Skalare Deformation schwarzer Löcher

Olaf Bechmann

Diplomarbeit
am Institut für theoretische Physik
der Universität Hannover

19. Dezember 1994

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden die gekoppelten EINSTEIN-KLEIN-GORDON-Gleichungen für ein isotropes und stationäres Schwarzes Loch mit einem Skalarfeld hergeleitet und gelöst. Als Randbedingung sollte die Metrik asymptotisch flach sein.

Zuerst wurde eine Lösung ohne Potential gefunden, die aber konform äquivalent zu der von BUCHDAHL angegebenen Lösung ist.

Danach wurde eine Lösung mit Potential gefunden, die keine Singularitäten im Außenbereich aufweist. Diese Lösung hat drei Parameter, von denen einer durch das Schwarze Loch definiert wird und zwei durch das Skalarfeld gegeben sind. Sie umgeht das No-Hair-Theorem, da das Skalarpotential zwei Minima aufweist.

Die Lösung wurde approximiert und der Energie-Impulstensor berechnet. Außerdem wurde die Lösung durch asymptotische Reihen verifiziert. Dabei stellte sich heraus, daß das Skalarpotential am asymptotisch angenommenen Minimum nicht analytisch ist.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die allgemeine Relativitätstheorie

1.1 Motivation

Nach NEWTON führt die Beschreibung der Gravitation auf die POISSON-Gleichung:

$$\Delta\phi = -4\pi G\varrho. \tag{1.1}$$

Wobei ϕ das Gravitationspotential, $G = 6.673 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ die Gravitationskonstante und ϱ die das Gravitationsfeld erzeugende Materiedichte ist. Gleichung (1.1) ist aber nur unter GALILEO-Transformationen forminvariant und führte nach Aufstellen der speziellen Relativitätstheorie zu der Forderung, diese Gleichung durch eine LORENTZ-invariante Beziehung zu ersetzen. Dies gelang EINSTEIN mit der allgemeinen Relativitätstheorie.

1.2 Das Konzept

In der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) werden die von NEWTON eingeführten Größen, träge und schwere Masse, als Konsequenz derselben Ursache gesehen. Man beschreibt Bewegungen von Teilchen in einem Gravitationsfeld nicht mehr durch Einführen von Zwangskräften in den Bewegungsgleichungen, sondern durch die freie Bewegung durch einen von der Masse gekrümmten Raum. Dieses Äquivalenzprinzip wurde von ALBERT EINSTEIN 1915 eingeführt. Demnach bewegen sich Teilchen in einem Gravitationsfeld auf geodätischen Linien, die durch

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \tag{1.2}$$

gegeben sind. Dabei wird der mathematische Apparat der Differentialgeometrie benutzt, der Berechnungen auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten ermöglicht. Der Ausgangspunkt hierfür ist die Metrik $g_{\mu\nu}$, die dem Gravitationspotential entspricht. Aus der Metrik lassen sich nun alle wichtigen Größen, wie die CHRISTOFFEL-Symbole, der RIEMANN- und RICCI-Tensor, berechnen.

Die CHRISTOFFEL-Symbole $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ sind definiert als

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{1.3}$$

und treten bei der kovarianten Differentiation auf, um Ableitungen Transformationsunabhängig zu machen. Der RIEMANN-Tensor $R^\lambda_{\mu\eta\nu}$ ist definiert als

$$R^{lambda}_{\mu\eta\nu} = -\partial_\nu\Gamma^\lambda{}_{\mu\eta} + \partial_\eta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\eta}\Gamma^\lambda{}_{\kappa\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\eta}\Gamma^\lambda{}_{\kappa\nu}, \tag{1.4}$$

und neben Kontraktionen der einzige Tensor, der aus den ersten und zweiten Ableitungen der Metrik aufgebaut und in den zweiten Ableitungen linear ist. Er ist daher ein Maß für die Krümmung. Der RICCI-Tensor $R_{\mu\nu} := R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ ist eine Kontraktion des RIEMANN-Tensors, dessen Spur die skalare Krümmung ist.

Das Variationsprinzip mit der Wirkung $S = \int d^4x\sqrt{g}R^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ führt dann auf die EINSTEIN-Gleichung:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}R_{\lambda\sigma} = -T_{\mu\nu}. \tag{1.5}$$

$G_{\mu\nu}$ ist dabei der EINSTEIN-Tensor und $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor. Außerhalb der Massenverteilung, also $T_{\mu\nu} = 0$, führt (1.5) für kugelsymmetrische Massenverteilungen auf die SCHWARZSCHILD-Lösung.

1.3 Der NEWTON'sche Grenzfall

Die Gleichung (1.1) läßt sich als Grenzfall der Geodätengleichung gewinnen. Nimmt man an, daß sich ein Teilchen langsam durch ein stationäres Feld bewegt, so kann man $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ um die MINKOWSKI-Metrik entwickeln und alle räumlichen Ableitungen $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$ können gegenüber $\frac{dt}{d\tau}$ vernachlässigt werden. Aus (1.2) wird dann:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} &= -\Gamma^\mu{}_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 && (1.6)\\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\lambda}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. && (1.7)\end{aligned}$$

Für $\mu = 0$ folgt, daß $\frac{dt}{d\tau}$ konstant sein muß. Der räumliche Anteil lautet dann:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}. \tag{1.8}$$

Hieraus entsteht für Punktmassen die NEWTON'sche Bewegungsgleichung $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi$, falls

$$h_{00} = -2\phi + const = \frac{2GM}{c^2r} = \frac{2M}{r}. \tag{1.9}$$

(Im weiteren weden die Einheiten so gewählt, daß $G = c = 1$ ist). Hier wird klar ersichtlich, daß die Abweichungen der Metrik das Gravitationsfeld erzeugt.

1.4 Konsequenzen und Tests der Theorie

Eine allgemeine Relativitätstheorie gilt heute als die allgemein anerkannte Theorie der Gravitation. Mit ihr lassen sich viele kosmologische Phänomene befriedigend erklären. Zum Beispiel die kosmologische Rotverschiebung, Lichtbeugung am Gravitationsfeld der Sonne, und die Periheldrift des Merkurs.

Um für das „global positioning system“ GPS hohe Genauigkeiten zu erreichen, werden auch Korrekturen der allgemeinen Relativitätstheorie berücksichtigt. Damit ist diese Theorie trotz ihres Alters noch immer sehr aktuell.

Zusätzlich fordert die Theorie aber auch Schwarze Löcher, die so massiv sind, daß nichts von ihnen entkommen kann. Diese Objekte lassen sich nur durch drei Parameter, Masse, Ladung und Drehimpuls charakterisieren. Die erste Beschreibung eines Schwarzen Loches gelang 1916 K. SCHWARZSCHILD. Die allgemeine Lösung für ein Schwarzes Loch mit Ladung und Drehimpuls wurde von KERR und NEWMAN 1963 - 1965 angegeben:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta - a^2\sin^2\vartheta}{\Sigma}dt^2 - \frac{2a\sin^2\vartheta(r^2+a^2-\Delta)}{\Sigma}dt\,d\varphi \\ &\quad + \frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\vartheta}{\Sigma}\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 && (1.10)\\ A_\mu &= -\frac{er}{\Sigma}\left[(dt)_\mu - a\sin^2\vartheta(d\varphi)_\mu\right] && (1.11)\\ \text{mit } a &= \frac{J}{M} && (1.12)\\ \Sigma &= r^2 + a^2\cos^2\vartheta && (1.13)\\ \text{und } \Delta &= r^2 - r_S r + a^2 + e^2 && (1.14)\end{aligned}$$

Für $J = 0$ erhält man eine Lösung ohne Drehimpuls, die bereits 1916 und 1918 von REISSNER und NORDSTROM unabhängig voneinander gefunden wurde. Ist zusätzlich $e = 0$, so ergibt sich die SCHWARZSCHILD-Lösung.

Da die SCHWARZSCHILD-Lösung nur im massefreien Raum gültig ist, kann man ein Schwarzes Loch nur dann beobachten, wenn der Radius der erzeugenden Masse kleiner als der SCHWARZSCHILD-Radius ist. Dies tritt aber nur ein, wenn die Masse entsprechend groß ist. Ein Schwarzes Loch sollte dann entstehen, wenn ein Stern mit mindestens $2 - 3\frac{1}{2}$ Sonnenmassen seinen Brennstoff verbraucht hat und kollabiert. Bisher ist die Existenz von Schwarzen Löchern noch nicht zweifelsfrei bewiesen, aber es gibt Hinweise, daß in den Doppelsternsystemen Cygnus X 1, LMC X 3 und A06200-00 ein Partner ein Schwarzes Loch sein sollte. Auch lassen sich die hohen, beobachteten Rotationsgeschwindigkeiten von Galaxien und einigen Nebeln befriedigend nur mit der Existenz von Schwarzen Löchern erklären.

Dabei ist ein Schwarzes Loch nicht unbedingt stabil. Aufgrund des Tunneleffektes gibt es eine Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen aus dem Schwarzen Loch ausbrechen kann. Mit der Zeit geht dadurch Masse verloren und das Schwarze Loch dehnt sich über den SCHWARZSCHILD-Radius aus. Dieses Verdampfen nimmt immer weiter zu, bis das Schwarze Loch dann explodiert. Bei einem „normalen“ Schwarzen Loch von drei Sonnenmassen sollte dies jedoch 10^{64} Jahre dauern.

Kapitel 2

Herleitung der Bewegungsgleichungen

In diesem Kapitel sollen die Bewegungsgleichungen für ein Skalarfeld mit Selbstwechselwirkung hergeleitet werden. Zur Vereinfachung wird Kugelsymmetrie vorausgesetzt und gefordert, daß das Problem statisch ist.

Zuerst wird die Metrik aufgrund dieser Vereinfachungen und unter Ausnutzung von Koordinatentransformationen auf eine entsprechende Form gebracht. Dann werden die Bewegungsgleichungen allgemein hergeleitet auf diese Metrik spezialisiert.

2.1 Reduktion der Metrik

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen folgt im wesentlichen [2], benutzt aber eine andere Vorzeichenkonvention.

Aufgrund der gefordeten Symmetrie und Stationarität kann man die Metrik, die 10 unabhängige Funktionen $g_{\mu\nu}$ enthält, vereinfachen. Deshalb darf das Wegelement ds^2 nur von d$\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}$ über die rotationsinvarianten Größen $(\mathrm{d}\mathbf{x})^2$, $\mathbf{x}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}^2$ abhängen:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + 2B(r)dt\mathbf{x}d\mathbf{x} + C(r)(\mathbf{x}d\mathbf{x})^2 + D(r)(d\mathbf{x})^2. \tag{2.1}$$

Diese Metrik erlaubt noch eingeschränkte Koordinatentransformationen. Damit und mit geeigneten Eichbedingungen lassen sich die Zahl der metrischen Funktionen von vier auf zwei reduzieren. Zweckmäßigerweise benutzt man für die Beschreibung Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), && (2.2)\\ y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), && (2.3)\\ z &= r\cos(\vartheta). && (2.4)\end{aligned}$$

Das Wegelement nimmt dann die Form

$$\begin{aligned} ds^2 &= -A(r)dt^2 + 2B(r)rdtdr + C(r)r^2dr^2 + \\ &\quad +D(r)(dr^2 + r^2d\vartheta^2 + r^2\sin^2(\vartheta)d\varphi^2) && (2.5)\\ &= -A(r)dt^2 + 2B(r)rdtdr + \\ &\quad +(C(r)r^2 + D(r))dr^2 + D(r)r^2d\Omega^2 && (2.6)\end{aligned}$$

an, wobei der winkelabhängige Teil mit $d\Omega^2$ abgekürzt wurde. Wählt man den Zeitnullpunkt ortsabhängig, kann man den Nichtdiagonalterm $2B(r)rdtdr$ eliminieren:

$$\tilde{t} = t + T_0(r) \;\rightarrow\; d\tilde{t} = dt + \frac{dT_0(r)}{dr}dr. \tag{2.7}$$

Setzt man noch $\frac{d}{dr}T_0 = -\frac{rB}{A}$, so folgt für das Wegelement:

$$ds^2 = -Ad\tilde{t}^2 + Edr^2 + D\, r^2 d\Omega^2 \tag{2.8}$$

$$\text{mit } E := \frac{r^2B^2}{A} + r^2C + D. \tag{2.9}$$

Außerdem kann man den Maßstab deformieren. Dadurch werden die drei Funktionen in der obigen Metrik auf zwei reduziert. Man transformiert die Variable r mit

$$\tilde{r}^2 = r^2U(r) \tag{2.10}$$

$$\to d\tilde{r}^2 = \frac{dr^2}{U}\left(1 + \frac{r}{2U}\frac{dU}{dr}\right)^{-2} \tag{2.11}$$

so, daß die Metrik auf eine gewünschte Form kommt. Es gibt drei Formen der Metrik, die sich als nützlich erwiesen haben:

$$\text{Standardform} \quad ds^2 = -e^\lambda\, dt^2 + e^\nu\, dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{2.12}$$

$$\text{Isotrope Form} \quad ds^2 = -H\, dt^2 + J(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \tag{2.13}$$

$$\text{konforme Form} \quad ds^2 = F(-dt^2 + dr^2 + \varrho^2 d\Omega^2), \tag{2.14}$$

$$\text{GHS Form} \quad ds^2 = -G\, dt^2 + \frac{1}{G}dr^2 + R^2 d\Omega^2. \tag{2.15}$$

Die letzte Form wurde von GARFINKLE, HOROWITZ und STROMINGER verwendet [3] und ist für die Untersuchung am besten eignet. Die Komponenten des metrischen Tensors lauten in den gewählten Kugelkoordinaten:

$$g_{tt} = -G, \tag{2.16}$$

$$g_{rr} = \frac{1}{G}, \tag{2.17}$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = R^2, \tag{2.18}$$

$$g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2(\vartheta). \tag{2.19}$$

Außerdem gilt, falls $g_{\mu\nu}$ invertierbar ist:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}, \tag{2.20}$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \tag{2.21}$$

da die Metrik diagonal und symmetrisch ist.

2.2 Berechnung der CHRISTOFFEL-Symbole

Die CHRISTOFFEL-Symbole lassen sich aus der Metrik berechnen:

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \tag{2.22}$$

Hieraus erkennt man, daß $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ symmetrisch bezüglich μ und ν ist. Mit der Metrik (2.15) sind die einzigen nicht verschwindenden CHRISTOFFEL-Symbole:

$$\Gamma^r{}_{rr} = -\frac{G'}{2G}, \tag{2.23}$$

$$\Gamma^r{}_{\vartheta\vartheta} = -GRR', \tag{2.24}$$

$$\Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -GRR'\sin(\vartheta), \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{r}{}_{tt} &= \frac{1}{2}GG', && (2.26)\\
\Gamma^{\vartheta}{}_{\varphi\varphi} &= -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta), && (2.27)\\
\Gamma^{\vartheta}{}_{\vartheta r} &= \Gamma^{\vartheta}{}_{r\vartheta} = \frac{R'}{R}, && (2.28)\\
\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi r} &= \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} = \frac{R'}{R}, && (2.29)\\
\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\vartheta} &= \Gamma^{\varphi}{}_{\vartheta\varphi} = \cot(\vartheta), && (2.30)\\
\Gamma^{t}{}_{tr} &= \Gamma^{t}{}_{rt} = \frac{G'}{2G}. && (2.31)
\end{aligned}$$

Außerdem sind folgende Kontraktionen nützlich:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda r} &= 2\frac{R'}{R}, && (2.32)\\
\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta} &= \cot(\vartheta), && (2.33)\\
\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\varphi} &= 0, && (2.34)\\
\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda t} &= 0, && (2.35)\\
\Gamma^{\eta}{}_{\lambda r}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta r} &= 2\left(\frac{G'^2}{4G^2}+\frac{R'^2}{R^2}\right), && (2.36)\\
\Gamma^{\eta}{}_{\lambda\vartheta}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\vartheta} &= -2GR'^2+\cot^2(\vartheta), && (2.37)\\
\Gamma^{\eta}{}_{\lambda\varphi}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\varphi} &= -2GR'^2\sin^2(\vartheta)-2\cos(\vartheta), && (2.38)\\
\Gamma^{\eta}{}_{\lambda t}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta t} &= \frac{G'^2}{2}. && (2.39)
\end{aligned}$$

2.3 Berechnung der Krümmung

Aus den CHRISTOFFEL-Symbolen kann man mit

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\nu\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu} + \partial_\lambda\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\nu} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\eta} \tag{2.40}$$

die Komponenten des RICCI-Tensors und daraus die skalare Krümmung $K = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ berechnen:

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= -\frac{G''}{2G}-\frac{G'R'}{GR}-\frac{2R''}{R}, && (2.41)\\
R_{\vartheta\vartheta} &= 1-GRR''-GR'^2-G'RR', && (2.42)\\
R_{\varphi\varphi} &= \sin^2(\vartheta)(1-GRR''-GR'^2-G'RR'), && (2.43)\\
R_{tt} &= \frac{GG''}{2}+GG'\frac{R'}{R}. && (2.44)
\end{aligned}$$

Der Krümmungsskalar wird hier abweichend von der allgemein üblichen Konvention K genannt, um Verwechselungen mit der häufig verwendeten Funktion R zu vermeiden.

$$K = \frac{2}{R^2} - G'' - \frac{4G'R'}{R} - \frac{2GR'^2}{R^2} - \frac{4GR''}{R}. \tag{2.45}$$

2.4 Die Wirkung

Die EINSTEIN-HILBERT-Wirkung $S = \int dx^4\sqrt{g}K$ wird um die Wirkung eines minimal gekoppelten Skalarfeldes mit einer Selbstwechselwirkung erweitert. Dabei ist g ohne Indices die negative Determinante von $g_\mu\nu$.

$$S = \int dx^4\sqrt{g}[K + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)]. \tag{2.46}$$

Das Erscheinungsbild dieser Wirkung läßt sich durch obige Symmetrie- und Eichbedingungen auf verschiedene Formen bringen. Ausgehend von der allgemeinen Form (2.8) ergeben sich folgende Wirkungen:

- Mit $E \to \frac{1}{G}$ und $A \to G$ sowie $r^2 D \to e^{-2\sigma}$ kann man nach partieller Integration die Form

$$S_1 = \int dr\; e^{-2\sigma}[-G'' + 2G\sigma'^2 + 2e^{2\sigma} + \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi)] \tag{2.47}$$

gewinnen. Der Term $2e^{2\sigma}$ in der Klammer wird mit dem Vorfaktor konstant und ist für die spätere Variation unerheblich.

- Mit $E = A = e^{2\varrho}$ und $r^2 D \to e^{-2\sigma}$ erhält man nach partieller Integration

$$S_2 = \int dr\; e^{-2\sigma}[-2\varrho'' + 2\sigma'^2 + 2e^{2\varrho+2\sigma} + \frac{1}{2}\phi'^2 + e^{2\varrho}V(\phi)]. \tag{2.48}$$

WEYL-Verschiebung $\varrho \to \varrho + \frac{\sigma}{2}$ eleminiert den σ'^2-Term

$$S_3 = \int dr\; e^{-2\sigma}[-2\varrho'' + 2e^{2\varrho+3\sigma} + \frac{1}{2}\phi'^2 + e^{2\varrho+\sigma}V(\phi)], \tag{2.49}$$

und $\varrho \to \varrho + \sigma$ dreht das Vorzeichen gänzlich um

$$S_4 = \int dr\; e^{-2\sigma}[-2\varrho'' - 2\sigma'^2 + 2e^{2\varrho+4\sigma} + \frac{1}{2}\phi'^2 + e^{2\varrho+2\sigma}V(\phi)]. \tag{2.50}$$

- Aus $E \to e^{\nu}$, $A \to e^{\lambda}$ und $D \to 1$ erhält man eine andere, häufig benutzte Form

$$S_5 = \int dr\; e^{\frac{\lambda}{2}}[e^{-\frac{\nu}{2}}(-2r\nu' - 2 + \frac{1}{2}r^2\phi'^2) + e^{\frac{\nu}{2}}(2 + r^2 V(\phi))]. \tag{2.51}$$

2.5 Variation der Wirkung

Für die Variation von S nach $g^{\mu\nu}$ gelten folgende Formeln:

Die Variation des RICCI-Tensors ergibt nach der Definition (2.40):

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= -\partial_\nu \delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \partial_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - (\delta\Gamma^\eta{}_{\lambda\mu})\Gamma^\lambda{}_{\eta\nu} - (\delta\Gamma^\lambda{}_{\eta\nu})\Gamma^\eta{}_{\lambda\mu} + \\ &\quad +(\delta\Gamma^\eta{}_{\mu\nu})\Gamma^\lambda{}_{\lambda\eta} + (\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\eta})\Gamma^\eta{}_{\mu\nu} && (2.52) \\ &= (\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu})_{;\nu}. && (2.53) \end{aligned}$$

$\delta R_{\mu\nu}$ läßt sich also als Differenz zweier Divergenzen schreiben. Nach dem GAUß'schen Satz kann man das Integral in der Wirkung als Oberflächenintegral darstellen.

$$\begin{aligned} \sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{g}g^{\mu\nu}((\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu})_{;\nu}) && (2.54) \\ &= \sqrt{g}((g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})_{;\lambda} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu})_{;\nu}) && (2.55) \\ &= \partial_\lambda(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}). && (2.56) \end{aligned}$$

Die Randwerte werden aber nicht variiert, so daß dieser Term keinen Beitrag liefert.

Die Variation von $\det g_{\mu\nu}$ ergibt

$$\delta g = g\; g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g\; g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.57}$$

denn die Indices von $\delta g_{\mu\nu}$ lassen sich nicht einfach mit $g^{\mu\nu}$ hochziehen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} &= g^{\mu\sigma}g_{\sigma\rho}g^{\rho\nu}\delta(g_{\mu\lambda}g^{\lambda\eta}g_{\eta\nu}) && (2.58) \\ &= g^{\mu\sigma}g_{\sigma\rho}g^{\rho\nu}[\delta g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda}g_{\eta\nu}\delta g^{\lambda\eta}) && (2.59) \\ &= 2g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} && (2.60) \\ \Rightarrow -g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. && (2.61) \end{aligned}$$

Daher das Vorzeichen in (2.57).

Die Variation von (2.46) nach der Metrik ergibt letztlich:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x[-\frac{1}{2\sqrt{g}}g\ g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(K+\frac{1}{2}\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi+V(\phi))+ \\
&\quad +\sqrt{g}\delta g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)] \qquad (2.62)\\
&= \int d^4x\sqrt{g}[R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi- \\
&\quad -\frac{1}{2}[K+\frac{1}{2}\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi+V(\phi)]g_{\mu\nu}]\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.63)
\end{aligned}$$

und nach dem Feld ϕ :

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{g}\delta\phi\left[\frac{\partial V}{\partial\phi}-2\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)_{;\mu}\right]. \qquad (2.64)$$

Hieraus lassen sich nun die Bewegungsgleichungen bestimmen.

2.6 Die Bewegungsgleichungen

Aus (2.63) und (2.64) folgen die gekoppelten EINSTEIN-KLEIN-GORDON-Gleichungen analog zu [4]:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}K &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi+V)g_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \qquad (2.65)\\
&= -T_{\mu\nu}, \qquad (2.66)\\
(\partial^\mu\phi)_{;\mu}-\frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0. \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

Gleichung (2.65) mit $g^{\mu\nu}$ kontrahiert ergibt

$$K+\frac{1}{2}\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi+2V=0. \qquad (2.68)$$

Multipliziert man diese Beziehung wieder mit $g_{\mu\nu}$ und bildet mit den EINSTEIN-KLEIN-GORDON-Gleichungen geeignete Linearkombinationen, ergeben sich:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+\frac{1}{2}V\ g_{\mu\nu} &= 0, \qquad (2.69)\\
R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{3}{4}(K+\frac{1}{2}\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi)g_{\mu\nu} &= 0. \qquad (2.70)
\end{aligned}$$

Da die Metrik und der RICCI-Tensor nach Voraussetzung diagonal sind, folgt für $\mu\neq\nu$:

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi=0. \qquad (2.71)$$

ϕ kann nur von einer Variablen gleichzeitig abhängen. Dies ist konsistent mit der Annahme, daß es sich um ein isotropes und statisches Problem handelt.

Setzt man nun die Komponenten der Metrik ein, bekommt man die Gleichungen:

- für das Skalarfeld:
$$\frac{\partial V}{\partial\phi}-\frac{1}{R^2}\partial_r\left(R^2G\partial_r\phi\right)=0, \qquad (2.72)$$
- $\mu=\nu=r$:
$$-\frac{G''}{2G}-\frac{G'R'}{GR}-\frac{2R''}{R}+\frac{1}{2}(\partial_r\phi)^2+\frac{V}{2G}=0, \qquad (2.73)$$

- $\mu = \nu = t$:

$$\frac{GG''}{2} + GG'\frac{R'}{R} - \frac{1}{2}VG = 0, \tag{2.74}$$

- $\mu = \nu = \vartheta$:

$$1 - GRR'' - GR'^2 - G'RR' + \frac{1}{2}VR^2 = 0, \tag{2.75}$$

- Die Gleichung für $\mu = \nu = \varphi$ ist (2.75) multipliziert mit $\sin^2\vartheta$.

Aus diesem System kann man drei unabhängige Gleichungen gewinnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_r\phi)^2 - \frac{2R''}{R} &= 0, & (2.76)\\ G'' + 2G'\frac{R'}{R} - V &= 0, & (2.77)\\ \frac{2}{R^2} + G'' - 2G\left(\frac{R'^2}{R^2} + \frac{R''}{R}\right) &= 0. & (2.78) \end{aligned}$$

(2.72) folgt hieraus durch mit $V' = \phi'\frac{\partial V}{\partial \phi}$

$$\partial_r\phi \cdot (2.72) = -(\frac{2}{R^2}\partial_r(GR^2) + G\partial_r)(2.76) - \partial_r(2.77) + (\frac{2R'}{R} + \partial_r)(2.78). \tag{2.79}$$

(Natürlich sind jeweils nur die linken Seiten der Gleichungen einzusetzen). Häufig ist es nützlich,

$$\sigma(r) = -\ln(R(r)) \tag{2.80}$$

einzuführen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_r\phi)^2 - 2(\sigma'^2 - \sigma'') &= 0, & (2.81)\\ G'' - 2G'\sigma' - V &= 0, & (2.82)\\ 2e^{2\sigma} + G'' - G\left(2\sigma'^2 - \sigma''\right) &= 0. & (2.83) \end{aligned}$$

Dieses sind die Bewegungsgleichungen für das gegebene Problem. Da r nicht explizit in diesen Gleichungen auftritt, muß eine Lösung immer eine Translationsfreiheit bezüglich r besitzen. Außerdem kommt ϕ nur in der Form $(\partial_r\phi)^2$ vor. Daher kann man ϕ um eine beliebige Konstante ϕ_∞ verschieben, ohne daß es die anderen Funktionen beeinflussen würde. Ebenso hat man bezüglich ϕ eine Phasenfreiheit. Da nur reelle Lösungen untersucht werden, reduziert sich dies auf die Wahl des Vorzeichens von ϕ.

2.7 Zwangsbedingungen

Um die Bewegungsgleichungen zu erlangen, kann man zwei Wege gehen:

- Erst allgemein die Bewegungsgleichungen herleiten und dann die Symmetrie und Eichfreiheit ausnutzen, oder

- die Eichfreiheit und Symmetrie bereits in der Wirkung ausnutzen und dann die Bewegungsgleichungen berechnen.

Im letzten Fall ist aber nicht sichergestellt, daß die Bewegungsgleichungen Lösungen des ursprünglichen Systems liefern. Um dies zu gewährleisten, müssen die Bewegungsgleichungen für die eleminierten Freiheitsgrade als Zwangsbedingungen erfüllt sein.

Zählt man die Freiheitsgrade des Problems, kommt man auf folgende Bilanz: Es gibt 11 freie Funktionen, 10 Komponenten der Metrik und das Feld ϕ. Von diesen werden sechs durch die Kugelsymmetrie festgelegt. Die Eichung legt weitere zwei Funktionen fest. Zuletzt behält man nur noch drei freie Funktionen G, σ und ϕ bzw. G, R und ϕ übrig. Analog bekommt man drei Bewegungsgleichungen und acht Zwangsbedingungen.

Sechs der acht Zwangsbedingungen sind einfach $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$ für $\mu \neq \nu$ und fordern, daß die Funktionen jeweils nur von einer Variablen abhängen. Die siebte Zwangsbedingung ergibt, daß $\frac{\delta S}{\delta g^{\varphi\varphi}} \propto \frac{\delta S}{\delta g^{\vartheta\vartheta}}$. Die achte Zwangsbedingung ist nicht trivial. Versucht man nämlich, (2.83) aus (2.81), (2.82) und der Bewegungsgleichung für das Skalarfeld (2.72) herzuleiten, findet man lediglich:

$$\begin{aligned}
G'\phi'^2 + G\phi''\phi' - 2G\sigma'\phi'^2 - V' &= 0 && (2.84)\\
\Rightarrow -G''' + 2\sigma' G'' + G'(4\sigma'^2 - 2\sigma'') + & \\
+G(12\sigma'\sigma'' - 8\sigma'^3 - 2\sigma''') &= 0 && (2.85)\\
\Leftrightarrow e^{2\sigma}\partial_r\left(e^{-2\sigma}[G'' - 2G(2\sigma'^2 - \sigma'')]\right) &= 0 && (2.86)\\
\Leftrightarrow G'' - 2G(2\sigma'^2 - \sigma'') &= const\ e^{2\sigma} && (2.87)
\end{aligned}$$

Die letzte Zwangsbedingung legt diese Integrationskonstante auf -2 fest. In (2.78) wird die Bedeutung dieser Konstanten klar, denn bis auf den Term $\frac{2}{R^2}$ sind alle Terme gegen eine Ersetzung $r \to \lambda r$ invariant. Dies entspricht der Wahl der Maßeinheit für r.

Kapitel 3

Lösung für V=0

3.1 Die Schwarzschild-Lösung

3.1.1 Lösen der Bewegungsgleichung

Schaltet man das Skalarfeld aus, indem man V Null und $\phi = const$ setzt, folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{2R''}{R} &= 0 && (3.1)\\ G'' + 2G'\frac{R'}{R} &= 0 && (3.2)\\ \frac{2}{R^2} + G'' - 2G\left(\frac{R'^2}{R^2} + \frac{R''}{R}\right) &= 0 && (3.3) \end{aligned}$$

Mit (3.1) ist $R'' = 0$ und somit

$$R = C_1(r - C_2) \tag{3.4}$$

in (3.3) eingesetzt ergibt sich für G

$$G = \frac{1}{C_1^2} + \frac{C_3}{r - C_2} + C_4(r - C_2)^2 \tag{3.5}$$

Gleichung (3.2) fordert dann:

$$C_4 = 0 \tag{3.6}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\begin{aligned} R &= C_1(r - C_2) && (3.7)\\ G &= \frac{1}{C_1^2} + \frac{C_3}{r - C_2} && (3.8) \end{aligned}$$

3.1.2 Erfüllen der Randbedingung

Die Metrik soll im Unendlichen flach sein. Die flache Metrik lautet in den gewählten Koordinaten:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3.9}$$

Daher sollen die Funktionen G und R die Grenzwerte haben:

$$\begin{aligned} G(r \to \infty) &= 1 && (3.10)\\ \text{und } R(r \to \infty) &= r && (3.11) \end{aligned}$$

Damit muß die Konstante $C_1 = 1$ sein. Wie bereits im vorigen Kapitel erwähnt, spiegelt sich in C_2 die Translationsfreiheit der Lösung wieder. Dies ist die Stelle, an der G singulär wird. Man kann diese Stelle o.B.d.A. auf Null setzen.

Bei $r = -C_3$ hat G eine Nullstelle. Diese liegt nach dem NEWTON'schen Grenzfall nach (1.9) bei $r_S = 2M$ und entspricht somit dem SCHWARZSCHILD-Radius. Die vollständige Lösung lautet:

$$R = r \tag{3.12}$$

$$G = 1 - \frac{r_S}{r} \tag{3.13}$$

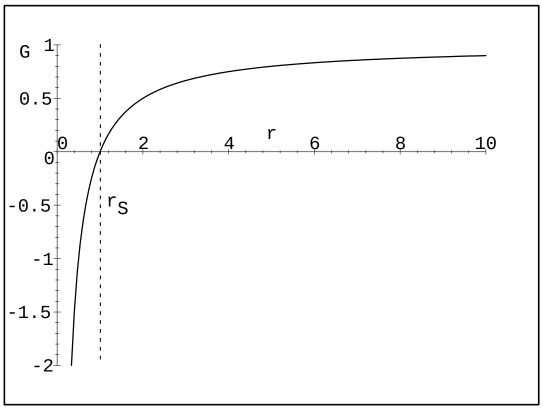

Abb. 1: Die Funktion der SCHWARZSCHILD-Metrik $G_S(r) = 1 - \frac{r_S}{r}$ mit $r_S = 1$

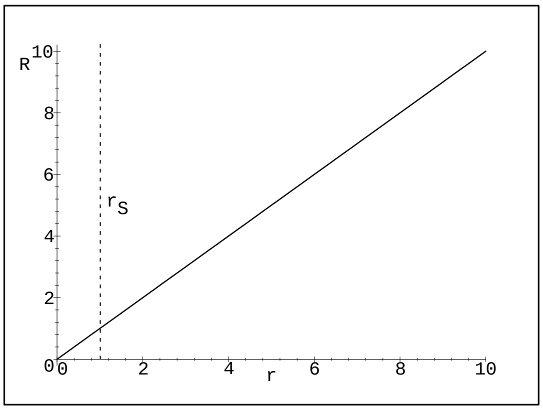

Abb. 2: Die Funktion der SCHWARZSCHILD-Metrik $R_S(r) = r$

3.1.3 Lösung mit konstantem Potential

Schaltet man das Feld ab ($\phi = const$) und behält ein konstantes Potential $V = V_0 = const.$, so erhält man aus Gleichung (3.2) nicht $C_4 = 0$, sondern $C_4 = \frac{V_0}{6}$. G erhält dann einen Term proportional zu r^2. Dies entspricht einer kosmologischen Konstanten Λ, also einer konstanten Hintergrundkrümmung. Man erkennt dies auch in der Wirkung (2.46), in der ein konstantes Potential direkt zur skalaren Krümmung addiert wird. Das Potential ist also nicht frei verschiebbar, sondern muß im Unendlichen gegen Null gehen, da der Raum sonst nicht asymptotisch flach ist.

An der allgemeinen SCHWARZSCHILD-Lösung ((3.4), (3.5)) kann man bereits die Bedeutung der Integrationskonstanten erkennen:

- C_1 bestimmt die Steigung von R und wird durch die Randbedingung definiert,
- C_2 wird durch die Wahl des Koordinatenursprunges bestimmt,
- C_3 definiert die Nullstelle von G und ist durch die Masse des Schwarzen Loches gegeben,
- C_4 ist eine kosmologische Konstante und durch die Randbedingungen festgelegt.

C_3 ist der einzige physikalische Parameter.

3.2 Das No-Hair-Theorem

In diesem Zusammenhang ist das no-hair-Theorem [1] interessant. Es erlaubt, Bedingungen für die Existenz von nicht trivialen Feldern aufzustellen.

Nimmt man an, daß die Metrik asymptotisch flach ist und $g_t t$ eine Nullstelle bei r_S hat, so folgt aus der Bewegungsgleichung für das Skalarfeld (2.72) mit $R = e^{-\sigma}$:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = [\partial_r(G\partial_r\phi) - 2\sigma' G\partial_r\phi] \tag{3.14}$$

$$= e^{2\sigma}\partial_r(Ge^{-2\sigma}\partial_r\phi) \tag{3.15}$$

$$\Rightarrow e^{-2\sigma}\frac{\partial V}{\partial\phi} = \partial_r(Ge^{-2\sigma}\partial_r\phi). \tag{3.16}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\phi - \phi_\infty$ und integriert über den Außenbereich, dann folgt:

$$\int_{r_S}^{\infty} e^{-2\sigma}\frac{\partial V}{\partial\phi}(\phi-\phi_\infty)dr = \int_{r_S}^{\infty}(\phi-\phi_\infty)\partial_r(Ge^{-2\sigma}\partial_r\phi)dr \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \text{ partielle Integration} \\ &= (\phi-\phi_\infty)Ge^{-2\sigma}\partial_r\phi|_{r_S}^{\infty} - \\ &-\int_{r_S}^{\infty} Ge^{-2\sigma}(\partial_r\phi)^2 dr. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Wobei ϕ_∞ zunächst eine beliebige Konstante ist. Der Randterm verschwindet, wenn folgende Punkte erfüllt sind:

- G(r) ist Null am SCHWARZSCHILD-Radius ($G(r_S) = 0$).
- ϕ ist regulär bei $r = r_S$.
- $(\partial_r\phi)^2$ konvergiert schneller gegen Null als $\frac{1}{r^3}$ für $r \to \infty$.

Ist dies der Fall, so gilt:

Der Integrand auf der rechten Seite von (3.18) ist im Außenbereich $[r_S, \infty)$ stets größer oder gleich Null. Ist nun $\frac{\partial V}{\partial\phi}(\phi-\phi_\infty)$ nicht negativ, so folgt, wegen des Minuszeichens, daß beide Integrale Null sein müssen. Dies kann nur dann der Fall sein, falls:

$$\partial_r\phi = 0 \Rightarrow \phi = const. \tag{3.19}$$

Im weiteren ist es sinnvoll, zwischen $V(\phi(r))$ als Funktion von r und $V(\phi)$ als Funktion von ϕ zu unterscheiden. Deshalb wird die Bezeichnung

$$U(r) := V(\phi(r)) \tag{3.20}$$

eingeführt.

Die Potentialbedingung

$$\frac{\partial V}{\partial\phi}(\phi-\phi_\infty) \geq 0 \tag{3.21}$$

besagt, daß die Steigung von $V(\phi)$ für $\phi > \phi_\infty$ größer oder gleich Null und für $\phi > \phi_\infty$ kleiner-gleich Null ist, und zwar für jedes ϕ. Dies bedeutet, daß $V(\phi)$ nur *ein* Minimum bei ϕ_∞ hat. Nun ist wegen (3.19) $\phi = const = \phi_\infty$. Damit ist auch $U(r)$ konstant und ϕ sitzt im einzigen Minimum von $V(\phi)$. Da keine Hintergrundkrümmung vorliegt, muß $V(\phi_\infty) = 0$ sein.

Da bis auf die Potentialbedingung (3.21) alle Bedingungen, die zum Verschwinden des Randtermes führen, recht plausibel sind, dürfte es eigentlich keine Lösung für das vorliegende Problem geben, in der man nicht mit dem no-hair-Theorem in Konflikt kommt. Hat V die Form $V = \alpha\phi^2 + \beta\phi^4$ mit $\alpha, \beta > 0$, ist (3.21) erfüllt und man erhält nur Lösungen, in denen $\phi(r)$ singulär bei r_S ist.

Nicht singuläre Lösungen erfordern also $V(\phi)$ mit mehr als einem Minimum.

3.3 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen

Man kann die Gleichungen (2.81)–(2.83) auch so umschreiben:

$$\boxed{(2.81)} \quad \to \quad 2e^{\sigma}(\sigma' e^{-\sigma})' + \frac{1}{2}\phi'^2 = 0, \tag{3.22}$$

$$\boxed{(2.82)} \quad \to \quad e^{2\sigma}(G'e^{-2\sigma})' - V = 0, \tag{3.23}$$

$$\boxed{(2.83)} \quad \to \quad e^{2\sigma}((G' + 2G\sigma')e^{-2\sigma})' + 2e^{2\sigma} = 0. \tag{3.24}$$

Nimmt man $\sigma(r)$ als gegeben an, kann (3.24) integriert werden:

$$[(G' + 2\sigma' G)e^{-2\sigma}]' = -2 \Rightarrow (G' + 2\sigma' G)e^{-2\sigma} = -2r + C_2. \tag{3.25}$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung in G. Die Lösung lautet:

$$G(r) = e^{-2\sigma}\left(C_1 - \int^r (2\tilde{r} + C_2)e^{4\sigma} d\tilde{r}\right). \tag{3.26}$$

Mit (3.26) kann man $G'(r)$ und $G''(r)$ als Funktion von $G(r)$ und $\sigma(r)$ angeben:

$$G'(r) = -2\sigma' G - (2r + C_2)e^{2\sigma} \tag{3.27}$$

$$G''(r) = G(4(\sigma')^2 - 2\sigma'') - 2e^{2\sigma} \tag{3.28}$$

Aus den übrigen Bewegungsgleichungen kann man nun auch $\phi(r)$ und $U(r)$ als Funktion von $\sigma(r)$ darstellen:

$$\phi(r) = C_3 + 2\int^r \sqrt{e^{\sigma}(e^{-\sigma})''}d\tilde{r}, \tag{3.29}$$

$$U(r) = G(8\sigma' - 2\sigma'') - 2e^{2\sigma} + 2\sigma' e^{2\sigma}(2r + C_2). \tag{3.30}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_3 können auch in die Integrationsgrenzen gezogen werden. Dabei wurden die Integrationsgrenzen so gewählt, daß die SCHWARZSCHILD-Lösung repliziert wird. Die Lösung lautet dann:

$$G(r) = e^{-2\sigma}\int_r^{\infty} (2\tilde{r} + C_2)e^{4\sigma} d\tilde{r}, \tag{3.31}$$

$$\phi(r) = 2\int_r^{\infty} \sqrt{e^{\sigma}(e^{-\sigma})''}d\tilde{r}. \tag{3.32}$$

Wird σ wieder durch R ersetzt, erhält man den Lösungssatz:

$$G(r) = R^2 \int_r^{\infty} (2\tilde{r} + C_2)\frac{1}{R^4} d\tilde{r}, \tag{3.33}$$

$$\phi(r) = 2\int_r^{\infty} \sqrt{\frac{R''}{R}}d\tilde{r}, \tag{3.34}$$

$$U(r) = \frac{1}{2}G\frac{(R^4)''}{R^4} + (2r + C_2)\left(\frac{1}{R^2}\right)' - \frac{2}{R^2}. \tag{3.35}$$

Die Nullstelle r_S von G ist durch C_2 gegeben und entspricht dem SCHWARZSCHILD-Radius:

$$C_2 = -\frac{\int_{r_S}^{\infty} \frac{2r}{R^4} dr}{\int_{r_S}^{\infty} \frac{1}{R^4} dr}, \tag{3.36}$$

(falls die Integrale existieren und der Nenner ungleich Null ist). Im SCHWARZSCHILD-Fall ist $r_S = -\frac{1}{3}C_2$. Daher ist es nützlich, alternativ zu C_2 die Größe

$$h := -\frac{1}{3}C_2 \tag{3.37}$$

einzuführen.

Man kann als Referenzstelle aber auch r_S statt unendlich benutzen:

$$\phi(r) = 2\int_r^{\infty} \sqrt{\frac{R''}{R}}d\tilde{r} \tag{3.38}$$

$$= 2\left(\int_{r_S}^{\infty} \sqrt{\frac{R''}{R}}d\tilde{r} - \int_{r_S}^{r} \sqrt{\frac{R''}{R}}d\tilde{r}\right) \tag{3.39}$$

$$= const - 2\int_{r_S}^{r} \sqrt{\frac{R''}{R}}d\tilde{r} \tag{3.40}$$

$$\sim 2\int_{r_S}^{r} \sqrt{\frac{R''}{R}}d\tilde{r}. \tag{3.41}$$

Da das Vorzeichen von $\phi(r)$ und additive Konstanten frei sind, ist die letzte Umformung korrekt. Analog gilt für G(r):

$$\begin{aligned}
G(r) &= R^2 \int_r^\infty (2\tilde{r} + C_2)\frac{1}{R^4} d\tilde{r} && (3.42)\\
&= R^2 \left(\int_{r_S}^\infty (2\tilde{r} + C_2)\frac{1}{R^4} d\tilde{r} - \int_{r_S}^r (2\tilde{r} + C_2)\frac{1}{R^4} d\tilde{r} \right) && (3.43)\\
&= R^2 \int_{r_S}^\infty (2\tilde{r} + C_2)\frac{1}{R^4} d\tilde{r} - R^2 \int_{r_S}^r (2\tilde{r} + C_2)\frac{1}{R^4} d\tilde{r} && (3.44)\\
&= -R^2 \int_{r_S}^r (2\tilde{r} + C_2)\frac{1}{R^4} d\tilde{r}, && (3.45)
\end{aligned}$$

weil das erste Integral in (3.44) $G(r_S) = 0$ ist.

Die Definition von h legt zwar fest, daß r_S bei entsprechend gutmütigem R eine Nullstelle von G ist. Es ist aber nicht sicher, ob dies die *einzige* Nullstelle in $[r_S, \infty)$ ist. In diesem Fall ist der Zusammenhang zwischen h und der letzten Nullstelle, dem eigentlichen SCHWARZSCHILD-Radius komplizierter.

Im allgemeinen hat $R(r)$ immer die Form

$$R(r) = r + R_0(r) \text{ mit } \lim_{r\to\infty} R_0(r) = 0 \qquad (3.46)$$

um die Randbedingung $R(\infty) = r$ zu erfüllen. Die Integrale konvergieren meistens, weil die entsprechenden Integranden mindestens $\propto \frac{1}{R^3}$ sind. Probleme gibt es, falls $R(r_S)$ singulär ist ($\rightarrow$ BUCHDAHL-Lösung) oder Nullstellen im Außenbereich auftreten. Beides ist unphysikalisch.

(Für $R(r) = r$ folgt aus (3.33)-(3.35) natürlich die SCHWARZSCHILD-Lösung.)

3.4 Lösungen mit Skalarfeld

3.4.1 Die BUCHDAHL-Lösung

Nach BUCHDAHL gibt es eine Lösung der Bewegungsgleichungen für $U(r) = 0$ der Form:

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= -\lambda \ln q, && (3.47)\\
R(r) &= r q^{\frac{1-\beta}{2}}, && (3.48)\\
G &= q^\beta && (3.49)\\
\text{mit } q &= \frac{r - r_S}{r} && (3.50)\\
\text{und } \beta^2 &= 1 + \lambda^2. && (3.51)
\end{aligned}$$

Aus dem allgemeinen Ansatz (3.33)–(3.35) folgt dies mit $C_2 = -r_S(1 + 2\beta)$. Nachfolgend sind die BUCHDAHL-Funktionen für $\lambda = 1$ gezeichnet.

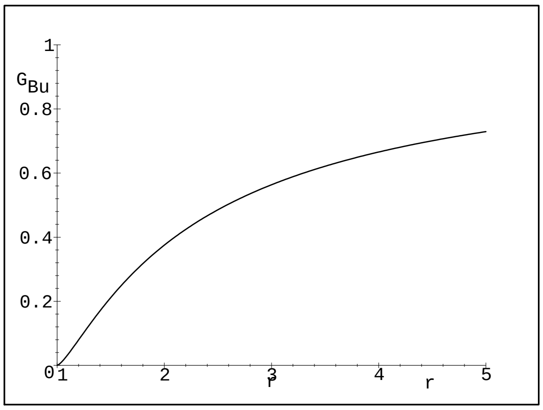

Abb. 3: Die Funktion $G(r)$ der BUCHDAHL-Lösung mit $\lambda = 1$

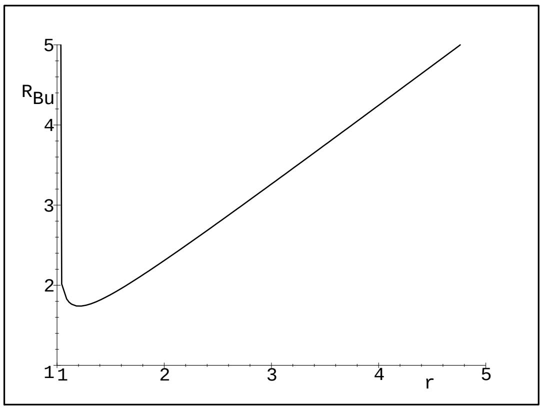

Abb. 4: Die Funktion $R(r)$ der BUCHDAHL-Lösung mit $\lambda = 1$

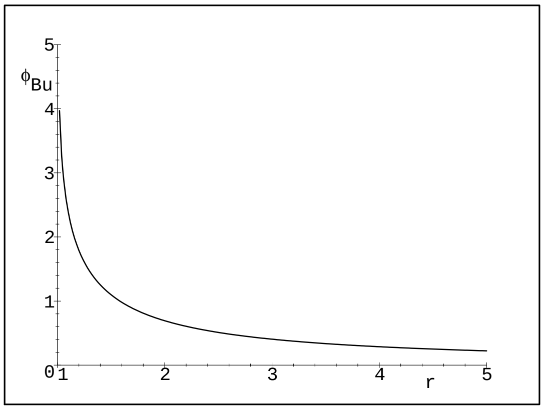

Abb. 5: Die Funktion $\phi(r)$ der BUCHDAHL-Lösung mit $\lambda = 1$

R und ϕ sind singulär bei r_S und im inneren des Schwarzen Loches werden die Funktionen imaginär.

3.4.2 Lösung mit $\phi = \frac{1}{r-r_S}$

Im diesem Abschnitt wird die Abkürzung

$$\varrho := r - r_S \tag{3.52}$$

benutzt. Alle Ableitungen beziehen sich auf ϱ.

Setzt man als Skalarfeld $\phi(r) = \frac{1}{r-r_S} = \frac{1}{\varrho}$ an, so erhält man aus (2.76):

$$R(r) = \varrho\left(D_1 e^{\frac{1}{2\varrho}} + D_2 e^{-\frac{1}{2\varrho}}\right). \tag{3.53}$$

Die Randbedingung $R(r) \to r$ erzwingt $D_1 + D_2 = 1$. $G(r)$ läßt sich daraus analytisch nicht allgemein bestimmen. Nimmt man $D_1 = 1$ an, so kann $G(r)$ berechnet werden und man erhält:

$$G(r) = e^{-\frac{1}{\varrho}} + D_3\varrho^2 e^{\frac{1}{\varrho}} + 2D_4(2 + 2\varrho + \varrho^2)e^{-\frac{1}{\varrho}}. \tag{3.54}$$

Um die Lösung für $D_1 = 0$ zu erhalten, muß man in (3.54) ϱ gegen $-\varrho$ austauschen. Die Randbedingungen fordern $D_3 = D_4 = 0$. Daher hat man als Lösungssatz:

$$\phi(r) = 1/\varrho, \tag{3.55}$$

$$R(r) = \varrho e^{\frac{l}{\varrho}}, \tag{3.56}$$

$$G(r) = e^{-\frac{2l}{\varrho}}. \tag{3.57}$$

Die Auftragungen ergeben:

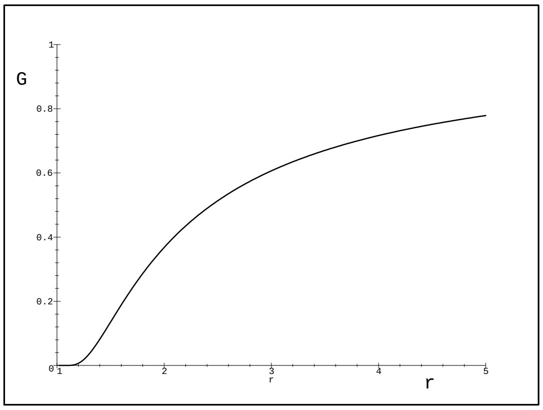

Abb. 6: Die Funktion $G(r)$ der obigen Lösung

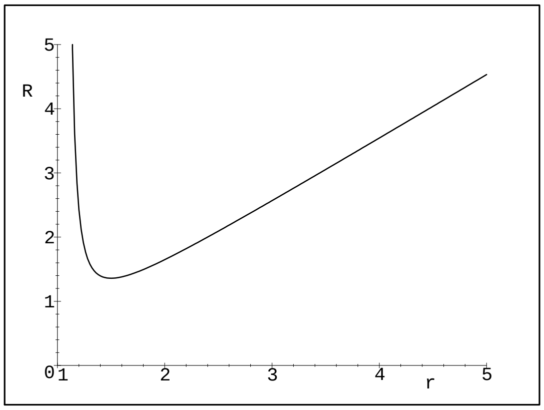

Abb. 7: Die Funktion $R(r)$ der obigen Lösung

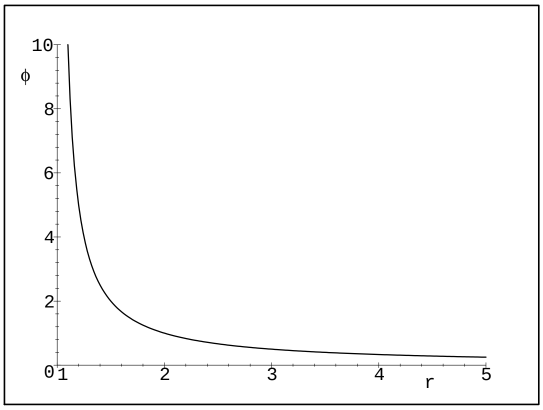

Abb. 8: Die Funktion $\phi(r)$ der obigen Lösung

Auch hier sind $R(r)$ und $\phi(r)$ singulär bei r_S aber überall reell. Dafür hat $G(r)$ bei r_S einen Sprung, denn

$$\lim_{r\to r_S+} G(r) = 0 \tag{3.58}$$

$$\lim_{r\to r_S-} G(r) = \infty \tag{3.59}$$

3.4.3 Äquivalenz beider Lösungen

Da beide Lösungen $V = 0$ haben, und im Außenbereich sehr ähnlich sind, liegt der Verdacht nahe, daß beide Lösungen äquivalent sind. Man kann aber nur zeigen, daß die Lösungen konform äquivalent sind, also daß gilt:

$$ds^2 = \Omega ds^2_{Bu}. \tag{3.60}$$

Die Variablen mit Schlange beziehen sich auf die Buchdahl-Lösung. Es gilt:

$$ds^2 = -Gdt^2 + \frac{1}{G}dr^2 + R^2 d\vartheta^2 + R^2\sin^2(\vartheta)d\varphi^2 \tag{3.61}$$

$$= \Omega\left[-\tilde{G}\left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^2 dt^2 + \frac{1}{\tilde{G}}\left(\frac{d\tilde{r}}{dr}\right)^2 dr^2 + \tilde{R}^2\left(\frac{d\tilde{\vartheta}}{d\vartheta}\right)^2 d\vartheta^2 + \right.$$

$$\left. + \tilde{R}^2\sin^2(\tilde{\vartheta})\left(\frac{d\tilde{\varphi}}{d\varphi}\right)^2 d\varphi^2\right]. \tag{3.62}$$

Hieraus kann man die entsprechende Koordinatentransformation ablesen:

$$
\begin{aligned}
\text{mit } x &= e^{-\frac{1}{\lambda(r-r_S)}} && (3.63)\\
\Omega &= \frac{1}{\tilde{r_S}^2}(x-1)^4\lambda^2(r-r_S)^4x^{\beta-2l\lambda-2}, && (3.64)\\
\tilde{r} &= \frac{\tilde{r}_S}{1-x}, && (3.65)\\
\tilde{t} &= \frac{\tilde{r_S}}{\lambda}\frac{1}{(r-r_S)^2}\frac{x^{\frac{1}{2}-\beta+2l\lambda}}{(1-x)^2}t, && (3.66)\\
\tilde{\vartheta} &= \frac{1}{\lambda(r-r_S)^3}\frac{x^{\frac{1}{2}+2l\lambda}}{x-1}\vartheta, && (3.67)\\
\tilde{\varphi} &= \frac{\sin\vartheta}{\sin\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+2l\lambda}}{\lambda(r-r_S)^3(x-1)}\vartheta\right)}\frac{x^{\frac{1}{2}+2l\lambda}}{\lambda(r-r_S)^3(x-1)}\varphi. && (3.68)
\end{aligned}
$$

Es ist nicht verwunderlich, daß beide Lösungen konform äquivalent sind, da es nach [9] eine ganze Familie äquivalenter Lösungen gibt.

Kapitel 4

Eine Lösung mit Potential

In diesem Kapitel wurden die Bewegungsgleichungen (2.76)–(2.78) mit Potential gelöst. Dabei wurde statt $V(\phi)$ der Ansatz für $\phi(r)$

$$\phi(r) = \phi_0 e^{-mr} \tag{4.1}$$

gemacht. Damit erfüllt $\phi(r)$ alle Voraussetzungen des no-hair-Theorems. Durch die Bewegungsgleichungen sind dann alle anderen Funktionen festgelegt. Das zugehörige Potential ergibt sich als $U(r)$ aus (2.77). Mit (4.1) kann dann $V(\phi)$ berechnet werden.

4.1 Lösen der Bewegungsgleichungen

Setzt man für das Skalarfeld (4.1) in (2.76) ein, so erhält man:

$$\frac{R''}{R} = \frac{\phi_0^2 m^2}{4} e^{-2mr}. \tag{4.2}$$

Diese Differentialgleichung ist keineswegs für jedes $\phi(r)$ ohne weiteres analytisch lösbar, denn substituiert man $y := \frac{R'}{R}$ folgt mit $\frac{R''}{R} = y' + y^2$ eine RICATTI-Gleichung. Mit ϕ nach (4.1) kann man (4.2) aber lösen. Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned}
R &= k_1 I_0\left(\frac{1}{2}\phi_0 e^{-mr}\right) + k_2 K_0\left(\frac{1}{2}\phi_0 e^{-mr}\right) && (4.3)\\
\text{mit } I_0(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} && (4.4)\\
\text{und } K_0(x) &:= -\left(\gamma + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) I_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}, && (4.5)
\end{aligned}$$

wobei I_0 und K_0 die modifizierten BESSEL-Funktionen erster und zweiter Art sind. γ ist die EULER'sche Konstante ($\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) - \ln n \approx 0.5772156649..$) . Setzt man die Randbedingung ein, so muß $k_2 = \frac{1}{m}$ sein. Außerdem ist es günstig, $k_1 = \left(\ln\left(\frac{\phi_0}{4}\right) + \gamma - mr_0\right)$ zu setzen, wobei r_0 eine beliebige Konstante ist. $R(r)$ ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}
R(r) &= \frac{1}{m}\left[\left(\ln\left(\frac{\phi_0}{4}\right) + \gamma - mr_0\right) I_0\left(\frac{\phi_0}{2}e^{-mr}\right) + \right.\\
&\quad \left. + K_0\left(\frac{\phi_0}{2}e^{-mr}\right)\right]. && (4.6)
\end{aligned}$$

Setzt man dies in (3.33) und (3.35) ein, lauten $G(r)$ und $U(r)$

$$G(r) = R^2 \int_r^{\infty} \frac{2r - 3h}{R^4} dr, \tag{4.7}$$

$$U(r) = \frac{1}{2}G\frac{(R^4)''}{R^4} + (2r-3h)\left(\frac{1}{R^2}\right)' - \frac{2}{R^2}. \tag{4.8}$$

Hier wurde wieder gemäß (3.37) $C_2 = -3h$ gesetzt, um den Parameter C_2 besser mit dem SCHWARZSCHILD-Radius vergleichen zu können. r_0 ergibt sich hier als Polstelle von $G(r)$ und im SCHWARZSCHILD-Fall wäre $h = r_S$.

Leider kann man G nicht analytisch bestimmen. Daher wurde eine Approximation berechnet. Der Integrand wurde in e^{-mr} bis zur 10. Ordnung entwickelt und dann integriert. $G(r)$ und $U(r)$ erhält man dann ebenfalls bis zur 10. Ordnung in e^{-mr}. (Benutzte Gleichungen → Anhang). Die Approximationen haben grob die Form:

$$R(r) = r + \sum_{k>0} Polynom_k(r)e^{-2k\ m(r-r_0)}, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} G(r) &= 1 - \frac{h}{r} + \sum_{k>0} Polynom_k(r)e^{-2k\ m(r-r_0)} + \\ &+ \sum_{k,j>0} Polynom_{k,j>0}(r)e^{-2k\ m(r-r_0)}Ei(-2j\ m(r-r_0)), \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} U(r) &= \sum_{k>0} Polynom_k(r)e^{-2k\ m(r-r_0)} + \\ &+ \sum_{k,j>0} Polynom_{k,j}(r)e^{-2k\ m(r-r_0)}Ei(-2j\ m(r-r_0)). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die Integralexponentialfunktionen entstehen durch die Integration in (3.33). Die Approximation ist um so besser, je kleiner die Entwicklungsgröße $\frac{\phi_0}{2}e^{-mr}$ ist.

4.2 Translationsfreiheit der Lösung

Die Lösung weist vier Parameter auf:

- m als „Masse“ des Feldes,
- ϕ_0 als Amplitude des Feldes,
- r_0 als Polstelle von G und
- h definiert die Nullstelle von G mit

$$h := \frac{2}{3}\frac{\int_{r_S}^{\infty} \frac{r}{R^4}dr}{\int_{r_S}^{\infty} \frac{1}{R^4}dr} \Rightarrow G(r_S) = 0 \tag{4.12}$$

Da die Lösung allgemein eine Translationsfreiheit aufweisen muß, kann man einen dieser Parameter durch eine Nullpunktsverschiebung frei wählen. Tatsächlich kann man zeigen, daß zwei Lösungssätze $\bar{\phi}$, $\bar{R}$, $\bar{G}$, $\bar{V}$ von $\bar{r}$ und ϕ, R, G, V von $r = \bar{r} - a$ identisch sind, wenn man die Parameter entsprechend anpaßt:

$$\begin{aligned} \bar{m} &= m, && (4.13)\\ \bar{\phi_0} &= \phi_0 e^{ma}, && (4.14)\\ \bar{r_0} &= r_0 - a, && (4.15)\\ \bar{h} &= h + \frac{2}{3}a && (4.16)\\ \Rightarrow \bar{r_S} &= r_S + a. && (4.17) \end{aligned}$$

Im folgenden wird die Singularität von $G(r)$ auf $r = 0$ gesetzt. Dies entspricht $r_0 = 0$. Außerdem wird die Länge in Einheiten des Horizontes r_S gemessen, was gleichbedeutend mit der Wahl $r_S = 1$ ist. Die Lösung enthält demnach nur noch die Parameter des Skalarfeldes:

- ϕ_0 als Feldamplitude und

- m als „ Dämpfung “ des Feldes.

4.3 Interpretation der Lösung

4.3.1 R(r)

In den Abbildungen 9 und 10 ist die Abweichung von $R(r)$ von der SCHWARZSCHILD-Metrik aufgetragen. R ist stets größer als R_S und nimmt von außen stetig bis r_S zu. Die Abweichung ist auch um so größer, je größer ϕ_0 ist. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die Entwicklungsgröße $\frac{\phi_0}{2}e^{-mr}$ in gleicher Weise von ϕ_0 abhängt.

Die Abhängigkeit von m ist nicht so einfach, weil es zwei Extremfälle gibt, in denen ϕ konstant wird; entweder $m = 0$ oder $m = \infty$. Demnach sollte die Abweichung von R ein Maximum besitzen. Dies ist aber sehr scharf bei $m \approx 0$, so daß es in dieser Abbildung nicht zu sehen ist.

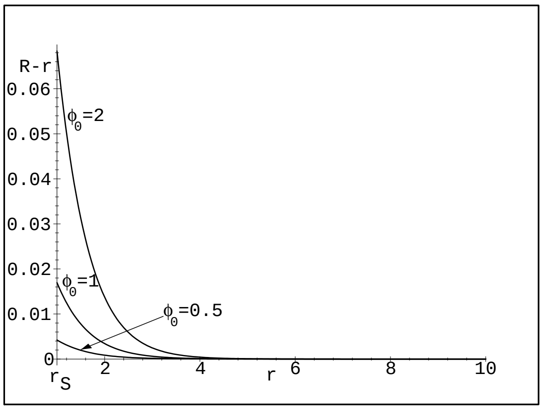

Abb. 9: Abweichung von $R(r)$ von der SCHWARZSCHILD-Metrik unter Variation von ϕ_0

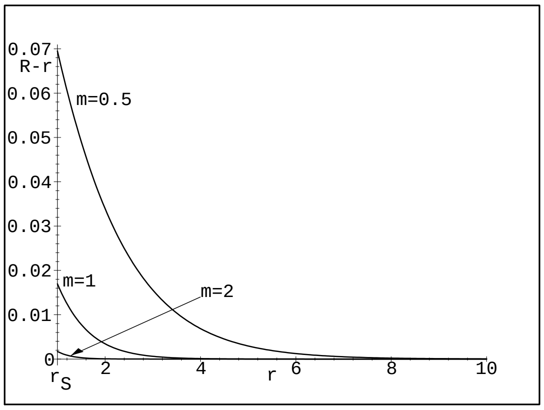

Abb. 10: Abweichung von $R(r)$ von der SCHWARZSCHILD-Metrik unter Variation von m

4.3.2 G(r)

Abbildungen 11 und 12 zeigen die Abweichung von $G(r)$ von der SCHWARZSCHILD-Metrik mit dem selben SCHWARZSCHILD-Radius. $G(r)$ liegt immer unter $G_S(r)$ und zeigt die selbe qualitative Abhängigkeit von ϕ_0 und m wie R. Die Abweichung weist bei einem bestimmten Abstand ein Maximum auf, da die Randbedingungen von $G(r)$ und $G_S(r)$ bei r_S und ∞ dieselben sind.

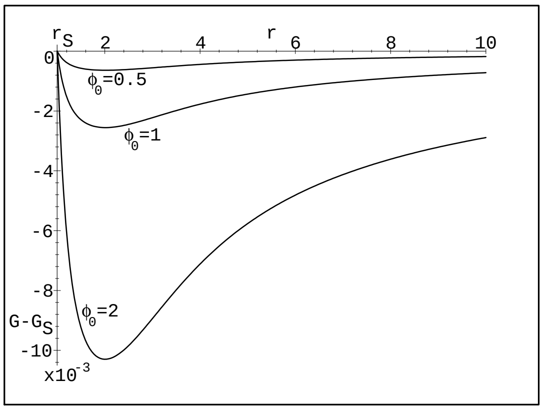

Abb. 11: Abweichung von $G(r)$ von der SCHWARZSCHILD-Metrik unter Variation von ϕ_0

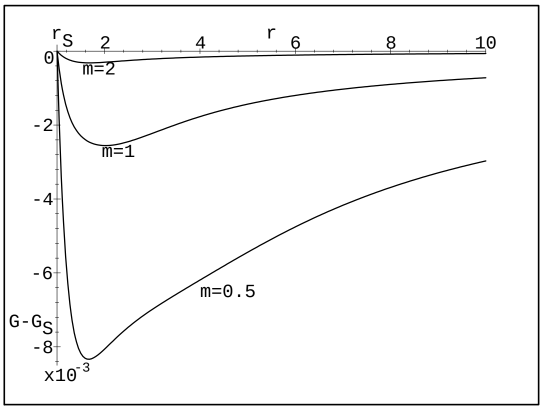

Abb. 12: Abweichung von $G(r)$ von der SCHWARZSCHILD-Metrik unter Variation von m

Wird die Abweichung zu groß, tritt eine neue Nullstelle auf. Diese kann dann durch Wahl eines entsprechenden C_2 in (3.33) angeglichen werden. Abbildung 13 zeigt einen solchen Fall. Hierfür wurde $m = \frac{1}{4}$ und $\phi_0 = 3$ gewählt. Am qualitativen Erscheinungsbild ändert sich dabei aber nichts. ($\rightarrow$ Diskussion von U(r))

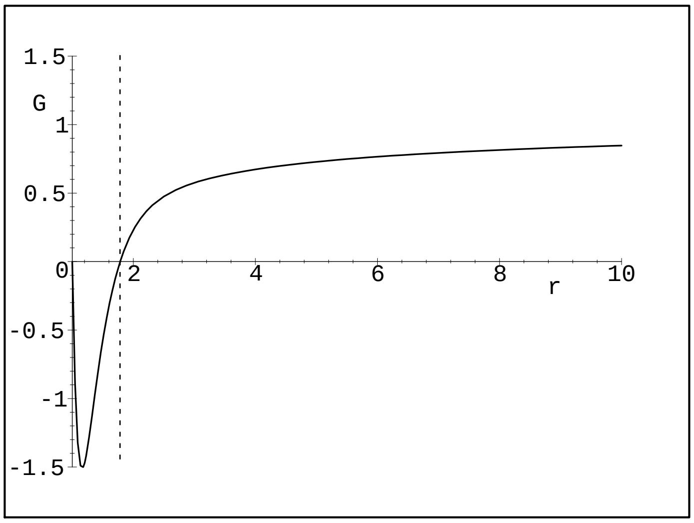

Abb. 13: $G(r)$ mit $m = \frac{1}{4}$ und $\phi_0 = 3$

4.3.3 U(r)

Die Abbildungen 14 und 15 zeigen $U(r)$. Die qualitativen Abhängigkeiten von m und ϕ_0 entsprechen denen von $R(r)$ und $G(r)$. Auch ist V betragsmäßig bei r_S immer am größten. $U(r)$ beginnt immer bei einem endlichen, negativen Wert bei r_S, hat dann ein kleines Maximum im positiven Bereich und fällt auf Null zurück. (Das Maximum ist in dieser Auftragung schlecht zu sehen. $\rightarrow$ Abb. 18 und 20)

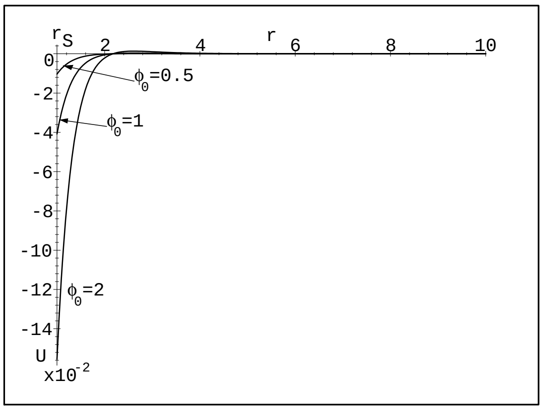

Abb. 14: Auftragung von $U(r)$ unter Variation von ϕ_0

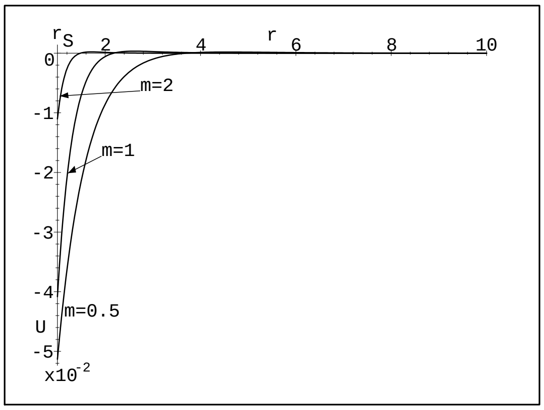

Abb. 15: Auftragung von $U(r)$ unter Variation von m

Zum Schluß sei noch vermerkt, daß für den Fall, daß eine zusätzliche Nullstelle von $G(r)$ auftritt, $U(r)$ trotzdem die selbe Form behält:

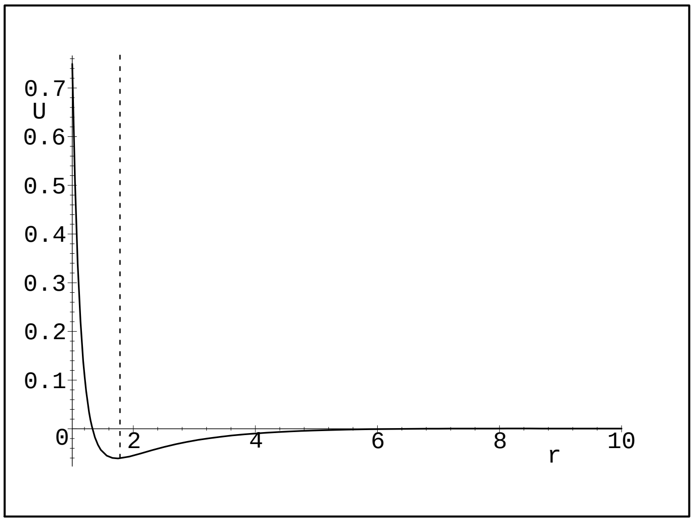

Abb. 16: $U(r)$ mit $m = \frac{1}{4}$ und $\phi_0 = 3$

4.3.4 V(ϕ)

Die folgenden Abbildungen zeigen $V(\phi)$. Da $\phi(r)$ außer einer Skalenverzerrung nur die Punkte Null und Unendlich vertauscht, gelten alle Überlegungen für $U(r)$ analog. In den Abbildungen 18 und 20 sind die Maxima von V vergrößert dargestellt.

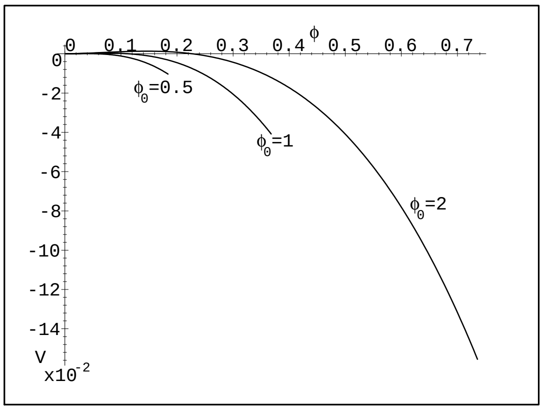

Abb. 17: Auftragung von $V(\phi)$ unter Variation von ϕ_0

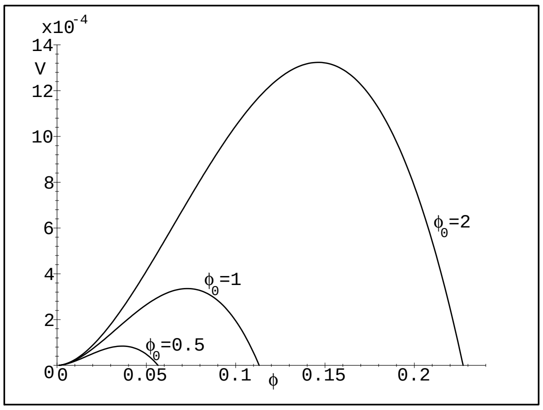

Abb. 18: Ausschnitt von $V(\phi)$ unter Variation von ϕ_0

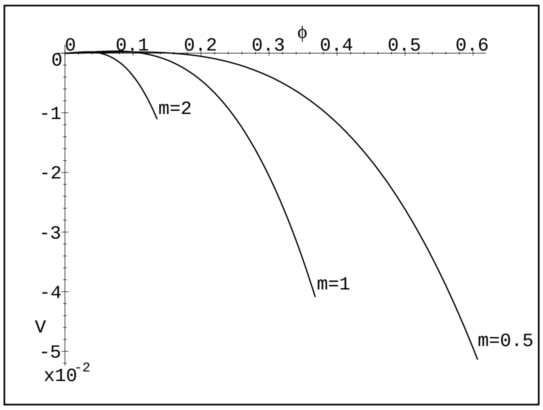

Abb. 19: Auftragung von $V(\phi)$ unter Variation von m

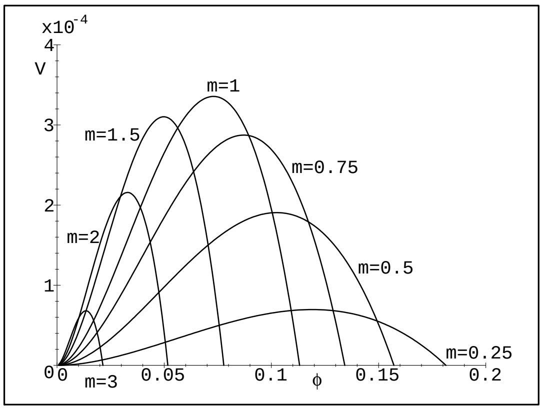

Abb. 20: Ausschnitt von $V(\phi)$ unter Variation von m

Das plötzliche Abbrechen der Graphen in den Abbildungen 17 und 19 kommt dadurch zustande, daß der Horizont erreicht wird. ϕ durchläuft nur das beschränkte Intervall $[0, \phi_0 e^{-mr_s}]$. Man sieht, daß $V(\phi)$ zwei Minima hat, ein lokales bei $\phi = 0$ und ein Minimum bei $\phi = \phi_0 e^{-mr_s}$. Damit ist die Potentialbedingung (3.21) des no-hair-Theorems *nicht* erfüllt. Das lokale Minimum bei $\phi = 0$ ist konsistent mit der Erwartung, da für $r \to \infty$ das Skalarfeld exponentiell gegen Null geht. Man kommt also beliebig nahe an die Situation des no-hair-Theorems heran. Im no-hair-Theorem hat $V(\phi)$ bei ϕ_∞ aber ein Minimum.

Die zweite Ableitung von V nach ϕ an der Stelle $\phi = 0$ beträgt $V_0'' = m^2$ und ist nur von m abhängig.

Besonders in Abb 20 kann man gut erkennen, daß $m \to 0$ und $m \to \infty$ wieder die SCHWARZSCHILD-Lösung replizieren. Eine Auftragung des Minimums, $V(r_S)$, abhängig von m zeigt dieses Verhalten noch deutlicher:

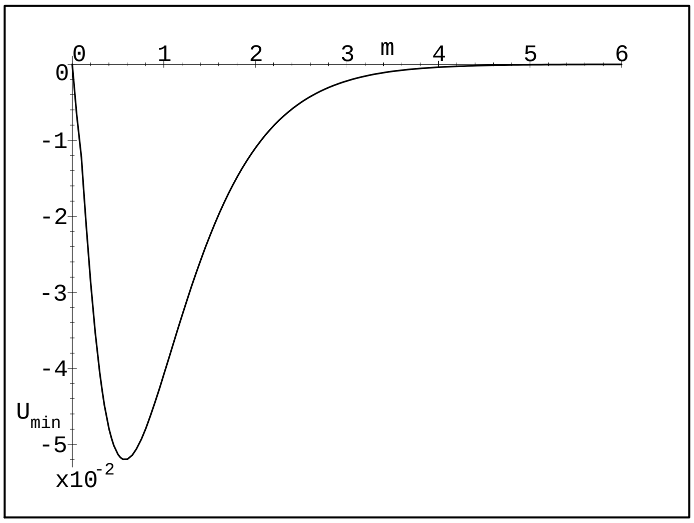

Abb. 21: Auftragung von $U(r_S)$ mit $\phi_0 = 1$ abhängig von m

4.4 Der Energie-Impulstensor

Aus (2.65) folgt für $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi + U)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \qquad (4.18) \\ &= \mathrm{diag}\left(G\frac{1}{4}(G(\partial_r\phi)^2 + U), \frac{1}{4G}(G(\partial_r\phi)^2 - U),\right. \\ &\quad \left. R^2\frac{1}{4}(-G(\partial_r\phi)^2 - U), R^2\sin^2(\vartheta)\frac{1}{4}(-G(\partial_r\phi)^2 - U)\right) \qquad (4.19) \end{aligned}$$

Für eine ideale Flüssigkeit, also eine homogene Massenverteilung mit isotropem Druck und ohne Viskosität und Temperaturaustausch, ist $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= pg_{\mu\nu} + (p+\rho)u_\mu u_\nu \qquad (4.20) \\ &= \mathrm{diag}\left(\rho G, \frac{p}{G}, R^2 p, R^2\sin^2(\vartheta)p\right) \qquad (4.21) \\ \text{mit } u_\mu &= (-\sqrt{G}, 0, 0, 0). \qquad (4.22) \end{aligned}$$

Vergleicht man beide Formeln, erkennt man, daß der Druck nicht für jede Richtung gleich ist. Es tritt ein radial gerichteter Druck p_r und ein tangential dazu gerichteter Druck p_t auf. Dies liegt daran, daß das Problem zwar isotrop aber nicht homogen ist.

Mit

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{U}{2}, \qquad (4.23) \\ p_r &= \frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 - \frac{U}{2}, \qquad (4.24) \\ p_t &= -\frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 - \frac{U}{2}, \qquad (4.25) \end{aligned}$$

hat $T_{\mu\nu}$ dann die From

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(\rho G, \frac{p_r}{G}, R^2 p_t, R^2\sin^2(\vartheta)p_t\right). \qquad (4.26)$$

Alle Größen setzen sich aus einem kinetischen Term $\frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2$ und einem potentiellen Term $\frac{U}{2}$ zusammen. Außerdem ist hier $p_t = -\rho$. Die Energiedichte ρ ist die direkte Summe beider Anteile. Da die potentielle Energie nahe r_S negativ wird, ist es nicht verwunderlich, daß auch ρ dort negativ wird. Der radiale Druck nimmt zum Schwarzen Loch hin bis zum Wert $-\frac{U(r_S)}{2}$ zu. Merkwürdig ist, daß der tangentiale Druck p_t negativ ist und erst bei kleinerem r positiv wird.

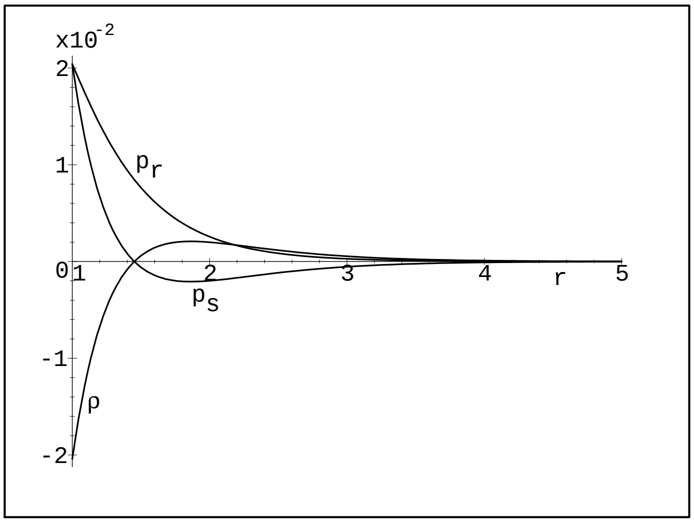

Abb. 22: Energiedichte ρ und Drücke in Abhängigkeit von r

4.5 Asymptotische Reihenentwicklungen

Es wurde versucht, die Lösung durch eine asymptotische Reihe nachzuvollziehen. Die Entwicklung von V in eine Taylorreihe bezüglich ϕ führte auf kein befriedigendes Ergebnis. Erst eine Erweiterung des Ansatzes zeigte eine Übereinstimmung.

Für den Reihenansatz eignen sich die Gleichungen (2.81)–(2.83).

4.5.1 V als Taylor-Reihe in ϕ

Die Funktionen $\phi(r)$, $\sigma(r)$ und $G(r)$ werden in e^{-mr} entwickelt und Glieder ab der Ordnung e^{-3mr} vernachlässigt. Da in (2.81) nur ϕ'^2 vorkommt, genügt es, ϕ bis e^{-mr} zu entwickeln. Daraus folgt aber auch, daß die ersten Korrekturen in σ und damit auch in G und U erst von der Ordnung e^{-2mr} sein können. Die Funktionen vor den Exponentialfunktionen werden als Reihe in $\frac{1}{r}$ angesetzt, wobei ein Faktor r^n herausgezogen wurde. V entwickelt man als Taylor-Reihe um ϕ_∞, das in unserem Fall Null ist. Die ersten beiden Glieder der Reihe müssen Null sein, da bei $\phi = 0$ ein lokales Minimum liegt und keine Hintergrundkrümmung vorliegt.

$$V(\phi) \approx \frac{V_0''}{2}\phi^2, \tag{4.27}$$

$$\phi(r) \approx e^{-mr} r^a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{r^i}, \tag{4.28}$$

$$\sigma(r) \approx -ln(r) + e^{-2mr} r^b \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{r^i}, \tag{4.29}$$

$$G(r) \approx 1 - \frac{h}{r} + e^{-2mr} r^c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_i}{r^i}. \tag{4.30}$$

Einsetzen in(2.81)–(2.83) und Vergleich der führenden Potenzen führt auf

$$b = 2a, \tag{4.31}$$

$$c = 2a. \tag{4.32}$$

Des weiteren erhält man aus Koeffizientenvergleich:

$$a = -1 - \frac{hm}{2}, \tag{4.33}$$
$$V_0'' = m^2. \tag{4.34}$$

Da h und m beide positiv sein müssen, muß $a < 0$ sein. Damit kann aber nicht die Lösung mit $\phi = \phi_0 e^{-mr} \Rightarrow a = 0$ beschrieben werden. Die Reihenkoeffizienten können durch Koeffizientenvergleich abgelesen werden:

$$f_0 \ : \ \text{ist frei wählbar,}$$
$$f_1 = \frac{f_0}{8} h(2 + 3hm), \tag{4.35}$$
$$f_2 = \frac{f_0}{128m^2}(16hm + 20h^2m^2 + 32h^3m^3 + 9h^h m^4), \tag{4.36}$$
$$\vdots$$
$$s_0 = -\frac{1}{16} f_0^2, \tag{4.37}$$
$$s_1 = -\frac{1}{64m} f_0^2(2h + 3h^2m^2 + 4), \tag{4.38}$$
$$s_2 = -\frac{1}{512m^2} f_0^2(36h^2m^2 - 48 + 22h^3m^3 + 9h^4m^4), \tag{4.39}$$
$$\vdots$$
$$g_0 = \frac{1}{8} f_0^2, \tag{4.40}$$
$$g_1 = \frac{1}{32m} f_0^2(-2h + 3h^2m^2 - 4), \tag{4.41}$$
$$g_2 = \frac{1}{256m^2} f_0^2(64hm - 28h^2m^2 + 48 - 2h^3m^3 + 9h^4m^4). \tag{4.42}$$
$$\vdots$$

Als einziges Fazit kann man erkennen, daß f_0 auch hier ein freier Parameter ist, $f_{i>0}$ i. allg. jedoch nicht verschwinden.

4.5.2 Erweiterte Reihe

Es ist zu erwarten, daß $U(r) = V(\phi(r))$ die gleiche asymptotische Entwicklung in $\frac{1}{r}$ wie $\phi(r)$, $\sigma(r)$ und $G(r)$ aufweist. Die Rückübersetzung nach $V(\phi)$ durch

$$r = -\frac{1}{m} \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \tag{4.43}$$

motiviert somit eine Erweiterung der TAYLOR-Reihe von $V(\phi)$ um $\phi = 0$ um logarithmische Terme:

$$V(\phi) = \phi^2 \left(\frac{V_0''}{2} + \frac{t_1}{\ln(\phi)} + \frac{t_2}{(\ln(\phi))^2} + \cdots\right) + \mathcal{O}(\phi^3) \tag{4.44}$$

$$\Rightarrow U(r) = \phi^2(r) \left(\frac{V_0''}{2} + \frac{t_1}{-mr + a\ln(r) + \ln\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{r^i}\right)} + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2})\right) \tag{4.45}$$

$$\approx \phi^2 \left(\frac{V_0''}{2} + \frac{t_1}{-mr} \sum_{j=0}^{\infty} x^j + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2})\right) \tag{4.46}$$

$$\text{mit } x = \frac{a\ln(r)}{mr} + \frac{\ln(f_0)}{mr} + \frac{f_1}{f_0 m r^2} + \left(\frac{f_2}{f_0} - \frac{f_1^2}{2f_0^2}\right)\frac{1}{mr^2} + \cdots . \tag{4.47}$$

Diesmal ergeben sich folgende Bedingungen :

$$
\begin{aligned}
V_0'' &= m^2, && (4.48)\\
\text{entweder } t_1 &= m^2(a+1+\frac{hm}{2}) = 0, && (4.49)\\
&\vdots \text{ weiter Bedingungen für die } t_{i>1} \\
\text{oder } a &= 0. && (4.50)
\end{aligned}
$$

Im ersten Fall ist $a = -1 - \frac{hm}{2}$, und der Term $\frac{t_1}{\ln(\phi)}$ fällt weg. Damit wird das Ergebnis des vorigen Abschnittes repliziert. Im zweiten Fall ($a = 0$) ist $\phi = \phi_0 e^{-mr}$ möglich. Es sind also zwei sinnvolle Werte von a möglich: $a = 0$ und $a = -1 - \frac{hm}{2}$.

4.5.3 U(r) als Taylor-Reihe in r

Einfacher ist es, $U(r)$ analog zu $\sigma(r)$ und $G(r)$ als Reihe in r darzustellen:

$$
U(r) = e^{-2mr} r^{2a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v_i}{r^i}. \tag{4.51}
$$

Setzt man dies in die Gleichungen (2.81)–(2.83) ein, sind alle f_i und a frei wählbar, $U(r)$ jedoch dafür bestimmt. Die übrigen Koeffizienten folgen durch Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= -\frac{1}{16} f_0^2, && (4.52)\\
s_1 &= -\frac{1}{16m} f_0(f_0 + 2mf_1), && (4.53)\\
s_2 &= -\frac{1}{32m^2}(4mf_0f_1 + 4m^2 f_0 f_2 + 3af_0^2 + 2m^2 f_1^2), && (4.54)\\
&\vdots \\
g_0 &= \frac{1}{8} f_0^2, && (4.55)\\
g_1 &= \frac{1}{8m} f_0(f_0 - 2mf_1 + hmf_0), && (4.56)\\
g_2 &= \frac{1}{16m^2}(2f_0^2 + 4hmf_0^2 - af_0^2 - 4mf_0f_1 - 4hm^2 f_0 f_1 + 4m^2 f_0 f_2 + \\
&\quad +2m^2 f_1^2), && (4.57)\\
&\vdots \\
v_0 &= \frac{1}{2} m^2 f_0^2, && (4.58)\\
v_1 &= \frac{1}{2} m(-f_0^2(2a + 2 + hm) + 2mf_0f_1), && (4.59)\\
v_2 &= \frac{1}{2}(f_0^2(a^2 + \frac{3}{2}hm + 2a + 2hma + 1) - f_0f_1(4am + 2m + 2hm^2) + \\
&\quad +2m^2 f_0 f_2 + m^2 f_1^2), && (4.60)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Setzt man $\phi(r) = \phi_0 e^{-mr}$, also $f_0 = \phi_0$ und alle $f_i = 0$ für $i > 0$ sowie $a = 0$, sollte sich die bekannte Lösung ergeben. Man findet

$$
\begin{aligned}
f_0 &\to \phi_0, && (4.61)\\
s_0 &= -\frac{1}{16} f_0^2, && (4.62)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= -\frac{1}{16m} f_0^2, &(4.63)\\
s_2 &= 0, &(4.64)\\
s_3 &= 0, &(4.65)\\
&\vdots\\
g_0 &= \frac{1}{8} f_0^2, &(4.66)\\
g_1 &= -\frac{1}{8m} f_0^2(1+hm), &(4.67)\\
g_2 &= \frac{1}{8m^2} f_0^2(1+2hm), &(4.68)\\
g_3 &= -\frac{1}{8m^3} f_0^2(2+3hm), &(4.69)\\
&\vdots\\
v_0 &= \frac{1}{2} m^2 f_0^2, &(4.70)\\
v_1 &= -\frac{1}{2} m f_0^2(2+hm), &(4.71)\\
v_2 &= \frac{1}{4} f_0^2(2+3hm), &(4.72)\\
v_3 &= -\frac{1}{4m} f_0^2(2+3hm), &(4.73)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dies ist mit der bekannten Lösung (4.1), (4.6) mit (2.80), (4.7), (4.8) bzw. Anhang B, zu vergleichen. Die Reihenentwicklung der Lösung bis zum gewünschten Glied liefert:

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \phi_0 e^{-mr}, &(4.74)\\
\sigma(r) &= -\ln(r) - e^{-2mr}\frac{1}{16}\phi_0^2(1+\frac{1}{mr}), &(4.75)\\
G(r) &= 1-\frac{h}{r} + Ei(-2mr)r^2\phi_0^2 m^2\frac{1}{2}(mh+\frac{2}{3}) + \\
&\quad + e^{-2mr}\phi_0^2\frac{1}{48}(r(8m+12hm^2)+2-6hm-\frac{1}{r}\frac{2}{m}+\frac{1}{r^2}\frac{3h}{m}), &(4.76)\\
U(r) &= m^2\phi_0^2 Ei(-2mr)(2+3mh) + e^{-2mr}m^2\phi_0^2\frac{1}{2}(1+\frac{1}{r}2h). &(4.77)
\end{aligned}$$

Um die Reihen vergleichen zu können, muß man die Integralexponentialfunktionen asymptotisch entwickeln. Aus [6] entnimmt man

$$Ei(z) \approx \frac{e^z}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{6}{z^3}+\frac{24}{z^4}-+\cdots\right) \tag{4.78}$$

Setzt man diese Entwicklung in (4.75)–(4.77) ein, so erhält man vollkommene Übereinstimmung mit den asymptotischen Reihen (4.29)–(4.30) mit den Koeffizienten (4.62)–(4.73). Damit hat sich der erweiterte Ansatz (4.44) bestätigt.

Als Fazit kann man ziehen, daß $U(r)$ zwar analytisch ist, aber durch die nicht analytische Transformation $r = -\frac{1}{m}\ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)$ wird $V(\phi)$ ebenfalls nicht analytisch. $V(\phi)$ ist somit bei $\phi = 0$ nicht als Taylor-Reihe darstellbar.

4.6 Stabilität

Zur Untersuchung der Stabilität werden kleine, zeitabhängige und kugelsymmetrische Störungen der bekannten Lösung (4.1), (4.6), (4.7) und (4.8) betrachtet. Dabei wird $V(\phi)$ beibehalten und nicht variiert.

Hängen die Funktionen G, R, ϕ und U auch von der Zeit ab, so kommen zusätzliche CHRISTOFFEL-Symbole hinzu:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{t}{}_{rr} &= -\frac{\dot{G}}{2G^3}, && (4.79)\\
\Gamma^{t}{}_{tt} &= \frac{\dot{G}}{2G}, && (4.80)\\
\Gamma^{t}{}_{\vartheta\vartheta} &= \frac{R\dot{R}}{G}, && (4.81)\\
\Gamma^{t}{}_{\varphi\varphi} &= \frac{R\dot{R}}{G}\sin^2\vartheta, && (4.82)\\
\Gamma^{r}{}_{tr} = \Gamma^{r}{}_{rt} &= -\frac{\dot{G}}{2G}, && (4.83)\\
\Gamma^{\vartheta}{}_{\vartheta t} = \Gamma^{\vartheta}{}_{t\vartheta} &= \frac{\dot{R}}{R}, && (4.84)\\
\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi t} = \Gamma^{\varphi}{}_{t\varphi} &= \frac{\dot{R}}{R}. && (4.85)
\end{aligned}$$

Wobei der Punkt Ableitung nach der Zeit bedeutet. Damit sind die Komponenten des RICCI-Tensors:

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= -\frac{2R''}{R} - \frac{G''}{2G} - \frac{\ddot{G}}{2G^3} + \frac{\dot{G}^2}{G^4} - \frac{G'R'}{GR} - \frac{\dot{G}\dot{R}}{G^3R}, && (4.86)\\
R_{tt} &= -\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{G}}{2G} + \frac{\dot{G}^2}{G^2} + \frac{1}{2}GG'' + \frac{\dot{G}\dot{R}}{GR} + GG'\frac{R'}{R}, && (4.87)\\
R_{\vartheta\vartheta} &= 1 - G'RR' - GR'^2 - GRR'' + \frac{\dot{R}^2}{G} + \frac{R\ddot{R}}{G} - \frac{R\dot{R}\dot{G}}{G^2}, && (4.88)\\
R_{\varphi\varphi} &= R_{\vartheta\vartheta}\sin^2\vartheta, && (4.89)\\
R_{rt} = R_{tr} &= -\frac{2\dot{R}'}{R} - \frac{G'\dot{G}}{4G^2} - \frac{\dot{G}^2}{4G^4} - \frac{\dot{G}R'}{GR} + \frac{G'\dot{R}}{GR}. && (4.90)
\end{aligned}$$

Alle weiteren Komponenten sind Null. Aus (2.67) und (2.69) erhält man die Bewegungsgleichungen

- für das Skalarfeld:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} - 2G\phi'\frac{R'}{R} - G'\phi' - G\phi'' + 2\dot{\phi}\frac{\dot{R}}{RG} + \frac{\ddot{\phi}}{G} - \dot{\phi}\frac{\dot{G}}{G^2} = 0, \tag{4.91}$$

- für $\mu = \nu = r$:

$$-\frac{2R''}{R} - \frac{G''}{2G} - \frac{\ddot{G}}{2G^3} + \frac{\dot{G}^2}{G^4} - \frac{G'R'}{GR} - \frac{\dot{G}\dot{R}}{G^3R} + \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{U}{2G} = 0, \tag{4.92}$$

- für $\mu = \nu = t$:

$$-\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{G}}{2G} - \frac{\dot{G}^2}{G^2} + \frac{1}{2}GG'' + \frac{\dot{G}\dot{R}}{GR} + GG'\frac{R'}{R} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{UG}{2} = 0, \tag{4.93}$$

- für $\mu = \nu = \vartheta$:

$$1 - G'RR' - GR'^2 - GRR'' + \frac{\dot{R}^2}{G} + \frac{R\ddot{R}}{G} - \frac{R\dot{R}\dot{G}}{G^2} + \frac{UR^2}{2} = 0, \tag{4.94}$$

- und für $\mu = r$, $\nu = t$:

$$-\frac{2\dot{R}'}{R} - \frac{G'\dot{G}}{4G^2} - \frac{\dot{G}^2}{4G^4} - \frac{\dot{G}R'}{GR} + \frac{G'\dot{R}}{GR} + \frac{1}{2}\phi'\dot{\phi} = 0. \tag{4.95}$$

Die Gleichung für $\mu = \nu = \varphi$ unterscheidet sich von (4.94) nur durch einen Faktor $\sin^2\vartheta$. Analog zu Abschnitt 2.6 erhält man durch geeignete Linearkombinationen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \phi} - 2G\phi'\frac{R'}{R} - G'\phi' - G\phi'' + 2\dot{\phi}\frac{\dot{R}}{RG} + \frac{\ddot{\phi}}{G} - \dot{\phi}\frac{\dot{G}}{G^2} &= 0, && (4.96)\\
-\frac{2\ddot{R}}{RG^2} - \frac{2R''}{R} + \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2G^2}\dot{\phi}^2 &= 0, && (4.97)\\
-\frac{\ddot{R}}{GR} + \frac{\ddot{G}}{2G^2} - \frac{\dot{G}^2}{G^3} + \frac{G''}{2} + \frac{\dot{\phi}^2}{2G} + \frac{1}{R^2} - \frac{GR'^2}{R^2} - \frac{GR''}{R} + \frac{\dot{R}^2}{GR^2} &= 0, && (4.98)\\
-\frac{2\ddot{R}}{RG} + \frac{\ddot{G}}{2G^2} - \frac{\dot{G}^2}{G^3} + \frac{G''}{2} + \frac{\dot{G}\dot{R}}{G^2R} + G'\frac{R'}{R} + \frac{\dot{\phi}^2}{2G} - \frac{U}{2} &= 0, && (4.99)\\
-\frac{2\dot{R}'}{R} - \frac{G'\dot{G}}{4G^2} - \frac{\dot{G}^2}{4G^4} - \frac{R'\dot{G}}{GR} + \frac{G'\dot{R}}{GR} + \frac{1}{2}\phi'\dot{\phi} &= 0. && (4.100)
\end{aligned}
$$

Entwickelt man die Funktionen $G(r,t)$, $\phi(r,t)$, $R(r,t)$ und $U(r,t)$ gemäß:

$$
\begin{aligned}
G(r,t) &= G_b(r) + \delta G(r,t), && (4.101)\\
R(r,t) &= R_b(r) + \delta R(r,t), && (4.102)\\
\phi(r,t) &= \phi_b(r) + \delta\phi(r,t), && (4.103)\\
U(r,t) &= U_b(r) + \frac{U_b'(r)}{\phi_b'(r)}\delta\phi(r,t) && (4.104)
\end{aligned}
$$

um die Lösung aus Abschnitt 4.1, erhält man die Gleichungen linear in den Abweichungen: (Die Größen mit Index b bezeichnen die bekannte Lösung (4.1), (4.6), (4.7) und (4.8)).

$$
\begin{aligned}
-2G_b^2\phi_b'^2\delta R' + 2G_b^2\frac{R_b'}{R_b}\phi_b'^2\delta R - G_bR_b\phi_b'^2\delta G' - (2G_b\phi_b'^2R_b' + G_bR_b\phi_b'\phi_b'')\delta G +&\\
+R_b\phi_b'\delta\ddot{\phi} - G_b^2R_b\phi_b'\delta\phi'' + (G_b^2R_b\phi_b'' - G_b^2R_b\phi_b'^2)\delta\dot{\phi} -&\\
-(G_b^2R_b\phi_b'' + 2G_b'G_bR_b\phi_b' + 4G_b^2\phi_b'R_b')\delta\phi' +&\\
+(2G_b\phi_b'G_b'R_b' + 2G_b^2R_b\phi_b'^3 + 4G_b^2R_b'\phi_b'' - 2\frac{G_b\phi_b'}{R_b} + 3G_bR_bG_b'\phi_b'' + G_b^2R_b\frac{(\phi_b'')^2}{\phi_b'})\delta\phi &= 0, && (4.105)\\
-2\delta\ddot{R} - 2G_b^2\delta R'' + \frac{1}{2}G_b^2\phi_b'^2\delta R + 2G_b^2R_b\phi_b'\delta\phi' &= 0, && (4.106)\\
-G_bR_b\delta\ddot{R} - G_b^3R_b\delta R'' - 2G_b^3R_b'\delta R' + (2G_b^3\frac{R_b'^2}{R_b} + \frac{1}{4}G_b^3R_b\phi_b'^2 - 2\frac{G_b^2}{R_b})\delta R +&\\
+\frac{1}{2}R_b^2\delta\ddot{G} + \frac{1}{2}G_b^2R_b^2\delta G'' - (\frac{1}{4}G_b^2R_b^2\phi_b'^2 + G_b^2R_b'^2)\delta G &= 0, && (4.107)\\
-2G_b\delta\ddot{R} + G_b^2G_b'\delta R' - G_b^2G_b'\frac{R_b'}{R_b}\delta R + \frac{1}{2}R_b\delta\ddot{G} + \frac{1}{2}G_b^2R_b\delta G'' + G_b^2R_b'\delta G' -&\\
-(G_b^3\phi_b'R_b' + \frac{1}{2}G_b^2R_bG_b'\phi_b' + \frac{1}{2}G_b^3R_b\phi_b'')\delta\phi &= 0, && (4.108)\\
G_bG_b'\delta\dot{R} - 2G_b^2\delta\dot{R}' - (\frac{1}{4}R_bG_b' + G_bR_b')\delta\dot{G} + \frac{1}{2}G_b^2R_b\phi_b'\delta\dot{\phi} &= 0. && (4.109)
\end{aligned}
$$

Dabei gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \phi} &= \frac{U' + \dot{U}}{\phi' + \dot{\phi}}, && (4.110)\\
\delta U(r,t) &= \frac{U_b'(r)}{\phi_b'(r)}\delta\phi(r,t) && (4.111)
\end{aligned}
$$

und $U_b(r)$, $G_b''(r)$ und $R_b''(r)$ sind durch die Bewegungsgleichungen (2.76)–(2.78) eleminiert worden. Schränkt man die Störungen auf periodische Schwingungen ein, erhält man mit

$$
\delta R(r,t) = \delta R_1\cos(\omega t) + \delta R_2\sin(\omega t), \qquad (4.112)
$$

$$\begin{aligned}\delta G(r,t) &= \delta G_1\cos(\omega t)+\delta G_2\sin(\omega t), &(4.113)\\ \delta\phi(r,t) &= \delta\phi_1\cos(\omega t)+\delta\phi_2\sin(\omega t) &(4.114)\end{aligned}$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-2G_b^2\phi_b'^2\delta R_1'+2G_b^2\frac{R_b'}{R_b}\phi_b'^2\delta R_1-G_bR_b\phi_b'^2\delta G_1'-(2G_b\phi_b'^2R_b'+G_bR_b\phi_b'\phi_b'')\delta G_1-&\\
-G_b^2R_b\phi_b'\delta\phi_1''+\omega(G_b^2R_b\phi_b''-G_b^2R_b\phi_b'^2)\delta\phi_2-&\\
-(G_b^2R_b\phi_b''+2G_b'G_bR_b\phi_b'+4G_b^2\phi_b'R_b')\delta\phi_1'+&\\
+(-R_b\phi_b'\omega^2+2G_b\phi_b'G_b'R_b'+2G_b^2R_b\phi_b'^3+4G_b^2R_b'\phi_b''-&\\
-2\frac{G_b\phi_b'}{R_b}+3G_bR_bG_b'\phi_b''+G_b^2R_b\frac{(\phi_b'')^2}{\phi_b'})\delta\phi_1 &= 0, &(4.115)\\
-2G_b^2\delta R_1''+(2\omega^2+\frac{1}{2}G_b^2\phi_b'^2)\delta R_1+2G_b^2R_b\phi_b'\delta\phi_1' &= 0, &(4.116)\\
-G_b^3R_b\delta R_1''-2G_b^3R_b'\delta R_1'+(G_bR_b\omega^2+2G_b^3\frac{R_b'^2}{R_b}+\frac{1}{4}G_b^3R_b\phi_b'^2-2\frac{G_b^2}{R_b})\delta R_1+&\\
+\frac{1}{2}G_b^2R_b^2\delta G_1''-(\frac{1}{2}R_b^2\omega^2+\frac{1}{4}G_b^2R_b^2\phi_b'^2+G_b^2R_b'^2)\delta G_1 &= 0, &(4.117)\\
G_b^2G_b'\delta R_1'+(2G_b\omega^2-G_b^2G_b'\frac{R_b'}{R_b})\delta R_1+\frac{1}{2}G_b^2R_b\delta G_1''+G_b^2R_b'\delta G_1'-\frac{1}{2}R_b\omega^2\delta G_1-&\\
-(G_b^3\phi_b'R_b'+\frac{1}{2}G_b^2R_bG_b'\phi_b'+\frac{1}{2}G_b^3R_b\phi_b'')\delta\phi_1 &= 0, &(4.118)\\
2G_b^2\delta R_1'-G_bG_b'\delta R_1+(\frac{1}{4}R_bG_b'+G_bR_b')\delta G_1-\frac{1}{2}G_b^2R_b\phi_b'\delta\phi_1 &= 0. &(4.119)
\end{aligned}$$

Dabei gelten entsprechende Gleichungen falls man die Indices 1 und 2 vertauscht und $\omega\to-\omega$ ersetzt. Dies wirkt sich aber nur in Gleichung (4.115) aus. Nach [12] sollte sich diese Gleichung durch die übrigen ausdrücken lassen, was ich aber nicht bestätigen konnte.

Die Lösung ist gegen kleine, kugelsymmetrische und zeitabhängige Störungen stabil, wenn $\omega^2\geq 0$ ist. Instabilität tritt ein, wenn ω^2 negativ wird. Leider konnte ich aus Zeitgründen keine Aussagen hierzu treffen.

4.7 Zusammenfassung

Es gibt also statische und isotrope Lösungen der gekoppelten Einstein-Klein-Gordon-Gleichungen, die nicht triviale Felder und Potentiale haben. Die hier gefundene Lösung hat auch den Vorteil, daß keine Singularitäten bei r_S auftreten, wie es das no-hair-Theorem fordert. Da das zugehörige skalare Potential *zwei* Minima aufweist, umgeht die Lösung das no-hair-Theorem.

Befremdlich hingegen ist, daß der tangentiale Druck p_t negativ ist. Diese Tatsache läßt es fraglich erscheinen, ob die gefundene Lösung physikalisch ist. Außerdem ist noch nicht gezeigt, ob die Lösung gegen kleine Variationen stabil sind.

Interessant ist, ob man weitere Lösungen finden kann, die bessere Eigenschaften haben; die Wahl $\phi=\phi_0e^{-mr}$ ist ja nur eine von vielen Möglichkeiten.

Literaturverzeichnis

[1] O. Lechtenfeld, C. Nappi, *Phys. Lett.* **B288** (1992), 72;

[2] S. Weinberg, „*Gravitation and Cosmology*“, (1972) ;

[3] D. Garfinkle, G. T. Horowitz, A. Strominger, *Phys. Rev.*, **D43** (1991) 3140; err. ibid. **45** (1992) 3888;

[4] F. V. Kusmartsev, E. W. Mielke, F. E. Schunck, *Phys. Rev.* **D42** (1990), 3388;

[5] H. A. Buchdahl, *Phys. Rev.* **115** (1959), 1325;

[6] M. Abramowitz, I. A. Stegun, „ *Handbook of Mathematical Funktions* “, (1984);

[7] R. M. Wald, „ *General Relativity* “, **1984**;

[8] S. Chandrasekhar, „ *The Mathematical Theory of Black Holes* “, (1983);

[9] J. D. Bekenstein, *Ann. Phys.* **82** (1974), 535;

[10] H.-U. Keller, „ *Astrowissen* “, **1994**;

[11] S. Coleman, „ *Aspects of Symmetry* “, **1985**;

[12] P. Jetzer, in „ *Proceedings of the fifth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* “ , **1988 Part B**, 1249.

Anhang A

Allgemeines

A.1 DERRICK's Theorem

DERRICK's Theorem [11] erlaubt Aussagen über die Existenz von zeitunabhängigen Skalarfeldkonfigurationen abhängig von der Dimension des Problems. Ausgangspunkt ist die LAGRANGE-Dichte für ein Skalarfeld

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \tag{A.1}$$

mit nicht negativem Potential V. Der Grundzustand habe $V = 0$. Die Energie einer zeitunabhängigen Konfiguration $\phi(\mathbf{x})$ ist dann

$$E = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D\mathbf{x}(\nabla\phi)^2 + \int \mathrm{d}^D\mathbf{x}V(\phi) \geq 0. \tag{A.2}$$

Streckt man nun den Maßstab mit λ, erhält man

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &\rightarrow \phi(\lambda\mathbf{x}), && \text{(A.3)} \\ E &\rightarrow E_\lambda = \lambda^{(2-D)}\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D(\lambda\mathbf{x})(\nabla\phi(\lambda\mathbf{x}))^2 + \\ &\quad +\lambda^{-D}\int \mathrm{d}^D(\lambda\mathbf{x})V(\phi(\lambda\mathbf{x})). && \text{(A.4)} \end{aligned}$$

Aufgrund des HAMILTON-Prinzips muß E_λ bei $\lambda = 1$ ein Minimum haben. Differentiation nach λ ergibt für $\lambda = 1$:

$$(D-2)\,\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D\mathbf{x}(\nabla\phi)^2 + D\int \mathrm{d}^D\mathbf{x}V(\phi) = 0. \tag{A.5}$$

Die Integrale sind in (A.5) aber nicht negativ, so daß für $D > 2$ beide Null sein müssen, also $\phi = const$ und $V = 0$. Nur für zwei Dimensionen kann es ein nicht triviales Feld geben.

Auf die Wirkung (2.46) angewendet, ergibt sich als Kriterium:

$$(D-2)\int dx^3\sqrt{g}(K + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi) + D\int dx^3\sqrt{g}V = 0, \tag{A.6}$$

da die Krümmung K zweite Ableitungen der Metrik enthält. Für die gefundene Lösung ist dieses Kriterium allerdings nicht aussagekräftig, da V negativ wird, und somit das entsprechende Integral auch negativ sein kann. Prüft man (A.6) numerisch an einem Beispiel, so zeigt sich hervorragende Übereinstimmung. Für das untersuchte Problem lautet das Kriterium:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\int drR^2(K + G\frac{1}{2}(\partial_r\phi)^2) + 4\int drR^2V && \text{(A.7)} \\ \text{mit } K &= 4\left(1 + \frac{R'}{R}(2r-3h)\right) - 6G(2R'^2 + R''R). && \text{(A.8)} \end{aligned}$$

Für die Parameter $\phi_0 = 1$, $m = 1$ und $r_S = 1$ erhält man:

Integral	r=1...10	r=1...20
$\int R^2K$	-0.005066742092	-0.005066816935
$\int \frac{1}{2}R^2G(\phi')^2$	0.03383782454	0.03383785468
$\int R^2V$	-0.01438553666	-0.01438551217
Abweichung	$-1.744 \cdot 10^{-9}$	$2.681 \cdot 10^{-8}$

DERRICK's Theorem ist zwar gut erfüllt, aber nicht aussagekräftig.

A.2 Genauigkeiten

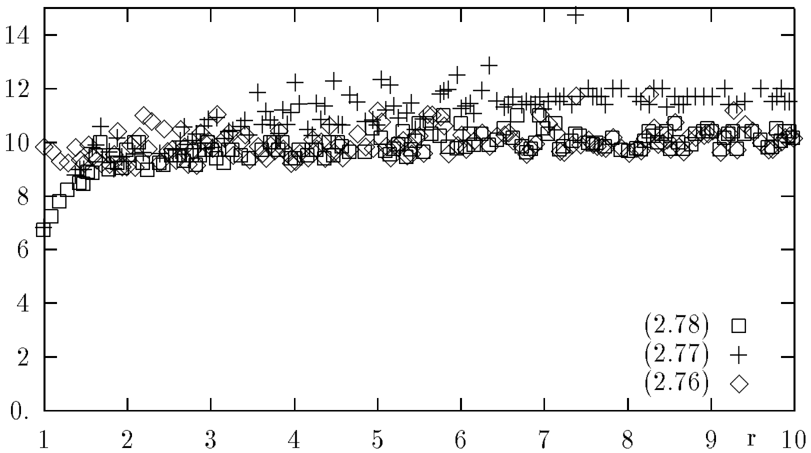

Abb. 23: Abweichungen von (2.76)–(2.78) von $r = 1..10$

Hier sind die numerischen Abweichungen der eingesetzten Bewegungsgleichungen (2.76)–(2.78) von Null für $\phi_0 = 1$ und $m = 1$ im betrachteten Bereich dargestellt. Dabei ist der negative dekadische Logarithmus aufgetragen. Die Abweichungen liegen in der Regel bei 10^{-10} und besser. Dies sind die Rechenungenauigkeiten von MapelV. (Man beachte, daß (2.76) exakt ist, während (2.77) und (2.78) nur approximativ gelten. Bei Werten von r nahe r_S ist die Abweichung größer und liegt etwa bei 10^{-7} bis schlechtestenfalls 10^{-5}. Die Abblidung 24 zeigt nochmal einen größeren r-Bereich.

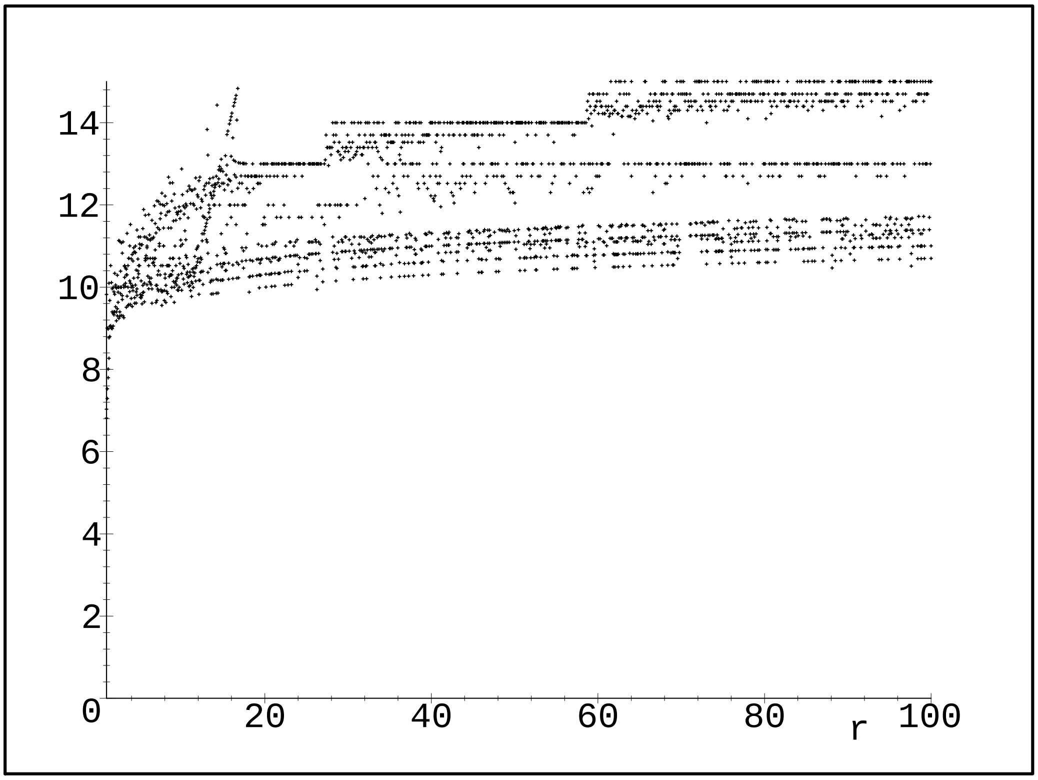

Abb. 24: Abweichungen von (2.76)–(2.78) von $r = 1..100$

Anhang B

Approximationen für G und V

Die Approximationen und alle numerischen Berechnungen und Plots wurden mit MapleV Release 3 erstellt. Aus Platzgründen ist nur die Approximation mit $r_0 = 0$ angegeben.

Anhang C

Epilog

C.1 Danksagung

Für das Thema und die sehr gute Betreuung möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld bedanken. Weiterhin danke ich Sven Symalla und Harald Lasaar für die konstruktiven und interessanten Gespräche und Anregungen. Aber auch allem Mitarbeitern des Instituts sei an dieser Stelle herzlich gedankt für die Physik, die mir mit Ihrer Hilfe zuteil wurde.

C.2 Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Olaf Bechmann