine ausführliche Herleitung der Phasengrenzen für das sextische Potential findet sich wie bereits erwähnt in [12]. Es ergeben sich die folgenden Gleichungen:

(I) Die Einbandlösung wird durch die beiden folgenden Bedingungen begrenzt. Entweder entwickelt sich am Rand von σ eine Nullstelle, $M_{\text{I}}(x_1) = 0$ (Grenze a), oder aber im Innern von σ entwickelt sich eine doppelte Nullstelle, $M_{\text{I}}(\lambda) = M_{\text{I}}'(\lambda) = 0$, $\lambda \in \sigma$ (Grenze b). Ausgedrückt durch die Größen G und h lauten diese Phasengrenzen

$$\begin{aligned} a) \qquad & h_a = \frac{1}{50}\left(G^3 \ -5G \ + (G^2 - \frac{10}{3})^{\frac{3}{2}}\right) \ , \\ b) \qquad & h_b = \frac{1}{50}\left(G^3 \ -5G \ + \frac{3}{2}\sqrt{6}(G^2 - \frac{10}{3})^{\frac{3}{2}}\right) \ . \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Diese beiden Existenzgrenzen treffen sich am *trikritischenPunkt*

$$G_{krit} \ = \ -\sqrt{\frac{10}{3}} \ , \quad h_{krit} \ = \ \frac{1}{3\sqrt{30}} \ . \tag{2.2.11}$$

(II) Aufgrund der Monotonie von $M_{\text{II}}(\lambda)$ ist in der Zweibandphase die Existenzgrenze durch $M_{\text{II}}(x_2) = 0$ gegeben (Grenze c). Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$c) \qquad h_c \ = \ \frac{1}{36}\sqrt{3}(G^2-4)^{\frac{3}{2}} \ , \quad G \leq -2 \ . \tag{2.2.12}$$

Insbesondere ist auf dem gesamten Existenzbereich von Phase II $x_2 > 0$, auch entlang der Grenze c. Aus diesem Grund kann kein Übergang von II nach I stattfinden.

(III) Die Dreibandphase liefert überall dort, wo sie existiert, die niedrigste freie Energie [12, 18]. Sie ist deshalb auf ihrem gesamten Existenzbereich dominant. Der Übergang zur Einbandlösung kann auf zwei verschiedene Weisen geschehen. Entweder verschmelzen die Zusammenhangskomponenten des Trägers

$$\sigma = [-x_1,-x_2] \cup [-x_3,x_3] \cup [x_2,x_1] \ , \tag{2.2.13}$$

im Limes $x_3 \to x_2$. Das Einsetzen in die Gl. (2.2.7) führt wieder auf die Phasengrenze b. Die Gleichung (2.2.8) ist dabei trivial erfüllt. Es ist also b gleichzeitig Dominanz- und Existenzgrenze. Die zweite Möglichkeit, von III nach I zu gelangen, besteht darin, daß die äußeren Zusammenhangskomponenten von σ im Limes $x_2 \to x_1$ verschwinden. In diesem Grenzwert, der mit Grenze d bezeichnet wird, läßt sich das Integral in Gl. (2.2.8) analytisch lösen und führt auf die folgende Gleichung

$$0 = \ln\left(\frac{x_3}{x_2 + \sqrt{x_2^2 - x_3^2}}\right) + \frac{1}{6}x_2\sqrt{x_2^2 - x_3^2}\,\left(1 + \frac{1}{8}Gh(2x_2^2 + x_3^2)\right) . \quad (2.2.14)$$

Zusammen mit den Gleichungen (2.2.7) für $x_1 = x_2$ ergibt dies eine implizite Gleichung für G und h. Die numerische Lösung h_d dieser Grenze d ist unten in Abbildung 3 eingetragen.

Der Übergang zur Zweibandphase kann nur auf eine Weise geschehen, und zwar durch $x_3 \to 0$ (Grenze e). Auch in diesem Fall läßt sich wieder Gl. (2.2.8) lösen:

$$0 = \ln\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}\right) - \frac{1}{3}x_1 x_2\left(1 + \frac{1}{8}Gh(x_1^2 + x_2^2)\right) . \quad (2.2.15)$$

Die numerische Lösung h_e der impliziten Phasengrenze e, die man wiederum mit Gl. (2.2.7) erhält, ist ebenfalls im Phasendiagramm eingetragen.

In der Literatur gibt es auch Arbeiten, die auf die Forderung $\Delta\mu_i = 0$ verzichten [18, 19]. In [18] ist versucht worden, aus dem Zusammenfallen der Nullstellen von $\rho(\lambda)$ die Phasengrenzen für das sextische Potential zu ermitteln. Da dann jedoch eine Bestimmungsgleichung für die x_i fehlt, müssen dort zum Teil einige Nullstellen *ad hoc* gleichgesetzt werden. Hieraus erklärt sich die Diskrepanz der dortigen 'Phasengrenze f' zur Existenzgrenze d von Phase III hier.

Entlang der dominanten Phasengrenzen kann ein Kontinuumslimes durchgeführt werden. Dabei ist es jedoch nicht möglich, den kritischen Exponenten der reinen zweidimensionalen Gravitation $\gamma_{str} = -\frac{1}{2}$ zu erhalten. Dies würde im Kontinuumslimes an der Existenzgrenze a herauskommen, der sogenannten BPIZ-Linie [14]. In diesem speziellen Modell liegt jedoch die Existenzgrenze a vollständig im Bereich der Phasen II und III. Am Endpunkt der Linie a, dem trikritischen Punkt, wo auch die Grenzen b und d zusammentreffen, ergibt sich $\gamma_{str} = -\frac{1}{3}$. Dies wird im nächsten Kapitel gezeigt. Ferner wird dort auch der Schnittpunkt der Grenzen d und e bei $G = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ und $h = 0$ untersucht. Die Minima sind an dieser Stelle sogar für beliebige Werte von $h \geq 0$ entartet. Der dazugehörige Exponent lautet $\gamma_{str} = -1$.

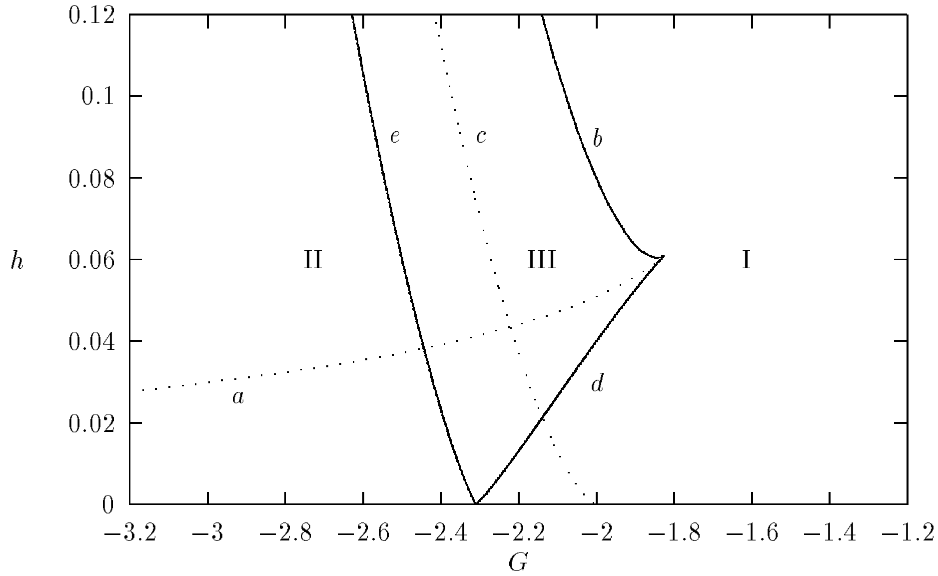

Abbildung 3: Das Phasendiagramm des symmetrischen sextischen Potentials. Die durchgezogenen Linien b, d und e bezeichnen Dominanz- und die gepunkteten Linien a und c Existenzgrenzen.

Kapitel III:

Die Methode der orthogonalen Polynome

In diesem Kapitel wird ein Lösungsverfahren vorgestellt, das im Prinzip sogar eine nicht störungstheoretische Bestimmung der Zustandssumme in $\frac{1}{N}$ erlaubt. Die Berechnung der Integrale in der Zustandssumme (2.1.4) wird durch Einführung geeigneter orthogonaler Polynome auf die Lösung einer Rekursionsgleichung zurückgeführt [20], die sogenannte Stringgleichung. Im allgemeinen kann diese Gleichung nur unter bestimmten Voraussetzungen für große N gelöst werden. Es hat sich jedoch herausgestellt, daß diese Annahmen im Mehrbandbereich falsch werden, und die daraus gewonnenen Lösungen keine adäquate Beschreibung mehr liefern [17]. Aus diesem Grund ist in der Literatur (zuerst in [21]) der Versuch unternommen worden, die Rekursionsgleichung auf direktem Wege für endliches N numerisch zu lösen. Dabei wurden im Mehrbandbereich Instabilitäten gefunden, die mit dem Schlagwort "Chaos in Matrixmodellen" bezeichnet werden [15, 22, 8, 23, 24]. In [22] ist es zumindest teilweise gelungen, diese Instabilitäten quantitativ zu erklären. Sie wurden dabei sowohl zu den analytischen Methoden der orthogonalen Polynome in Zusammenhang gebracht als auch zu den Phasengrenzen in der Sattelpunktsnäherung.

Auch im Rahmen dieser Arbeit konnte der Ursprung der Instabilitäten nicht vollständig geklärt werden. Die in [22] geäußerten Vermutungen werden jedoch numerisch besser bestätigt. Ferner werden strittige Fragen in Bezug auf die Abhängigkeit von dem verwendeten numerischen Näherungsverfahren geklärt (vergleiche mit [23]). Die Bedeutung der Phasengrenzen in Bezug auf die analytische Lösung der Rekursionsgleichung wird hier noch stärker herausgearbeitet.

Dieses Kapitel ist folgendermaßen aufgebaut. Nachdem im ersten allgemeinen Abschnitt der analytische Teil der Methode der orthogonalen Polynome vorgestellt wird, beschäftigt sich der Rest des Kapitels mit einer ausführlichen analytischen und numerischen Diskussion des Modells mit symmetrischem sextischen Potential. Die Auswahl dieses Beispiels geschieht zum einen, um die Ergebnisse des vorherigen Kapitels benutzen zu können und mit Resultaten aus der Literatur vergleichen zu können. Zum anderen ist dieses Potential das einfachste Beispiel, anhand dessen Phasenstruktur die zu untersuchenden Instabilitäten diskutiert werden können.

1. Formale Lösung der Zustandssumme

Die Zustandssumme in der Form von Gl. (2.1.4),

$$Z\,[N,\{g_i\}] \;=\; c_N \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i\;\Delta^2(\lambda)\;\exp(-N\sum_{j=1}^{N} V(\lambda_j))\;, \tag{3.1.1}$$

läßt sich in der folgenden Weise vereinfachen. Zunächst kann man sich leicht davon überzeugen, daß die Jacobi-Determinante, die von der Diagonalisierung der hermiteschen Matrizen stammt, sich als Quadrat der Vandermonde-Determinante schreiben läßt:

$$\Delta(\lambda) \;=\; \prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} (\lambda_i-\lambda_j) \;=\; (-1)^{N(N-1)/2} \det_{i,j=1,\ldots,N} (\lambda_i)^{j-1}\;. \tag{3.1.2}$$

Nun sind Determinanten bekanntlich invariant unter der Addition und Multiplikation von Spalten. Nimmt man daher einen geeigneten Satz von orthogonalen Polynomen,

$$\int d\lambda \mathrm{e}^{-NV(\lambda)}\;P_m(\lambda)P_n(\lambda) \;=\; h_n\delta_{mn}\;, \tag{3.1.3}$$

mit der folgenden Wahl der Normierung,

$$P_n(\lambda) \;=\; \lambda^n \;+\; \mathcal{O}(\lambda^{n-1})\;, \tag{3.1.4}$$

so gilt für die Vandermonde-Determinante

$$\det_{i,j=1,\ldots,N} (\lambda_i)^{j-1} \;=\; \det_{i,j=1,\ldots,N} \;P_{j-1}(\lambda_i)\;. \tag{3.1.5}$$

Die Zustandssumme läßt sich damit umformen zu

$$Z\,[N,\{g_i\}] \;=\; c_N \int (\prod_{l=1}^{N} d\lambda_l \mathrm{e}^{-NV(\lambda_l)})\;(\det_{i,j=1,\ldots,N} \;P_{j-1}(\lambda_i))^2\;. \tag{3.1.6}$$

Schreibt man nun die Determinanten als graduierte Summe über alle Permutationen aus und benutzt die Orthogonalität der Polynome Gl. (3.1.3), so erhält man

$$Z\,[N,\{g_i\}] \;=\; c_N N! \prod_{n=0}^{N-1} h_n \;. \tag{3.1.7}$$

Für das rein quadratische Potential (mit $g_2 = 1$) handelt es sich bei den in Gl. (3.1.3) eingeführten Polynomen bis auf Faktoren um die bekannten Hermiteschen Polynome. Die Norm von $P_n(\lambda)$ ergibt sich damit zu

$$h_n \;=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{N}}\frac{n!}{N^n}\;, \tag{3.1.8}$$

wodurch die Zustandssumme bis auf den Faktor c_N vollständig gelöst ist. Für kompliziertere Potentiale als das quadratische lassen sich im allgemeinen die Normen der Polynome h_n nicht mehr geschlossen bestimmen. Allerdings gilt für diese Größen eine komplizierte Rekursionsgleichung, aus der sich unter bestimmten Voraussetzungen alle gewünschten Informationen über die Zustandssumme gewinnen lassen.

Die Stringgleichung

Zunächst wird eine einfache Rekursionsbeziehung für die Polynome untereinander bewiesen. Aufgrund von deren Vollständigkeit gilt $\lambda P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} a_{n,i}P_i(\lambda)$. Die Koeffizienten $a_{n,i} = h_i^{-1}\int d\lambda \mathrm{e}^{-NV(\lambda)}\lambda P_n(\lambda)P_i(\lambda)$ verschwinden wegen der Orthogonalität für alle $i < n-1$, da $\lambda P_i(\lambda)$ eine Linearkombination höchstens vom Grad $i+1$ ist. Der höchste Koeffizient ist wegen der Normierung der Polynome in Gl. (3.1.4) gleich Eins. Insgesamt gilt also die folgende Beziehung

$$\lambda P_n(\lambda) \;=\; P_{n+1}(\lambda) \;+\; S_n P_n(\lambda) \;+\; R_n P_{n-1}(\lambda)\;, \tag{3.1.9}$$

wobei

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{h_{n-1}}\int d\lambda \mathrm{e}^{-NV(\lambda)}\; P_n(\lambda)\lambda P_{n-1}(\lambda) \;=\; \frac{h_n}{h_{n-1}}\;,\\ S_n &= \frac{1}{h_n}\int d\lambda \mathrm{e}^{-NV(\lambda)}\; \lambda P_n(\lambda)^2 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

die verbleibenden Koeffizienten sind[1]. Zustandssumme und freie Energie $F = N^{-2}\ln Z$ lassen sich ebenfalls durch die Variablen R_n ausdrücken:

$$Z = c_n N!\; h_0^N \prod_{i=1}^{N-1} R_i^{N-i}\;,$$

$$F = \frac{1}{N^2}\Big(\ln(c_n N!) + \ln h_0^N + N\sum_{i=1}^{N-1}(1-\frac{i}{N})\ln R_i\Big) \tag{3.1.11}$$

Der gesuchte Satz von Rekursionsbeziehungen für die Größen R_n und S_n ergibt sich nun wie folgt. Die Differentiation auf dem Ring der Polynome liefert

$$\begin{aligned} nh_{n-1} &= \int d\lambda \mathrm{e}^{-NV(\lambda)}\; P_n'(\lambda)P_{n-1}(\lambda) \;=\; -\int d\lambda P_n(\lambda)\,\frac{d}{d\lambda}\left(\mathrm{e}^{-NV(\lambda)}P_{n-1}(\lambda)\right)\\ &= N\int d\lambda \mathrm{e}^{-NV(\lambda)}\; V'(\lambda)P_n(\lambda)P_{n-1}(\lambda)\;. \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Dabei wurden wieder die Normierung und Orthogonalität sowie die Tatsache verwendet, daß Randterme aufgrund des Integrationsmaßes verschwinden. Wendet man nun die Beziehung (3.1.9) sukzessive auf den Term $V'(\lambda)P_n(\lambda)$ an, so folgt [25]

$$\frac{n}{N} \;=\; g_2R_n \;+\; g_3R_n(S_n+S_{n-1}) \;+\; g_4R_n(S_n^2+S_nS_{n-1}+S_{n-1}^2+R_{n+1}+R_n+R_{n+1}) \;+\;\ldots \tag{3.1.13}$$

für $V(\lambda) = g_1\lambda + \frac{1}{2}g_2\lambda^2 + \frac{1}{3}g_3\lambda^3 + \frac{1}{4}g_4\lambda^4 + \ldots$. Auf analoge Weise erhält man eine zweite Gleichung[2],

$$\begin{aligned} &0 = \frac{1}{2}\int d\lambda \mathrm{e}^{-NV(\lambda)}\;(P_n(\lambda)^2)' \;=\; N\int d\lambda \mathrm{e}^{-NV(\lambda)}\; V'(\lambda)P_n(\lambda)^2\\ \Leftrightarrow\;\; &0 = g_1 \;+\; g_2S_n \;+\; g_3(S_n^2+R_n+R_{n+1})\\ &\qquad +\; g_4(S_n^3+2S_nR_{n+1}+2S_nR_n+S_{n+1}R_{n+1}+S_{n-1}R_n) \;+\;\ldots\;. \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Die beiden Rekursionsgleichungen (3.1.13) und (3.1.14) werden zusammen oft als *Stringgleichungen* bezeichnet. Sie sind nichtlinear und werden für Potentiale mit höheren Kopplungen sehr schnell sehr kompliziert. Für gerade Potentiale vereinfachen sie sich jedoch erheblich, da dann alle S_n verschwinden. Wie man sich bei der induktiven Konstruktion der Polynome beginnend mit $P_0(\lambda) = 1$ klarmachen kann, erhalten diese für ein gerades Potential eine wohldefinierte Parität, $P_n(-\lambda) = (-1)^n P_n(\lambda)$. Damit wird sofort offensichtlich, daß alle Koeffizienten S_n aufgrund ihrer Definition in Gl. (3.1.10) verschwinden müssen. Die zweite Gleichung (3.1.14) ist dann automatisch erfüllt, und die verbleibende Rekursionsgleichung vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} &= g_2R_n \;+\; g_4R_n(R_{n-1}+R_n+R_{n+1})\\ &\quad+\; g_6R_n\big((R_{n-1}+R_n+R_{n+1})^2+R_{n-2}R_{n-1}-R_{n-1}R_{n+1}+R_{n+1}R_{n+2}\big)+\ldots \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

[1] Für Potentiale mit linearem Term gilt $S_n = -\partial_{g_1}\ln h_n$. Mit der Umbenennung $\varphi_n \equiv \ln h_n$ erfüllen diese Größen die Gleichungen $\partial_{g_1}^2\varphi_n = \exp(\varphi_{n+1}-\varphi_n) - \exp(\varphi_n-\varphi_{n-1})$ des N-dimensionalen Toda-Gitters.

[2] Die Benutzung von Identitäten der Art $0 = \int d\lambda \mathrm{e}^{-NV(\lambda)}P_n'(\lambda)P_l(\lambda)$ ergeben für $l \le n-2$ keine neuen Beziehungen.

Auch in dieser Form sind die Größen R_n einer direkten Berechnung unzugänglich. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich jedoch die Stringgleichung (3.1.15) im Limes $N \to \infty$ relativ einfach lösen.

Im planaren Limes wird im einfachsten Fall, dem sogenannten einperiodischen Ansatz, angenommen, daß alle in Gl. (3.1.15) vorkommenden Größen $R_n, R_{n\pm 1}, R_{n\pm 2}, \ldots$ für $N \to \infty$ gegen eine stetige Funktion $r(\xi)$ konvergieren,

$$\begin{aligned} R_n, R_{n\pm 1}, R_{n\pm 2}, \ldots &\to r(\xi) \ , \\ \frac{n}{N} &\to \xi \ . \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Die Stringgleichung (3.1.15) läßt sich damit im planaren Limes kompakter schreiben als

$$\xi \ = \ g_2 r(\xi) \ + \ 3g_4 r(\xi)^2 \ + \ 10 g_6 r(\xi)^3 \ + \ \ldots \ \equiv \ w(r(\xi)) \ . \tag{3.1.17}$$

Für das rein quadratische Potential bedeutet dies $r(\xi) = \xi$ (für $g_2 = 1$), was mit den bekannten Polynomnormen h_n aus Gl. (3.1.8) im Limes (3.1.16) konsistent ist.

Um zu dem in der Einleitung beschriebenen kritischen Verhalten der Zustandssumme beziehungsweise der freien Energie in Gl. (1.1.12) zu gelangen, wird die Funktion $w(r)$ am kritischen Punkt r_{krit} um ihr Extremum entwickelt,

$$\xi \ = \ w(r_{krit}) \ + \ \frac{1}{2} w''(r_{krit})(r(\xi) - r_{krit})^2 \ + \ \mathcal{O}\big((r(\xi) - r_{krit})^3\big) \ . \tag{3.1.18}$$

Das Herangehen an den kritischen Punkt wird mittels einer der Kopplungskonstanten g parametrisiert[3], $g_{krit} = g w(r_{krit})$, so daß schließlich die folgende Beziehung gilt

$$\begin{aligned} g\xi - g_{krit} \ &= \ \frac{1}{2} g w''(r_{krit})(r(\xi) - r_{krit})^2 \ + \ \mathcal{O}\big((r(\xi) - r_{krit})^3\big) \\ \Leftrightarrow \quad r(\xi) - r_{krit} \ &\sim \ (g_{krit} - g\xi)^{\frac{1}{2}} \ . \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Im planaren Limes von Gl. (3.1.11) ist die freie Energie bis auf Konstanten ausdrückbar durch die Funktion $r(\xi)$,

$$F_0 \ \sim \ \int_0^1 d\xi \ (1 - \xi) \ln r(\xi) \ . \tag{3.1.20}$$

Setzt man das Verhalten am kritischen Punkt aus Gl. (3.1.19) ein und entwickelt den Logarithmus, so erhält man schließlich

$$F_0 \ \sim \ (g_{krit} - g)^{2 + \frac{1}{2}} \ . \tag{3.1.21}$$

[3] Der Zusammenhang zwischen der Entwicklung von $w(r)$ und dem Phasenübergang wird in den folgenden Abschnitten noch klarer werden.

Aus dem Vergleich mit Gl. (1.1.12) bekommt man hier den kritischen Exponenten der reinen zweidimensionalen Gravitation $\gamma_{str} = -\frac{1}{2}$. Geht man nun in der Rechnung bis zur Gleichung (3.1.18) zurück, so wird deutlich, daß die Anzahl der verschwindenden Ableitungen von $w(r)$ am kritischen Punkt γ_{str} bestimmt. Für das Beispiel des symmetrischen sextischen Potentials aus Kapitel II läßt sich bei geeigneter Wahl der Kopplungen $w'(r_{krit}) = w''(r_{krit}) = 0$ erreichen. Dies ist gerade bei $G_{krit} = -\sqrt{\frac{10}{3}}$ und $h_{krit} = \frac{1}{3\sqrt{30}}$ der Fall und führt somit auf $\gamma_{str} = -\frac{1}{3}$. Im allgemeinen gilt

$$\begin{aligned} &w^{(i)}(r_{krit}) = 0 \ \ , \ i = 1, \ldots, m-1 \ , \\ &w^{(m)}(r_{krit}) \neq 0 \qquad\qquad \Rightarrow \gamma_{str} = -\frac{1}{m} \ . \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Diese verschiedenen Möglichkeiten beschreiben jedoch nicht die unitären minimalen Modelle, trotz übereinstimmendem kritischen Exponenten. Aus der konformen Feldtheorie ergibt sich für die minimalen Modelle die zentrale Ladung $D = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$, wobei p und q teilerfremde, natürliche Zahlen sind. Der dazugehörige kritische Exponent lautet

$$\gamma_{str} = \frac{1}{12}\Big(D - 1 - \sqrt{(D-1)(D-25)}\Big) = -\frac{2}{p+q-1} \ . \tag{3.1.23}$$

Die unitären minimalen Modelle sind nun durch $(p,q) = (m+1, m)$, $m \in \mathrm{N}$, gegeben. Das Einmatrixmodell beschreibt jedoch das $(2m-1, 2)$-Modell, welches im allgemeinen nicht unitär ist.

Der Doppelskalenlimes

An dieser Stelle sei kurz angegeben, wie man mit der Methode der orthogonalen Polynome höhere Ordnungen in $\frac{1}{N}$ berechnet. Dabei wird von der bisher beschriebenen planaren Lösung der Stringgleichung ausgegangen. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, läßt sich diese jedoch nur sehr bedingt auf Mehrbandlösungen übertragen, so daß bislang dort die Berechnung höherer Ordnungen nicht möglich ist[4].

Im planaren Limes von Gl. (3.1.15) wurde zunächst angenommen, daß alle vorkommenden R_n's gegen eine stetige Funktion konvergieren. Um höhere Ordnungen mitzunehmen, betrachte man nun

$$\begin{aligned} R_n \ &\to \ r(\xi) \ , \\ R_{n\pm 1} \ &\to \ r(\xi \pm \epsilon) \ , \\ &\vdots \\ \frac{n}{N} \pm \frac{1}{N} \ &\to \ \xi \pm \epsilon \ . \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

[4] Eine Ausnahme bildet die Zweibandlösung des symmetrischen quartischen Potentials.

Eine ϵ-Entwicklung von Gl. (3.1.15) liefert dann eine Differentialgleichung, deren Lösung höhere Beiträge in $\epsilon = \frac{1}{N}$ zu $r(\xi)$ liefert. Für das symmetrische quartische Potential ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \xi &= g_2 r(\xi) \; + \; g_4 r(\xi)\big(r(\xi-\epsilon) + r(\xi) + r(\xi+\epsilon)\big) \\ &= w(r(\xi)) \; + \; \epsilon^2 \frac{\partial^2 r(\xi)}{\partial \xi^2} \; + \; \mathcal{O}(\epsilon^4) \; . \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Im Doppelskalenlimes wird nun gleichzeitig der Limes $\epsilon \to 0$ und $g \to g_{krit}$ gebildet, und zwar so, daß $N(g-g_{krit})^{\frac{5}{4}}$ konstant bleibt (vgl Gl. (1.1.15)). In diesem Grenzfall liefert die ϵ-Entwicklung bis zur zweiten Ordnung alle höheren Beiträge zu $r(\xi)$. Man führt nun eine Skalenvariable a ein, die im Doppelskalenlimes gegen Null geht,

$$\begin{aligned} g_{krit} - g\xi \; &\equiv \; a^2 g z \quad , \; \epsilon \; = \; a^{\frac{5}{2}} \\ r(\xi) - r_{krit} \; &\equiv \; a \; u(z) \; . \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Damit a für $g \to g_{krit}$ verschwindet, muß der kritische Punkt bei $\xi = 1$ erreicht werden, das heißt

$$r_{krit} \; = \; r(1) \; . \tag{3.1.27}$$

Entwickelt man nun wieder Gl. (3.1.25) um r_{krit} und setzt die Skalenvariable ein, so erhält man unter Ausnutzung von $\epsilon\partial_\xi = -g\sqrt{a}\partial_z$ die folgende Gleichung in Ordnung a^2:

$$z \; = \; -\frac{1}{2} w''(r_{krit}) u(z)^2 \; - \; g_{krit}^2 u(z)'' \; . \tag{3.1.28}$$

Diese Gleichung läßt sich auf die Painlevé-I Gleichung abbilden, die in der mathematische Literatur wohlbekannt ist. Die Suszeptibilität $F''(z)$ ist dann proportional zu der Lösung dieser Gleichung $u(z) = \sqrt{z}(1 - \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^{-\frac{5}{2}k})$. Mit $\lim_{k\to\infty} u_k \sim (2k)!$ stimmt das Matrixmodell Ordnung für Ordnung mit der zweidimensionalen Gravitation überein. Eine ausführlichere Diskussion hierzu findet sich in [11].

2. Beispiel: Das sextische Potential

In diesem Abschnitt wird an demselben Beispiel wie in Kapitel II,

$$V(\lambda) \; = \; \frac{1}{2}\lambda^2 \; + \; \frac{1}{4} g_4 \lambda^4 \; + \; \frac{1}{6} g_6 \lambda^6 \quad , \; g_6 > 0 \quad , \tag{3.2.1}$$

die analytische und numerische Lösung der Stringgleichung (3.1.15) für den Mehrbandfall diskutiert. Zunächst werden die verschiedenen analytischen Ansätze für eine planare Lösung der Rekursionsgleichung vorgeführt. Über eine Stabilitätsanalyse der planaren Lösung wird dann ein Zusammenhang zur Numerik hergestellt. Die numerischen Ergebnisse werden auf dem Hintergrund dieser Erkenntnisse diskutiert.

Die Rekursionsgleichung, die es hier zu lösen gilt, ist für das Potential (3.2.1) in Gl. (3.1.15) bereits bis zur entsprechenden Ordnung angegeben. Um den Zusammenhang zu den Phasengrenzen besser studieren zu können, ist es zweckmäßig, wie in Kapitel II die Größen $G = \frac{g_4}{\sqrt{g_6}}$ und $h = \sqrt{g_6}$ einzuführen. Mit der Redefinition

$$r_n \; \equiv \; h \; R_n \tag{3.2.2}$$

ergibt sich die Stringgleichung (3.1.15) zu

$$\begin{aligned} h\frac{n}{N} = r_n \Big(1 \; + \; & G(r_{n-1} + r_n + r_{n+1}) \\ & + \; (r_{n-1} + r_n + r_{n+1})^2 + r_{n-2}r_{n-1} - r_{n-1}r_{n+1} + r_{n+1}r_{n+2}\Big) \; . \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Im folgenden wird sich herausstellen, daß der im vorherigen Abschnitt vorgestellte einperiodische Lösungsansatz nicht immer konsistent ist, insbesondere dort, wo mehrere Phasen möglich sind.

Periodische Lösungen der Stringgleichung

In Verallgemeinerung von Gl. (3.1.16) lautet ein s-periodischer Ansatz [17] für die planare Lösung der Stringgleichung

$$\begin{aligned} & r_{sn+i} \to r_{(i)}(\xi) \quad s \in \mathrm{N}, \; i = 0, \ldots, s-1 \; , \\ & \frac{sn}{N} \to \xi \quad . \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Die planare freie Energie ergibt sich mit Gl. (3.1.11) bis auf eine Konstante zu

$$F_0 \; = \; \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \int_0^1 d\xi (1-\xi) \ln \frac{r_{(i)}(\xi)}{h} \; - \; V_{min} \; . \tag{3.2.5}$$

Dabei wurde benutzt, daß in einer Sattelpunktsnäherung $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln h_0 = V_{min}$. Dieser Term unterscheidet sich für die verschiedenen Phasen, je nach dem, wo sich das tiefste Potentialminimum befindet. Die mehrperiodischen Ansätze werden nun der Reihe nach diskutiert[5].

[5] Es kann sogar passieren, daß F_0 in Gl. (3.2.5) aus verschiedenen mehrperiodischen Ansätzen zusammengesetzt werden muß (s. Abb. 6).

(i) Der *einperiodische* Ansatz $r_n \to r(\xi)$ führt mit Gl. (3.2.3) auf

$$h\xi \;=\; r(\xi) \;+\; 3Gr(\xi)^2 \;+\; 10r(\xi)^3 \;=\; w(r(\xi)) \;. \tag{3.2.6}$$

Dieser Ansatz wird inkonsistent, wenn es keine eindeutige, positive Lösung für $r(\xi)$ mehr gibt. Anhand einer Kurvendiskussion von $w(r)$ sieht man leicht, daß dies für $G < -\sqrt{\frac{10}{3}}$ der Fall ist (vgl. Abb. 4). Die Extrema von $w(r)$ liegen dann bei[6]

$$\begin{aligned} r(\xi_{m/a}) &= -\frac{G}{10} \pm \frac{1}{10}\sqrt{G^2 - \frac{10}{3}} \;, \\ h\xi_{m/a} &= \frac{1}{50}\left(G^3 - 5G \mp (G^2 - \frac{10}{3})^{\frac{3}{2}}\right) \;. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Die eindeutige reelle Lösung der kubischen Gleichung lautet für $G \geq -\sqrt{\frac{10}{3}}$

$$\begin{aligned} r(\xi) &= -\frac{G}{10} + \left(\sqrt{\eta^3 + \nu(\xi)^2} - \nu(\xi)\right)^{\frac{1}{3}} - \eta\left(\sqrt{\eta^3 + \nu(\xi)^2} - \nu(\xi)\right)^{-\frac{1}{3}} \\ \eta &= \frac{1}{100}(\frac{10}{3} - G^2) \;\;,\;\; \nu(\xi) = \frac{1}{1000}(G^3 - 5G - 50h\xi) \;. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

In die freie Energie F_0 aus Gl. (3.2.5) geht allerdings nur $r(\xi)$ für $\xi \leq 1$ ein. Für $h\xi \leq h\xi_a$ ist der mit $r(0) = 0$ stetig verbundene Ast eindeutig. Die Konsistenz des einperiodischen Ansatzes ist wegen $h\xi_a = h_a$ in Gl. (2.2.10) gleichbedeutend mit der Existenz der Einbandlösung (I) unterhalb der Phasengrenze a, und zwar für beliebige Werte von G. Die Eigenwertdichte der Einbandlösung $\rho_{\mathrm{I}}(\lambda)$ kann aus $r(\xi)$ rekonstruiert werden und die planaren freien Energien aus der Sattelpunktsnäherung Gl. (2.1.12) und aus Gl. (3.2.5) stimmen überein [20]. Damit sind die Einbandlösung und der einperiodische Ansatz völlig äquivalent. Tatsächlich zeigt sich aber in der numerischen Berechnung, daß nur für $h\xi$ im Dominanzbereich von Phase I die einperiodische Lösung von den Rekursionskoeffizienten r_n angenommen wird.

Wie eben bereits deutlich geworden ist, spielen auch hier bei der planaren Lösung der orthogonalen Polynome die Phasengrenzen aus Kapitel II eine besondere Rolle. Auf der Existenzgrenze b nimmt die dort eindeutige Lösung von Gl. (3.2.6) ebenfalls eine sehr einfache Form an:

$$r(\xi_b) \;=\; -\frac{G}{10} + \frac{\sqrt{6}}{10}\sqrt{G^2 - \frac{10}{3}} \;, \tag{3.2.9}$$

mit $h\xi_b = h_b$ aus Gl. (2.2.10). Hierauf wird später noch zurückzukommen sein. Zu den Randpunkten $\pm x_1$ des Trägers von $\rho_{\mathrm{I}}(\lambda)$ läßt sich auch eine Beziehung herleiten. Ein Vergleich der Randbedingung (2.2.3) der Einbandlösung mit Gl. (3.2.6) ergibt, daß diese für $\xi = 1$ identisch sind. Es gilt also

$$r(1) \;=\; h\frac{x_1^2}{4} \;. \tag{3.2.10}$$

(ii) Der *zweiperiodische* Ansatz ist definiert durch

$$\begin{aligned} r_{2n} &\to r(\xi) \;, \\ r_{2n+1} &\to s(\xi) \;. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Der planare Limes von Gl. (3.2.3) für gerades und ungerades n führt damit auf die beiden folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} h\xi &= r(\xi)\Big(1 + G\big(r(\xi) + 2s(\xi)\big) + 3s(\xi)^2 + 6r(\xi)s(\xi) + r(\xi)^2\Big) \;, \\ h\xi &= s(\xi)\Big(1 + G\big(s(\xi) + 2r(\xi)\big) + 3r(\xi)^2 + 6r(\xi)s(\xi) + s(\xi)^2\Big) \;. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Mit der Definition der Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Theta(\xi) &\equiv r(\xi)s(\xi) \;, \\ \Upsilon(\xi) &\equiv r(\xi) \;+\; s(\xi) \;+\; \frac{1}{2}G \;, \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

lassen sich diese beiden Gleichungen vereinfachen zu[7]

$$\begin{aligned} h\xi &= -\Upsilon(\xi)\Big(\Upsilon(\xi)^2 - \frac{1}{4}(G^2 - 4)\Big) \;, \\ \Theta(\xi) &= -\frac{1}{2}\Big(\Upsilon(\xi)^2 - \frac{1}{4}(G^2 - 4)\Big) \;. \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Es existiert genau dann eine eindeutige reelle Lösung der kubischen Gleichung für $\Upsilon(\xi)$, falls

$$\begin{aligned} h\xi &\leq \frac{1}{36}\sqrt{3}(G^2 - 4)^{\frac{3}{2}} \;=\; h_c \\ G &\leq -2 \;. \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

[6]Der Wert $h\xi_a = h_a$ liegt genau auf der Existenzgrenze a der Einbandlösung (I) Gl. (2.2.10). Das ist kein Zufall, da entlang der BPIZ-Linie a sich $\gamma_{str} = -\frac{1}{2}$ ergibt, was gleichbedeutend damit ist, daß $w'(r)$ verschwindet (s Gl.(3.1.22)).

[7]Die planaren Lösungen für $r(\xi)$ und $s(\xi)$, wie sie in Abb. 7 eingetragen sind, erhält man am einfachsten, indem man die Umkehrfunktion $h\xi = w(r)$ bzw. $w(s)$ bestimmt. Löst man Gl. (3.2.13) nach r bzw. s auf, so erhält man unter Ausnutzung von Gl. (3.2.14)
$h\xi = 10s^3 + 3s^2G + \frac{1}{2}s(G^2-4) - (6s^2 + sG)\sqrt{3s^2 + sG + \frac{1}{2}(G^2-4)}$.

Die Lösung für $\Upsilon(\xi)$ lautet dann

$$\Upsilon(\xi) = \left(\sqrt{\left(\frac{h\xi}{2}\right)^2 - \left(\frac{G^2-4}{12}\right)^3} - \frac{h\xi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{G^2-4}{12}\left(\sqrt{\left(\frac{h\xi}{2}\right)^2 - \left(\frac{G^2-4}{12}\right)^3} - \frac{h\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} . \tag{3.2.16}$$

Ein Vergleich von Gl. (3.2.15) mit Gl. (2.2.12) zeigt, daß die Bedingung für die Eindeutigkeit mit der Existenzgrenze c der Zweibandlösung (II) übereinstimmt. Für große ξ wird diese Bedingung immer verletzt. Wegen $\xi \leq 1$ in F_0 (Gl. (3.2.5)) genügt aber $h\xi \leq h_c$, damit der zweiperiodische Ansatz konsistent ist. In [17] wird gezeigt, wie sich die Eigenwertdichte $\rho_{\text{II}}(\lambda)$ durch $r(\xi)$ und $s(\xi)$ ausdrücken läßt. Ferner wird dort bewiesen, daß die mittels Gl. (3.2.5) berechnete planare freie Energie exakt mit der der Zweibandlösung übereinstimmt. Damit ist eine vollständige Äquivalenz zwischen der Zweibandlösung aus der Sattelpunktsmethode und dem zweiperiodischen Ansatz der orthogonalen Polynome gezeigt. Die Numerik ergibt aber, daß dieser Ansatz nur für $h\xi$ im Dominanzbereich von Phase II auch angenommen wird (vgl. Abb.7).

Abschließend sei wie schon im einperiodischen Fall die Beziehung zu den Phasengrenzen und den Rändern der Schnitte x_1 und x_2 aus der Sattelpunktslösung angegeben. Entlang der Phasengrenze c für $h\xi_c = h_c$ nimmt die Lösung für $\Upsilon(\xi)$ eine besonders einfache Form an[8]:

$$\begin{aligned} \Upsilon(\xi_c) &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{G^2-4} , \\ \Theta(\xi_c) &= \frac{1}{12}(G^2-4) . \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Die Lösungen für $r(\xi)$ und $s(\xi)$ lauten dann mit Gl. (3.2.13)

$$\begin{aligned} r(\xi_c) &= \frac{1}{4}\left(-G + \sqrt{\frac{G^2-4}{3}} - \sqrt{4 - 2G\sqrt{\frac{G^2-4}{3}}}\right) , \\ s(\xi_c) &= \frac{1}{4}\left(-G + \sqrt{\frac{G^2-4}{3}} + \sqrt{4 - 2G\sqrt{\frac{G^2-4}{3}}}\right) , \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

wobei $r(\xi_c) \leq s(\xi_c)$ wegen $r(0) = r_0 = 0$. Ein Vergleich mit den Randbedingungen (2.2.5) der Zweibandlösung und den Gln. (3.2.14) für $\xi = 1$ ergibt

$$\Upsilon(1) = 2h\left(\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4}\right) + \frac{1}{2}G ,$$

$$\Theta(1) = h^2\left(\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{4}\right) , \tag{3.2.19}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} r(1) &= h\left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right)^2 , \\ s(1) &= h\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right)^2 . \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

(iii) Die bisher erzielte Übereinstimmung mit der Sattelpunktslösung läßt erwarten, daß auch der *dreiperiodische* Ansatz mit der Dreibandlösung (III) aus Kapitel II zur Deckung zu bringen ist. Erstaunlicherweise ist dies aber nicht der Fall, wie gleich gezeigt werden wird. Der Ansatz für die planare Lösung lautet hier

$$r_{3n+i} \;\rightarrow\; r_{(i)}(\xi) \quad , \; i = 0,1,2 . \tag{3.2.21}$$

Eingesetzt in Gl. (3.2.3) liefert dies die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} h\xi &= r_{(i)}(\xi)\Big(1 + Gu(\xi) + u(\xi)^2\Big) + \prod_{j=0}^{2} r_{(j)}(\xi) \quad , \; i = 0,1,2 , \\ u(\xi) &= \sum_{j=0}^{2} r_{(j)}(\xi) . \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Da die Funktionen $r_{(j)}(\xi)$ verschieden seien sollen, werden diese Gleichungen genau dann gelöst, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + Gu(\xi) + u(\xi)^2 \\ \Leftrightarrow \quad u_\pm &= -\frac{G}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{G^2-4} , \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

und

$$h\xi = \prod_{j=0}^{2} r_{(j)}(\xi) . \tag{3.2.24}$$

Wie man an Gl. (3.2.23) ablesen kann, sind die beiden Lösungen $u_\pm$ nur reell, wenn $G \leq -2$ ist. Die Dreibandlösung existiert aber bereits für $G \leq \sqrt{\frac{10}{3}} \approx -1.83$. Außerdem sind durch die beiden Gleichungen (3.2.23) und (3.2.24) nur zwei der drei Funktionen $r_{(i)}(\xi)$ bestimmbar. Trotzdem läßt sich auch hier die planare freie Energie berechnen, da in Gl. (3.2.5) nur das Produkt $\prod_{j=0}^{2} r_{(j)}(\xi)$ eingeht. Der

[8] An der Grenze c hat die Gl. (3.2.14) drei reelle Lösungen. Die angegebene ist eine doppelte Lösung, die dritte führt zu $\Theta < 0$ und ist deshalb auszuschließen.

dreiperiodische Ansatz ergibt mit Gl. (3.2.24) das folgende Ergebnis (OP steht für orthogonale Polynome):

$$F_0^{(\mathrm{OP})} = -\frac{1}{6}\ln g_6 - \frac{1}{4} - V_{min} \ . \tag{3.2.25}$$

Dies stimmt *nicht* mit der planaren freien Energie überein, die man aus der Dreibandlösung der Sattelpunktsmethode mit Gl. (2.1.12) erhält [17]. Die einzige Ausnahme bildet der Spezialfall, wo alle drei Minima des sextischen Potentials entartet sind. Dies ist gerade bei $G = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ für beliebige Werte $h > 0$ der Fall. Genau entlang dieser Linie im Phasendiagramm wurden aber glatte numerische Lösungen gefunden (s. Abb. 6). Diese stimmen mit der analytischen Lösung des dreiperiodischen Ansatzes überein, wenn zwei der drei Funktionen $r_{(i)}(\xi)$ zusammenfallen,

$$\begin{aligned} r_{3n} &\to r(\xi) \ , \\ r_{3n+i} &\to t(\xi) \ , \quad i = 1,2 \ . \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Die Ergebnisse dieser *entarteten dreiperiodischen* Lösung seien hier kurz zusammengestellt. Die Gleichungen (3.2.23) und (3.2.24) lauten mit Gl. (3.2.26) für $G = -\frac{4}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} r(\xi) + 2t(\xi) = u_\pm &= \begin{cases} \sqrt{3} & + \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & - \end{cases} \\ r(\xi)t(\xi)^2 &= h\xi \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Die beiden Äste $r(\xi)$ und $t(\xi)$ fallen zusammen bei $h\xi = (\frac{u_\pm}{3})^3$. Dies ist bei $h\xi = h_b$ der Fall, wie Abbildung 6 zeigt. Um einen stetigen Anschluß an die einperiodischen Lösung Gl. (3.2.9) bei ξ_b zu gewährleisten, muß $u_+ = \sqrt{3}$ angenommen werden. Die kubische Gleichung für $t(\xi)$ lautet damit

$$0 = t(\xi)^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}t(\xi)^2 + \frac{1}{2}h\xi \ . \tag{3.2.28}$$

Die Forderung $t(\xi) \geq r(\xi) \geq 0$ mit $r(0) = 0$ wählt genau eine der drei reellen Lösungen aus,

$$\begin{aligned} t(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{2} + \cos\big(\frac{1}{3}\arccos(1 - h\xi 6\sqrt{3})\big)\Big) \\ r(\xi) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(1 - \cos\big(\frac{1}{3}\arccos(1 - h\xi 6\sqrt{3})\big)\Big). \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Die gute Übereinstimmung der analytischen mit der numerischen Lösung geht aus Abbildung 6 hervor.

Wie man durch Ableiten von Gl. (3.2.27) sieht, treffen $r(\xi)$ und $t(\xi)$ bei ξ_b zwar stetig, aber nicht differenzierbar zusammen. Aus dem Unterabschnitt zur Stringgleichung, insbesondere Gl. (3.1.22), folgt automatisch für den kritischen Exponenten $\gamma_{str} = -1$, was mit Gl. (3.1.23) eine zentralen Ladung von $D = -2$ ergibt. Dies entspricht gerade einem supersymmetrischen Matrixmodell [6]. Frühere analytische Untersuchungen für das quartische Potential [26] sowie numerische Ergebnisse für das oktische Potential [23] lassen vermuten, daß diese Beziehung zu supersymmetrischen Modellen für beliebige symmetrische Potentiale mit entarteten Minima zutrifft.

Als Fazit läßt sich ziehen, daß der dreiperiodische Ansatz für die planare Lösung der Stringgleichung keine Beschreibung der in Kapitel II gefundenen Dreibandlösung liefert. Zum einen ist der Ansatz nicht auf dem gesamten Existenzbereich von III konsistent. Zum anderen stimmt die aus diesem Ansatz resultierende planare freie Energie nicht mit der aus der Sattelpunktsmethode überein, außer für den Fall entarteter Minima.

In [17] sind auch Ansätze mit höherer Periodizität betrachtet worden. Für Perioden größer als vier führen sie zu keiner Vereinfachung der Rekursionsgleichung mehr. In keinem Fall konnte jedoch eine befriedigende Beschreibung für den Bereich von Phase III gefunden werden. Bei der Untersuchung der numerischen Ergebnisse in Anhang A2. wurden ebenfalls keine höheren Periodizitäten gefunden.

Stabilitätsanalyse

Bevor mit einer numerischen Lösung der Stringgleichung begonnen wird, ist es sinnvoll sich zu überlegen, in welchem Bereich überhaupt mit einer stabilen Lösung in der Nähe der planaren Lösung gerechnet werden kann[9]. Dazu wird die Abweichung in linearer Ordnung für endliches N betrachtet, allerdings nur für den einperiodischen Ansatz. Es stellt sich heraus, daß für große $\xi = \frac{n}{N}$ immer die einperiodische Lösung angenommen wird. Die einzelnen Minima spielen dann keine Rolle mehr und es dominiert der λ^6-Term im Potential.

Die Abweichung von der planaren Lösung wird nun folgendermaßen parametrisiert

$$r_{n\pm j} \equiv r(\xi \pm j\epsilon) + \epsilon_{n\pm j} \ , \ j = -2, -1, \ldots, 2 \ , \quad \epsilon = \frac{n}{N} \ . \tag{3.2.30}$$

Nach dem Einsetzen in die Rekursionsgleichung sollen nur lineare Terme in ϵ bzw. ϵ_n mitgenommen werden. Aufgrund der Symmetrie von Gl. (3.2.3) unter der Vertauschung

[9] Die Darstellung folgt hier im wesentlichen [22]

$r_{n+j} \leftrightarrow r_{n-j}$ tragen die ϵ-Terme erst in quadratischer Ordnung bei. Die Stringgleichung lautet damit in linearer Ordnung in ϵ_n

$$0 = \epsilon_n(1+4Gr(\xi)+16r(\xi)^2) + (\epsilon_{n-1}+\epsilon_{n+1})(Gr(\xi)+6r(\xi)^2) + (\epsilon_{n-2}+\epsilon_{n+2})r(\xi)^2 . \tag{3.2.31}$$

Diese Differenzengleichung 4. Ordnung besitzt vier unabhängige, im allgemeinen komplexe Lösungen, die in folgender Weise parametrisiert werden können:

$$\epsilon_n = \sum_{i=1}^{4} A_i \kappa_i^n . \tag{3.2.32}$$

Dabei lösen jeweils die κ_i^n die Gleichung (3.2.31). Im Grenzwert großer N würden Lösungen mit $|\kappa_i| > 1$ exponentiell anwachsen und sollten deshalb nicht beitragen, d.h. $A_i = 0$, während Lösungen mit $|\kappa_i| < 1$ verschwinden.

Durch Einführung der Variablen $C \equiv \frac{1}{2}(\kappa + \frac{1}{\kappa})$ und Einsetzen von $\epsilon_n = \kappa^n$ in Gl. (3.2.31) erhält man eine quadratischen Gleichung in C,

$$0 = 1 + 4Gr(\xi) + 14r(\xi)^2 + 2r(\xi)(G+6r(\xi))C + 4r(\xi)^2C^2 ,$$
$$\Leftrightarrow \quad C_\pm = \frac{1}{4r(\xi)}\Big(-G - 6r(\xi) \pm \sqrt{G^2 - 4 - 4Gr(\xi) - 20r(\xi)^2}\Big) . \tag{3.2.33}$$

Für $|\kappa| = 1$ gilt per Definition $-1 \le C \le 1$, das heißt es handelt sich um eine oszillierende Störung[10]. Es existieren nur dann reelle Lösungen $C_\pm$, wenn der Radikand positiv ist, d.h. für

$$-\frac{G}{10} - \frac{\sqrt{6}}{10}\sqrt{G^2 - \frac{10}{3}} \le r(\xi) \le -\frac{G}{10} + \frac{\sqrt{6}}{10}\sqrt{G^2 - \frac{10}{3}} = r(\xi_b) . \tag{3.2.34}$$

Die linke Ungleichung ist wegen $0 \le r(\xi)$ für $G \le -2$ stets erfüllt. Die rechte Seite ist gerade durch die planare einperiodische Lösung an der Stelle ξ_b, d.h. der Phasengrenze b, gegeben (vgl. Gl. (3.2.9)). Da $r(\xi)$ um ξ_b monoton wachsend ist, existieren für $\xi \le \xi_b$ für endliches N immer Abweichungen von der planaren Lösung, die um die einperiodische Lösung oszillieren. Genau dieses Verhalten wird sich bei der numerischen Berechnung der Stringgleichung zeigen (s. Abb. 5 und 7).

Die dort ebenfalls beobachtete sprunghafte Abweichung von der planaren Lösung bei ξ_d beziehungsweise bei ξ_e kann im Rahmen dieser linearen Stabilitätsanalyse nicht erklärt werden. Dieser Sprung wäre hier zu erwarten gewesen, wenn eine der Lösungen $C_\pm$ vom Betrag Eins wird, das heißt von einer oszillierenden zu einer exponentiell anwachsenden Lösung wird. Dies ist gerade der Fall bei

$$r(\xi_{m/a}) = -\frac{G}{10} \pm \frac{1}{10}\sqrt{G^2 - \frac{10}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad C_\pm = +1 , \tag{3.2.35}$$

das heißt an den Extrema von $w(r(\xi))$ (vgl. Gl. (3.2.7)), beziehungsweise für $G \le -\sqrt{6}$ bei

$$r(\xi_\pm) = -\frac{G}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{G^2 - 6} \quad \Leftrightarrow \quad C_- = -1 , \tag{3.2.36}$$

was in keinem Fall mit der Numerik übereinstimmt.

[10] Mit $\epsilon_n = \kappa^n = \exp(ni\theta)$ ist auch immer das komplex Konjugierte eine Lösung von Gl. (3.2.31). Durch Bildung von Linearkombinationen lassen sich immer reelle, oszillierende Störungen ϵ_n konstruieren.

3. Numerische Berechnung der Stringgleichung

Auch in diesem Abschnitt wird weiterhin das Beispiel des geraden sextischen Potentials verwendet. Die Bemerkungen zu den Näherungsverfahren gelten jedoch allgemein.

Das verwendete Verfahren

Bei der numerischen Lösung der Stringgleichung liegt es zunächst nahe, die Rekursionsgleichung (3.2.3) als *Anfangswertproblem* zu betrachten. Berechnet man die ersten Polynomnormen h_n numerisch, so läßt sich im Prinzip durch Anwendung der Rekursion r_n für ein beliebiges n numerisch bestimmen. In [8] und [15] hat sich jedoch herausgestellt, daß dieses Verfahren in extremer Weise von den Anfangswerten abhängt. So wurde in [15] bereits für $N = 25$ eine Genauigkeit von circa 50 Stellen benötigt. Das Verfahren bricht für größere Werte von N sehr schnell zusammen und liefert negative Ergebnisse für die definitionsgemäß positiven Größen r_n [8]. Auf diese Weise läßt sich also kein sinnvoller Grenzwert für große N betrachten, da die Lösungen für N-Werte dieser Größenordnung noch nicht asymptotisch stabil sind. In [17] wurden trotzdem schon Anzeichen für starke Oszillationen im Bereich der Dreibandlösung gefunden.

Bereits in [21] ist vorgeschlagen worden, die Stringgleichung als *Randwertproblem* zu lösen. Dabei wird vorausgesetzt, daß für große Werte von $\xi = \frac{n}{N}$ immer die planare einperiodische Lösung angenommen wird. Für einen festen Wert ξ_{max} werden die Rekursionskoeffizienten r_n mit $n \ge \xi_{max}N = n_{max}$ auf der planaren einperiodischen Lösung Gl. (3.2.6) festgehalten. Zusammen mit der Definition $r_0 = 0$ braucht die Rekursionsgleichung nur noch zwischen diesen Werten berechnet zu werden. Dieses Verfahren hat sich als sehr viel stabiler als das Anfangswertproblem herausgestellt. Die numerischen Ergebnisse rechtfertigen im nachhinein die gemachte Annahme, insbesondere hängen sie nicht von der Wahl des Randpunktes ξ_{max} ab[11].

[11] Es sollte immer $\xi_{max} > \xi_b$ gelten, typischerweise wurde hier $\xi_{max} = 2 > \xi_b$ gewählt.

Zur Lösung des Randwertproblems gibt es zwei gängige Verfahren, die hier beide verwendet worden sind. Dazu definiere man das zu minimierende Funktional

$$\mathcal{P}_n[G,h;\ r_n, r_{n\pm1}, r_{n\pm2}] \equiv r_n\Big(1 + G(r_{n-1}+r_n+r_{n+1}) + (r_{n-1}+r_n+r_{n+1})^2 + r_{n-2}r_{n-1} - r_{n-1}r_{n+1} + r_{n+1}r_{n+2}\Big) - h\frac{n}{N}\ . \qquad (3.3.1)$$

Das *Newtonsche Verfahren* bestimmt auf die folgende Weise im i-ten Schritt die neuen Rekursionskoeffizienten $r_n^{(i+1)}$ aus den alten $r_n^{(i)}$:

$$r_n^{(i+1)} \equiv r_n^{(i)} - a\sum_m \left(\frac{\partial\mathcal{P}_n}{\partial r_m^{(i)}}\right)^{-1} \mathcal{P}_m[G,h;\ r_m^{(i)}, r_{m\pm1}^{(i)}, r_{m\pm2}^{(i)}]\ . \qquad (3.3.2)$$

Dabei ist a ein fest gewählter, Konvergenz erzeugender Unterrelaxationsfaktor, der meistens $a \approx 1$ gewählt werden kann. Die Matrix $\frac{\partial\mathcal{P}_n}{\partial r_m}$ ist fast diagonal, wie man aus der Definition Gl. (3.3.1) ablesen kann. Für solche sogenannte Bandmatrizen gibt es einfache Invertierungsalgorithmen [27].

Die zweite Möglichkeit besteht in der Anwendung eines *Regula falsi* Verfahrens:

$$r_n^{(i+1)} \equiv r_n^{(i)} - a\mathcal{P}_n[G,h;\ r_n^{(i)}, r_{n\pm1}^{(i)}, r_{n\pm2}^{(i)}]\ . \qquad (3.3.3)$$

Auch hier ist a ein Konvergenz erzeugender Faktor, der typischerweise zwischen 0.1 und 1 gewählt werden muß. Für den Fall, daß Konvergenz stattfindet, konnte in keinem der beiden Fälle eine Abhängigkeit der Endergebnisse von a festgestellt werden.

Das Regula falsi Verfahren ist wesentlich einfacher, da keine Matrix invertiert werden muß. Dafür konvergiert das Newtonsche Verfahren wesentlich schneller. In beiden Fällen müssen für die Iteration Anfangswerte $r_n^{(0)}$, $n = 1,\ldots,n_{max}$ vergeben werden. Dabei wurden verschiedene Möglichkeiten wie zum Beispiel lineare Anfangswerte oder Werte auf der planaren Lösung verwendet. Außer in der Konvergenzgeschwindigkeit wurden hierbei keine Abhängigkeit von den Anfangswerten in den Endergebnissen festgestellt.

Konvergenz

Das Ziel der numerischen Lösung der Stringgleichung ist es, ein möglichst genaues Bild von der exakten Lösung im Grenzfall großer N zu bekommen. Als eine solche numerisch konvergente Lösung wird ein Satz von $r_n^{(i)}$ bezeichnet, für den bei gegebenem N für eine feste Schranke f der maximale absolute Fehler kleiner als f ist,

$$\forall n = 0,\ldots,n_{max}: \quad \left|\mathcal{P}_n[G,h; r_n^{(i)}, r_{n\pm1}^{(i)}, r_{n\pm2}^{(i)}]\right| < f\ . \qquad (3.3.4)$$

Die Konvergenz gegen diese Lösung wird von verschiedenen Faktoren beeinflußt, von der Schranke f, der Feinheit der Zerlegung N, sowie der Wahl der Kopplungen G und h im Phasendiagramm. Diese drei Punkte werden nun einzeln diskutiert:

- Abhängigkeit vom Fehler f: Der bei den hier präsentierten Ergebnissen erreichte Fehler wurde nur durch die mögliche Rechengenauigkeit ($\sim 10^{-15}$) und die Rechenzeit ($\sim$ Tage) beschränkt. Für ein festes N konnte immer eine konvergente Lösung gefunden werden.

  In einer Arbeit von Sénéchal [23] wurde behauptet, daß das Einsetzen der Oszillationen in den numerischen Lösungen bei zu kleinen Werten von ξ stattfindet, wenn ein zu großer Fehler bei der Berechnung verwendet wird. Damit sollte die Diskrepanz zu den Ergebnissen von Jurkiewicz [22] erklärt werden. Diese Behauptung konnte hier jedoch nicht bestätigt werden. Dazu wurden hier zum Vergleich mit Sénéchal für dieselben Kopplungen, dieselben Werte von N sowie gleichen oder kleineren Fehler[12] Berechnungen durchgeführt, die zu anderen Ergebnissen geführt haben[13]. Vielmehr wurde die Vermutung von Jurkiewicz besser bestätigt, wonach der Einsatzpunkt der Oszillationen bei $\xi_d = \frac{h_d}{h}$ bzw. bei $\xi_e = \frac{h_e}{h}$ liegt, und damit mit der Dominanzgrenze d bzw. e der Dreibandlösung (III) zusammenhängt. Dieser Punkt ist hier sehr stabil gegenüber Änderungen von f (und N, s.u.).

  In [23] wurde für das sextische Potential mit dem Newtonschen Verfahren gerechnet, während hier vorwiegend mit Regula falsi gearbeitet wurde[14]. Ein Vergleich beider Verfahren mit denselben Ausgangsdaten führte hier jedoch zu identischen Ergebnissen, womit eine Abhängigkeit vom Näherungsverfahren ausgeschlossen werden konnte.

- Abhängigkeit von N: Es bezeichnet N hier immer die Anzahl von Punkten im Intervall $[0,1]$, an denen die Rekursionskoeffizienten r_n bei $\frac{n}{N}$ berechnet werden. In der Literatur sind schon in [18] und [15] numerische Lösungen der Stringgleichung für kleine $N \leq 25$ berechnet worden. Wie in [15] bereits bemerkt wurde, führt dies scheinbar im gesamten Phasenraum (I-III) zu glatten ein-, zwei- bzw. dreiperiodischen Lösungen. Geht man jedoch zu größeren N über [8], so beginnen die numerischen Lösungen stark zu oszillieren, allerdings nur in einem scharf begrenzten Bereich (s. Anhang A1.). Diese Lösung ist offenbar diejenige, gegen die das System von Gleichungen (3.2.3) für großes N konvergiert. Eine Konvergenz für immer größeres N ist dabei nicht so zu verstehen, daß sich die r_n an derselben Vergleichsstelle $\frac{n}{N}$ nicht mehr ändern, zumindest nicht im instabilen Bereich. Vielmehr ist damit folgendes gemeint:

  - die einhüllende Kurve wird immer schärfer
  - der Einsatzpunkt der Oszillationen konvergiert von rechts gegen $\xi_b = \frac{h_b}{h}$

[12] Der in [23] verwendete quadratische Fehler $\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{max}} \mathcal{P}_i^2}$ ist größer oder gleich dem hier verwendeten maximalen Fehler f.

[13] vgl. Abb. 5 und 7 hier mit den Abb. 3 und 11 dort

[14] Alle in dieser Arbeit gezeigten Abbildungen wurden damit berechnet.

Letzteres ist nach der Stabilitätsanalyse auch zu erwarten. In einem Beispiel in Anhang A1. sieht man ferner, daß der linke Einsatzpunkt praktisch unabhängig von N ist (s. Anhang A Abb. 12).

Die beschriebene Art von Konvergenz für große N konnte jedoch nicht im gesamten Bereich der Kopplungskonstanten erzielt werden. In der Nähe der entarteten Minima reichten die betrachteten Maximalwerte von N in der Größenordnung $\sim 10^3$ nicht aus (vgl. Anhang A Abb. 13).

- Abhängigkeit von den Kopplungen G und h: Die Wahl von G hat nicht nur entscheidenden Einfluß auf die quantitative Form der numerischen Ergebnisse, sondern auch wie eben erwähnt auf die Konvergenz der Lösung. Zunächst leuchtet ein, daß dort, wo die numerische Lösung glatt ist, sehr viel schneller Konvergenz stattfindet. Dies ist für $G > -\sqrt{\frac{10}{3}}$ sowie entlang der Linie $G = -\frac{4}{\sqrt{3}} \approx -2.31$ für entartete Minima mitten im instabilen Bereich des Phasendiagramms der Fall (s. Abb. 4 und 6). Doch auch dort, wo Instabilitäten auftreten, gibt es sehr große Unterschiede im Konvergenzverhalten. In einem schmalen Bereich um die entarteten Minima für $G \approx -\frac{4}{\sqrt{3}} \pm 0.05$, war es nicht möglich, mit den zu Verfügung stehenden Rechenkapazitäten ($N \approx 1000$ für $f < 10^{-15}$) Konvergenz bezüglich N zu erzeugen (s. Anhang A Abb. 13). Dagegen genügten im übrigen Bereich der Mehrbandlösung meist schon Werte von etwa $N = 100$ und wesentlich größere Fehler, um ein Bild vom Grenzfall für große N zu bekommen (vgl. Anhang A Abb. 12).

  Die Wahl von h hat dagegen keinerlei Einfluß auf die Konvergenz, da h in Gl. (3.2.2) und (3.2.3) nur als Skalierungsgröße eingeht.

Diskussion der Ergebnisse

In den Abbildungen 4 bis 7 sind vier typische Beispiele für alle möglichen Arten von numerischen Lösungen[15] angegeben, die für das sextische Potential aus Gl. (3.2.1) gefunden wurden. Dabei werden stückweise auch die ein-, zwei- oder entartete dreiperiodische planare Lösung angenommen. Das Phasendiagramm der Sattelpunktslösung Abbildung 3 überträgt sich nun wie folgt auf diese numerischen Lösungen der Stringgleichung. Das Aufeinanderfolgen der Beispiele entspricht einem Durchlaufen des Diagramms von rechts nach links zu immer kleineren Werten von G.

[15] In allen Fällen ist der maximale absolute Fehler $f < 10^{-15}$, außer in Abb.7, dort ist $f < 10^{-13}$.

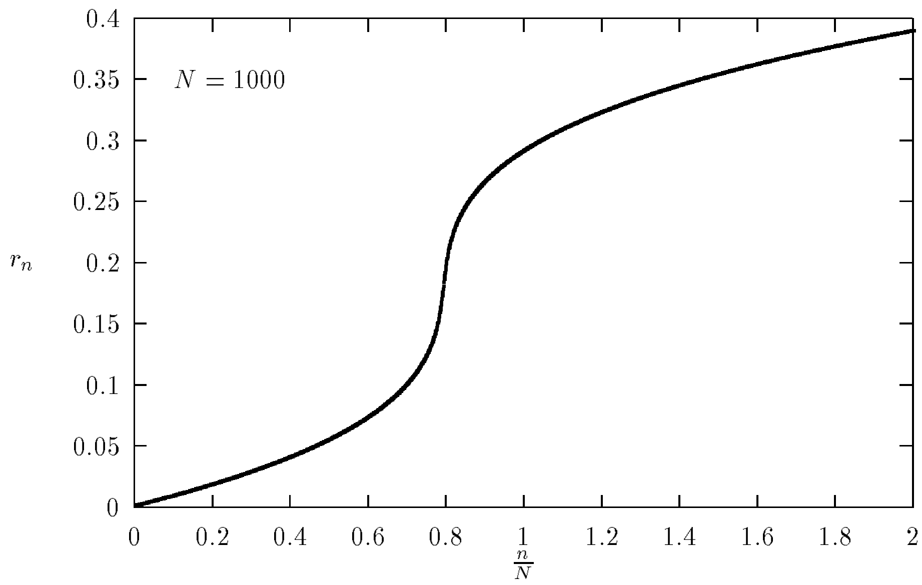

Abbildung 4: Der Bereich der reinen Einbandlösung, $G = -1.8$, $h = 0.08$

Das erste Bild liegt wegen $-\sqrt{\frac{10}{3}} \approx -1.83 < G$ in dem Bereich, in dem für alle h nur die Einbandlösung (I) existiert. Die numerische Lösung liegt auf der planaren einperiodischen Lösung; allein für die Anfangswerte $r_n^{(0)}$ genau auf der planaren Lösung beträgt im Beispiel bei $N = 1000$ der maximale Fehler f bereits weniger als 10^{-5}.

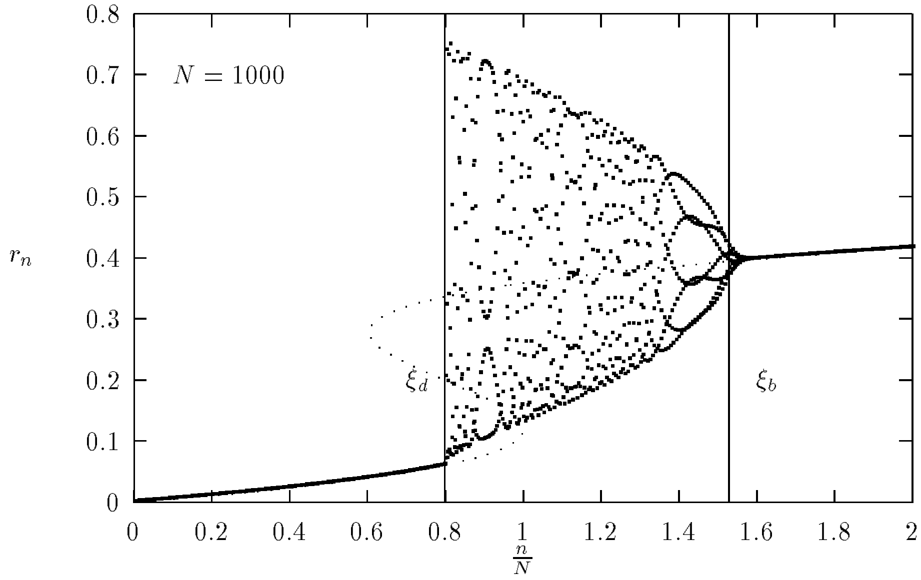

Abbildung 5: Der Bereich mit Ein- und Dreibandlösung, $G = -\frac{5}{3}\sqrt{\frac{10}{7}}$, $h = \frac{3}{7\sqrt{70}}$

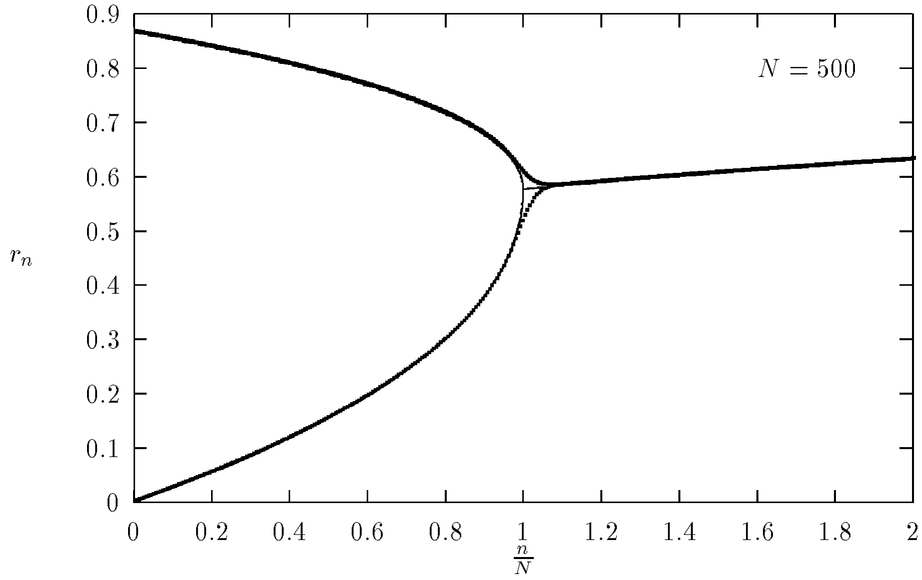

Abbildung 6: Der Fall entarteter Minima, $G = -\frac{4}{\sqrt{3}}$, $h = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Das zweite Bild liegt mit $-\frac{4}{\sqrt{3}} < G \approx -1.99 < -\sqrt{\frac{10}{3}}$ in dem Bereich, wo entweder Phase I oder Phase III vorliegt. Die Oszillationen liegen sehr genau zwischen $\xi_d = \frac{h_d}{h}$ und $\xi_b = \frac{h_b}{h}$, was zumindest für die rechte Seite durch die Stabilitätsanalyse erklärt werden kann. Dies bestätigt die in [22] geäußerte Vermutung numerisch noch besser, wie auch schon die Ergebnisse von [8]. Die Größe der Kopplung h bestimmt hier lediglich, wo die Oszillationen einsetzen und wo sie aufhören (sowie den absoluten Wert von r_n), nicht aber das qualitative Bild. Anders gesagt hängt von h nur ab, wie "schnell" mit ξ das Phasendiagramm zu festem G durchlaufen wird. Im Dominanzbereich von Phase I wird die planare einperiodische Lösung angenommen, wie der gepunktete Vergleichsgraph zeigt.

Bild 3 zeigt, daß es inmitten des instabilen Bereiches eine glatte numerische Lösung gibt. In völliger Übereinstimmung mit den numerischen Berechnungen aus [23] ist dies genau bei $G = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ der Fall, also für entartete Minima, und zwar unabhängig von der Größe von h. Die entartete dreiperiodische Lösung Gl (3.2.29) ist zum Vergleich eingetragen. Der obere Ast enthält doppelt so viele Punkte wie der untere, da dort zwei Lösungen zusammenfallen (s. Gl. (3.2.26)). Die beiden Äste treffen bei $\xi_b = 1$ stetig zusammen und von da an wird die einperiodische Lösung angenommen. Die Übereinstimmung mit den planaren Lösungen (dünne Linien) wird mit wachsendem N immer besser.

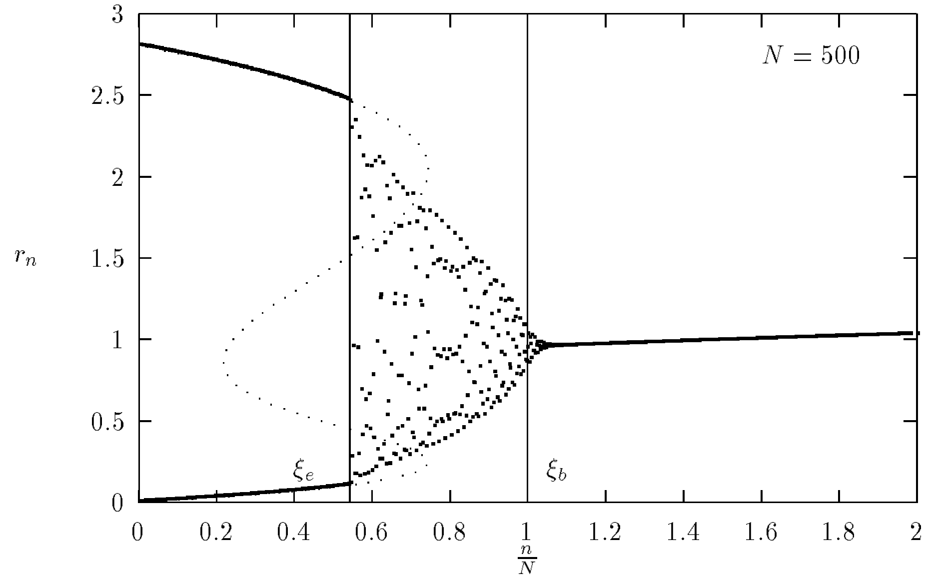

Abbildung 7: Der Bereich mit allen drei Phasen, $G = -\sqrt{10}$, $h = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Bild 4 liegt mit $G = -\sqrt{10} < -\frac{4}{\sqrt{3}}$ in dem Bereich, wo auch teilweise Phase II dominiert. Zunächst wird für kleine ξ die planare zweiperiodische Lösung angenommen, die zum Vergleich angegeben ist (gepunktete Linie). Dieser Teil ist durch die Oszillationen im Bereich der Phase III von der einperiodischen Lösung getrennt, da in diesem Modell kein Übergang II $\to$ I möglich ist. Die Lage der Instabilitäten wird durch die Schnittpunkte mit den Phasengrenzen e und b bei $\xi_e = \frac{h_e}{h}$ und $\xi_b = \frac{h_b}{h}$ sehr gut beschrieben. Dies bestätigt den Zusammenhang zu den Phasengrenzen auch in einem Bereich, der in [22] nicht untersucht worden ist.

Die numerischen Ergebnisse machen die Hoffnung zunichte, in dem interessanten Mehrbandbereich einen Doppelskalenlimes und damit einen nichttrivialen Kontinuumslimes durchführen zu können. Die einzigen Ausnahmen bilden wie schon erwähnt erstens der trikritische Punkt $G_{krit} = -\sqrt{\frac{10}{3}}$ und $h = -\frac{1}{3\sqrt{30}}$ mit $\gamma_{str} = -\frac{1}{3}$. Er befindet sich in der Nähe von Abbildung 4, wo die einperiodische Lösung $r(\xi)$ gerade noch nicht mehrdeutig ist. Die zweite Ausnahme ist der Fall entarteter Minima[16] bei $G = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ und $h = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ mit $\gamma_{str} = 1$.

[16] Der Wert von h wird dadurch festgelegt, daß der kritische Punkt bei $\xi = 1$ liegt (s. Gl. (3.1.26)).

In Anhang A2. ist der Versuch dargestellt, auch im Bereich der Instabilitäten glatte Funktionen mit den numerisch berechneten r_n zu bilden, allerdings mit negativem Ergebnis.

Abschließend sollte erwähnt werden, daß die hier gefundenen Instabilitäten auch für andere Potentiale auftreten, wie zum Beispiel für das symmetrische oktische in [23] oder das asymmetrische quartische in [24]. Sie stellen vermutlich eine generelle Eigenschaft von Potentialen mit mehreren nicht entarteten Minima dar. Dies bedeutet eine sehr starke Einschränkung an die eine analytische Lösbarkeit von Matrixmodellen mit der Methode der orthogonalen Polynome.

Kapitel IV:

Die s-Bandlösung des hermiteschen Matrixmodells

Die beiden bisher vorgestellten Verfahren zur Lösung von Matrixmodellen sind in mehrerer Hinsicht unbefriedigend. Die in Kapitel II vorgestellte Sattelpunktsmethode erlaubt nur die Berechnung des planaren Grenzfalles. Darüberhinaus kann selbst in diesem Fall bei einer komplizierteren Bandstruktur die freie Energie für Genus Null nur numerisch bestimmt werden (s. [16]). Versuche, mit dieser Methode höhere Ordnungen zu berechnen [28], haben sich als nicht durchführbar ergeben [29] .

Bei der Verwendung von orthogonalen Polynomen kann die Zustandssumme auf die Berechnung von komplizierten Integralen zurückgeführt werden. Diese genügen ihrerseits einer Rekursionsbeziehung, der Stringgleichung. Diese Rekursionsgleichung kann nur unter bestimmten Annahmen bezüglich des Verhaltens im Kontinuumslimes gelöst werden. Die Beiträge höherer Ordnung $\frac{1}{N}$ zur Zustandssumme lassen dann im Doppelskalenlimes berechnen. Anhand von numerischen Untersuchungen im vorherigen Kapitel konnte jedoch an einem Beispiel gezeigt werden, daß die gemachten Annahmen zur Lösung der Stringgleichung nur in einem bestimmten Parameterbereich der Kopplungen zutreffen.

Im folgenden soll eine weitere Lösungsmethode von Matrixmodellen vorgestellt werden. Diese erlaubt es, Korrelationsfunktionen wie z.B. $\frac{1}{N}\langle \mathrm{Tr}\phi^m\rangle$ auch jenseits des Doppelskalenlimes störungstheoretisch in $\frac{1}{N}$ zu berechnen. Erwartungswerte sind dabei wie üblich definiert durch

$$\langle Q(\phi)\rangle \;=\; \frac{1}{Z}\int d\phi\; Q(\phi)\, \exp(-N\; \mathrm{Tr}V(\phi))\;. \qquad (4.1)$$

Es wurden zuerst von Migdal [2] sogenannte Loop- oder Dyson-Schwinger-Gleichungen aufgestellt, um das erzeugende Funktional für Korrelationsfunktionen $W(p)$ zu bestimmen,

$$W(p) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle \mathrm{Tr}\phi^k\rangle}{p^{k+1}} \;=\; \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\frac{1}{p-\phi}\right\rangle \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{N^{2g}}W_g(p)\;. \qquad (4.2)$$

Unter Annahme des Vorliegens einer Einbandlösung wurde von Ambjørn et al. [7] ein konstruktives Verfahren angegeben, mit dem $W_g(p)$ sukzessive bis zu beliebig hohem Genus g berechnet werden kann. Ein geschickter Wechsel von den Kopplungskonstanten zu Momenten erlaubt es, Korrelatoren nicht störungstheoretisch in den Kopplungen zu bestimmen.

Im weiteren soll nun gezeigt werden, inwieweit sich diese Methoden auch auf Mehrbandlösungen verallgemeinern lassen. Dies wird am Beispiel des hermiteschen und des komplexen Matrixmodells vorgeführt, ließe sich jedoch auch ohne weiteres auf andere Typen von Matrixmodellen wie z.B. verallgemeinerte Penner-Modelle [30] übertragen. Das komplexe Matrixmodell wird, wenn auch weniger ausführlich, in Kapitel VI behandelt.

Die beiden Kapitel über das hermitesche Matrixmodell sind folgendermaßen aufgebaut. Nach den wichtigsten Definitionen wird zunächst der Formalismus für eine beliebige Anzahl von Bändern vorgestellt. Die explizite Iteration der Loopgleichung wird dann konkret am Beispiel der Zweibandlösung in Kapitel V vorgeführt. Anhand dieses Beispiels werden die Probleme deutlich gemacht, die eine Berechnung höherer Genera für $g \geq 2$ bislang nicht möglich machen.

Im allen Kapiteln über die Momentenmethode (IV-VI) wird die Notation von Ambjørn et al. [7] bzw. [31] verwendet. Das hier vorgestellte Verfahren ist dort für die Einbandlösung des hermiteschen bzw. komplexen Matrixmodells ausführlich beschrieben.

1. Definitionen und Begriffe

Die Zustandssumme des hermiteschen Matrixmodells ist wie in Kapitel II definiert als

$$Z\,[N,\{g_i\}] \;\equiv\; e^{N^2F[N,\{g_i\}]} \;\equiv\; \int d\phi\, \exp(-N\; \mathrm{Tr}V(\phi))\;. \qquad (4.1.1)$$

Das Matrixpotential ist hier durch die folgende Potenzreihe gegeben:

$$V(\phi) \;\equiv\; \sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{j}\phi^j\;, \qquad (4.1.2)$$

das heißt die Zustandssumme hängt von unendlich vielen Kopplungen g_i, $i \in \mathrm{N}_+$ ab. Diese können als Quellen für Erwartungswerte von $\mathrm{Tr}\phi^m$ benutzt werden,

$$-m\frac{d}{dg_m}F\,[N,\{g_i\}] \;=\; \frac{1}{N}\langle \mathrm{Tr}\phi^m\rangle\ ,\quad m\in \mathrm{N}_+\ . \tag{4.1.3}$$

Erst am Ende der gesamten Rechnung dürfen die entsprechenden Kopplungen für ein bestimmtes Potential, wie z. B. das symmetrische sextische Potential in den vorherigen Kapiteln, gleich Null gesetzt werden.

Der Erwartungswert $\frac{1}{N}\langle \mathrm{Tr}\phi^m\rangle$ kann interpretiert werden als Summe über alle triangulierten Oberflächen, die ein Polygon mit m Ecken als Rand besitzen (vgl. Kapitel I1.). Das erzeugende Funktional $W(p)$ für alle diese Erwartungswerte heißt dementsprechend Einloopkorrelator. Bei komplizierteren Korrelationsfunktionen betrachtet man wie in der Feldtheorie üblich nur zusammenhängende Graphen (=*conn*ected),

$$\frac{1}{N^2}\langle \mathrm{Tr}\phi^m\mathrm{Tr}\phi^n\rangle_{conn} \;\equiv\; \frac{1}{N^2}\langle \mathrm{Tr}\phi^m\mathrm{Tr}\phi^n\rangle - \frac{1}{N^2}\langle \mathrm{Tr}\phi^m\rangle\langle \mathrm{Tr}\phi^n\rangle\ . \tag{4.1.4}$$

Die linke Seite wird wiederum interpretiert als Summe von zusammenhängenden Simplizes mit einem m-gon und einem n-gon als Rand. Im Kontinuumslimes gehen diese Erwartungswerte dann über in die entsprechenden Stringamplituden. Die dazugehörigen erzeugenden Funktionale werden als Multiloopkorrelatoren bezeichnet,

$$W(p_1,\ldots,p_n) \;\equiv\; N^{n-2}\sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{\infty}\frac{\langle \mathrm{Tr}\phi^{k_1}\cdots\mathrm{Tr}\phi^{k_n}\rangle_{conn}}{p_1^{k_1+1}\cdots p_n^{k_n+1}}\ . \tag{4.1.5}$$

Wie man leicht sieht, erhält man die Loopkorrelatoren durch sukzessive Anwendung des sogenannten Loopeinsetzungsoperators, oder auch kurz Loopoperators, auf die freie Energie:

$$W(p) \;=\; \frac{d}{dV}(p)F + \frac{1}{p}\ , \tag{4.1.6}$$

wobei der Loopoperator definiert ist durch

$$\frac{d}{dV}(p) \;\equiv\; -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{p^{j+1}}\frac{d}{dg_j}\ . \tag{4.1.7}$$

Die höheren Loopkorrelatoren sind dann gegeben durch

$$W(p_1,\ldots,p_n) \;=\; \frac{d}{dV}(p_n)\frac{d}{dV}(p_{n-1})\cdots\frac{d}{dV}(p_1)F\ ,\quad n\geq 2\ . \tag{4.1.8}$$

Aufgrund der Definition von $W(p)$ (4.2) gilt

$$\lim_{p\to\pm\infty}W(p) \;=\; \frac{1}{p}\ . \tag{4.1.9}$$

Da die rechte Seite nicht von N abhängt, stammt der $\frac{1}{p}$-Beitrag ausschließlich von dem planaren Anteil $W_0(p)$. Dieser Tatsache wird im folgenden noch eine besondere Bedeutung zukommen. Die freie Energie und die Loopkorrelatoren besitzen dieselbe Genusentwicklung:

$$F=\sum_{g=0}^{\infty}\frac{1}{N^{2g}}F_g\ ,$$
$$W(p_1,\ldots,p_n)=\sum_{g=0}^{\infty}\frac{1}{N^{2g}}W_g(p_1,\ldots,p_n)\ . \tag{4.1.10}$$

Deshalb lassen sich die Gleichungen (4.1.6) und (4.1.8) zusammenfassen zu

$$W_g(p_1,\ldots,p_n) \;=\; \frac{d}{dV}(p_n)\frac{d}{dV}(p_{n-1})\cdots\frac{d}{dV}(p_1)F_g\ ,\qquad g,n\geq 1\ . \tag{4.1.11}$$

2. Zusammenhang zur Sattelpunktsnäherung

Die bisher eingeführten Begriffe lassen sich auch im Eigenwertbild formulieren. Im planaren Limes wird damit der Zusammenhang zur Sattelpunktsnäherung in Kapitel II deutlicher. Dazu führt man eine formale Eigenwertdichte $\rho_N(\lambda)$ ein, die im Grenzwert $N\to\infty$ in die Eigenwertdichte $\rho(\lambda)$ aus der Sattelpunktsgleichung (2.1.11) übergeht,

$$\rho_N(\lambda) \;\equiv\; \frac{1}{N}\left\langle\sum_{i=1}^{N}\delta(\lambda-\lambda_i)\right\rangle\ . \tag{4.2.1}$$

Dabei sind die λ_i, $i=1,\ldots,N$, die N Eigenwerte der Matrix ϕ in der Zustandssumme in Gl. (4.1.1). Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\frac{1}{N}\langle \mathrm{Tr}\phi^k\rangle=\int d\lambda\,\rho_N(\lambda)\lambda^k\ ,$$
$$W(p)=\int d\lambda\frac{\rho_N(\lambda)}{p-\lambda}\ , \tag{4.2.2}$$

sowie entsprechend für die Multiloopkorrelatoren. In der Herleitung der Loopgleichung im nächsten Abschnitt wird angenommen, daß $\rho_N(\lambda)$ in einer Umgebung um $N=\infty$ einen kompakten Träger besitzt. Diese Voraussetzung ist notwendig, um die Loopkorrelatoren in $\frac{1}{N}$ um $N=\infty$ entwickeln zu können [1]. Im Falle einer s-Bandlösung lautet der Träger σ also

$$\sigma \equiv \bigcup_{i=1}^{s}[x_{2i},x_{2i-1}] \ , \quad x_1 > x_2 > \ldots > x_{2s} \ . \tag{4.2.3}$$

Im Eigenwertbild ist wegen Gl. (4.2.2) sofort offensichtlich, daß $W(p)$ in der komplexen Ebene s Schnitte besitzt, da σ aus s Intervallen besteht. Für $p \notin \sigma$ ist $W(p)$ eine analytische Funktion. Im planaren Limes von Gl. (4.2.2) gilt

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N(\lambda) = \rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0}\Big(W_0(\lambda-i\epsilon)-W_0(\lambda+i\epsilon)\Big) \ , \quad \lambda\in\sigma \ . \tag{4.2.4}$$

Damit ist aufgrund von Gl. (2.1.15) die Identifikation mit der planaren Eigenwertdichte aus der Sattelpunktsgleichung (2.1.11) gerechtfertigt. Ferner stimmt $W_0(p)$ mit dem in Gl. (2.1.13) definierten erzeugenden Funktional überein. Die Asymptotik von $W(p)$ in Gl. (4.1.9) läßt sich als Konsequenz der Normiertheit der Eigenwertdichte verstehen,

$$\int_\sigma d\lambda\rho(\lambda) = 1 \ . \tag{4.2.5}$$

3. Die Loopgleichung

Nachdem alle wesentlichen Begriffe zur Verfügung gestellt worden sind, soll nun die Loopgleichung für eine beliebige Anzahl von Bändern hergeleitet werden, um die zuvor eingeführten Multiloopkorrelatoren zu bestimmen.

Die in Gl. (4.1.1) definierte Zustandssumme ist invariant unter Feldredefinitionen der folgenden Art

$$\phi \to \phi+\epsilon\phi^k \ , \tag{4.3.1}$$

das heißt nach der Redefinition muß gelten

$$\left.\frac{dZ}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 \ . \tag{4.3.2}$$

Wählt man auf geschickte Art und Weise die Redefinition von ϕ, so erhält man aus der Bedingung (4.3.2) eine Bestimmungsgleichung für das erzeugende Funktional $W(p)$. Die folgende Wahl liefert das gewünschte:

$$\phi \to \phi+\epsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^k}{p^{k+1}} = \phi+\epsilon\frac{1}{p-\phi} \ . \tag{4.3.3}$$

[1] Die formale Eigenwertdichte $\rho_N(\lambda)$ besitzt selbst keine $\frac{1}{N}$-Entwicklung [29], wohl aber das Integral darüber wie in Gl. (4.2.2).

Die Jacobi-Determinante sowie die Änderung der Wirkung sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} d\phi &\to d\phi\left(1+\epsilon(\mathrm{Tr}\frac{1}{p-\phi})^2\right) \ , \\ \mathrm{Tr}V(\phi) &\to \mathrm{Tr}V(\phi)+\epsilon\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{p-\phi}V'(\phi)\right) \ . \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Aus der Bedingung (4.3.2) für die Invarianz der Zustandssumme erhält man dann

$$\frac{1}{N}\left\langle\mathrm{Tr}\frac{1}{p-\phi}V'(\phi)\right\rangle = \frac{1}{N^2}\left\langle\left(\mathrm{Tr}\frac{1}{p-\phi}\right)^2\right\rangle \ . \tag{4.3.5}$$

Die Definition der Loopkorrelatoren als erzeugende Funktionale für zusammenhängende Graphen liefert für die rechte Seite

$$\frac{1}{N^2}\left\langle\left(\mathrm{Tr}\frac{1}{p-\phi}\right)^2\right\rangle = (W(p))^2+\frac{1}{N^2}W(p,p) \ . \tag{4.3.6}$$

Die linke Seite läßt sich über die Eigenwertdichte $\rho_N(\lambda)$ auch durch $W(p)$ ausdrücken.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\left\langle\mathrm{Tr}\frac{1}{p-\phi}V'(\phi)\right\rangle &= \int_\sigma d\lambda\rho_N(\lambda)\frac{V'(\lambda)}{p-\lambda} \\ &= \int_\sigma d\lambda\rho_N(\lambda)\oint_{\mathcal{C}}\frac{d\omega}{2\pi i}\frac{1}{\omega-\lambda}\frac{V'(\omega)}{p-\omega} \\ &= \oint_{\mathcal{C}}\frac{d\omega}{2\pi i}W(\omega)\frac{V'(\omega)}{p-\omega} \ . \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Dabei ist der Integrationsweg so gewählt, daß er *alle* Eigenwerte $\lambda\in\sigma\subset\mathrm{R}$ enthält, nicht jedoch $p\notin\sigma$ (siehe Abbildung 8). Dies setzt wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt voraus, daß σ eine kompakte Menge ist.

Die Loopgleichung für das hermitesche Einmatrixmodell mit einer s-Bandstruktur lautet also

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{p-\omega}W(\omega) = (W(p))^2+\frac{1}{N^2}\frac{d}{dV}(p)W(p) \ , \quad p\notin\sigma \ . \tag{4.3.8}$$

Der Punkt p kann hier auch zwischen den Intervallen von σ liegen, so daß ein Doppelskalenlimes an den inneren Endpunkten der Intervalle möglich ist.

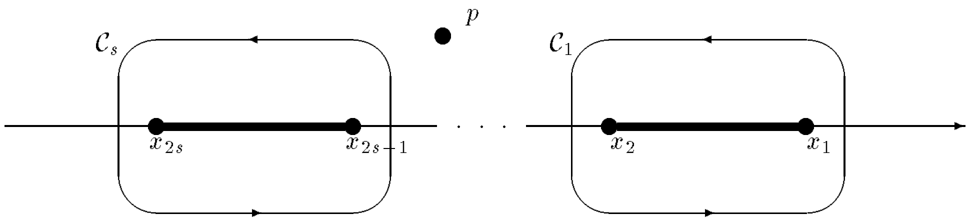

Abbildung 8: Der Integrationsweg $\mathcal{C} = \cup_{i=1}^{s}\mathcal{C}_i$

4. Die planare Lösung

Der Startpunkt für die Iteration der Loopgleichung ist die planare Lösung $W_0(p)$. Ausgehend davon lassen sich sukzessive die höheren Genera bestimmen, wie im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

Im Limes $N \to \infty$ geht Gl. (4.3.8) über in

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{p-\omega}W_0(\omega) \;=\; (W_0(p))^2 \;. \tag{4.4.1}$$

Deformiert man nun den Integrationsweg $\mathcal{C}$ nach unendlich, so gibt es Beiträge vom Pol bei p und bei ∞. Letzterer wird im folgenden mit $\mathcal{C}_\infty$ bezeichnet. Man erhält so

$$(W_0(p))^2 \;=\; V'(p)W_0(p) + \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{p-\omega}W_0(\omega) \;. \tag{4.4.2}$$

Diese Gleichung für $W_0(p)$, die auch als Dyson-Schwinger-Gleichung bezeichnet wird, ist äquivalent zur Bestimmung von $W_0(p)$ über die Sattelpunktsgleichung (2.1.11) [17]. Der Vorteil der Formulierung hier liegt darin, daß sich $W_0(p)$ für Potentiale von beliebigem Grad geschlossen angeben läßt. Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt sich wie folgt.

$$\begin{aligned} W_0(p) &= \frac{1}{2}V'(p) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(V'(p))^2 + 4Q(p)} \;, \\ Q(p) &= \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{p-\omega}W_0(\omega) \;. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Der Ansatz für das Vorliegen einer s-Bandlösung lautet[2]

$$W_0(p) \;=\; \frac{1}{2}\left(V'(p) - M(p)\sqrt{\prod\nolimits_{i=1}^{2s}(p-x_i)}\right) \;. \tag{4.4.4}$$

Dabei wird die Wurzel als Funktion im Komplexen durch die folgende Wahl der Vorzeichen eindeutig festgelegt, wobei die rechte Seite als Potenzreihe zu verstehen ist:

$$\sqrt{\prod\nolimits_{i=1}^{2s}(p-x_i)} \;\equiv\; p^s\left(\prod_{i=1}^{2s}\left(1-\frac{x_i}{p}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \;. \tag{4.4.5}$$

Die Wurzel auf der rechten Seite ist für $p \in \mathrm{R}\backslash\sigma$ immer positiv. Die Funktion $M(p)$ ist *analytisch* auf der gesamten komplexen Ebene. Es gilt also

$$M(p) \;=\; \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{M(\omega)}{\omega-p} \;. \tag{4.4.6}$$

Setzt man hier im Integral die nach $M(\omega)$ aufgelöste Gleichung (4.4.4) ein, so ergibt sich unter Ausnutzung der Asymptotik Gl. (4.1.9), daß der $W_0(p)$-Term wegfällt:

$$M(p) \;=\; \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{(\omega-p)\sqrt{\prod_{i=1}^{2s}(\omega-x_i)}} \;. \tag{4.4.7}$$

$M(p)$ und damit $W_0(p)$ ist nun vollständig als Funktion der Kopplungen bestimmt. Die Rückdeformation des Integrationsweges in Gl. (4.4.4) liefert unter Benutzung der Analytizität von $V'(\omega)$ das folgende Endergebnis, die planare Lösung $W_0(p)$ im s-Bandfall für ein beliebiges Potential:

$$W_0(p) \;=\; \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{p-\omega}\sqrt{\prod_{i=1}^{2s}\left(\frac{p-x_i}{\omega-x_i}\right)} \;. \tag{4.4.8}$$

Aus den Gleichungen (4.4.4) und (4.2.4) läßt sich sofort die planare Eigenwertdichte ablesen

$$\rho(\lambda) \;=\; \frac{1}{2\pi}|M(\lambda)|\sqrt{(x_1-\lambda)\prod\nolimits_{i=2}^{2s}(\lambda-x_i)} \;,\quad \lambda \in \sigma \;, \tag{4.4.9}$$

mit $M(\lambda)$ aus Gl. (4.4.7). Auf dem Komplement $\mathrm{R}\backslash\sigma$ ist $\rho(\lambda) \equiv 0$. Die so bestimmte planare Lösung für den Einloopkorrelator $W_0(p)$ und die Eigenwertdichte $\rho(\lambda)$ wird erst vollständig durch die Angabe der Intervallgrenzen x_i, $i = 1, \ldots, 2s$, als Funktionen der

[2] Das Vorzeichen von $M(p)$ ergibt sich aus der Asymptotik von $W_0(p)$ in Gl. (4.1.9).

Kopplungen g_i, $i \in \mathrm{N}_+$. Die dafür benötigten $2s$ Bestimmungsgleichungen erhält man aus der folgenden Bedingung. Aufgrund von Gl.(4.1.9) ist $W_0(p) \sim \frac{1}{p}$ für große p. Entwickelt man die Lösung von $W_0(p)$ in Gl.(4.4.8), so müssen die Koeffizienten vor den Beiträgen der Ordnungen $p^{s-1}, \ldots, p^0$, verschwinden. Der Term der Ordnung $\frac{1}{p}$ muß eins ergeben. Dies liefert $s+1$ Gleichungen,

$$\delta_{k,s} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \omega^k V'(\omega) \phi^{(0)}(\omega) , \quad k = 0, \ldots, s . \tag{4.4.10}$$

Die fehlenden $s-1$ Bedingungen werden bereitgestellt durch die Forderung nach der Gleichheit der chemischen Potentiale zwischen den verschiedenen Schnitten, wie dies bereits in Kapitel II Gl. (2.1.23) erklärt wurde,

$$0 = \int_{\bar{\sigma}_i} d\lambda M(\lambda) \sqrt{\prod_{i=1}^{2s} (\lambda - x_i)} , \quad i = 1, \ldots, s-1 , \tag{4.4.11}$$

wobei die $\bar{\sigma}_i$ die abgeschlossenen Intervalle zwischen den Schnitten bezeichnen,

$$\bar{\sigma}_i \equiv [x_{2i-1}, x_{2i-2}] , \quad i = 1, \ldots, s-1 . \tag{4.4.12}$$

Dieser zusätzliche Typ von Randbedingungen wird für erheblichen Komplikationen bei der iterativen Lösung der Loopgleichung sorgen.

5. Das Iterationsverfahren

Um aus $W_0(p)$ die höheren Genera zu bestimmen, wird die Genusentwicklung Gl. (4.1.10) in die Loopgleichung (4.3.8) eingesetzt, und man erhält die folgende Gleichung

$$(\hat{K} - 2W_0(p))W_g(p) = \sum_{g'=1}^{g-1} W_{g'}(p) W_{g-g'}(p) + \frac{d}{dV}(p) W_{g-1}(p) , \quad g \geq 1 . \tag{4.5.1}$$

Dabei ist der Integraloperator $\hat{K}$ definiert durch

$$\hat{K} f(p) \equiv \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p - \omega} f(\omega) . \tag{4.5.2}$$

Gelingt es nun, den Operator $(\hat{K} - 2W_0(p))$ zu invertieren, so ist $W_g(p)$ auf der linken Seite von Gl. (4.5.1) ausschließlich durch Beiträge niedrigerer Genera auf der rechten Seite bestimmt. Ferner sieht man, daß als Startwert nur $W_0(p)$ bekannt sein muß, was bereits bestimmt worden ist.

Es wird sich herausstellen, daß die rechte Seite von Gl. (4.5.1) als Funktion von p immer durch eine endliche Linearkombination von mehrfachen Polen an den x_i, $\frac{1}{(p-x_i)^n}$, gegeben sein wird. Daher ist es zweckmäßig, einen Satz von Basisfunktionen $\chi_i^{(n)}(p)$ der folgenden Art zu bestimmen:

$$(\hat{K} - 2W_0(p))\, \chi_i^{(n)}(p) \equiv \frac{1}{(p - x_i)^n} , \quad n \in \mathrm{N}_+, \; i = 1, \ldots, 2s . \tag{4.5.3}$$

Die Lösung für den Einloopkorrelator $W_g(p)$ hat dann die Struktur

$$W_g(p) = \sum_{n=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{2s} A_{i,g}^{(n)} \chi_i^{(n)}(p) , \quad g \geq 1 , \tag{4.5.4}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten $A_{i,g}^{(n)}$. Der wesentliche Schritt besteht nun in einem Variablenwechsel von den Kopplungskonstanten g_i zu den sogenannten Momenten $M_i^{(k)}$, $k \in \mathrm{N}_+, i = 1, \ldots, 2s$. Die Basisfunktionen $\chi_i^{(n)}$ sowie $W_g(p)$ und F_g lassen sich dann durch die Momente ausdrücken und sind dadurch nicht störungstheoretisch in den Kopplungen.

Im Einbandfall lautet das Ergebnis [7][3]

$$W_g(p) = \sum_{n=1}^{3g-1} \sum_{i=1,2} A_{i,g}^{(n)} \chi_i^{(n)}(p) , \quad g \geq 1 . \tag{4.5.5}$$

Dabei sind die Koeffizienten $A_{i,g}^{(n)}$ gebrochen rationale Funktionen in den Momenten und in $d = x_1 - x_2$ und hängen von höchstens $2(3g-1)$ Momenten $M_i^{(k)}$, $k = 1, \ldots, 3g-1$, $i = 1, 2$, ab. In analoger Weise läßt sich die freie Energie F_g als Funktion von endlich vielen Momenten darstellen, siehe dazu [7].

Definiere also

$$M_i^{(k)} \equiv \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} V'(\omega) \phi_i^{(k)}(\omega) , \quad k \in \mathrm{N}_+, \; i = 1, \ldots, 2s , \tag{4.5.6}$$

mit

$$\begin{aligned} \phi_i^{(k)}(\omega) &\equiv \frac{1}{(\omega - x_i)^k} \; \phi^{(0)}(\omega) , \\ \phi^{(0)}(\omega) &\equiv \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2s} (\omega - x_i)}} . \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

[3] Hier in leicht abgeänderter Notation.

Durch Deformation des Integrationsweges nach unendlich und Entwickeln von $\phi_i^{(k)}(\omega)$ erhält man die Momente als Funktion der Kopplungskonstanten,

$$M_i^{(k)} = g_{k+s} + g_{k+s+1} \sum_{j=1}^{2s} x_j (\frac{1}{2} + k\delta_{ij}) + \dots \ . \tag{4.5.8}$$

Explizit hängen die Momente also nur von den Kopplungen $g_{i \geq s+1}$ ab. Über die Intervallgrenzen x_i, die von allen Kopplungskonstanten abhängen, kommt allerdings eine Abhängigkeit auch von allen niedrigeren g_i ins Spiel.

Außer der geeigneten Parametrisierung der Korrelatoren und der freien Energie spielen die Momente noch eine weitere wichtige Rolle. Wegen

$$M_i^{(k)} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} M(\lambda)\Big|_{\lambda=x_i} \tag{4.5.9}$$

bedeutet das Verschwinden von $M_i^{(k)}$, daß $M(\lambda)$ und damit wegen Gl. (4.4.9) auch $\rho(\lambda)$ weitere Nullstellen bei x_i entwickelt. Die Momente charakterisieren also mit der Bedingung

$$\begin{aligned} M_i^{(k)} &= 0 \ , \quad k = 1, \dots, m-1 \ , \\ M_i^{(m)} &\neq 0 \ , \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

genau den m-ten multikritischen Punkt bei x_i. Diese Tatsache ist für den Doppelskalenlimes von besonderer Bedeutung.

Die gewünschte Invertierung der Loopgleichung geht nun wie folgt vonstatten. Wie man mittels vollständiger Induktion leicht sehen kann, erfüllen die mit Hilfe der Momente definierten Funktionen

$$\chi_i^{(n)}(p) \equiv \frac{1}{M_i^{(1)}} \left(\phi_i^{(n)}(p) - \sum_{k=1}^{n-1} M_i^{(n-k+1)} \chi_i^{(k)}(p) \right) \ , \quad n \in \mathrm{N}_+ \ , \ i = 1, \dots, 2s \ , \tag{4.5.11}$$

die Gl. (4.5.3). Diese Definition der Basis ist jedoch nicht eindeutig, da der Kern des Operators $(\hat{K} - 2W_0(p))$ nicht leer ist. Unter Ausnutzung der Beziehungen (4.4.10) läßt sich zeigen, daß der Kern durch folgende Funktionen aufgespannt wird:

$$\mathrm{Ker}(\hat{K} - 2W_0(p)) = \mathrm{Span}\{p^l \phi^{(0)}(p); \ l = 0, \dots, s\} \ . \tag{4.5.12}$$

Nun gilt aufgrund von Gl. (4.1.9), daß

$$\lim_{p \to \pm\infty} W_g(p) \sim \frac{1}{p^2} \ , \quad g \geq 1 \ , \tag{4.5.13}$$

gelten muß. Es dürfen also höchstens solchen Nullmoden zu $W_g(p)$ addiert werden, die diese Asymptotik nicht zerstören. Außer im Fall $s = 1$, wo dieses Argument alle möglichen Nullmoden ausschließt, reduziert sich damit die Menge der *erlaubten* Nullmoden auf die folgenden Funktionen:

$$\text{erlaubte Nullmoden}: \quad \{p^l \phi^{(0)}(p); \ l = 0, \dots, s-2\} \ . \tag{4.5.14}$$

Es kann also bei der Invertierung von Gl. (4.5.1) zunächst eine beliebige Linearkombination von den $s-1$ Funktionen Gl. (4.5.14) zu $W_g(p)$ hinzugefügt werden, und zwar in jedem Schritt der Iteration. $W_g(p)$ wird erst aufgrund von Gl. (4.1.11) eindeutig festgelegt, da es sich per Definition als Funktion von p als totale Ableitung $\frac{d}{dV}(p)$ schreiben lassen muß:

$$W_g(p) = \frac{d}{dV}(p) F_g \ , \quad g \geq 1 \ . \tag{4.5.15}$$

Das Ziel sollte es nun sein, dieses Verfahren zu systematisieren, d.h. die Nullmoden systematisch so zu den in Gl. (4.5.11) definierten Basisfunktionen zu addieren, daß Gl. (4.5.15) automatisch erfüllt ist. Dies ist bisher jedoch noch nicht gelungen. Welche Schwierigkeiten dabei im einzelnen auftreten, wird im nächsten Kapitel am konkreten Beispiel der Zweibandlösung gezeigt werden.

Abschließend sollen hier noch die ersten Schritte zur Durchführung der Iteration angegeben werden, um die Behandlung des allgemeinen s-Bandfalles zu vervollständigen. Die Loopgleichung für Genus $g = 1$ lautet

$$(\hat{K} - 2W_0(p))W_1(p) = \frac{d}{dV}(p) W_0(p) \ . \tag{4.5.16}$$

Die rechte Seite ergibt sich durch Ableiten des Ergebnisses für $W_0(p)$ in Gl. (4.4.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dV}(p) W_0(p) &= \frac{1}{2} \oint_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{-1}{(p-\omega)^3} \frac{\phi^{(0)}(\omega)}{\phi^{(0)}(p)} + \frac{1}{4} \frac{1}{\phi^{(0)}(p)} \sum_{i=1}^{2s} \frac{1}{p - x_i} \frac{dx_i}{dV}(p) M_i^{(1)} \\ &= -\frac{3}{16} \sum_{i=1}^{2s} \frac{1}{(p-x_i)^2} - \frac{1}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{2s} \frac{1}{(p-x_i)(p-x_j)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{\phi^{(0)}(p)} \sum_{i=1}^{2s} \frac{1}{p-x_i} \frac{dx_i}{dV}(p) M_i^{(1)} \ . \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

Dabei wurde außer von der Definition der Momente Gl. (4.5.6) auch von der nützlichen Beziehung

$$\frac{d}{dV}(p) V'(\omega) = \frac{-1}{(p-\omega)^2} \tag{4.5.18}$$

Gebrauch gemacht. Die noch verbleibenden $2s$ Größen $\frac{dx_i}{dV}(p)$ erhält man folgendermaßen. Wendet man den Loopoperator $\frac{d}{dV}(p)$ auf die Gleichungen (4.4.10) und (4.4.11) an, die die Intervallgrenzen x_i bestimmen, so ergibt sich daraus das folgende Gleichungssystem:

$$0 = \sum_{i=1}^{2s} (x_i)^k \frac{dx_i}{dV}(p) M_i^{(1)} + 2 \frac{\partial}{\partial p} (p^k \phi^{(0)}(p)) \ , \quad k = 0, \ldots, s \ ,$$

$$0 = \sum_{i=1}^{2s} \frac{dx_i}{dV}(p) M_i^{(1)} \int_{\bar{\sigma}_j} d\lambda \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{2s}(\lambda - x_k)}}{(\lambda - x_i)} \ , \quad j = 1, \ldots, s-1 \ . \tag{4.5.19}$$

Dieses Gleichungssystem wird im nächsten Kapitel exemplarisch für $s = 2$ gelöst werden. Die komplizierte Form der Lösung für die $\frac{dx_i}{dV}(p)$ führt im weiteren Verlauf der Iteration zu Schwierigkeiten, die dort diskutiert werden. Wie man sieht, treten die elliptischen Integrale aus dem zweiten Typ von Bestimmungsgleichungen Gl. (4.5.19), die für die Komplikationen verantwortlich sind, erst ab $s \geq 2$ auf.

Der Vollständigkeit halber seien hier noch die Größen $\frac{dM_i^{(k)}}{dV}(p)$ angegeben, die ebenfalls im weiteren benötigt werden. Sie ergeben sich nach Ableiten der Definition (4.5.6) mit Hilfe von Partialbruchzerlegungen zu

$$\begin{aligned} \frac{dM_i^{(k)}}{dV}(p) = (k + \frac{1}{2}) & \left(M_i^{(k+1)} \frac{dx_i}{dV}(p) - \phi_i^{(k+1)}(p) \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2s} \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(x_j - x_i)^{k-l+1}} \left(\phi_i^{(l)}(p) - M_i^{(l)} \frac{dx_j}{dV}(p) \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2s} \frac{1}{(x_j - x_i)^k} \left(M_j^{(1)} \frac{dx_j}{dV}(p) - \phi_j^{(1)}(p) \right) \ , \\ & i = 1, \ldots, 2s \ , \ k \in \mathrm{N}_+ \ . \end{aligned} \tag{4.5.20}$$

Kapitel V:

Die Zweibandlösung des hermiteschen Matrixmodells

In diesem Kapitel soll anhand des Beispiels der Zweibandlösung klarer herausgearbeitet werden, welche Probleme bei der Berechnung höherer Genera auftreten. Die Mehrbandlösungen unterscheiden sich dabei von der Einbandlösung in zwei wesentlichen Punkten:

- es gibt erlaubte Nullmoden, d.h. mögliche Beiträge zum Einloopkorrelator $W_g(p)$ beim Invertieren der Loopgleichung
- es treten zusätzlichen Randbedingungen zur Bestimmung der x_i auf, die elliptische Integrale enthalten

Der erste Punkt führt dazu, daß die Invertierung der Loopgleichung nicht mehr eindeutig ist. $W_g(p)$ wird erst durch die Forderung fixiert, als totale Ableitung bezüglich $V(p)$ schreibbar zu sein. Dies ist jedoch aufgrund des zweiten Punktes nicht mehr ohne weiteres möglich.

Die zusätzlichen Randbedingungen sorgen dafür, daß die Größen $\frac{dx_i}{dV}(p)$ sehr kompliziert werden. Dies hat zum einen zur Folge, daß sich die Basis $\chi_i^{(n)}(p)$ für $W_g(p)$ nicht mehr wie im Einbandfall als totale Ableitung bezüglich $V(p)$ schreiben läßt[1]. Zum anderen läßt sich die freie Energie F_1 nicht mehr als Funktion von *endlich* vielen Momenten $M_i^{(k)}$ schreiben, wie dies bei der Einbandlösung der Fall war.

Die beiden Punkte haben jedoch nicht unbedingt zur Konsequenz, daß das gesamte Iterationsverfahren zusammenbricht. In Anhang B wird eine Bedingung dafür angegeben, daß $W_1(p)$ von nur endlich vielen Momenten abhängt. Falls es gelänge, die Nullmoden des Einloopkorrelators festzulegen, ohne auf die freie Energie zurückzugreifen, so ließen sich in diesem Fall auch höhere Genera mit der Momentenmethode berechnen. Der Umstand, daß die Anzahl der zu fixierenden Nullmoden genau gleich der Anzahl der komplizierteren Randbedingungen Gl. (4.4.11) ist, läßt hier noch einen tieferen Zusammenhang vermuten[2].

[1] Insbesondere sind die Funktionen $\frac{dx_i}{dV}(p)$ nicht linear unabhängig und deshalb nicht als Basis geeignet, wie man anhand von Gl. (4.5.19) sieht.

[2] Dieselbe Beziehung wird sich auch im Kapitel VI für das komplexe Matrixmodell herausstellen.

Das Hauptergebnis diese Kapitels ist außer der Darstellung der eben skizzierten Problematik der vollständige Einloopkorrelator $W_1(p)$ der Zweibandlösung vom Genus $g = 1$ für ein beliebiges symmetrisches Potential. Dies ist das erste Ergebnis für eine Mehrbandlösung in höherer Ordnung in $\frac{1}{N}$ jenseits des Doppelskalenlimes.

1. Die Berechnung von Genus $g = 1$

Es werden nun die einzelnen Schritte bei der Berechnung von $W_1(p)$ aus $W_0(p)$ beschrieben. Dabei wird nur im Grenzfall eines symmetrischen Potentials ein vollständiges Ergebnis erzielt werden. Dieses wird dann in einem weiteren Abschnitt diskutiert werden.

Die Lösung für $W_0(p)$ Gl. (4.4.8) lautet im vorliegenden Fall

$$W_0(p) \;=\; \frac{1}{2}\oint_C \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{p-\omega}\frac{\phi^{(0)}(\omega)}{\phi^{(0)}(p)}\ , \tag{5.1.1}$$

mit

$$\phi^{(0)}(p) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^4 (p-x_i)}}\ . \tag{5.1.2}$$

Die Anwendung des Loopoperators auf $W_0(p)$ lieferte Gl. (4.5.17), nach einer Partialbruchzerlegung also

$$\begin{aligned}\frac{d}{dV}(p)W_0(p) = &-\frac{3}{16}\sum_{i=1}^4 \frac{1}{(p-x_i)^2} - \frac{1}{8}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^4 \frac{1}{(x_i-x_j)}\left(\frac{1}{(p-x_i)}-\frac{1}{(p-x_j)}\right)\\ &+\frac{1}{4}\frac{1}{\phi^{(0)}(p)}\sum_{i=1}^4 \frac{1}{p-x_i}\frac{dx_i}{dV}(p)M_i^{(1)}\ .\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Die Größen $\frac{dx_i}{dV}(p)$, $i=1,\ldots,4$, sind durch das Gleichungssystem (4.5.19) bestimmt:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{dx_i}{dV}(p)M_i^{(1)} - \phi_i^{(1)}(p)\right)\\
0 &= \sum_{i=1}^{4}\left(x_i\frac{dx_i}{dV}(p)M_i^{(1)} - p\phi_i^{(1)}(p)\right) + 2\phi^{(0)}(p)\\
0 &= \sum_{i=1}^{4}\left(x_i^2\frac{dx_i}{dV}(p)M_i^{(1)} - p^2\phi_i^{(1)}(p)\right) + 4p\phi^{(0)}(p)\\
0 &= \sum_{i=1}^{4}\frac{dx_i}{dV}(p)M_i^{(1)}K_i \ . \qquad (5.1.4)
\end{aligned}$$

Die Lösung der elliptischen Integrale K_i als differenzierbare Funktionen in den x_i ist in Anhang B angegeben,

$$K_i \equiv \int_{x_3}^{x_2} d\lambda \frac{\sqrt{\prod_{j=1}^{4}(\lambda - x_j)}}{(\lambda - x_i)} \ , \quad i=1,\ldots,4 \ . \qquad (5.1.5)$$

Nach Auflösen des Gleichungssystems (5.1.4) haben die Größen $\frac{dx_i}{dV}(p)$ als Funktion von p die folgende Struktur:

$$\frac{dx_i}{dV}(p) = \frac{1}{M_i^{(1)}}\left(\sum_{j=1}^{4}\Big(\delta_{ij} - \frac{X_i}{\Sigma}K_j\Big)\phi_j^{(1)}(p) \ + \ \frac{\Xi_i}{\Sigma}\phi^{(0)}(p)\right) \ , \quad i=1,\ldots,4 \ . \qquad (5.1.6)$$

Die Abkürzungen X_i, Ξ_i, $i=1,\ldots,4$ und Σ sind ausgedrückt durch die Intervallgrenzen x_i in Anhang B2. angegeben. Dort finden sich auch einige nützliche Formeln für die Berechnung der $\frac{dx_i}{dV}(p)$ und von $W_0(p,p)$ weiter unten.

Setzt man die Ergebnisse Gl. (5.1.6) oben in die Gleichung (5.1.3) für $W_0(p,p)$ ein, so erhält man nach erneuter Partialbruchzerlegung und einigen längeren Umformungen das gesuchte Resultat

$$\begin{aligned}
W_0(p,p) = \frac{1}{16\Sigma}&\left(\sum_{i=1}^{4}\Big(\Sigma - 4K_iX_i\Big)\frac{1}{(p-x_i)^2}\right)\\
+\frac{1}{8\Sigma}&\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{4}\Big(K_iX_i + K_jX_j\Big)\frac{1}{x_i - x_j}\Big(\frac{1}{p-x_i} - \frac{1}{p-x_j}\Big)\right.\\
&\left. - \sum_{\substack{i,j,k,l\in P^4\\ i<j,k<l}}^{4}\Big(K_iX_i + K_jX_j\Big)\frac{1}{x_k - x_l}\Big(\frac{1}{p-x_k} - \frac{1}{p-x_l}\Big)\right) \ . \qquad (5.1.7)
\end{aligned}$$

P^4 bezeichnet hierbei die Menge der Permutationen von $\{1,2,3,4\}$. Anhand von Gl. (4.5.16),

$$(\hat{K} - 2W_0(p))W_1(p) \ = \ W_0(p,p) \ ,$$

sowie der Kenntnis einer Basis des Operators $(\hat{K} - 2W_0(p))$ Gl. (4.5.3),

$$(\hat{K} - 2W_0(p))\chi_i^{(n)} \ = \ \frac{1}{(p-x_i)^n} \ ,$$

läßt sich nun aus $W_0(p,p)$ direkt $W_1(p)$ ablesen, allerdings nur bis auf die im Zweibandfall erlaubte Nullmode $\phi^{(0)}(p)$. Die Basis aus Gl. (4.5.11) lautet hier explizit

$$\begin{aligned}
\chi_i^{(1)}(p) &= \frac{1}{M_i^{(1)}}\phi_i^{(1)}(p) \ ,\\
\chi_i^{(2)}(p) &= \frac{1}{M_i^{(1)}}\left(\phi_i^{(2)}(p) - \frac{M_i^{(2)}}{M_i^{(1)}}\phi_i^{(1)}(p)\right) \ , \quad i=1,\ldots,4 \ . \qquad (5.1.8)
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
W_1(p) = \frac{1}{16\Sigma}&\left(\sum_{i=1}^{4}\Big(\Sigma - 4K_iX_i\Big)\Big(\frac{\phi_i^{(2)}(p)}{M_i^{(1)}} - \frac{M_i^{(2)}}{(M_i^{(1)})^2}\phi_i^{(1)}(p)\Big)\right)\\
+\frac{1}{8\Sigma}&\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{4}\Big(K_iX_i + K_jX_j\Big)\frac{1}{x_i - x_j}\Big(\frac{1}{M_i^{(1)}}\phi_i^{(1)}(p) - \frac{1}{M_j^{(1)}}\phi_j^{(1)}(p)\Big)\right.\\
&\left. - \sum_{\substack{i,j,k,l\in P^4\\ i<j,k<l}}^{4}\Big(K_iX_i + K_jX_j\Big)\frac{1}{x_k - x_l}\Big(\frac{1}{M_k^{(1)}}\phi_k^{(1)}(p) - \frac{1}{M_l^{(1)}}\phi_l^{(1)}(p)\Big)\right)\\
&+ \ \phi^{(0)}(p) - \text{Term} \ . \qquad (5.1.9)
\end{aligned}$$

Wie bereits im Kapitel IV über die s-Bandlösung erwähnt, kann der noch unbekannte $\phi^{(0)}(p)$-Term mittels Gl. (4.5.15) über die Berechnung von F_1 bestimmt werden. Um $W_1(p)$ zu integrieren, d.h. als Ableitung $\frac{d}{dV}(p)F_1$ zu schreiben, betrachte man zunächst die Ableitungen der ersten Momente $M_i^{(1)}$. Diese ergeben sich aus Gl. (4.5.20) für $s=2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{M_i^{(1)}}\frac{dM_i^{(1)}}{dV}(p) = -\frac{3}{2}\left(\frac{\phi_i^{(2)}(p)}{M_i^{(1)}} - \frac{M_i^{(2)}}{M_i^{(1)}}\frac{dx_i}{dV}(p)\right) \\ +\frac{1}{2}\frac{1}{M_i^{(1)}}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{4}\frac{1}{x_i-x_j}\left((M_i^{(1)}-M_j^{(1)})\frac{dx_j}{dV}(p)-\phi_i^{(1)}(p)+\phi_j^{(1)}(p)\right) \ , \\ i=1,\ldots,4 \ . \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Das Ergebnis enthält in der ersten Zeile je einen Term mit einem Pol und einem Moment zweiter Ordnung sowie Terme niedriger Ordnung. Dieselbe Struktur besitzen die Ableitungen von Momenten höherer Ordnung, wie man an Gl. (4.5.20) sieht. Damit F_1 nur von endlich vielen Momenten abhängt, müßten in Gl. (5.1.9) die Pole und Momente höchster Ordnung vollständig durch die Ableitung eines in der Ordnung um eins niedrigeren Moments ausdrückbar sein. Ein Vergleich von Gl. (5.1.9) und Gl. (5.1.10) zeigt jedoch, daß dies nicht der Fall ist, wenn man davon ausgeht, daß die Momente $M_i^{(2)}$ unabhängig voneinander sind. Folglich hängt F_1 von allen Momenten $M_i^{(k)}$, $k\in$ N$_+$, ab. In Anhang B wird dies noch einmal genau bewiesen.

Der Versuch, die Nullmode mit der Bedingung (4.5.15) zu fixieren, ist also gescheitert, da F_1 nicht als Funktion von endlich vielen Momenten bestimmt werden konnte. Bricht damit prinzipiell die Momentenmethode für den Mehrbandbereich zusammen? Die Methode würde nur dann scheitern, wenn mit F_1 auch $W_1(p)$ über den Nullmodenterm von unendlich vielen Momenten abhinge. Ist dies nicht der Fall, und gelingt es, den Nullmodenterm auf eine andere als die vorgeschlagene Weise zu bestimmen, würde die Kenntnis von $W_1(p)$ allein genügen, um mit der Loopgleichung (4.5.1) $W_2(p)$ und höhere Genera zu berechnen. F_1 ist dazu nicht erforderlich.

Die entscheidende Frage ist also die, ob es möglich ist, daß $W_1(p)$ trotz F_1 von nur endlich vielen Momenten abhängt. Ein Beispiel dafür, daß so etwas tatsächlich vorkommt, ist daß F_0 und $W_0(p)$ von allen, $W_0(p,p)$ aber von gar keinen Momenten abhängt. Im Anhang B wird aus dem allgemeinesten Ansatz für F_1 der Nullmodenterm durch Ableitungen von F_1 nach den Momenten ausgedrückt. Unter der Bedingung, daß es ein k_0 gibt, so daß F_1 für alle $k>k_0$ und für alle $i=1,\ldots,4$, nur noch linear von $M_i^{(k)}$ abhängt, ist $W_1(p)$ durch die endlich vielen Momente $M_i^{(1)},\ldots,M_i^{(k_0)}$, $i=1,\ldots,4$, ausdrückbar. Das Iterationsverfahren kann dann für Genus $g=2$ und höhere durchgeführt werden.

Unabhängig davon erhält man im Falle eines symmetrischen Potentials ebenfalls $W_1(p)$ als Funktion von endlich vielen Momenten. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, fällt dann nämlich der $\phi^{(0)}(p)$-Term weg. Leider lassen sich wie am Anfang von Kapitel IV erwähnt aus diesem Teilergebnis keine höheren Genera für ein symmetrisches Potential berechnen, da erst am Ende der Rechnung die ungeraden Kopplungen gleich Null gesetzt werden können.

2. Der symmetrische Fall

Wie bereits erwähnt läßt sich im Spezialfall eines symmetrischen Potentials

$$V^{sym}(\omega) \ = \ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_{2i}}{2i}\omega^{2i} \tag{5.2.1}$$

der Einloopkorrelator $W_1(p)$ vollständig bestimmen. Die mit der Symmetrie einhergehende Vereinfachung der bisherigen Ergebnisse erlaubt es, einen Vergleich zu den bekannten Resultaten im symmetrischen Einbandfall anzustellen.

Das Nullsetzen der Kopplungen g_{2i+1}, $i\in$ N, führt dazu, daß alle ungeraden Erwartungswerte von Matrizen verschwinden:

$$\langle \mathrm{Tr}\phi^{2k+1}\rangle_{sym} \ = \ 0 \quad k\in \mathrm{N} \ . \tag{5.2.2}$$

Folglich wird der Einloopkorrelator zu einer ungeraden Funktion in p.

$$\begin{aligned} W^{sym}(p) = \ \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\frac{1}{p-\phi}\right\rangle_{sym} \ &= \ \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle\mathrm{Tr}\phi^{2k}\rangle_{sym}}{p^{2k+1}} \\ &= \ \frac{1}{p} \ + \ \frac{1}{N}\frac{\langle\mathrm{Tr}\phi^2\rangle_{sym}}{p^3} \ + \ \ldots \ . \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Insbesondere verschwindet der Term $\sim \frac{1}{p^2}$. Damit läßt sich zeigen, daß die Nullmode $\phi^{(0)}(p)$ nicht mehr zu $W^{sym}(p)$ beitragen kann und somit $W_1^{sym}(p)$ vollständig bestimmt ist. Betrachtet man nämlich die Asymptotik der einzelnen Terme in $W_1(p)$ in Gl. (5.1.9),

$$\begin{aligned} \phi_i^{(2)}(p) &\sim \frac{1}{p^4} \ , \\ \phi_i^{(1)}(p) &\sim \frac{1}{p^3} \ , \\ \phi^{(0)}(p) &\sim \frac{1}{p^2} \ , \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

dann wird deutlich, daß der Koeffizient vor $\phi^{(0)}(p)$ im symmetrischen Grenzfall verschwinden muß[3].

Die Tatsache, daß im symmetrischen Grenzfall keine Nullmoden zu $W(p)$ beitragen, ist eine Besonderheit der Zweibandlösung. Im s-Bandfall gibt es für $s > 2$ immer Nullmoden mit der richtigen Asymptotik, so daß auch für ein symmetrisches Potential nicht alle davon fixiert sind. Gl. (4.5.14) ergibt für die Asymptotik der erlaubten Nullmoden

$$p^l \phi^{(0)}(p) \;\sim\; p^{l-s} \;, \quad l = 0, \ldots, s-2 \;. \tag{5.2.5}$$

Zum Beispiel ist für $s = 3$ $\phi^{(0)}(p) \sim \frac{1}{p^3}$ ein möglicher Beitrag zu $W^{sym}(p)$.

Das Ergebnis für den symmetrischen Zweibandfall erhält man nun wie folgt. Aus Symmetriegründen wird der Träger der Eigenwertdichte σ zum Ursprung symmetrisch,

$$\sigma \;=\; [-x_1, -x_2] \;\cup\; [x_2, x_1] \;, \tag{5.2.6}$$

das heißt es gilt

$$x_4 \;=\; -x_1 \;\text{ und }\; x_3 \;=\; -x_2 \;. \tag{5.2.7}$$

Das Einsetzen dieser Beziehungen in Gl. (5.1.7) ergibt unter Ausnutzung von Anhang B

$$\begin{aligned} W_0^{sym}(p,p) &= \frac{(x_1+x_2)}{(x_1-x_2)} \frac{E(k)}{K(k)} \left(\frac{1}{4} \frac{x_1^2}{(p^2-x_1^2)} - \frac{1}{4} \frac{x_2^2}{(p^2-x_2^2)} \right) \;, \\ k^2 &= \frac{4x_1x_2}{(x_1+x_2)^2} \;. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

$K(k)$ und $E(k)$ sind die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art. Um $W_1^{sym}(p)$ zu bekommen, nutzt man noch zusätzlich die aus der Symmetrie folgende Beziehung zwischen den Momenten aus:

$$\begin{aligned} M_4^{(k)} &= (-1)^k M_1^{(k)} \\ M_3^{(k)} &= (-1)^k M_2^{(k)} \;, \quad k \in \mathrm{N}_+ \;. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Diese Abhängigkeit der Momente untereinander verletzt eine der Voraussetzungen im Beweis für die funktionale Abhängigkeit von F_1 von unendlich vielen Momenten (s. Anhang B).

Aus Gl. (5.1.9) folgt dann das Endresultat für den Einloopkorrelator vom Genus $g = 1$ im symmetrischen Zweibandfall,

$$\begin{aligned} W_1^{sym}(p) = \;& \frac{(x_1+x_2)}{(x_1-x_2)} \frac{E(k)}{K(k)} \cdot \\ & \cdot \Bigg[\left(\frac{1}{4} \frac{x_1}{M_1^{(1)}} \frac{1}{(p^2-x_1^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{8} \frac{M_1^{(2)}}{(M_1^{(1)})^2} \frac{1}{(p^2-x_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{p}{(p^2-x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \\ & - \left(\frac{1}{4} \frac{x_2}{M_2^{(1)}} \frac{1}{(p^2-x_2^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{8} \frac{M_2^{(2)}}{(M_2^{(1)})^2} \frac{1}{(p^2-x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{p}{(p^2-x_1^2)^{\frac{1}{2}}} \Bigg] \;. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Vergleich mit der Einbandlösung

Die Ergebnisse für den symmetrischen Einbandfall erhält man aus [7] auf dieselbe Weise wie oben beschrieben. Der Wurzelschnitt lautet hier $\sigma = [-x, x]$. Es gilt[4]

$$\begin{aligned} W_0^{sym}(p,p) &= \frac{1}{4} \frac{x^2}{(p^2-x^2)^2} \;, \\ W_1^{sym}(p) &= \frac{1}{4} \frac{x^2}{M^{(1)}} \frac{1}{(p^2-x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{8} \frac{xM^{(2)}}{(M^{(1)})^2} \frac{1}{(p^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} \;. \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Der planare Zweiloopkorrelator $W_0^{sym}(p,p)$ der Zweibandlösung ist also gegeben als Differenz zweier planarer Zweiloopkorrelatoren mit je einem Schnitt bei $[-x_1, x_1]$ beziehungsweise bei $[-x_2, x_2]$, bis auf den Vorfaktor $\frac{(x_1+x_2)}{(x_1-x_2)} \frac{E(k)}{K(k)}$. Dieser Faktor hängt nur vom Verhältnis der Intervallgrenzen $\frac{x_1}{x_2}$ ab.

Ähnliches gilt für den Einloopkorrelator vom Genus $g = 1$. Auch hier ist die Zweibandlösung von der Struktur her durch die Differenz der entsprechenden Korrelatoren der Einbandlösung gegeben, bis auf Vorfaktoren und den komplizierteren Wurzelschnitt. Dabei ist zu beachten, daß die Momente anders von den Kopplungskonstanten abhängen. Wie man in Gl. (4.5.8) sieht, geht dort explizit die Anzahl der Schnitte ein.

Am Phasenübergang $x_2 \to 0$ geht der planare Zweiloopkorrelator Gl. (5.2.8) genau in den der Einbandlösung Gl. (5.2.11) mit $x = x_1$ über. Für den Einloopkorrelator ist der Grenzwert $x_2 \to 0$ komplizierter zu bilden, da die Momente ebenfalls von x_2

[3] Die Koeffizienten vor den $\phi_i^{(2)}(p)$ verschwinden nicht, sondern sie bilden Linearkombinationen, die $\sim \frac{1}{p^5}$, siehe Gl. (5.2.10).

[4] Zur besseren Unterscheidbarkeit von der Zweibandlösung ist hier der Index 1 an x und den Momenten $M^{(k)}$ weggelassen.

abhängen. Entwickelt man die Momente des symmetrischen Potentials, so erhält man für den Zweibandfall

$$
\begin{aligned}
M_1^{(1)} &= x_1 \left(g_4 \ + \ (\frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2)g_6 \ + \ \ldots \right) \ , \\
M_2^{(1)} &= x_2 \left(g_4 \ + \ (\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2)g_6 \ + \ \ldots \right) \ , \\
M_1^{(2)} &= \qquad g_4 \ + \ (\frac{7}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2)g_6 \ + \ \ldots \ , \\
M_2^{(2)} &= \qquad g_4 \ + \ (\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{7}{2}x_2^2)g_6 \ + \ \ldots \ .
\end{aligned}
\tag{5.2.12}
$$

Zum Vergleich lauten die Momente der Einbandlösung

$$
\begin{aligned}
M^{(1)} &= g_2 \ + \ \frac{3}{2}x^2 g_4 \ + \ \frac{15}{8}x^4 g_6 \ + \ \ldots \ , \\
M^{(2)} &= \qquad 2xg_4 \ + \ 5x^3 g_6 \ + \ \ldots \ .
\end{aligned}
\tag{5.2.13}
$$

Das Einsetzen von Gl. (5.2.12) in Gl. (5.2.10) ergibt, daß der letzte Term in $W_1^{sym}(p)$ im Limes $x_2 \to 0$ divergiert, also wie erwartet ein Phasenübergang stattfindet.

In Kapitel II wurde für das symmetrische sextische Potential $V(\lambda) = \frac{1}{2}g_2\lambda^2 + \frac{1}{4}g_4\lambda^4 + \frac{1}{6}g_6\lambda^6$ das Phasendiagramm angegeben (Abbildung 3). Es gibt dort drei verschiedene Phasen I-III. Die Einband- (I) und die Zweibandlösung (II) werden dort jedoch von der Dreibandphase (III) getrennt. Das bedeutet, daß zwar formal in den obigen Ergebnissen für den symmetrischen Zweibandfall der Limes $x_2 \to 0$ gebildet werden kann. Für den speziellen Fall des geraden sextischen Potential findet jedoch ein Phasenübergang statt, bevor x_2 Null erreicht. Mit anderen Worten entwickelt in diesem Fall das Polynom $M(\lambda)$ im Limes $x_2 \to 0$ für $x_2 \neq 0$ eine Nullstelle. Der oben beschriebene Phasenübergang II$\to$I ist also in diesem speziellen Modell nicht möglich.

Kapitel VI: Die s-Bandlösung des komplexen Matrixmodells

Die beiden Einmatrixmodelle für komplexe und hermitesche Matrizen stehen in einem engen Zusammenhang. Sie gehören derselben Universalitätsklasse an, d.h. sie sind im Doppelskalenlimes äquivalent. Dies wurde auf der Ebene der Korrelatoren für den Einbandfall in [7] gezeigt. Wie in [32] beschrieben, besteht jedoch bereits für endliches N die Möglichkeit, das komplexe Matrixmodell auf ein hermitesches mit positiven Eigenwerten abzubilden. Inwiefern ist es ist es also überhaupt noch sinnvoll, die allgemeine Lösung des komplexen Matrixmodells zu betrachten?

Im folgenden wird gezeigt werden, daß das komplexe Matrixmodell mit $2s$ Bändern auf der Ebene der Korrelatoren äquivalent zum hermiteschen Matrixmodell mit s Bändern ist. Dagegen liefert eine ungerade Anzahl von Bändern jenseits des Doppelskalenlimes vom hermiteschen Modell verschiedene Ergebnisse [31]. Diese Lösungen besitzen eine am Ursprung singuläre Eigenwertdichte. Die Behandlung der allgemeinen s-Bandlösung erlaubt es also, den Übergang von einer singulären zu einer nicht singulären Eigenwertdichte zu untersuchen [32], wie dies am Ende des Kapitels geschehen wird. Ferner ist das komplexe Matrixmodell in gewisser Hinsicht einfacher als das hermitesche, da das Potential für die Eigenwerte gerade ist. Aus diesem Grund ist es aufschlußreich, auch hier die Rolle der Nullmoden bei der Invertierung der Loopgleichung zu untersuchen.

1. Der Zusammenhang zum hermiteschen Matrixmodell

Nach den benötigten Definitionen wird die Loopgleichung für eine beliebige Anzahl von Bändern angegeben und anhand derer der Zusammenhang zum hermiteschen Modell diskutiert. Die Herleitung der Loopgleichung sowie die ausführliche Lösung des Zweibandfalles finden sich in [9].

Die Zustandssumme des komplexen Einmatrixmodells ist definiert als [33]

$$Z\,[N,\{g_i\}] \equiv e^{N^2 F[N,\{g_i\}]} \equiv \int d\phi^\dagger d\phi \, \exp(-N \, \mathrm{Tr} V(\phi^\dagger \phi)) \, ,$$

$$V(\phi^\dagger\phi) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{j} (\phi^\dagger \phi)^j \, . \tag{6.1.1}$$

Die Integration läuft über komplexe $N \times N$ Matrizen mit dem Integrationsmaß:

$$d\phi \;\equiv\; \prod_{\alpha,\beta=1}^{N} d\phi^\dagger_{\alpha\beta} d\phi_{\alpha\beta} \, . \tag{6.1.2}$$

Das erzeugende Funktional $\tilde{W}(p)$ [1] ist gegeben durch

$$\tilde{W}(p) \;=\; \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathrm{Tr}(\phi^\dagger\phi)^k \rangle}{p^{2k+1}} \;=\; \frac{1}{N} \left\langle \mathrm{Tr} \frac{p}{p^2 - \phi^\dagger\phi} \right\rangle \, . \tag{6.1.3}$$

Es läßt sich durch Anwendung des Loopoperators $\frac{\tilde{d}}{dV}(\mathrm{p})$ auf die freie Energie erhalten:

$$\begin{aligned} \tilde{W}(p) &= \frac{\tilde{d}}{dV}(p) F + \frac{1}{p} \, , \\ \frac{\tilde{d}}{dV}(p) &\equiv - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{p^{2j+1}} \frac{d}{dg_j} \, . \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Die entsprechenden Multiloopkorrelatoren erhält man in Analogie zu Gl. (4.1.5) und (4.1.8). Damit lautet die Loopgleichung für das komplexe Matrixmodell mit einer beliebigen Anzahl von Bändern [9]

$$\oint_C \frac{d\omega}{4\pi i} \frac{\omega \tilde{V}'(\omega)}{p^2 - \omega^2} \tilde{W}(\omega) \;=\; (\tilde{W}(p))^2 + \frac{1}{N^2} \frac{\tilde{d}}{dV}(p) \tilde{W}(p) \quad , \; p \notin \sigma \, , \tag{6.1.5}$$

wobei

$$\tilde{V}(\omega) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{j} \omega^{2j} \, . \tag{6.1.6}$$

[1] Die Tilde dient im folgenden zur Unterscheidung der Größen des komplexen Matrixmodells von den entsprechenden des hermiteschen Modells.

Analog zum hermiteschen Modell läßt sich eine planare Eigenwertdichte $\tilde{\rho}(y)$ einführen[2]. Deren Träger σ wird wiederum als kompakt vorausgesetzt, und läßt sich folgendermaßen parametrisieren (vgl. Abbildung 10 und 11):

$$\sigma \;=\; \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{\frac{s}{2}}([-x_{2i-1},-x_{2i}]\cup[x_{2i},x_{2i-1}]) & s \text{ gerade} \\ \left(\bigcup_{i=1}^{\frac{s-1}{2}}([-x_{2i-1},-x_{2i}]\cup[x_{2i},x_{2i-1}])\right)\cup[-x_s,x_s] & s \text{ ungerade .} \end{cases} \tag{6.1.7}$$

Dabei gilt $x_1 > \ldots > x_s > 0$. Der Integrationsweg $\mathcal{C}$ in Gl. (6.1.5) enthält alle Eigenwerte $y \in \sigma \subset$ R und nicht $p \notin \sigma$.

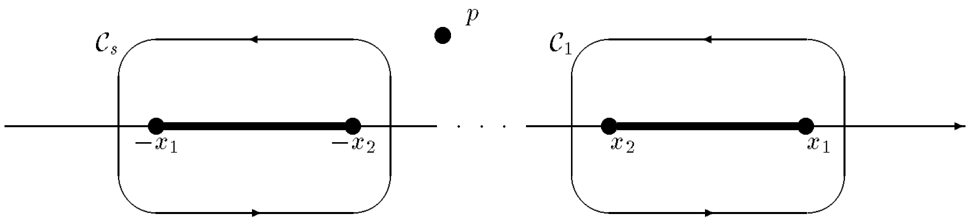

Abbildung 9: Der Integrationsweg $\mathcal{C} = \cup_{i=1}^{s}\mathcal{C}_i$

Den Zusammenhang zum hermiteschen Matrixmodell sieht man nun wie folgt. Definiere

$$W(q) \;\equiv\; \frac{1}{p}\tilde{W}(p) \quad , \; q = p^2 \; . \tag{6.1.8}$$

Wie die Notation bereits suggeriert, wird sich herausstellen, daß $W(q)$ als Funktion von q für gerades s die Loopgleichung des hermiteschen Matrixmodells Gl. (4.3.8) erfüllen wird. Die Definition (6.1.8) eingesetzt in die Loopgleichung (6.1.5) ergibt

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{4\pi i}\frac{\omega\tilde{V}'(\omega)}{q-\omega^2}\frac{\omega}{q}\frac{\tilde{W}(\omega)}{\omega} \;=\; (W(q))^2 + \frac{1}{N^2}\frac{d}{dV}(q)W(q) \; , \tag{6.1.9}$$

[2]Die positiven, reellen Eigenwerte von $\phi^\dagger\phi$ werden hier durch y^2, $y \in$ R, parametrisiert. Der Zusammenhang zwischen den Eigenwertdichten für y bzw. y^2 wird in Abschnitt 2 diskutiert.

mit

$$\frac{d}{dV}(q) \;\equiv\; -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{q^j}\frac{d}{dg_j} \; , \tag{6.1.10}$$

also genau dem Loopoperator des hermiteschen Modells in Gl. (4.1.7). Setzt man nun $\tilde{V}(\omega)$ aus Gl. (6.1.6) ein und substituiert $\omega^2 \to \omega$, so erhält man

$$\oint_{\mathcal{C}_+}\frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{q-\omega}W(\omega) - \frac{1}{q}\oint_{\mathcal{C}_+}\frac{d\omega}{2\pi i}V'(\omega)W(\omega) = (W(q))^2 + \frac{1}{N^2}\frac{d}{dV}(q)W(q) \; . \tag{6.1.11}$$

Dabei ist $V'(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j\omega^{j-1}$, genau wie im hermiteschen Modell. Der Integrationsweg $\mathcal{C}_+$ umschließt nur noch die positiven Eigenwerte aus σ_+ und nicht $q \notin \sigma_+$, wobei

$$\sigma_+ \;=\; \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{\frac{s}{2}}[x_{2i}^2,x_{2i-1}^2] & s \text{ gerade} \\ \left(\bigcup_{i=1}^{\frac{s-1}{2}}[x_{2i}^2,x_{2i-1}^2]\right)\cup[0,x_s^2] & s \text{ ungerade .} \end{cases} \tag{6.1.12}$$

Für gerades s ist $W(q)$ wie auch alle höheren Loopkorrelatoren eine analytische Funktionen bei $q = 0$. Aus diesem Grund muß der Term mit dem $\frac{1}{q}$-Pol verschwinden:

$$\oint_{\mathcal{C}_+}\frac{d\omega}{2\pi i}V'(\omega)W(\omega) \;=\; 0 \qquad s \text{ gerade .} \tag{6.1.13}$$

Damit erfüllt $W(q)$ die Loopgleichung des hermiteschen Einmatrixmodells mit positiven Eigenwerten Gl. (4.3.8). Umgekehrt erfüllt jede Lösung der Loopgleichung des hermiteschen Matrixmodells die Bedingung (6.1.13), wie man anhand der Asymptotik der Gleichung (4.3.8) leicht sieht. Somit ist gezeigt worden, daß das komplexe Matrixmodell mit $2s$ Bändern *äquivalent* zum hermiteschen Matrixmodell mit s Bändern und positiven Eigenwerten ist.

Für eine ungerade Anzahl von Bändern dagegen gibt es keine Einschränkungen an die Analytizität der Loopkorrelatoren am Ursprung. Die Loopgleichungen des hermiteschen und des komplexen Modells und dementsprechend auch deren Lösungen sind dann verschieden. Dies sieht man bereits am Beispiel der Einbandlösung, wenn man dazu [7] und [31] vergleicht. Die Multiloopkorrelatoren des komplexen Modells besitzen hier explizit Pole am Ursprung. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Eigenwertdichte dort singulär wird, was im der nächsten Abschnitt diskutiert wird.

2. Das Eigenwertbild

Die in Gl. (6.1.1) definierte Zustandssumme ist invariant unter der Transformation

$$\phi \;\to\; V^\dagger\phi W \; , \tag{6.2.1}$$

wobei V und W unitäre $N \times N$ Matrizen sind. Diese Invarianz kann dazu benutzt werden, die Matrix $\phi^\dagger\phi$ zu diagonalisieren. Deren Eigenwerte λ_i sind nichtnegativ, wie in [32] gezeigt wurde. Zieht man die Integration über die Winkelvariablen aus dem Integral heraus, so ist die Zustandssumme bis auf eine N-abhängige Konstante durch das folgende Integral über die Eigenwerte gegeben:

$$Z\,[N,\{g_i\}] \sim \int_0^\infty \prod_{i=1}^N d\lambda_i\ \Delta^2(\lambda)\ \exp(-N\sum_{k=1}^N V(\lambda_k))$$
$$\Delta(\lambda) \equiv \prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^N (\lambda_i - \lambda_j)\ , \tag{6.2.2}$$

mit $V(\lambda) = \sum_{j=1}^\infty \frac{g_j}{j}\lambda^j$. In dieser Form ist die Zustandssumme des komplexen Matrixmodells identisch mit der des hermiteschen Modells im Eigenwertbild in Gl. (2.1.4), bis auf die Tatsache, daß hier die Eigenwerte erst bei $\lambda_i = 0$ beginnen. Um zu Eigenwerten auf ganz R überzugehen, führt man die Subsitution $\lambda \to y^2$ durch, und erhält

$$Z\,[N,\{g_i\}] \sim \int_0^\infty \prod_{i=1}^N dy_i y_i\ \Delta^2(y^2)\ \exp(-N\sum_{k=1}^N V(y_k^2))$$
$$\sim \int_{-\infty}^\infty \prod_{i=1}^N dy_i\ \exp\Big(-N\sum_{k=1}^N \tilde V(y_k) + \sum_{k=1}^N \ln|y_k| + \sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^N \ln|y_k^2 - y_l^2|\Big) \tag{6.2.3}$$

wobei $\tilde V(y_k) = \sum_{j=1}^\infty \frac{g_j}{j} y_k^{2j}$. Diese Form entspricht gerade dem hermiteschen Modell im Eigenwertbild für ein gerades Potential, mit einem zusätzlichen logarithmischen Term[3]. Der Abstoßungsterm stammt von der Barriere für die Eigenwerte am Ursprung in Gl. (6.2.2). Zu den beiden Eigenwertmodellen in den Gleichungen (6.2.2) und (6.2.3) lassen sich auch die entsprechenden Eigenwertdichten $\rho(\lambda)$ und $\tilde\rho(y)$ einführen. Sie ergeben sich aus dem planaren Limes der entsprechenden Sattelpunktsgleichung, in Analogie zum hermiteschen Modell in Kapitel II. Für die Zustandssumme Gl. (6.2.3) lautet die Sattelpunktsgleichung

$$\frac{1}{4}\tilde V'(z) \ = \ \mathrm{P}\int_\sigma dy \frac{z\tilde\rho(y)}{z^2 - y^2}\ , z \in \sigma\ . \tag{6.2.4}$$

Dabei ist σ der Träger der Eigenwertdichte $\tilde\rho(y)$ wie in Gl. (6.1.7) definiert. Gleichung (6.2.4) ist gerade der reguläre Anteil der planaren Lösung des Einloopkorrelators (s. Gl. (6.3.1) weiter unten),

$$\tilde W_0(p) \ = \ \int_\sigma dy \frac{p\tilde\rho(y)}{p^2 - y^2}\ . \tag{6.2.5}$$

Die Normierungsbedingung für die Eigenwertdichte lautet

$$\int_\sigma dy\ \tilde\rho(y) \ = \ 1\ . \tag{6.2.6}$$

Um zu der Eigenwertdichte $\rho(\lambda)$ für die Zustandssumme in Gl. (6.2.2) zu gelangen, resubstituiert man einfach in Gl. (6.2.6) $\lambda = y^2$, und erhält

$$\int_{\sigma_+} d\lambda\ \rho(\lambda) \ = \ 1$$
$$\rho(\lambda) \ = \ \frac{1}{2y}\tilde\rho(y)\Big|_{\lambda=y^2}\ . \tag{6.2.7}$$

Es ist σ_+ der Träger von $\rho(\lambda)$ für positive Eigenwerte aus Gl. (6.1.12). Wie man sieht, ist $\rho(\lambda)$ singulär, falls $0 \in \sigma_+$. Dies ist anhand von Gl. (6.1.12) für eine ungerade Anzahl von Bändern s immer der Fall. Für gerades s hingegen ist $\rho(\lambda)$ überall regulär. Die Sattelpunktsgleichung ist dann äquivalent zu der des hermiteschen Matrixmodells Gl. (2.1.11), wie ja bereits auf der Ebene der Loopkorrelatoren für alle Genera im vorherigen Kapitel gezeigt worden ist.

3. Das Iterationsverfahren

Bei der iterativen Lösung der Loopgleichung ergeben sich nun genau dieselben Probleme, wie dies beim hermiteschen Matrixmodell in Kapitel IV und Kapitel V beschrieben wurde[4]. Trotzdem ist es sinnvoll zu untersuchen, wieviele Nullmoden insbesondere für eine ungerade Anzahl von Bändern bei der Invertierung der Loopgleichung auftreten. Es wird sich herausstellen, daß es wieder wie im hermiteschen Modell genausoviele erlaubte Nullmoden wie komplizierte Randbedingungen analog zum Typ Gl. (4.4.11) gibt.

Wie in [9] gezeigt wurde, lautet die planare Lösung für den Einloopkorrelator im komplexen Matrixmodell mit s Bändern

$$\tilde W_0(p) \ = \ \frac{1}{2}\oint_{\mathcal C} \frac{d\omega}{4\pi i}\frac{\tilde V'(\omega)}{p^2-\omega^2}\frac{\phi^{(0)}(\omega)}{\phi^{(0)}(p)} \cdot \begin{cases} p & s \text{ gerade} \\ \omega & s \text{ ungerade}\ , \end{cases} \tag{6.3.1}$$

[3] Für ein beliebiges Potential wird das Eigenwertmodell in Gl. (6.2.3), versehen mit einer Kopplungskonstanten vor dem Logarithmus, als verallgemeinertes Penner-Modell bezeichnet. Dessen Lösung mittels der Momentenmethode benötigt auch die ungeraden Kopplungen und findet sich in [30]

[4] Die einzige Ausnahme bildet der Fall $s = 2$. Wie bereits gezeigt wurde, ist dieser aber äquivalent zur hermiteschen Einbandlösung.

mit

$$\phi^{(0)}(p) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{s}(p^2-x_i^2)}} \;\equiv\; p^{-s}\left(\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{x_i^2}{p^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \; . \qquad (6.3.2)$$

Die Genusentwicklung von $\tilde{W}(p)$ ist wie bisher

$$\tilde{W}(p) = \sum_{g=0}^{\infty}\frac{1}{N^{2g}}\tilde{W}_g(p) \; . \qquad (6.3.3)$$

Entsprechend liefert wieder die planare Lösung den führenden Beitrag zur Asymptotik,

$$\lim_{p\to\pm\infty}\tilde{W}(p) \;=\; \frac{1}{p} \;\Rightarrow\; \lim_{p\to\pm\infty}\tilde{W}_0(p) \;=\; \frac{1}{p} \; . \qquad (6.3.4)$$

Entwickelt man die Lösung (6.3.1) für große p und benutzt die Bedingung (6.3.4), so erhält man für s gerade (bzw. ungerade) $\frac{s+2}{2}$ (bzw. $\frac{s+1}{2}$) Bestimmungsgleichungen für die s Größen x_i,

$$\delta_{l,s} \;=\; \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}}\frac{d\omega}{4\pi i}\omega^l\tilde{V}'(\omega)\phi^{(0)}(\omega) \;\;,\; l=s,s-2,\ldots,\begin{cases}0 & s \text{ gerade}\\ 1 & s \text{ ungerade}\end{cases} . \qquad (6.3.5)$$

Die fehlenden Gleichungen bekommt man wieder aus der Forderung der Gleichheit der chemischen Potentiale, in Analogie zu Gl. (2.1.23)

$$0 = \int_{\bar{\sigma}_j} dy M(y)\sqrt{\prod_{k=1}^{s}(y^2-x_k^2)} \;\; ,$$

$$M(y) = \oint_{\mathcal{C}_\infty}\frac{d\omega}{4\pi i}\frac{2\tilde{V}'(\omega)}{\omega^2-y^2}\phi^{(0)}(\omega)\cdot\begin{cases}y & s \text{ gerade}\\ \omega & s \text{ ungerade}\end{cases} , \qquad (6.3.6)$$

Die $\bar{\sigma}_j$ sind der Abschluß der beschränkten Zusammenhangskomponenten des reellen Komplementes von σ.

Setzt man die Genusentwicklung von $\tilde{W}(p)$ Gl. (6.3.3) in die Loopgleichung (6.1.5) ein, so erhält man wie in Kapitel IV eine Gleichung zur iterativen Bestimmung von $\tilde{W}_g(p)$:

$$(\hat{K}-2\tilde{W}_0(p))\tilde{W}_g(p) = \sum_{g'=1}^{g-1}\tilde{W}_{g'}(p)\tilde{W}_{g-g'}(p) + \frac{\tilde{d}}{dV}(p)\tilde{W}_{g-1}(p) \;,\; g\geq 1 \;,$$

$$\hat{K}f(p) \equiv \oint_{\mathcal{C}}\frac{d\omega}{4\pi i}\frac{\omega\tilde{V}'(\omega)}{p^2-\omega^2}f(\omega) \; . \qquad (6.3.7)$$

Die Nullmoden des Integraloperators $(\hat{K}-2\tilde{W}_0(p))$ bekommt man unter Ausnutzung der der Randbedingungen Gl. (6.3.5)

$$\mathrm{Ker}(\hat{K}-2\tilde{W}_0(p)) = \mathrm{Span}\begin{cases}\{\frac{1}{p}\phi^{(0)}(p), p\phi^{(0)}(p),\ldots,p^{s-1}\phi^{(0)}(p)\} & s \text{ gerade}\\ \{\phi^{(0)}(p), p^2\phi^{(0)}(p),\ldots,p^{s-1}\phi^{(0)}(p)\} & s \text{ ungerade}\end{cases} . \qquad (6.3.8)$$

Aufgrund von Gl. (6.3.4) gilt asymptotisch $\tilde{W}_g(p)\sim\frac{1}{p^2}$ für $g\geq 1$. Deswegen können nur solche Nullmoden zu $\tilde{W}_g(p)$ beitragen, die die Gl. (6.3.4) respektieren. Weiterhin muß für gerades s $\tilde{W}(p)$ bei $p=0$ analytisch sein, das heißt auch $\frac{1}{p}\phi^{(0)}(p)$ kann nicht beitragen. Damit ergibt sich

$$\text{erlaubte Nullmoden}: \;\; \mathrm{Span}\begin{cases}\{p\phi^{(0)}(p), p^3\phi^{(0)}(p),\ldots,p^{s-3}\phi^{(0)}(p)\} & s \text{ gerade}\\ \{\phi^{(0)}(p), p^2\phi^{(0)}(p),\ldots,p^{s-3}\phi^{(0)}(p)\} & s \text{ ungerade}\end{cases} . \qquad (6.3.9)$$

Dies sind genau $\frac{s-2}{2}$ (bzw. $\frac{s-1}{2}$) erlaubte Nullmoden für gerades (bzw. ungerades) s, was jeweils der Anzahl von Randbedingungen des zweiten Typs Gl. (6.3.6) entspricht.

Die Forderung nach der Analytizität von $\tilde{W}(p)$ außerhalb der Schnitte gilt natürlich genauso für die Basis $\chi_i^{(n)}(p)$ des Integraloperators $(\hat{K}-2\tilde{W}_0(p))$,

$$(\hat{K}-2\tilde{W}_0(p))\;\chi_i^{(n)}(p) \;=\; \frac{1}{(p^2-x_i^2)^n} \;,\; i=1,\ldots,s \;,\; n\in\mathrm{N}_+ \; . \qquad (6.3.10)$$

Der Vollständigkeit halber sei hier angegeben, wie diese Basis zu konstruieren ist. Die dazu benötigten Momente $M_i^{(k)}$ sind definiert durch

$$M_i^{(k)} \;\equiv\; \oint_{\mathcal{C}}\frac{d\omega}{4\pi i}\frac{\tilde{V}'(\omega)\phi^{(0)}(\omega)}{(\omega^2-x_i^2)^k}\begin{cases}1 & s \text{ gerade}\\ \omega & s \text{ ungerade}\end{cases} \;,\; i=1,\ldots,s \;,\; k\in\mathrm{N}_+ \; . \qquad (6.3.11)$$

Es gilt für eine gerade Anzahl von Bändern

<u>s gerade :</u>

$$\chi_i^{(n)}(p) \equiv \frac{1}{M_i^{(1)}}\left(\frac{1}{x_i^2}\left(\phi_i^{(n)}(p) - \sum_{k=1}^{n-1}\chi_i^{(k)}(p)M_i^{(n-k)}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\chi_i^{(k)}(p)M_i^{(n-k+1)}\right)$$

$$\phi_i^{(n)}(p) \equiv \frac{p\phi^{(0)}(p)}{(p^2-x_i^2)^n} \;\;, \qquad i=1,\ldots,s \;\;,\; n\in\mathrm{N}_+ \; . \qquad (6.3.12)$$

Wie man sieht, ist $\chi_i^{(n)}(p)$ analytisch am Ursprung. Einen Beweis dafür, daß diese Funktionen die Gl. (6.3.10) erfüllen, findet man in [9].

Für eine ungerade Anzahl von Bändern ergibt sich die Basis in völliger Analogie zum hermiteschen Matrixmodell. Zusätzlich benötigt man noch Basisfunktionen $\chi^{(n)}(p)$ für Pole bei 0, die dann wie bereits erwähnt in den Multiloopkorrelatoren auftreten [31]:

$$(\hat{K} - 2\tilde{W}_0(p))\ \chi^{(n)}(p) \ = \ \frac{1}{p^{2n}} \quad , \ n \in \mathrm{N}_+ \ . \tag{6.3.13}$$

Die vollständige Basis für den ungeraden Fall lautet

<u>s ungerade :</u>

$$\chi_i^{(n)}(p) \equiv \frac{1}{M_i^{(1)}} \left(\phi_i^{(n)}(p) - \sum_{k=1}^{n-1} \chi_i^{(k)}(p) M_i^{(n-k+1)} \right)$$

$$\chi^{(n)}(p) \equiv \frac{1}{M^{(0)}} \left(\phi^{(n)}(p) - \sum_{k=1}^{n-1} \chi^{(k)}(p) M^{(n-k+1)} \right)$$

$$\phi_i^{(n)}(p) \equiv \frac{\phi^{(0)}(p)}{(p^2 - x_i^2)^n} \quad , \qquad \phi^{(n)}(p) \equiv \frac{\phi^{(0)}(p)}{p^{2n}} \quad , \ i = 1, \ldots, s \ , \ n \in \mathrm{N}_+$$

$$M^{(n)} \equiv \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{4\pi i} \frac{\tilde{V}'(\omega)}{\omega^{2n+1}} \phi^{(0)}(\omega) \quad , \quad n \in \mathrm{N} \ . \tag{6.3.14}$$

Auf den weiteren Verlauf des Iterationsverfahrens soll hier nicht weiter eingegangen werden, da ebensowenig wie im Falle des hermiteschen Matrixmodells klar ist, wie die erlaubten Nullmoden explizit zu fixieren sind.

4. Der Phasenübergang zur Einbandlösung

Phasenübergänge werden im allgemeinen dadurch charakterisiert, daß Ableitungen der Zustandssumme beziehungsweise der freie Energie divergieren. Im Zugang der Momentenmethode werden alle Größen durch die Momente und die Randpunkte der Schnitte ausgedrückt. Wie man an der Struktur der freien Energie und der Multiloopkorrelatoren sehen kann [7], divergieren diese genau dann, wenn eines oder mehrere der Momente am Phasenübergang verschwinden. Im folgenden wird zunächst am einfachsten Beispiel und danach für den allgemeinen Fall gezeigt werden, wie das Verschmelzen einer s-Band- zu einer Einbandlösung durch die Anzahl der dort verschwindenden Momente charakterisiert wird.

Übergang von der Zweibandlösung

Am Beispiel des einfachsten Potentials

$$\tilde{V}(\omega) \ = \ g_1\ \omega^2 + \frac{1}{2} g_2\ \omega^4 \tag{6.4.1}$$

wird gezeigt, wie das Verschwinden der Momente zustandekommt. In diesem einfachen Fall lassen sich die x_i in den Randbedingungen (6.3.5) explizit nach den Kopplungskonstanten auflösen. Für ein beliebiges Potential ist dies nicht mehr möglich. Trotzdem läßt sich auch für den allgemeinen Fall das Verschwinden der Momente der Einbandlösung beschreiben.

Die Randbedingungen der *Zweibandlösung* Gl. (6.3.5) lauten für das Potential (6.4.1)

$$\begin{aligned} 0 &= g_1 \ + \ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\ g_2 \\ 1 &= \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)\ g_1 \ + \ \frac{1}{16}(3x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 3x_2^2)\ g_2 \ . \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Der Phasenübergang zur Einbandlösung findet statt, wenn die beiden Zusammenhangskomponenten des Trägers $\sigma = [-x_1, -x_2] \cup [x_2, x_1]$ verschmelzen, also im Limes $x_2 \to 0$. Die erste Gleichung von (6.4.2) liefert dann x_1 als Funktion der Kopplungskonstanten:

$$x_1^2 \ = \ -2\ \frac{g_1}{g_2} \quad , \quad g_1 g_2 < 0 \ . \tag{6.4.3}$$

Die zweite Gleichung bestimmt das Verhältnis der Kopplungen, bei dem der Phasenübergang stattfindet,

$$g_1 \ = \ -2\ \sqrt{g_2} \ . \tag{6.4.4}$$

Dabei ist $g_2 > 0$ gewählt, um die Zustandssumme konvergent zu machen. Die einzigen nicht verschwindenden Momente aus Gl. (6.3.11) bleiben im Limes $x_2 \to 0$ unverändert:

$$M_1^{(1)} \ = \ M_2^{(1)} \ = \ g_2 \ . \tag{6.4.5}$$

Die freie Energie und der Einloopkorrelator vom Genus $g = 1$ ergeben sich am Phasenübergang mit [9] zu [5]

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{3} \ln 2 \ , \\ W_1(p) &= \frac{1}{16 g_2} \left(\frac{1}{(p^2 - x_1^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\sqrt{g_2}}{2} \frac{1}{(p^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{1}{p^2} + \frac{\sqrt{g_2}}{2} \right) \frac{1}{p^2 (p^2 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \ . \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

Insbesondere bleiben diese Größen am Phasenübergang endlich, wie auch die Beiträge zu höheren Genera.

[5] In der dortigen Notation ist $M_1^{(k)} = M_k$, $M_2^{(k)} = J_k$.

Bei der *Einbandlösung* lauten für das Potential Gl. (6.4.1) die einzigen nicht verschwindenden Momente aus Gl. (6.3.11) und (6.3.14)

$$
\begin{aligned}
M^{(0)} &= g_1 \;+\; \frac{1}{2}x^2 g_2 \;, \\
M_1^{(1)} &= g_1 \;+\; \frac{3}{2}x^2 g_2 \;, \quad M_1^{(2)} \;=\; g_2 \;,
\end{aligned}
\tag{6.4.7}
$$

mit $\sigma = [-x, x]$. Das Ergebnis für den Einloopkorrelator vom Genus $g = 1$ findet sich in [31], mit der folgenden, daraus resultierenden freien Energie[6]

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -\frac{1}{24}\ln M_1^{(1)} - \frac{1}{8}\ln M^{(0)} - \frac{1}{6}\ln x^2 \\
W_1(p) &= \frac{1}{16 M_1^{(1)}}\left(\frac{x^2}{(p^2-x^2)^{\frac{5}{2}}} - \left(\frac{x^2 M_1^{(2)}}{M_1^{(1)}} + 1\right)\frac{1}{(p^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{M_1^{(1)}}{M^{(0)}}\frac{1}{p^2(p^2-x_1^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \;.
\end{aligned}
\tag{6.4.8}
$$

Über die Randbedingung Gl. (6.3.5) läßt sich x durch die Kopplungen ausdrücken,

$$
1 \;=\; \frac{1}{4}x^2 g_1 \;+\; \frac{3}{16}x^4 g_2 \;. \tag{6.4.9}
$$

Damit $x^2 > 0$ ist, muß gelten

$$
x^2 \;=\; -\frac{2g_1}{3g_2} \;+\; \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g_1^2}{g_2^2} + 12\frac{1}{g_2}} \;. \tag{6.4.10}
$$

Der Phasenübergang ist nun mit Gl. (6.4.4) durch $g_1 = -2\sqrt{g_2}$ gegben. Daraus folgt für die Momente der Einbandlösung

$$
\begin{aligned}
M^{(0)} &= 0 \;\;, \\
M_1^{(1)} &= 4\sqrt{g_2} \;, \quad M_1^{(2)} \;=\; g_2 \;.
\end{aligned}
\tag{6.4.11}
$$

Für Genus $g = 1$ divergiert also in Gl. (6.4.8) die freie Energie der Einbandlösung F_1 logarithmisch und der Einloopkorrelator $W_1(p)$ linear. Ferner gilt aufgrund der Normiertheit der Eigenwertdichte $x^2 = x_1^2 (= \frac{4}{\sqrt{g_2}})$.

Für das einfache Potential (6.4.1) lassen sich die Ein- und Zweibandlösung auch mit der Methode der orthogonalen Polynome bestimmen. In [33] ist dies für den Einbandfall getan worden. Die dort berechneten Terme der Störungsreihe in g_2 für F_1 stimmen mit

[6] Mit den Bezeichnungen $M^{(k)} = M_k$, $M_1^{(k)} = I_k$.

Gl. (6.4.8) überein, wenn man ebenfalls nach g_2 entwickelt. Bei der Bestimmung der Zweibandlösung mittels orthogonaler Polynome findet man eine andere Situation vor als im hermiteschen Modell in Kapitel III. Die planare Lösung ist hier nicht durch einen mehrperiodischen Ansatz gegeben, sondern durch eine der drei Lösungen des einperiodischen Ansatzes, der gleichzeitig den Einbandfall beschreibt. Der einperiodische Ansatz ist immer konsistent, so daß bei einer numerischen Lösung für das Potential keine Instabilitäten zu erwarten sind.

Übergang von der s-Bandlösung

Völlig Analog zum Verschmelzen der Zweibandlösung geht beim Phasenübergang von der s-Band- zur Einbandlösung ein Teil der Intervallgrenzen x_i gegen 0, und der verbleibende Rest geht gegen die Intervallgrenze der Einbandlösung x. In diesem Limes läßt sich direkt an den Randbedingungen Gl. (6.3.5) der s-Bandlösung ablesen, welche Momente der Einbandlösung am Phasenübergang verschwinden. Dies hängt davon ab, wieviele der x_i gegen 0 und wieviele gegen x gehen. Zur Erinnerung lautete die Definition der Momente der *Einbandlösung* (Gl. (6.3.11) u. (6.3.14) für $s = 1$)

$$
\begin{aligned}
M_1^{(k)} &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{4\pi i}\frac{1}{(\omega^2 - x^2)^k}\frac{\omega \tilde{V}'(\omega)}{\sqrt{\omega^2 - x^2}} \;, \\
M^{(k)} &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{4\pi i}\frac{1}{\omega^{2k+1}}\frac{\tilde{V}'(\omega)}{\sqrt{\omega^2 - x^2}} \quad , \qquad k \in \mathrm{N} \;.
\end{aligned}
\tag{6.4.12}
$$

Die Randbedingung Gl. (6.3.5) liefert für die Einbandlösung

$$
M_1^{(0)} \;=\; 2 \;. \tag{6.4.13}
$$

Zunächst wird eine *gerade* Anzahl von Bändern betrachtet. Es gibt insgesamt $\frac{s}{2}$ Möglichkeiten, daraus eine Einbandlösung zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
&x_s, x_{s-1}, \ldots, x_{s-2k} \;\; \to 0 \;, \\
&x_{s-2k-1}, x_{s-2k-2}, \ldots, x_1 \to x \;, \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{s}{2} - 1 \;.
\end{aligned}
\tag{6.4.14}
$$

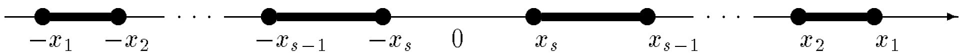

Abbildung 10: Der Träger σ der Eigenwertdichte für gerades s

Dies wirkt sich in den Randbedingungen Gl. (6.3.5) für gerades s folgendermaßen aus.

$$\phi^{(0)}(\omega) \;\to\; \frac{1}{\omega^{2k+1}}\frac{1}{(\omega^2-x^2)^{\frac{s}{2}-1-k}}\frac{1}{\sqrt{\omega^2-x^2}}\,,$$

$$\Rightarrow\; \delta_{l,s} = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}}\frac{d\omega}{4\pi i}\frac{1}{\omega^{2k+1-l}}\frac{1}{(\omega^2-x^2)^{\frac{s}{2}-1-k}}\frac{\tilde{V}'(\omega)}{\sqrt{\omega^2-x^2}} \quad, \; l=0,2,\ldots,s\,. \tag{6.4.15}$$

Bei festgehaltenem $k \in \{0,1,\ldots,\frac{s-1}{2}\}$ erhält man durch sukzessives Einsetzen von $l = 0,\ldots,s-1$ in Gl. (6.4.12), daß die folgenden Momente der Einbandlösung am Phasenübergang verschwinden:

$$\begin{aligned} 0 = M^{(0)} &= M^{(1)} = \;\ldots\; = M^{(k)}\,,\\ 0 = M_1^{(1)} &= M_1^{(2)} = \;\ldots\; = M_1^{(\frac{s}{2}-1-k)}\,. \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

Für $l = s$ liefert die Bedingung (6.4.15) jedesmal zusätzlich die Gl. (6.4.13), was aus Konsistenzgründen erfüllt sein muß. Für alle k verschwindet $M^{(0)}$. Das liegt daran, daß die Eigenwertdichte immer zusätzlich mindestens eine Nullstelle am Ursprung bekommt, wie man an Gl. (6.4.14) und an der Abbildung 10 sieht.

Für eine *ungerade* Anzahl von Bändern gibt es insgesamt $\frac{s+1}{2}$ Möglichkeiten, zu einer Einbandlösung zu gelangen:

$$\begin{aligned} &x_s, x_{s-1},\ldots,x_{s-2k+1} \;\to 0\,,\\ &x_{s-2k}, x_{s-2k-1},\ldots,x_1 \;\to x\,, \quad k=0,1,\ldots,\frac{s-1}{2}\,. \end{aligned} \tag{6.4.17}$$

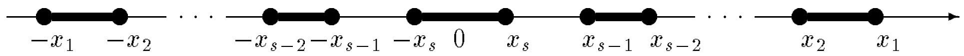

Abbildung 11: Der Träger σ der Eigenwertdichte für ungerades s

Die Randbedingungen Gl. (6.3.5) ergeben sich damit zu

$$\phi^{(0)}(\omega) \to \frac{1}{\omega^{2k}}\frac{1}{(\omega^2-x^2)^{\frac{s-1}{2}-k}}\frac{1}{\sqrt{\omega^2-x^2}}\,,$$

$$\Rightarrow\; \delta_{l,s} = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}}\frac{d\omega}{4\pi i}\frac{1}{\omega^{2k-l}}\frac{1}{(\omega^2-x^2)^{\frac{s-1}{2}-k}}\frac{\tilde{V}'(\omega)}{\sqrt{\omega^2-x^2}} \quad, \; l=1,3,\ldots,s\,. \tag{6.4.18}$$

Analog zu geradem s verschwinden bei festem $k \in \{0,1,\ldots,\frac{s-1}{2}\}$ die folgenden Momente:

$$\begin{aligned} 0 = M^{(0)} &= M^{(1)} = \;\ldots\; = M^{(k-1)}\,,\\ 0 = M_1^{(1)} &= M_1^{(2)} = \;\ldots\; = M_1^{(\frac{s-1}{2}-k)}\,. \end{aligned} \tag{6.4.19}$$

Für $l = s$ erhält man erneut Gl. (6.4.13). Im Falle $k = 0$ verschwinden nur die Momente $M_1^{(n)}$, $n = 1,\ldots,\frac{s-1}{2}$. Dieser Phasenübergang entspricht gerade dem $\frac{s+1}{2}$-ten kritischen Punkt. Im Doppelskalenlimes erhält man hieraus $\gamma_{str} = -\frac{s+1}{2}$ als kritischen Exponenten. Leider läßt sich nicht zu allen Phasenübergängen (6.4.16) bzw. (6.4.19) ein Doppelskalenlimes und damit ein Kontinuumslimes definieren. Eine detaillierte Untersuchung für ungerades s findet sich hierzu in [29].

Bislang wurden nur die Limites der Randbedingungen (6.3.5) betrachtet. Hieraus ließen sich alle Informationen über die Art des Phasenübergangs gewinnen. Die verbleibenden Randbedingungen vom Typ (6.3.6) liefern keine weiteren Bedingungen. Sie verschwinden identisch in den Limites (6.4.14) und (6.4.17), da dann die Intervalle $\bar{\sigma}_j$, über die integriert wird, alle zu Null schrumpfen.

Die bisher betrachteten Phasenübergänge von einer s-Band- zur Einbandlösung sind eher in einem formalen Sinne zu verstehen. Tatsächlich kann es nämlich vorkommen, daß für ein gegebenes Potential eine bestimmte Mehrbandlösung gar nicht an die Einbandlösung grenzt. Ein Beispiel dafür wurde für das hermitesche Modell bereits am Ende von Kapitel V erwähnt. Technisch gesehen entwickelt dann die Eigenwertdichte im entsprechenden Limes eine Nullstelle, bevor es zum Verschmelzen der Bänder kommt. Welche Phasen aneinander grenzen, muß also im Einzelfall anhand des Phasendiagramms für ein gegebenes Potential bestimmt werden. Dieses erhält man analog zum hermiteschen Modell, wie in Kapitel II beschrieben worden ist.

Anhang A:

Zur numerischen Berechnung der Stringgleichung

1. Konvergenz

An dieser Stelle sollen zwei Beispiele illustrieren, wie die in Kapitel III 3. diskutierte Konvergenz für wachsendes N aussieht. Bei allen hier angegebenen Ergebnissen[1] ist der maximale absolute Fehler $f < 10^{-15}$. Wie in Kapitel III 3. erwähnt, konnte zu festem N immer eine Konvergenz bezüglich f erreicht werden.

Die Konvergenz bezüglich N sieht nun typischerweise so aus, wie im ersten Beispiel in Abb. 12 angegeben. Dabei sind dieselben Kopplungen wie in einem Beispiel in [22] gewählt worden, so daß die dortigen Ergebnisse bestätigt werden konnten. Die Schnittpunkte mit den Phasengrenzen d und b aus Abbildung 3 sind durch vertikale Linien gekennzeichnet. Wie man sieht, ist der Einsatzpunkt bei $\xi_d = \frac{h_d}{h}$ praktisch N-unabhängig, während von rechts eine Konvergenz gegen $\xi_b = \frac{h_b}{h}$ stattfindet.

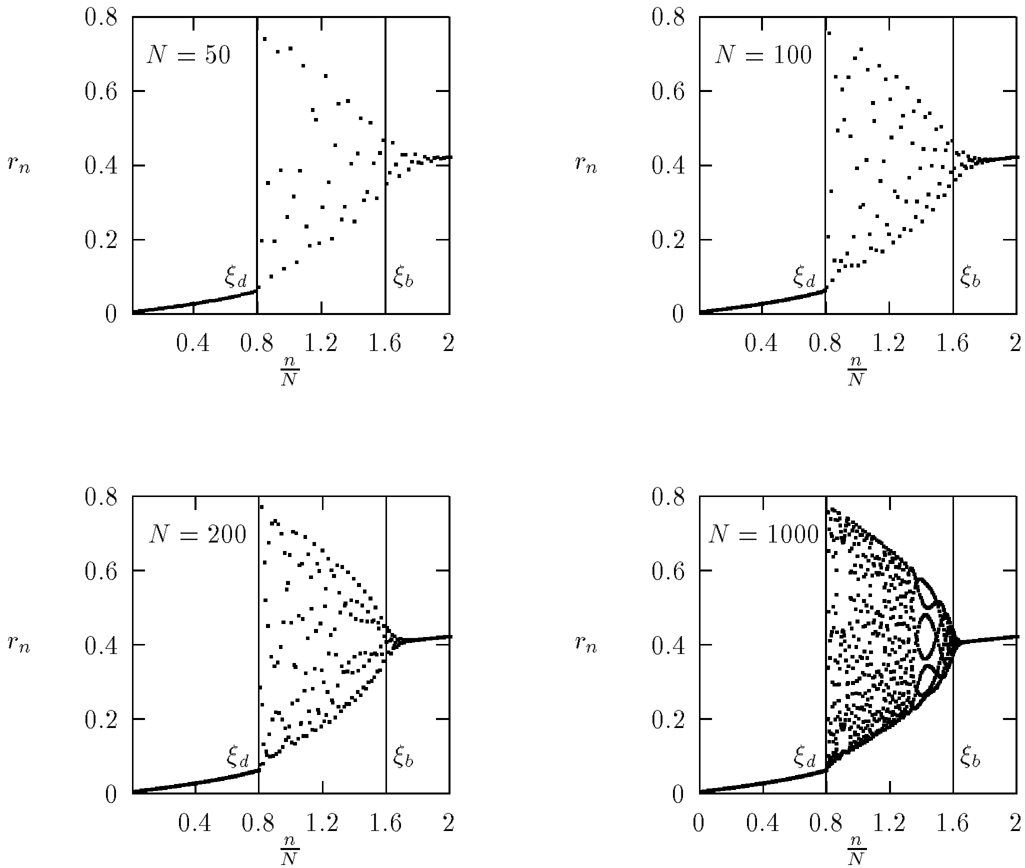

Abbildung 12: Beispiel 1 zur Konvergenz bezüglich N bei $G = -2.0$, $h = 0.05$

[1] Außer in Beispiel 2 Abb. 13 bei $N = 3200$, dort ist $f < 10^{-7}$.

Das zweite Beispiel bezieht sich auf die in Kapitel III 3. beschriebene schlechte Konvergenz bezüglich N nahe den entarteten Minima bei $G = \frac{4}{\sqrt{3}} = -2.309401\ldots$. In dem hier gezeigten Beispiel wurde für die Kopplungen $G = -2.308$ und $h = 0.19$ gewählt. In welchem Sinne die mangelnde Konvergenz zu verstehen ist, zeigen die numerischen Ergebnisse. Obwohl für festes N der Fehler $f < 10^{-15}$ ist und die Lösung konvergent bezüglich f ist, ändern sich die Rekursionskoeffizienten r_n mit zunehmenden N noch drastisch. Der Schnittpunkt ξ_b ist ebenfalls eingetragen, während $\xi_d \approx 5.121 \cdot 10^{-4}$ praktisch bei Null liegt. Es ist zu vermuten, daß auch hier für sehr großes N die Lösung qualitativ die Form wie im ersten Beispiel annehmen wird. Eine Berechnung für ausreichend großes N konnte jedoch im Rahmen der zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten nicht erreicht werden. Aus diesem Grund ist in Kapitel III auf die Präsentation solcher "Ergebnisse" gänzlich verzichtet worden, auch wenn dies in [23] offenbar geschehen ist (s. Abb. 9 dort).

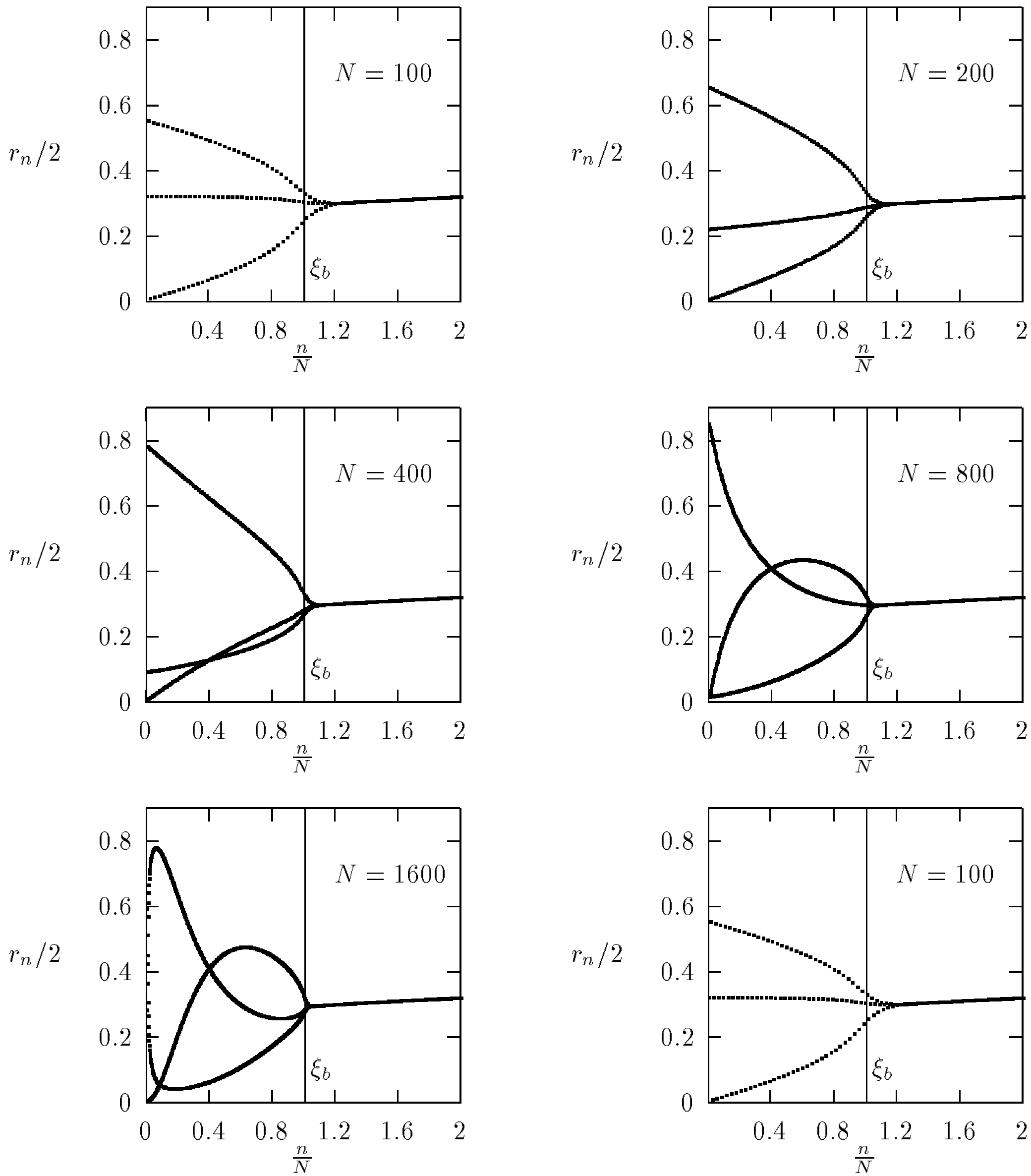

Abbildung 13: Beispiel 2 zur Konvergenz bezüglich N bei $G = -2.308$, $h = 0.19$ nahe den entarteten Minima

2. Korrelationen zwischen den r_n

In diesem Abschnitt sollen zwei vergebliche Versuche dargestellt werden, im Bereich der Instabilitäten glatte Funktionen der r_n zu ermitteln. Der erste Versuch ist inspiriert durch den dreiperiodischen Ansatz bei den orthogonalen Polynomen. Dort ergab sich (Gl. (3.2.23) und (3.2.24)), daß die Summe der drei Grenzfunktionen für die r_n konstant und das Produkt linear in $\xi = \frac{n}{N}$ ist, obwohl die einzelnen Funktionen $r_{(i)}(\xi)$ nicht bestimmt werden konnten.

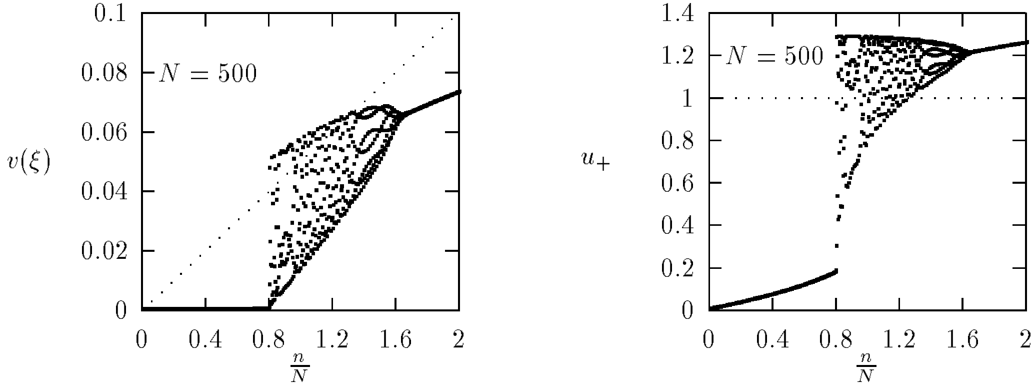

Abbildung 14: Produkt $v(\xi)$ und Summe u_+ der r_n bei $G = -2.0$, $h = 0.05$

Hier sind für das Beispiel 1 (Abb.12) aus dem vorherigen Abschnitt jeweils Produkt und Summe dreier aufeinanderfolgender r_n aufgetragen,

$$u_+ = \sum_{i=0,1,2} r_{n+i} \;=\; -\frac{G}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{G^2-4}\ ,$$

$$v(\xi) = \prod_{i=0,1,2} r_{n+i} \;=\; h\xi\ ,\quad \xi = \frac{n}{N}\ . \tag{A.2.1}$$

Offensichtlich erfüllen die numerisch berechneten r_n im Bereich von Phase III nicht den dreiperiodische Ansatz.

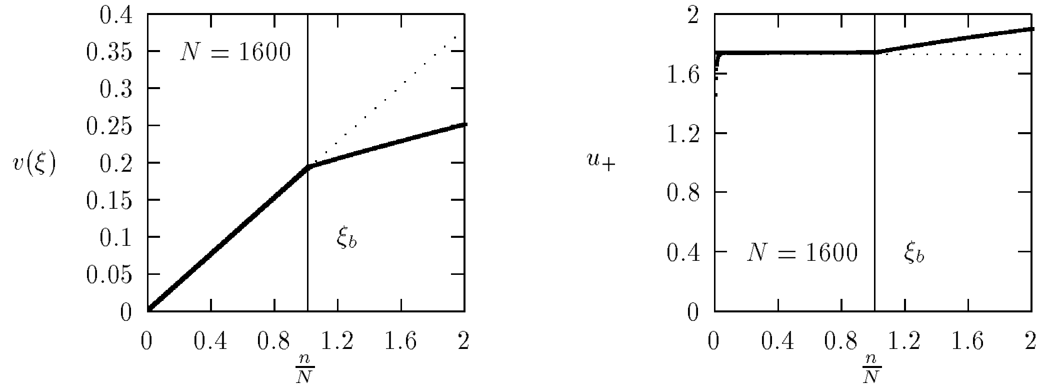

Abbildung 15: Produkt $v(\xi)$ und Summe u_+ dreier aufeinanderfolgender r_n bei $G = -2.308$ und $h = 0.19$ nahe den entarteten Minima

Dasselbe ist für die scheinbar glatte numerischen “Lösung” im Beispiel 2 (Abb. 13) nahe den entarteten Minima gemacht worden, mit sehr guter Übereinstimmung. Ab $\xi \geq \xi_b$ wird die einperiodische Lösung angenommen, wie aus Abbildung 13 ersichtlich. Es kann jedoch nicht genug betont werden, daß die hier gezeigten Resultate noch keine konvergenten Ergebnisse für den Grenzfall großer N darstellen! Entsprechend wird die Übereinstimmung mit u_+ und $v(\xi)$ für großes N schlechter werden, wie rechts nahe bei $\xi = 0$ schon zu sehen ist, um vermutlich bei einer ähnlichen Situation wie in Abbildung 14 anzugelangen.

Im zweiten Versuch, glatte Funktionen der r_n zu finden, ist der Frage nachgegangen worden, ob es in den Daten verborgene höhere Periodizitäten gibt. Dazu wurden wieder zu dem Beispiel 1 aus Abbildung 12 die Beträge $|r_n - r_{n+i}|$ für $i = 1, \ldots, 7$ aufgetragen[2]. Zwar gibt es wesentliche quantitative Unterschiede in Amplitude und Struktur für verschiedene Werte von i, jedoch lassen sich auch hier keine tieferen Erkenntnisse gewinnen. Bei welchem i "charakteristische" Strukturen auftreten, variiert von Beispiel zu Beispiel.

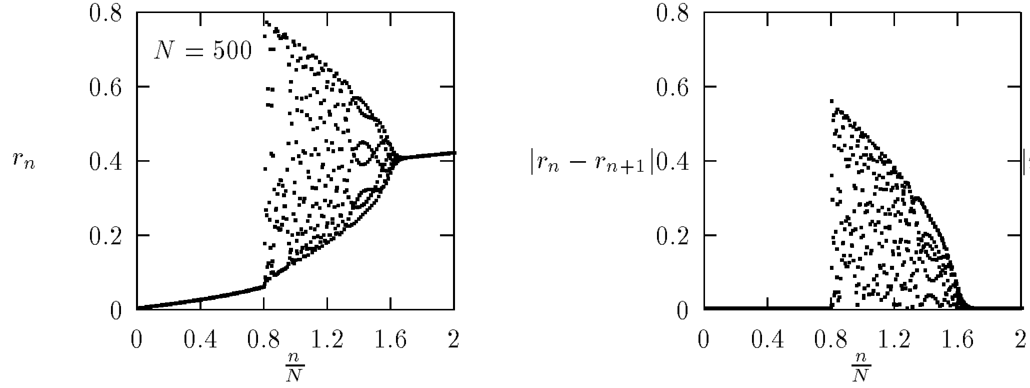

Abbildung 16: Links ist die numerische Lösung für die r_n bei $G = -2.0$ und $h = 0.05$ zum Vergleich angegeben.

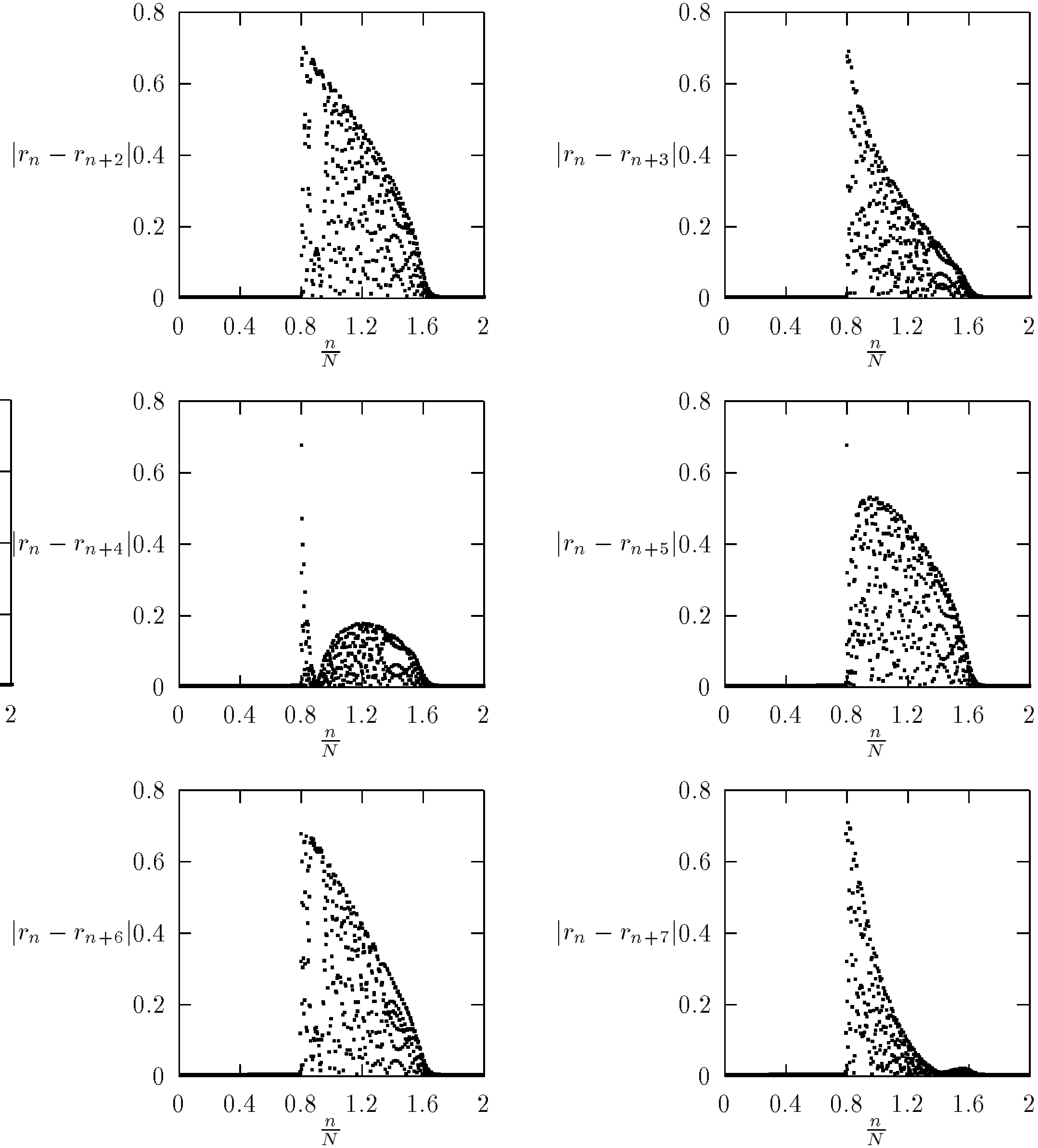

Abbildung 17: Beispiel für Korrelationen $|r_n - r_{n+i}|$, $i = 1, \ldots, 7$ bei $G = -2.0$, $h = 0.05$

[2] Für größere Werte von i wiederholen sich die Strukturen niedrigerer "Periodizität", z.B. die von $i = 4$ bei $i = 8$ (vgl. auch $i = 2$ und 6).

Anhang B: Zur Zweibandlösung

1. Elliptische Integrale

Die in Gl. (5.1.5) definierten elliptischen Integrale K_i lassen sich durch elementare Funktionen und drei fundamentale Integrale ausdrücken, und zwar durch die vollständigen elliptischen Integrale *erster*, *zweiter* und *dritter* Art. Diese sind wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
K(k) &\equiv \int_0^1 dt \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} , \\
E(k) &\equiv \int_0^1 dt \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} , \\
\Pi(\alpha^2, k) &\equiv \int_0^1 dt \frac{1}{(1-\alpha^2t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} .
\end{aligned}
\tag{B.1.1}
$$

Die Integrale K_i, $i = 1, \ldots, 4$, sind dann mit Hilfe von [34] gegeben durch

$$
\begin{aligned}
K_1 &\equiv -\int_{x_3}^{x_2} \sqrt{\frac{(x_2-\lambda)(\lambda-x_3)(\lambda-x_4)}{x_1-\lambda}} \\
&= X\Big[(-\alpha^6 + 2\alpha^4 - 2\alpha^4k^2 + \alpha^2k^2)E(k) + (k^2-\alpha^2)(-\alpha^4 + 2\alpha^2 - k^2)K(k) \\
&\quad + (\alpha^8 - 4\alpha^6k^2 + 6\alpha^4k^2 - 4\alpha^2k^2 + k^4)\Pi(\alpha^2, k)\Big] , \\
K_2 &\equiv -\int_{x_3}^{x_2} \sqrt{\frac{(x_1-\lambda)(\lambda-x_3)(\lambda-x_4)}{x_2-\lambda}} \\
&= X\Big[(-\alpha^6 - 2\alpha^4 + 2\alpha^4k^2 + \alpha^2k^2)E(k) + (k^2-\alpha^2)(-\alpha^4 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2k^2 - k^2)K(k) \\
&\quad + (\alpha^8 - 4\alpha^6 + 6\alpha^4k^2 - 4\alpha^2k^4 + k^4)\Pi(\alpha^2, k)\Big] , \\
K_3 &\equiv \int_{x_3}^{x_2} \sqrt{\frac{(x_1-\lambda)(x_2-\lambda)(\lambda-x_4)}{\lambda-x_3}} \\
&= X\Big[(3\alpha^6 - 2\alpha^4 - 2\alpha^4k^2 + \alpha^2k^2)E(k) + (k^2-\alpha^2)(3\alpha^4 - 2\alpha^2 - k^2)K(k) \\
&\quad + (-3\alpha^8 + 4\alpha^6 + 4\alpha^6k^2 - 6\alpha^4k^2 + k^4)\Pi(\alpha^2, k)\Big] , \\
K_4 &\equiv \int_{x_3}^{x_2} \sqrt{\frac{(x_1-\lambda)(x_2-\lambda)(\lambda-x_3)}{\lambda-x_4}} \\
&= X\Big[(-\alpha^6 + 2\alpha^4 + 2\alpha^4k^2 - 3\alpha^2k^2)E(k) + (k^2-\alpha^2)(-\alpha^4 + 2\alpha^2 - 4\alpha^2k^2 + 3k^2)K(k) \\
&\quad + (\alpha^8 - 6\alpha^4k^2 + 4\alpha^2k^2 + 4\alpha^2k^4 - 3k^4)\Pi(\alpha^2, k)\Big] ,
\end{aligned}
\tag{B.1.2}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
X &\equiv -\frac{1}{4}\frac{(x_1-x_3)^{\frac{3}{2}}(x_2-x_4)^{\frac{7}{2}}}{(x_2-x_3)^2(x_3-x_4)} \\
\alpha^2 &\equiv \frac{x_2-x_3}{x_2-x_4} , \\
k^2 &\equiv \frac{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}{(x_1-x_3)(x_2-x_4)} .
\end{aligned}
\tag{B.1.3}
$$

Die Zerlegung in $K(k)$, $E(k)$, und $\Pi(\alpha^2, k)$ ist aufgrund von möglichen Transformationen des Modulus k nicht eindeutig (siehe z.B. Abschnitt 8.12 in [34]). So sind in [34] zwei mögliche Zerlegungen angegeben, mit unterschiedlichem α^2 und k,

$$
K_i = \lim_{y \to x_2} \int_{x_3}^{y} d\lambda \frac{\sqrt{\prod_{j=1}^4 (\lambda - x_j)}}{\lambda - x_i}
\tag{B.1.4}
$$

und

$$K_i = \lim_{y\to x_3} \int_y^{x_2} d\lambda \frac{\sqrt{\prod_{j=1}^4 (\lambda - x_j)}}{\lambda - x_i} . \tag{B.1.5}$$

Die Limites der uneigentlichen Integrale existieren beide und sind äquivalent. In Gl. (B.1.2) wurde die Gl. (B.1.4) entsprechende Zerlegung angegeben.

Auch wenn die Lösung für die K_i in Gl. (B.1.2) nur eine Umschreibung in die Standardintegrale $K(k)$, $E(k)$ und $\Pi(\alpha^2, k)$ bedeutet, so kann man anhand dieser ablesen, daß die Ableitungen $\frac{\partial K_i}{\partial x_j}$ sowie höhere Ableitungen existieren. Der Definition der K_i konnte man dies nicht ansehen. Diese lassen sich nun mit Gl. (B.1.2) auf elementare Ableitungen sowie die folgenden Ableitungen der vollständigen elliptischen Integrale erster bis dritter Art zurückführen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k^2} K(k) &= \frac{1}{2k^2(1-k^2)}\Big(E(k) - (1-k^2)K(k)\Big) , \\
\frac{\partial}{\partial k^2} E(k) &= \frac{1}{2k^2}\Big(E(k) - K(k)\Big) , \\
\frac{\partial}{\partial k^2} \Pi(\alpha^2, k) &= \frac{1}{2(1-k^2)(k^2-\alpha^2)}\Big(E(k) - (1-k^2)\Pi(\alpha^2,k)\Big) , \\
\frac{\partial}{\partial \alpha^2} \Pi(\alpha^2, k) &= \frac{1}{2\alpha^2(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}\Big(\alpha^2 E(k) + (k^2-\alpha^2)K(k) + (\alpha^4 - k^2)\Pi(\alpha^2,k)\Big) .
\end{aligned} \tag{B.1.6}$$

Diese Ableitungen treten in der Loopgleichung bei der Berechnung von $W_2(p)$ sowie von höheren Genera auf:

$$\frac{d}{dV}(p) W_1(p) \; = \; \sum_{i=1}^4 \left(\frac{dx_i}{dV}(p) \frac{\partial W_1(p)}{\partial x_i} + \sum_{k\in N} \frac{dM_i^{(k)}}{dV}(p) \frac{\partial W_1(p)}{\partial M_i^{(k)}} \right) . \tag{B.1.7}$$

Im Falle eines *symmetrischen* Potentials wird der Träger σ ebenfalls symmetrisch zum Ursprung, und man erhält

$$x_4 \; = \; -x_1 \quad , \quad x_3 \; = \; -x_2 \; . \tag{B.1.8}$$

Wie leicht zu sehen ist, sind dann nur noch zwei der K_i verschieden,

$$K_4^{sym} \; = \; -K_1^{sym} \quad , \quad K_3^{sym} \; = \; -K_2^{sym} \; . \tag{B.1.9}$$

Die Integrale K_1^{sym} und K_2^{sym} vereinfachen sich nun erheblich. Man erhält sie einerseits aus dem symmetrischen Grenzfall von Gl. (B.1.2). Sie enthalten dann allerdings noch alle drei Integrale K, E, und Π. Nutzt man die Relation (B.1.9) aus [1], so erhält man eine Beziehung zwischen dem vollständigen elliptischen Integral erster und dritter Art:

$$x_1 K(k_{sym}) \; = \; (x_1 - x_2)\Pi(\alpha^2_{sym}, k_{sym}) \; , \tag{B.1.10}$$

mit

$$\begin{aligned}
\alpha^2_{sym} &\equiv \frac{2x_2}{x_1 + x_2} \\
k^2_{sym} &\equiv \frac{4x_1 x_2}{(x_1+x_2)^2} \; .
\end{aligned} \tag{B.1.11}$$

Die Relation (B.1.10) findet sich nicht in [34]. Die symmetrischen Größen $K_i^{sym}, i = 1, 2$, lassen sich jetzt nur durch K und E ausdrücken.

Andererseits bekommt man die K_i^{sym} auf wesentlich einfachere Art dadurch, daß man erst die Integrale in der Definition der K_i Gl. (B.1.2) vereinfacht, und dann [34] benutzt. Es ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}
K_1^{sym} &= -x_1 \int_{-x_2}^{x_2} d\lambda \sqrt{\frac{x_2^2 - \lambda^2}{x_1^2 - \lambda^2}} \\
&= x_1(x_1 - x_2)K(k_{sym}) - x_1(x_1 + x_2)E(k_{sym}) \; , \\
K_2^{sym} &= -x_2 \int_{-x_2}^{x_2} d\lambda \sqrt{\frac{x_1^2 - \lambda^2}{x_2^2 - \lambda^2}} \\
&= x_2(x_2 - x_1)K(k_{sym}) - x_2(x_2 + x_1)E(k_{sym}) \; .
\end{aligned} \tag{B.1.12}$$

[1] Oder aber das Gleichsetzen der Zerlegungen (B.1.4) und (B.1.5), die im symmetrischen Fall gleiches α und k enthalten.

2. Zusammengesetzte Funktionen der x_i

Die Abkürzungen X_i aus Gl. (5.1.6) sind folgendermaßen definiert:

$$X_i \equiv (-1)^i \prod_{\substack{j,k=1 \\ j<k;\ j,k\neq i}}^{4} (x_j - x_k) \ , \quad i = 1, \ldots, 4 \ , \tag{B.2.1}$$

oder explizit durch

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_4 - x_3) \ , \\ X_2 &\equiv (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4) \ , \\ X_3 &\equiv (x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_4 - x_2) \ , \\ X_4 &\equiv (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \ . \end{aligned} \tag{B.2.2}$$

Zwischen diesen Größen gelten einige nützliche Beziehungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{4} X_i \ , \\ 0 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{4} \frac{X_j + X_i}{x_j - x_i} \ , \quad j = 1, \ldots, 4 \ . \end{aligned} \tag{B.2.3}$$

Letztere sind hilfreich bei der Bestimmung der noch zu definierenden Ξ_i. Ferner gilt noch

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{X_i}{\lambda - x_i} = \frac{\prod_{i,j=1;i<j}^{4} (x_i - x_j)}{\prod_{i=1}^{4} (\lambda - x_i)} \ . \tag{B.2.4}$$

Mit dieser Beziehung läßt sich die Größe Σ, gegeben durch

$$\Sigma \equiv \sum_{i=1}^{4} K_i X_i \ , \tag{B.2.5}$$

geschickt umformen zu

$$\begin{aligned} \Sigma &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{4} (x_i - x_j) \int_{x_3}^{x_2} d\lambda \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^{4} (\lambda - x_k)}} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{4} (x_i - x_j) \frac{2}{\sqrt{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}} K(k) \ . \end{aligned} \tag{B.2.6}$$

Dabei ist $K(k)$ das vollständige elliptische Integral erster Art mit k aus Gl. (B.1.3). Die Größen Ξ_i in den $\phi^{(0)}(p)$-Koeffizienten der Größen $\frac{dx_i}{dV}(p)$ in Gl. (5.1.6) sind schließlich definiert durch

$$\Xi_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} K_j \frac{X_i + X_j}{(x_i - x_j)} \quad i = 1, \ldots, 4 \ . \tag{B.2.7}$$

Aufgrund des Gleichungssystems (5.1.4) zur Bestimmung der $\frac{dx_i}{dV}(p)$ gelten unter anderem die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{4} \Xi_i \ , \\ 0 &= \sum_{i=1}^{4} K_i \Xi_i \ . \end{aligned} \tag{B.2.8}$$

Im *symmetrischen* Grenzfall $x_4 = -x_1$ und $x_3 = -x_2$ vereinfachen sich alle oben angegebenen Größen erheblich:

$$\begin{aligned} X_1^{sym} = -X_4^{sym} &= -2x_2(x_1^2 - x_2^2) \ , \\ X_2^{sym} = -X_3^{sym} &= 2x_1(x_1^2 - x_2^2) \ , \\ \\ \Xi_1^{sym} = -\Xi_4^{sym} &= 4(x_1^2 - x_2^2) K_2^{sym} \ , \\ \Xi_2^{sym} = -\Xi_3^{sym} &= -4(x_1^2 - x_2^2) K_1^{sym} \ , \\ \\ \Sigma^{sym} &= 2(K_1^{sym} X_1^{sym} + K_2^{sym} X_2^{sym}) \\ &= -8x_1 x_2 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2 K(k_{sym}) \ , \end{aligned} \tag{B.2.9}$$

mit k_{sym} aus Gl. (B.1.11).

3. Momentabhängigkeit von F_1 und $W_1(p)$

In diesem Abschnitt wird bewiesen, daß die freie Energie F_1 im hermiteschen Matrixmodell mit Zweibandlösung von unendlich vielen Momenten abhängt. Ferner wird eine Bedingung dafür formuliert, daß der Einloopkorrelator $W_1(p)$ von nur *endlich* vielen Momenten abhängt.

Der Zusammenhang zwischen $W_1(p)$ und F_1 aus Gl. (4.5.15) läßt sich mit Hilfe eines allgemeinen Ansatzes für F_1 genauer spezifizieren:

$$\begin{aligned} W_1(p) &= \frac{d}{dV}(p)\ F_1\ [x_i, M_i^{(k)};\ i=1,\ldots,4,\ k\in \mathrm{N}_+] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\frac{dM_i^{(k)}}{dV}(p)\frac{\partial F_1}{\partial M_i^{(k)}} + \sum_{i=1}^{4}\frac{dx_i}{dV}(p)\frac{\partial F_1}{\partial x_i} . \end{aligned} \tag{B.3.1}$$

Setzt man die bekannten Größen $\frac{dM_i^{(k)}}{dV}(p)$ aus Gl. (4.5.20) für $s=2$ auf der rechten Seite ein, so erhält man

$$\begin{aligned} W_1(p) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\Bigg[&(k+\frac{1}{2})\Big(M_i^{(k+1)}\frac{dx_i}{dV}(p) - \phi_i^{(k+1)}(p)\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\Bigg(\frac{1}{(x_j-x_i)^k}\Big(M_j^{(1)}\frac{dx_j}{dV}(p)-\phi_j^{(1)}(p)\Big) \\ &+ \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{(x_j-x_i)^{k-l+1}}\Big(\phi_i^{(l)}(p) - M_i^{(l)}\frac{dx_j}{dV}(p)\Big)\Bigg)\Bigg]\frac{\partial F_1}{\partial M_i^{(k)}} \\ &+ \sum_{i=1}^{4}\frac{dx_i}{dV}(p)\frac{\partial F_1}{\partial x_i} . \end{aligned} \tag{B.3.2}$$

Da $W_1(p)$ auf der linken Seite als Funktion von p fast vollständig bekannt ist, nämlich bis auf die Nullmode $\phi^{(0)}(p)$ (s. Gl. (5.1.9)), kann mit dem unabhängigen Funktionensystem

$$\{\phi^{(0)}(p), \phi_i^{(l)}(p);\ i=1,\ldots,4,\ l\in \mathrm{N}\} \tag{B.3.3}$$

ein Koeffizientenvergleich durchgeführt werden. Die Gleichungen, die man dadurch erhält, erlauben es, die genannten Aussagen über $W_1(p)$ und F_1 zu treffen.

$\underline{\phi_i^{(n)}(p), n>2}$:

$$0 = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\frac{1}{(x_j-x_i)^{k-n+1}}\Big]\frac{\partial F_1}{\partial M_i^{(k)}} - (n-\frac{1}{2})\frac{\partial F_1}{\partial M_i^{(n-1)}} , \tag{B.3.4}$$

$\underline{\phi_i^{(2)}(p)}$:

$$\frac{1}{16}\frac{\Sigma - 4K_iX_i}{\Sigma M_i^{(1)}} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\frac{1}{(x_j-x_i)^{k-1}}\Big]\frac{\partial F_1}{\partial M_i^{(k)}} - \frac{3}{2}\frac{\partial F_1}{\partial M_i^{(1)}} , \tag{B.3.5}$$

$\underline{\phi_i^{(1)}(p)}$:

$$\begin{aligned} w^i = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\Bigg[&(k+\frac{1}{2})\Big(\delta_{ij}-\frac{K_iX_j}{\Sigma}\Big)\frac{M_j^{(k+1)}}{M_j^{(1)}} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{4}\frac{1}{(x_m-x_j)^k}\Big(\delta_{ij}-\frac{K_iX_m}{\Sigma}\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}\Bigg(\frac{\delta_{ij}-1}{(x_i-x_j)^{k-l+1}}\frac{M_j^{(l)}}{M_i^{(1)}} + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{4}\frac{1}{(x_m-x_j)^{k-l+1}}\frac{M_j^{(l)}}{M_m^{(1)}}\frac{K_iX_m}{\Sigma}\Bigg)\Bigg]\frac{\partial F_1}{\partial M_j^{(k)}} \\ &+ \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{M_j^{(1)}}\Big(\delta_{ij}-\frac{K_iX_j}{\Sigma}\Big)\frac{\partial F_1}{\partial x_j} , \\ &i=1,\ldots,4 , \end{aligned} \tag{B.3.6}$$

wobei die w^i die $\phi_i^{(1)}$-Koeffizienten von $W_1(p)$ in Gl. (5.1.9) sind,

$$\begin{aligned} w^i \equiv &-\frac{(\Sigma-4K_iX_i)}{16\Sigma}\frac{M_i^{(2)}}{(M_i^{(1)})^2} \\ &+\frac{1}{8\Sigma M_i^{(1)}}\Bigg(\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{4}\frac{K_iX_i+K_jX_j}{x_i-x_j} - \sum_{\substack{i,j,k,l\in P^4\\ i\neq j,k<l}}^{4}\frac{K_kX_k+K_lX_l}{x_i-x_j}\Bigg) . \end{aligned} \tag{B.3.7}$$

Die Abhängigkeit von F_1 von *allen* Momenten läßt sich nun in zwei Schritten beweisen. Zunächst wird (i) mit Gl. (B.3.4) gezeigt, daß wenn F_1 von $M_i^{(k\geq 2)}$ abhängt, es auch von allen höheren Momenten abhängt. Denn angenommen es gäbe ein $k_0\geq 2$, so daß F_1 von $M_i^{(k)}$, $k\leq k_0$, nicht aber von höheren Momenten mit $k>k_0$ abhinge. Dann führt die Gleichung (B.3.4) für $n=k_0+1$ auf einen Widerspruch. Dies gilt unabhängig für alle $i=1,\ldots,4$. Diese Aussage gilt auch für die Einbandlösung. Im vorliegenden Zweibandfall ist aber (ii) die Annahme inkonsistent, daß F_1 nur von den Momenten erster Ordnung $M_i^{(1)}$ $i=1,\ldots,4$, abhängt. Dies sieht man anhand von Gl. (B.3.6), da sich dann dort die

$M_i^{(2)}$-Terme auf der linken und rechten Seite nicht wegheben. Unter der Voraussetzung, daß die Momente unabhängig voneinander sind, ist damit die Behauptung bewiesen.

Im weiteren Teil soll nun eine Bedingung formuliert werden, unter der $W_1(p)$ von *endlich* vielen Momenten abhängt. Dies ist die Voraussetzung dafür, daß mit dem vorgestellten Iterationsverfahren höhere Genera berechnet werden können. Dazu wird der Koeffizient der Nullmode $\phi^{(0)}(p)$ in $W_1(p)$, der im folgenden mit Ω_1 bezeichnet wird, in Abhängigkeit von F_1 bestimmt,

$$W_1(p) \;\equiv\; \ldots + \Omega_1\ \phi^{(0)}(p)\ . \tag{B.3.8}$$

Der Koeffizientenvergleich aus Gl. (B.3.2) ergibt

$\underline{\phi^{(0)}(p)}$:

$$\begin{aligned}\Omega_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\Bigg[&(k+\frac{1}{2})M_i^{(k+1)}\frac{\Xi_i}{\Sigma M_i^{(1)}}\\ &+\quad \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\left(\frac{1}{(x_j-x_i)^k}M_j^{(1)}-\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{(x_j-x_i)^{k-l+1}}M_i^{(l)}\right)\frac{\Xi_j}{\Sigma M_j^{(1)}}\Bigg]\frac{\partial F_1}{\partial M_i^{(k)}}\\ &+\sum_{i=1}^{4}\frac{\Xi_i}{\Sigma M_i^{(1)}}\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\ .\end{aligned} \tag{B.3.9}$$

In der vorliegenden Form hängt Ω_1 noch explizit von allen Momenten sowie von allen Ableitungen von F_1 nach den Momenten ab. Dies läßt sich jedoch mit den folgenden Umformungen vereinfachen. Löst man die vier Gleichungen (B.3.6) jeweils nach $\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{M_j^{(1)}}\delta_{ij}\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$ auf und setzt sie in Gl. (B.3.9) ein, so fallen dort wegen Gl. (B.2.8) alle $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$-Terme sowie explizite Momentenabhängigkeit heraus, und es ergibt sich

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^{4}\frac{\Xi_i}{\Sigma}w^i + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\Big[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\frac{1}{2\Sigma}\frac{1}{(x_j-x_i)^k}(\Xi_j-\Xi_i)\Big]\frac{\partial F_1}{\partial M_i^{(k)}}\ . \tag{B.3.10}$$

In dieser Form ist offensichtlich, daß Ω_1 und damit auch $W_1(p)$ genau dann von *endlich* vielen Momenten abhängt, wenn es ein k_0 gibt, so daß F_1 nur noch linear von allen $M_i^{(k)}$ mit $k > k_0$ abhängt, und zwar für alle $i = 1, \ldots, 4$.

Abschließend sei noch eine Bemerkung bezüglich der Bestimmbarkeit von F_1 angefügt. Gesetzt den Fall, der Koeffizient Ω_1 der Nullmoden in $W_1(p)$ wäre als Funktion der x_i und der Momente bekannt. Dann ließe sich F_1 aus dem allgemeinen Ansatz (B.3.2) bestimmen. Insbesondere kommen die vier Größen $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$ in den fünf Gleichungen vor,

die aus dem Koeffizientenvergleich der $\phi_i^{(1)}(p)$ und $\phi^{(0)}(p)$ stammen (Gl. (B.3.6) und (B.3.9)). Ein Einsetzen der ersteren in die letztere ergab, daß alle die gesuchten Terme $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$ herausfielen (s. Gl. (B.3.10)). Es verbleiben also die vier Gleichungen (B.3.6) zur Bestimmung der $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$. Die entscheidende Beobachtung ist nun, daß auch diese vier Gleichungen nicht unabhängig sind. Multipliziert man nämlich jede der Gleichungen mit dem entsprechenden X_i und addiert sie anschließend, so erhält man die folgende Beziehung:

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{4}w^iX_i \;+\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\Big[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\frac{1}{2}\frac{X_j-X_i}{(x_j-x_i)^k}\Big]\frac{\partial F_1}{\partial M_i^{(k)}}\ . \tag{B.3.11}$$

Das heißt der allgemeinste Ansatz für F_1 erlaubt es *nicht*, selbst bei bekanntem $W_1(p)$ die Größen $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$ und damit F_1 zu bestimmen. Dies spiegelte sich bereits darin wieder, daß die Größen $\frac{dx_i}{dV}(p)$ aufgrund der letzten Gleichung von Gl. (5.1.4) nicht linear unabhängig waren.

Literatur

[1] F. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems part I,II and III. *J.Math.Phys.3*, Seite 140–175, 1962.

[2] A. A. Migdal. Loop equations and 1/N expansion. *Phys.Rep.102*, Seite 199–290, 1983.

[3] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov. Generalized Kontsevich model versus Toda hierarchy and discrete matrix models. *Nucl.Phys.B397*, Seite 339–378, 1993.

[4] V. A. Kazakov. Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution. *Phys.Lett.A119*, Seite 140–143, 1986.

[5] P. di Francesco, O. Golinelli, and E. Guitter. *Meander, folding and arch statistics.* Saclay SPhT/95-059, hep-th/9506030, 1995.

[6] J. C. Plefka. *Supersymmetrische Verallgemeinerungen von Matrix Modellen.* Doktorarbeit, Universität Hannover, 1995.

[7] J. Ambjørn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen, and Yu. Makeenko. Matrix model calculation beyond the spherical limit. *Nucl.Phys.B404*, Seite 127–172, 1993.

[8] M. Sasaki and H. Suzuki. Matrix realization of random surfaces. *Phys.Rev. D43*, Seite 4015–4028, 1991.

[9] G. Akemann. *Loop equations for multi-cut matrix models.* Universität Hannover ITP-UH-11-95, hep-th/9503185, DESY 95-066, 1995.

[10] J. Teschner. *On quantization of Liouville theory and related conformal field theories.* Doktorarbeit, Universität Hamburg, 1995.

[11] P. di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin. 2D gravity and random matrices. *Phys.Rep.254*, Seite 1–133, 1995.

[12] J. Jurkiewicz. Regularisation of one-matrix models. *Phys.Lett.B245*, Seite 178–184, 1990.

[13] M. L. Mehta. *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels.* Academic Press, New York/London, 1967.

[14] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber. Planar diagrams. *Commun.Math.Phys.59*, Seite 35–51, 1978.

[15] O. Lechtenfeld. Eigenvalue tunneling in matrix models. *Int.J.Mod. Phys.A7*, Seite 2335–2354, 1992.

[16] G. Bhanot, G. Mandal, and O. Narayan. Phase transitions in one matrix models. *Phys.Lett.B251*, Seite 388–392, 1990.

[17] O. Lechtenfeld, R. Ray, and A. Ray. Phase diagram and orthogonal polynomials in multiple-well matrix models. *Int.J.Mod.Phys.A6*, Seite 4491–4515, 1991.

[18] K. Demeterfi, N. Deo, S. Jain, and C. Tan. Multiband structure and critical behavior of matrix models. *Phys.Rev.D42*, Seite 4105–4122, 1990.

[19] G. Cicuta, L. Molinari, and E. Montaldi. Multicritical points in matrix models. *J.Phys.A:Math.Gen.23*, Seite L421–L425, 1990.

[20] D. Bessis, C. Itzykson, and J. B. Zuber. Quantum field theory techniques in graphical enumeration. *Adv.Appl.Math.1*, Seite 109–157, 1980.

[21] E. Brézin, E. Marinari, and G. Parisi. A non-perturbative ambiguity free solution of a string model. *Phys.Lett.B242*, Seite 35–38, 1990.

[22] J. Jurkiewicz. Chaotic behavior in one-matrix models. *Phys.Lett.B261*, Seite 260–268, 1991.

[23] D. Sénéchal. Chaos in the hermitian one-matrix model. *Int.J.Mod.Phys.A7*, Seite 1491–1506, 1992.

[24] R. C. Brower, N. Deo, S. Jain, and C. Tan. Symmetry breaking in the double-well hermitian matrix model. *Nucl.Phys.B405*, Seite 166–190, 1993.

[25] C. Nappi. Painlevé-II and odd polynomials. *Mod.Phys.Lett.A5*, Seite 2773–2776, 1990.

Literatur

[26] G. Cicuta, L. Molinari, and E. Montaldi. Large N phase transitions in low dimensions. *Mod.Phys.Lett.A1*, Seite 125–129, 1986.

[27] W. H. Press et al. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[28] O. Lechtenfeld. Semiclasssical approach to finite-N matrix models. *Int.J.Mod.-Phys.A7*, Seite 7097–7118, 1992.

[29] P. Adamietz. *in Vorbereitung*.

[30] J. Ambjørn, C. F. Kristjansen, and Yu. Makeenko. Generalized Penner models to all genera. *Phys.Rev.D50*, Seite 5193–5203, 1994.

[31] J. Ambjørn, C. F. Kristjansen, and Yu. Makeenko. Higher genus correlators for the complex matrix model. *Mod.Phys.Lett.A7*, Seite 3187–3201, 1992.

[32] S. Dalley, C. Johnson, and T. Morris. Multicritical complex matrix models and non-perturbative two-dimensional quantum gravity. *Nucl.Phys.B368*, Seite 625–654, 1992.

[33] T. R. Morris. Chequered surfaces and complex matrices. *Nucl.Phys.B356*, Seite 703–728, 1991.

[34] P. F. Byrd and M. D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engeneers and Scientists*. Springer Verlag, New York, 1971.