Wechselwirkung nichtkommutativer ebener Wellen in 2+1 Dimensionen

Stig Bieling

Diplomarbeit am
Institut für Theoretische Physik
der Universität Hannover

12. Dezember 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Idee, daß die Koordinaten der Raumzeit nicht vertauschen,

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu},$$

ist schon 1947 von H.S. Snyder aufgegriffen worden [16]. Eine lorentzinvariante Feldtheorie geht üblicherweise von einer kontinuierlichen Raumzeit aus. Snyder fand heraus, daß Lorentzinvarianz diese Voraussetzung nicht verlangt. Auch eine quantisierte Raumzeit, in der die Koordinaten bzw. deren Operatoren nicht kommutieren, ist lorentzinvariant [1].

Feldtheorie auf nichtkommutativen Räumen hat in den letzten Jahren wieder an Bedeutung gewonnen. Dieser Umstand liegt in der Erkenntnis, daß nichtkommutative Eichtheorie ihren natürlichen Ursprung in der Theorie offener Strings hat. Der offene String koppelt an ein antisymmetrisches konstantes 2-Form Potential $B_{\mu\nu}$ durch einen Oberflächenterm. Die Dynamik ändert sich nur, wenn die Stringweltfläche Ränder besitzt, was gleichbedeutend mit der Anwesenheit von Dp-Branes ist. In [17] wurde gezeigt, daß die Dynamik des Strings auf dem Weltvolumen der Dp-Branes im zeroslope Limes ($\alpha' \to 0$) äquivalent durch nichtkommutative Yang-Mills Feldtheorie beschrieben wird. In anderen Worten, der Effekt des B-Feldes kann durch nichtkommutativ deformierte Feldtheorie wiedergegeben werden [28]. Eine weitere Anwendung findet sich in der Konstruktion von Dp-Branes als Solitonen nichtkommutativer Feldtheorien [28].

Vor 11 Jahren wurde entdeckt, daß der offene $N = 2$ fermionische String auf Treeniveau mit selbstdualer Yang-Mills Theorie in 2+2 Dimensionen identisch ist. Es zeigt sich hier ebenso, daß mit einem konstanten B-Feld die effektive Feldtheorie im Targetraum nichtkommutative selbstduale Yang-Mills Theorie ist[2][21]. Durch eine geeignete Wahl der B-Feldkomponenten kann dieses auf das Weltvolumen von n koinzidierenden $D2$- Branes beschränkt werden[3]. Für $\alpha' \to 0$ ergibt sich als effektive Feldtheorie auf diesem Weltvolumen die nichtkommutative Erweiterung eines modifizierten 2+1 dimensionalen $U(2)$ Sigma Modell [22]. Die kommutative Feldgleichung des von R.S. Ward vorgestellten Modells [12] ist integrierbar, aber nicht lorentzinvariant. Sie besitzt solitonische Lösungen als auch

[1] Zumindest gilt Lorentzinvarianz für das System des Beobachters unter Drehungen und Boosts, da der Nichtkommutativitätsparameter $\theta^{\mu\nu}$ Lorentzindizes hat und kovariant transformiert. Es zeigt sich jedoch, daß Drehungen und Boosts einer lokalisierten Feldkonfiguration innerhalb eines festen Systems die Physik ändern, denn diese lassen $\theta^{\mu\nu}$ unverändert [27].

[2] Dies gilt nur für $U(n)$ Eichgruppen.

[3] Der Targetraum des kritischen $N = 2$ Strings ist vierdimensional.

Wellenlösungen. Auch die nichtkommutativ deformierte Feldgleichung ist integrierbar und ihre Solitonlösungen sind eingehend untersucht worden [23][24]. In dieser Arbeit soll die Wechselwirkung von Wellenlösungen der nichtkommutativen Feldgleichung untersucht werden.

Da diese Arbeit auf nichtabelscher Eichtheorie basiert, werden im nächsten Kapitel die wichtigsten Formeln und Zusammenhänge wiederholt. Dabei wird gleichzeitig die Eichgruppe und die verwendete Darstellung spezifiziert.

Das hier diskutierte Modell bzw. Feldgleichung hat ihren Ursprung in den Bogmol'nyi Gleichungen in 2+1 Dimensionen. Dazu ist es nützlich, das Yang-Mills-Higgs Modell in 3+1 Dimensionen für verschwindendes Potential zu diskutieren, da hieraus die Bogomol'nyi Gleichungen abgeleitet werden. Dies geschieht in Kapitel 3. Der Vollständigkeit halber wird außerdem die BPS Monopollösung als solitonartige Lösung der Yang-Mills-Higgs Bewegungsgleichungen angegeben.

Nach dieser Vorarbeit wird in Kapitel 4 das oben genannte kommutative Sigma Modell vorgestellt und der Zusammenhang mit den Bogomol'nyi Gleichungen dargestellt. Wie bereits erwähnt, besitzt die resultierende Feldgleichung sowohl Soliton- als auch Wellenlösungen [12] [14]. Hauptaugenmerk gilt dabei der Konstruktion von Lösungen, deren allgemeines Verhalten und der Wechselwirkung zweier Solitonen bzw. Wellen.

In Kapitel 5 wird zunächst eine Einführung in nichtkommutativer Feldtheorie gegeben. Nichtkommutative Felder und Operatoren aus Einteilchen Quantenmechanik stehen in enger Beziehung zueinander. Das nichtkommutative $\star$-Produkt kann auf die gewöhnliche Multiplikation von Operatoren abgebildet werden, so daß sich die Bewegungsgleichungen in algebraische Operatorgleichungen übersetzen lassen. Das kommutative Modell aus Kapitel 4 kann nun leicht nichtkommutativ erweitert werden. Es wird gezeigt, daß die Wechselwirkung zweier nichtkommutativer Wellen nicht von $\theta^{\mu\nu}$ abhängt und mit der Wechselwirkung zweier kommutativer Wellen identisch ist. Es folgt ein Beweis für die Faktorisierung im Limes $t \to \pm\infty$.

Zur Notation sei angemerkt, daß für die Minkowskimetrik die Vorzeichenkonvention $(-+++)$ verwendet wird, bzw. $(-++)$ im $\mathbb{R}^{2,1}$. Raumzeitindizes werden durch griechische Buchstaben bezeichnet und laufen von 0 bis 3 bzw. von 0 bis 2. Die lateinischen Buchstaben $i, j, k, \ldots$ bezeichen räumliche Komponenten. Die Buchstaben $a, b, c, \ldots$ kennzeichnen Feldkomponenten in Lie Algebren. Über gleiche Indizes wird stets summiert.

2 Yang-Mills Theorie

2.1 Eichgruppen

Die dieser Arbeit zu Grunde liegende Eichgruppe ist $SU(2)$. Es wird sich jedoch zeigen, daß in nichtkommutativer Feldtheorie $SU(2)$ als Eichgruppe nicht realisiert werden kann, dafür aber $U(2) = SU(2) \times U(1)$[4]. In der Lie Algebra $su(2)$ gilt

$$\left[I^a, I^b\right] = \epsilon^{abc} I^c,\ a, b, c = 1, 2, 3\,,$$

wobei $\epsilon^{123} = \epsilon_{123} = 1$. Die Erzeugenden sind in fundamentaler Darstellung

$$I^a = \frac{1}{2i}\,\sigma^a, \tag{1}$$

mit den Paulimatrizen σ^a,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die I^a genügen in dieser Darstellung

$$Sp\,(I^a I^b) = -\frac{1}{2}\,\delta^{ab}.$$

Endliche Transformationen seien mit

$$U(x) := e^{\alpha^a(x) I^a} \tag{2}$$

bezeichnet, wobei die $\alpha^a(x)$ reellwertige Funktionen sind.

2.2 Das Yang-Mills Feld

Im folgenden soll kurz das Konzept der nichtabelschen Eichtheorie zusammengefaßt werden. Wie anfangs bemerkt, sei als Eichgruppe die nichtabelsche kompakte Lie Gruppe $SU(2)$ gewählt. Natürlich läßt sich das weitere leicht auf beliebige Eichgruppen erweitern.

Der QED Lagrangian

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \overline{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m]\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \overline{\psi}[i\gamma^\mu D_\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \end{aligned}\tag{3}$$

[4]Siehe Abschnitt 5.2.

mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist invariant unter $U(1)$ Eichtransformationen, $\psi \to e^{-i\alpha(x)}\psi$. Um $SU(2)$ Invarianz zu erhalten, müssen drei Eichpotentiale A^a_μ eingeführt werden. Die kovariante Ableitung lautet

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + gA^a_\mu \frac{\sigma^a}{2i} =: \partial_\mu + \mathcal{A}_\mu$$

mit Kopplungskonstante g. Das matrixwertige Yang-Mills Feld $\mathcal{A}_\mu$ liegt in der Lie Algebra $su(2)$. Das Verhalten unter Eichtransformationen ist wegen

$$(\partial_\mu + \mathcal{A}'_\mu)U\psi \stackrel{!}{=} U(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu)\psi$$

folgendes

$$\mathcal{A}_\mu \to U\mathcal{A}_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}. \tag{4}$$

Die Feldstärke ist definiert durch

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \tag{5}$$

und nimmt ebenfalls Werte in $su(2)$ an. Die Komponenten sind

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = gF^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2i} \ , \ \ F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{6}$$

Die Feldstärke transformiert wegen (4) sehr einfach,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \to U\mathcal{F}_{\mu\nu}U^{-1}.$$

Es ist offensichtlich, daß diese Gleichungen für die Eichgruppe $U(1)$, wenn die Eichpotentiale also nur komplexe Zahlen statt Matrizen sind, wieder in die bekannten Gleichungen der Elektrodynamik übergehen. Im weiteren wird auf die Wechselwirkungen der Yang-Mills Felder mit Fermionen verzichtet.

Die Spur des Produktes $\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ ist invariant unter $SU(2)$ Transformationen, da sie zyklisch ist

$$Sp\,(U\mathcal{F}_{\mu\nu}U^{-1}U\mathcal{F}^{\mu\nu}U^{-1}) = Sp\,(U^{-1}U\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) = Sp\,(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}),$$

und ist die natürliche und einzig mögliche Verallgemeinerung von (3) [3]. Die Yang-Mills Wirkung lautet somit

$$S = \frac{1}{2g^2}\int d^4x Sp\,(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}.$$

Durch Variation von A_μ^a findet man die Extrema von S

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{2}\int d^4x F^a_{\mu\nu}\delta F^{a\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x F^a_{\mu\nu}(2\delta(\partial^\mu A^{a\nu}) + gf^{abc}\delta(A^{b\mu}A^{c\nu})) \\
&= \int d^4x\{\partial^\mu F^a_{\mu\nu}\delta A^{a\nu} - \frac{1}{2}gf^{abc}F^a_{\mu\nu}(A^{b\mu}\delta A^{c\nu} - A^{c\mu}\delta A^{b\nu})\} \\
&= \int d^4x\{(\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + gf^{abc}A^{b\mu}F^c_{\mu\nu})\delta A^{a\nu}\} \stackrel{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow \quad \partial^\mu F^a_{\mu\nu} + gf^{abc}A^{b\mu}F^c_{\mu\nu} = 0,
\end{aligned}$$

oder kompakt in Matrixform

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}^{\mu\nu}] = [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{F}^{\mu\nu}] = 0. \tag{7}$$

Das sind die Yang-Mills Bewegungsgleichungen. Im Gegensatz zur Elektrodynamik, die auf lineare Gleichungen führt, liegt hier ein System gekoppelter nichtlinearer partieller Differentialgleichungen vor. Diese sind, wenn überhaupt, viel schwieriger zu lösen. Für solche Gleichungen existiert bis heute keine systematische Methode, um eine analytische Lösung zu erhalten. Allerdings sind nichtlineare Feldtheorien bekannt, deren Bewegungsgleichungen integrierbar sind. Solche als Solitonen bekannten Lösungen sind zu jedem Zeitpunkt nichtsinguläre stabile Feldkonfigurationen mit lokalisierter Energiedichte und folglich endlicher Energie. Das Lokalisierungszentrum bewegt sich wie ein freies Teilchen. Trotz der vorliegenden Nichtlinearität bleiben Solitonen in ihrer Form und Geschwindigkeit auch nach einer Wechselwirkung asymptotisch erhalten.

Auch die Yang-Mills Gleichungen sind lösbar. Zum Beispiel kann in der euklidischen Theorie ($\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$) gezeigt werden, daß die Wirkung für bestimmte Feldkonfigurationen ein absolutes Minimum hat, d.h. diese sind Lösungen zur euklidischen Version von (7). Dies soll kurz erläutert werden. Die kovariante Ableitung $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \mathcal{A}_\mu$ erfüllt die Jacobiidentiät

$$[\mathcal{D}_\mu, [\mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_\lambda]] + [\mathcal{D}_\lambda, [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]] + [\mathcal{D}_\nu, [\mathcal{D}_\lambda, \mathcal{D}_\mu]] \equiv 0.$$

Wegen $\mathcal{F}_{\mu\nu} = [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$ gilt

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{F}_{\nu\lambda}] + [\mathcal{D}_\lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}] + [\mathcal{D}_\nu, \mathcal{F}_{\lambda\mu}] \equiv 0.$$

Multipliziert mit $\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\varrho}$, so folgt wegen der Antisymmetrie von $\epsilon_{\mu\nu\lambda\varrho}$ und nach Umbenennung der Summationsindizes

$$\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\varrho}\,[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{F}_{\nu\lambda}] + \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\varrho}\,[\mathcal{D}_\lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\varrho}\,[\mathcal{D}_\nu, \mathcal{F}_{\lambda\mu}] \quad =$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\varrho}\,[\mathcal{D}_\mu,\mathcal{F}_{\nu\lambda}] + \frac{1}{2}\,\epsilon_{\lambda\mu\nu\varrho}\,[\mathcal{D}_\lambda,\mathcal{F}_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}\,\epsilon_{\nu\lambda\mu\varrho}\,[\mathcal{D}_\nu,\mathcal{F}_{\lambda\mu}] &= \\
\frac{3}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\varrho}\,[\mathcal{D}_\mu,\mathcal{F}_{\nu\lambda}] &= \\
3\,[\mathcal{D}_\mu,*\mathcal{F}_{\mu\varrho}] &\equiv 0,
\end{aligned}
$$

wobei der duale Felstärketensor definiert ist durch

$$*\mathcal{F}_{\mu\varrho} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\varrho\nu\lambda}\mathcal{F}_{\nu\lambda}.$$

Aus der Jacobiidentität folgt also die Bianchiidentität $[\mathcal{D}_{\mu\nu},*\mathcal{F}_{\mu\varrho}] \equiv 0$. Jede Feldstärke, die selbstdual bzw. antiselbstdual ist

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \pm{*\mathcal{F}_{\mu\nu}} \tag{8}$$

löst die euklidischen Yang-Mills Gleichungen

$$\partial_\mu\mathcal{F}_{\mu\nu} + [\mathcal{A}_\mu,\mathcal{F}_{\mu\nu}] = [\mathcal{D}_\mu,\mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0.$$

Die Wirkung S_{Euk} nimmt für selbstduale Feldstärken das absolute Minimum an, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
S_{Euk} &= -\frac{1}{2g^2}\int d^4x Sp\,(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{4g^2}\int d^4x Sp\,(\mathcal{F}_{\mu\nu} \pm *\mathcal{F}_{\mu\nu})^2 \pm \frac{1}{4g^2}\int d^4x Sp\,(\mathcal{F}_{\mu\nu} * \mathcal{F}_{\mu\nu}) \\
&\geq \pm\frac{1}{2g^2}\int d^4x Sp\,(\mathcal{F}_{\mu\nu}*\mathcal{F}_{\mu\nu}),
\end{aligned} \tag{9}
$$

denn wegen $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} = 2(\delta_{\alpha\varrho}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\varrho})$ ist $\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} = *\mathcal{F}_{\mu\nu}*\mathcal{F}_{\mu\nu}$. Gleichheit gilt nur für selbstduale Feldstärken, $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \pm*\mathcal{F}_{\mu\nu}$. Solche Lösungen, die S_{Euk} minimieren, nennt man Instantone. Sie sind in Raum und euklidischer Zeit lokalisierte Feldkonfigurationen.

3 Monopole

3.1 Monopole

Coleman zeigte 1977, daß eine reine Yang-Mills Theorie in 3+1 Dimensionen keine regulären lokalisierten Lösungen liefert [10]. Dieses System kann aber durch drei Skalarfelder (Higgsfelder) ϕ^a erweitert werden. Georgi und Glashow konstruierten

1972 folgenden Lagrangian ($\Phi = \phi^a I^a$, $\lambda, a \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} Sp\,[\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}] + Sp\,[(\mathcal{D}_\mu\Phi)(\mathcal{D}^\mu\Phi)] - V(\phi) \\
&= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + Sp\,[(\partial_\mu\Phi + [\mathcal{A}_\mu,\Phi])(\partial^\mu\Phi + [\mathcal{A}^\mu,\Phi])] - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - a^2)^2 \\
&= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\partial_\mu\phi^a + g\epsilon^{abc}A^b_\mu\phi^c\right)^2}_{=:(D_\mu\phi^a)^2} - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - a^2)^2
\end{aligned} \tag{10}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}
D_\mu F^{a\mu\nu} &= g\epsilon^{abc}(D^\nu\phi^b)\phi^c \\
D_\mu D^\mu\phi^a &= -\lambda(\phi^b\phi^b)\phi^a + \lambda a^2\phi^a.
\end{aligned} \tag{11}$$

Für zeitunabhängige Felder und mit $A^a_0 \equiv 0$ ist die erhaltene Energie des Yang-Mills-Higgs Systems (10)

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F^a_{ij}F^{aij} + \frac{1}{2} D_i\phi^a D^i\phi^a + \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - a^2)^2\right], \tag{12}$$

welche positiv definit ist. Damit die Energie endlich bleibt, müssen die Felder im räumlich Unendlichen eine $E = 0$ Konfiguration anstreben. Für die Higgsfelder bedeutet das offensichtlich

$$r \to \infty \ : \left\{ \begin{array}{l} D_i\phi^a = 0 \\ \phi^a\phi^a = a^2 \quad \Rightarrow \phi^a \to a\hat{\phi}^a\ ,\ \hat{\phi}^a\hat{\phi}^a = 1. \end{array} \right. \tag{13}$$

Die Feldstärke muß im Unendlichen verschwinden. Daraus folgt für das Yang-Mills Feld $\mathcal{A}_\mu$

$$\mathcal{A}_\mu \to U\partial_\mu U^{-1},$$

da das $\mathcal{F}_{\mu\nu} = gF^a_{\mu\nu}T^a \to 0$ und somit $F^a_{\mu\nu} \to 0$ nach sich zieht. $\mathcal{A}_\mu$ muß demnach nicht im Unendlichen verschwinden, sondern lediglich in eine „reine" Eichung übergehen. Die Asymptotik der Komponenten A^a_μ folgt weiter unten.

Nun soll das absolute Minimum von E gefunden werden. Dazu sei im weiteren nur der Grenzfall $\lambda \to 0$ von Bedeutung. Das Energiefunktional läßt sich folgendermaßen umformen

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{4}(F^a_{lm} - \epsilon_{lmn}D^n\phi^a)^2 + \frac{1}{2}\epsilon_{lmn}F^{alm}D^n\phi^a\right]. \tag{14}$$

Der zweite Term kann als Oberflächenintegral geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\int d^3x \frac{1}{2}\epsilon_{lmn}F^{alm}D^n\phi^a &= \int d^3x \left[D^n(\frac{1}{2}\epsilon_{nlm}F^{alm}\phi^a) - (\frac{1}{2}\epsilon_{lmn}(D^nF^{lm})^a)\phi^a\right] \\
&= \int d^3x\partial_n(\frac{1}{2}\epsilon_{nlm}F^a_{lm}\phi^a) = \oint_{S^2_\infty} d\sigma_n \frac{1}{2}\epsilon_{nlm}F^a_{lm}\phi^a,
\end{aligned}$$

wegen der Bianchiidentität $\frac{1}{2}\,\epsilon_{lmn}D^nF^{alm} \equiv 0$ [1]. Aus (13) folgt die Asymptotik von A^a_k, denn

$$\begin{aligned}
0 &= a\partial_k\hat{\phi}^a + ag\epsilon^{abc}A^b_k\hat{\phi}^c \\
\Leftrightarrow 0 &= \epsilon^{ade}\partial_k\hat{\phi}^a + g\epsilon^{abc}\epsilon^{ade}A^b_k\hat{\phi}^c = \epsilon^{ade}\partial_k\hat{\phi}^a + gA^d_k\hat{\phi}^e - gA^e_k\hat{\phi}^d \\
&= \epsilon^{abc}\partial_k\hat{\phi}^c + gA^a_k\hat{\phi}^b - gA^b_k\hat{\phi}^a \\
&\Rightarrow \; A^a_k = -\epsilon^{abc}\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c + \hat{\phi}^aA^b_k\hat{\phi}^b.
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}F^a_{lm}\phi^a &= \frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}\left(\partial_lA^a_m - \partial_mA^a_l + g\epsilon^{abc}A^b_lA^c_m\right)a\hat{\phi}^a \\
&= \frac{a}{2}\,\epsilon_{klm}\hat{\phi}^a\left[2\partial_l(\hat{\phi}^aA^b_m\hat{\phi}^b - \frac{2}{g}\,\epsilon^{abc}(\partial_l\hat{\phi}^b)(\partial_m\hat{\phi}^c))\right] \\
&= a\epsilon_{klm}\hat{\phi}^a\partial_l(\hat{\phi}^aA^b_m\hat{\phi}^b) - \frac{a}{g}\,\epsilon_{klm}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a(\partial_l\hat{\phi}^b)(\partial_m\hat{\phi}^c) \\
&= \underbrace{a\epsilon_{klm}\partial_l(A^b_m\hat{\phi}^b)}_{=:I_1} - \frac{a}{g}\,\epsilon_{klm}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a(\partial_l\hat{\phi}^b)(\partial_m\hat{\phi}^c).
\end{aligned}$$

Parametrisiert man die Sphäre S^2_∞ durch zwei Winkel θ_1, θ_2, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\oint_{S^2_\infty} d\sigma_n(\frac{1}{2}\,\epsilon_{lmn}F^a_{lm}\phi^a) &= \frac{1}{2}\oint_{S^2_\infty} d^2\theta\epsilon_{klm}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial x_l}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial x_m}{\partial\theta_\beta}(\frac{1}{2}\,\epsilon_{knt}F^a_{nt}\phi^a) \\
&= -\frac{a}{2g}\oint_{S^2_\infty} d^2\theta\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a\frac{\partial\hat{\phi}^b}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial\hat{\phi}^c}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial\theta_\beta} \\
&\quad + \int d^3x\partial_kI_1 \\
&= -\frac{a}{2g}\oint_{S^2_\infty} d^2\theta\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a\frac{\partial\hat{\phi}^b}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial\hat{\phi}^c}{\partial\theta_\beta} \\
&\quad + a\int d^3x\,\underbrace{\epsilon_{klm}\partial_k\partial_l(A^b_m\hat{\phi}^b)}_{=0}.
\end{aligned}$$

Das Quadrat des Integranden der rechten Seite ist

$$\begin{aligned}
\left[\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{abc}\hat{\phi}^a\frac{\partial\hat{\phi}^b}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial\hat{\phi}^c}{\partial\theta_\beta}\right]^2 &= \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}\epsilon^{abc}\epsilon^{ade}(\partial_\alpha\hat{\phi}^b)(\partial_\beta\hat{\phi}^c)(\partial_\gamma\hat{\phi}^d)(\partial_\delta\hat{\phi}^e) \\
&= 4\cdot\frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}(\partial_\alpha\hat{\phi}^b)(\partial_\gamma\hat{\phi}^b)(\partial_\beta\hat{\phi}^c)(\partial_\delta\hat{\phi}^c) \\
&= 4\det\left[\frac{\partial\hat{\phi}^a}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial\hat{\phi}^a}{\partial\theta_\beta}\right] \\
&= 4\left|g_{\alpha\beta}\right|,
\end{aligned}$$

[1] $\epsilon^{klm} = \epsilon_{klm}$.

wobei $g_{\alpha\beta}$ die Metrik der Einheitssphäre

$$S^2_{int} \; : \; \hat{\phi}^a \hat{\phi}^a = 1$$

in der Lie Algebra von $SU(2)$ ist. Mit einem neuen Parameter $c := -a\, g$ [4] ergibt sich insgesamt

$$\int d^3x \frac{1}{2}\, \epsilon_{klm} F^a_{lm} D_k \phi^a = \frac{c}{g^2} \oint_{S^2_\infty} d^2\theta \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} = \frac{c}{g^2}\, 4\pi q, \tag{15}$$

denn während bei der Integration der Punkt (θ_1, θ_2) die Sphäre S^2_∞ einmal überdeckt, kann $\hat{\phi}^a$ die Sphäre S^2_{int} q-mal überdecken, wobei jedesmal der Raumwinkel 4π addiert wird. Insgesamt folgt damit für das Energiefunktional (14)

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{4} \left(F^a_{lm} - \epsilon_{lmn} D_n \phi^a \right)^2 \right] + \frac{c}{g^2}\, 4\pi q \geq \frac{c}{g^2}\, 4\pi q. \tag{16}$$

Das Minimum wird angenommen, wenn folgende Gleichung erfüllt ist

$$F^a_{kl} = \epsilon_{klm} D_m \phi^a. \tag{17}$$

Diese Gleichungen hat E.B. Bogmol'nyi 1976 abgeleitet. Eine statische Feldkonfiguration, die den Randbedingungen (13) genügt und die Bogomol'nyi Gleichungen (17) erfüllt, ist also das absolute Minimum von (16) und löst folglich die Bewegungsgleichungen des Yang-Mills Higgs Systems.

Monopole sind also im Raum lokalisierte zeitunabhängige Lösungen der Bewegunsgleichungen (11). Sie sind jedoch keine solche Solitonen, wie sie in 2.2 definiert wurden.

3.2 BPS-Lösung

Prasad, Sommerfield (1975) und Bogomol'nyi (1976) fanden eine exakte Lösung (BPS-Lösung) zu (17). Die BPS Monopollösung geht von folgendem Ansatz aus

$$\begin{aligned} A^a_k &= \frac{1}{g}\, \epsilon^{akb} \frac{x^b}{r}\, a(r) \\ \phi^a &= \frac{1}{g} \frac{x^a}{r}\, h(r) \end{aligned}$$

mit zunächst willkürlichen Funktionen $h(r)$ und $a(r)$. Dieser Ansatz ist motiviert durch die Tatsache, daß Raum und Isospinindizes vermischt werden, d.h. die Felder haben z.B. in x_1-Richtung nur eine '1'-Komponente in der Lie Algebra usw.. Es liegt somit eine Art sphärischer Symmetrie vor. Aus den Bogomol'nyi Gleichungen folgt ein System zweier Differentialgleichungen für $a(r)$ und $h(r)$

$$\begin{aligned} (ra)' &= h(ra-1) \\ h' + h(a - \frac{1}{r}) &= a^2 + a' - \frac{a}{r}. \end{aligned}$$

Die obere Gleichung läßt sich nach h auflösen und in die untere Gleichung einsetzen, so daß sich das System auf eine DGL in a reduziert. Die Lösungen lauten [4]

$$a = \frac{1}{r}\left[1 \pm \frac{cr}{\sinh(cr+r_0)}\right]\ ,\ h = \frac{1}{r} - \frac{c}{\tanh(cr+r_0)}.$$

Um Singularitäten zu vermeiden, kommen nur Lösungen mit $r_0 = 0$ und ' $-$ ' in Frage. Die Komponenten des Yang-Mills Feldes und des Higgsfeldes sind

$$\begin{aligned} A_k^a &= \epsilon^{akb}\frac{x^b}{gr^2}\left[1 - \frac{cr}{\sinh(cr)}\right] \\ \phi^a &= \frac{x^a}{gr^2}\left[1 - \frac{cr}{\tanh(cr)}\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Um die Energie zu berechnen, sei bemerkt, daß wegen

$$\frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}F_{lm}^a D_k\phi^a = \partial_k\left(\frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}F_{lm}^a\phi^a\right)$$

und (17) gilt

$$\begin{aligned} \partial_k\left(\frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}F_{lm}^a\phi^a\right) &= \partial_k\left[\left(\partial_k\phi^a + g\epsilon^{abc}A_k^b\phi^c\right)\phi^a\right] = \partial_k\left(\partial_k\phi^a\right)\phi^a \\ &= \frac{1}{2}\,\partial_k\partial_k\left(\phi^a\phi^a\right). \end{aligned}$$

Mit den obigen Potentialen ergibt sich also

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2g^2}\int d^3x\partial_k\partial_k\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{cr}{\tanh(cr)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2g^2}\lim_{r\to\infty} r^2\oint_{S_r^2} d\Omega\,\partial_r\left[\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{cr}{\tanh(cr)}\right)^2\right] \\ &= -\frac{4\pi}{g^2}\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{cr}{\tanh(cr)} - 1\right)\left(\frac{c^2r^2}{\sinh^2(cr)} - 1\right)\right] \\ &= \frac{4\pi c}{g^2}. \end{aligned}$$

Es liegt eine $q = 1$ Lösung vor. Das ist anschaulich klar, denn für große Abstände verhalten sich die Felder wie folgt

$$r \to \infty \ : \left\{ \begin{array}{rl} \phi^a = & -\frac{1}{g}\frac{x^a}{r} \\ A_k^a = & \epsilon^{akb}\frac{x^b}{r^2} \end{array} \right. .$$

Die Richtung von ϕ^a in der Lie Algebra ist demnach parallel zur Koordinatenrichtung. Es liegt eine eins zu eins Abbildung von $S^2_\infty \to S^2_{int}$ vor, was die oben angesprochene sphärische Symmetrie rechtfertigt.

4 Solitonen und Wellen in 2+1 Dimensionen

4.1 Bogomol'nyi Gleichungen in 2+1 Dimensionen

Die Bogomol'nyi Gleichungen $D_k\phi^a = \frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}F^{alm}$ lauten in 2+1 dimensionaler Raumzeit [1]

$$\partial_\mu \Phi + [\mathcal{A}_\mu, \Phi] = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}$$

oder

$$D_\mu \phi^a = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}, \tag{19}$$

wobei $\epsilon_{\mu\alpha\beta} = -\epsilon^{\mu\alpha\beta} = -1$. Aus (19) folgen zwei weitere Gleichungen. Zunächst ist

$$D_\mu D^\mu \phi^a = 0, \tag{20}$$

denn es gilt ja die Bianchiidentität $\epsilon_{\mu\alpha\beta}D^\mu F^{a\alpha\beta} \equiv 0$. Zusätzlich impliziert (19)

$$\begin{aligned} D^\alpha F^a_{\alpha\beta} &= -\epsilon_{\mu\alpha\beta}D^\alpha(\partial^\mu\phi^a + g\epsilon^{abc}A^{b\mu}\phi^c) \\ &= \epsilon_{\beta\alpha\mu}\left[\frac{g}{2}\,\epsilon^{abc}\left(\partial^\alpha A^{b\mu} - \partial^\mu A^{b\alpha}\right)\phi^c + g^2\epsilon^{abc}\epsilon^{cde}A^{b\alpha}A^{d\mu}\phi^e\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\epsilon_{\beta\alpha\mu}\left[g\epsilon^{abc}\left(\partial^\alpha A^{b\mu} - \partial^\mu A^{b\alpha}\right) + 2g^2 A^{a\mu}A^{c\alpha}\right]\phi^c \\ &= \frac{g}{2}\,\epsilon_{\beta\alpha\mu}\epsilon^{abc}F^{b\alpha\mu}\phi^c. \end{aligned} \tag{21}$$

Es zeigt sich, daß (20) und (21) die Bewegungsgleichungen der Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\,Sp\,(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) - Sp\,(\mathcal{D}_\mu\Phi)(\mathcal{D}^\mu\Phi) \\ &= \frac{1}{2}\,(D_\mu\phi^a)\,(D^\mu\phi^a) - \frac{1}{4g^2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \end{aligned} \tag{22}$$

[1] Die Metrik im $\mathbb{R}^{1,2}$ ist $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1,+1,+1)$. Raumzeitindizes nehmen Werte $\mu,\nu = 0,1,2$ an und werden wie üblich bezeichnet, $(x^0,x^1,x^2) = (t,x,y)$.

sind [13]. Aufällig ist hierbei das relative Vorzeichen der beiden Terme. (22) ist nicht der übliche Yang-Mills Higgs Lagrangian, denn dort haben beide Terme ein „-“ Vorzeichen. Eine schwerwiegende Konsequenz ist, daß das aus (22) resultierende Energiefunktional zwar erhalten aber nicht positiv definit ist [13]. Für Lösungen zu (19) verschwindet die Energie sogar identisch. Allerdings ist es möglich die Bogomol'nyi Gleichungen so umzuformulieren, daß sie ein positiv definites Energiefunktional zur Folge haben. Jedoch wird hierbei die Lorentzsymmetrie gebrochen.

Zunächst ist es für Lösungen von (19) möglich, die Felder $\mathcal{A}_\mu$ und Φ durch eine Eichtransformation in folgenden Zusammenhang zu bringen

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_y \quad , \quad \mathcal{A}_x = -\Phi.$$

Nun werden $\mathcal{A}_\mu$ und Φ durch die ersten Ableitungen eines neuen Feldes

$$J \,:\, \mathbb{R}^{1,2} \to SU(2)$$

ausgedrückt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_y &= \frac{1}{2}\, J^{-1}\left(\partial_t J + \partial_y J\right) \\ \mathcal{A}_x = -\Phi &= \frac{1}{2}\, J^{-1}\partial_x J. \end{aligned} \tag{23}$$

(19) impliziert damit eine Gleichung für J, nämlich

$$\partial_x(J^{-1}\partial_x J) + \partial_y(J^{-1}\partial_y J) - \partial_t(J^{-1}\partial_t J) + \partial_y(J^{-1}\partial_t J) - \partial_t(J^{-1}\partial_y J) = 0. \tag{24}$$

Schreibt man diese Gleichung wie folgt

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(J^{-1}\partial_\nu J\right) + V_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\nu}\partial_\mu\left(J^{-1}\partial_\nu J\right) = 0, \tag{25}$$

mit $V_\alpha = (0,1,0)$, so ist offentsichtlich, daß keine Lorentzinvarianz mehr vorliegt, denn ein nichtverschwindender Vektor V_α zeichnet eine spezielle Raumzeitrichtung aus und bricht die Symmetrie. Allerdings wird sich zeigen, daß (25) integrierbar ist.

Der erste Teil von (25), $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(J^{-1}\partial_\nu J\right) = 0$, ist die Feldgleichung eines $SU(2)$ Sigma Modells, dessen Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\, Sp\,\left[(\partial_\mu J^{-1})(\partial^\mu J)\right]. \tag{26}$$

Der Energie-Impuls Tensor zu (26) ist

$$T_{\mu\nu} = (-\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})Sp\,\left[J^{-1}(\partial_\alpha J)J^{-1}(\partial_\beta J)\right], \tag{27}$$

und ist divergenzfrei, $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Gleichung (25) beschreibt nun die Dynamik eines modifizierten $SU(2)$ Sigma Modells, und $T_{\mu\nu}$ ist wegen (25) nicht erhalten,

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} V_\nu \epsilon^{\alpha\beta\gamma} Sp \left[J^{-1}(\partial_\alpha J) J^{-1}(\partial_\beta J) J^{-1}(\partial_\gamma) J \right] \neq 0, \tag{28}$$

und somit auch nicht der Energie-Impuls Vektor $T_{\mu 0}$, es sei denn $V_0 = 0$, was mit $V_\alpha = (0,1,0)$ konsistent ist. Die resultierende Energiedichte ist also für das modifizierte Modell (25) dieselbe wie für (26)

$$\mathcal{E} = T_{00} = \frac{1}{2} Sp \left[(\partial_t J^{-1})(\partial_t J) + (\partial_x J^{-1})(\partial_x J) + (\partial_y J^{-1})(\partial_y J) \right]. \tag{29}$$

Wegen $\partial^\mu T_{\mu 0} = 0$ ist

$$\partial_t E = \int d^2x \partial_t \mathcal{E} = 0.$$

Die Energie ist also erhalten. Um die Konvergenz des Integrals zu garantieren, muß das Feld J die Randbedinung

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty \ : \ J = K + J(\varphi)\frac{1}{r} + \mathcal{O}\,(\frac{1}{r^{3/2}}) \tag{30}$$

erfüllen, wobei $z = re^{i\varphi} = x + iy$, K eine konstante $SU(2)$ Matrix und $\partial_t J(\varphi) = 0$ ist. Das Energiefunktional $E = \int d^2x\mathcal{E}$ ist positiv definit[2].

Die Bogmol'nyi Gleichungen in 2+1 Dimensionen können also so formuliert werden, daß sie ein positiv definites Energiefunktional zur Folge haben, wodurch jedoch die Lorentzsymmetrie gebrochen wird. Im nächsten Schritt soll nun gezeigt werden, daß (25) bzw. (24) integrierbar ist. R.S. Ward hat gezeigt, daß diese Gleichung Solitonlösungen besitzt [12].

Ward konstruiert Lösungen zu (25), indem (25) als Integrabilitätsbedingung eines Systems linearer Differentialgleichungen formuliert wird. Dies wird im folgenden gezeigt.

Der Ausgangspunkt ist folgendes lineares System ($\zeta \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} (\zeta\partial_x - \partial_u)\psi &= A\psi \\ (\zeta\partial_v - \partial_x)\psi &= B\psi \end{aligned} \tag{31}$$

wobei $\psi = \psi(u,v,x,\zeta)$ eine unimodulare 2×2 Matrix ist und der Bedingung

$$[\psi(u,v,x,\bar{\zeta})]^\dagger \psi(u,v,x,\zeta) = 1 \tag{32}$$

[2]Sollte das Feld J in einer nichtkompakten Lie Gruppe leben, so ist dies nicht mehr der Fall [14]

genügt. Die beiden Matrizen A und B sind unabhängig von ζ. Da das obige System überbestimmt ist, müssen A und B zusätzlichen Integrabilitätsbedingungen genügen. Diese ergeben sich aus

$$(\zeta B\partial_x - B\partial_u)\psi = BA\psi \quad \text{und} \quad (\zeta A\partial_v - A\partial_x)\psi = BA\psi + [A,B]\psi$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{gathered}(\zeta\partial_x(B\psi) - \zeta B_x\psi - \partial_u(B\psi) + B_u\psi = \\ (\zeta\partial_v(A\psi) - \zeta A_v\psi - \partial_x(A\psi) + A_x\psi - [A,B]\psi\end{gathered}$$

$$\overset{(31)}{\Leftrightarrow} \qquad \begin{gathered}(\zeta\partial_x(\zeta\partial_v - \partial_x) - \zeta B_x - \partial_u(\zeta\partial_v - \partial_x) + B_u)\psi = \\ (\zeta\partial_v(\zeta\partial_x - \partial_u) - \zeta A_v - \partial_x(\zeta\partial_x - \partial_u) + A_x - [A,B])\psi\end{gathered}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \zeta(B_x - A_v)\psi + (A_x - B_u - [A,B])\psi = 0$$

$$\Rightarrow \qquad B_x = A_v \ , \ A_x - B_u - [A,B] = 0. \tag{33}$$

Mit $J(u,v,x) = \psi(u,v,x,\zeta=0)^{-1}$, wobei $\psi(u,v,x,\zeta=0)$ eine Lösung von (31) ist, (33) und (31) für $\zeta = 0$ ist

$$A = J^{-1}J_u \ , \ B = J^{-1}J_x.$$

Aus der zweiten Gleichung von (33) resultiert dann schließlich

$$\partial_v(J^{-1}J_u) = \partial_x(J^{-1}J_x). \tag{34}$$

Mit den Koordinaten

$$u = \frac{1}{2}(t+y) \quad , \quad v = \frac{1}{2}(t-y) \ \Rightarrow \partial_u = \partial_t + \partial_y \quad , \quad \partial_v = \partial_t - \partial_y \tag{35}$$

wird (34) zu

$$\partial_x(J^{-1}\partial_x J) + \partial_y(J^{-1}\partial_y J) - \partial_t(J^{-1}\partial_t J) + \partial_y(J^{-1}\partial_t J) - \partial_t(J^{-1}\partial_y J) = 0, \tag{36}$$

welches exakt Gleichung (24) ist. Es zeigt sich also, daß Lösungen von (24) mit Hilfe des linearen Systems erzeugt werden können. Überdies garantiert (32) die Unitarität von J.

4.2 Konstruktion von Lösungen

Ward betrachtet folgenden Ansatz

$$[\psi\,(x,u,v,\zeta)]_{ab} = \delta_{ab} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta - \mu_k}\, n_a^k m_b^k \ , \quad a,b = 1,2 \tag{37}$$

wobei die μ_k komplexe Konstanten und n_a^k, m_a^k komplexwertige Funktionen von x, u, v sind. Aus der Realitätsbedingung (32) wird ersichtlich, daß die Singularitäten im Ansatz (37) bei $\zeta = \mu_k$ (bzw. bei $\zeta = \bar{\mu}_k$) hebbar sein müssen, da die rechte Seite überhaupt nicht von ζ abhängt. Das bedeutet, die entsprechenden Residuen müssen verschwinden[3]

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Res}_{\zeta=\bar{\mu}_k} \sum_{b=1}^{2} \psi_{ab}(\zeta)[\psi_{bc}(\bar{\zeta})]^\dagger \\
= \; & \operatorname{Res}_{\zeta=\bar{\mu}_k} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\zeta-\bar{\mu}_r}\, \bar{n}_c^r \bar{m}_a^r + \sum_{b=1}^{2} \sum_{r,l=1}^{n} \frac{1}{(\zeta-\bar{\mu}_r)(\zeta-\mu_l)}\, n_a^l m_b^l \bar{n}_c^r \bar{m}_b^r \right) \\
= \; & \lim_{\zeta\to\bar{\mu}_k} (\zeta-\bar{\mu}_k) \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\zeta-\bar{\mu}_r}\, \bar{n}_c^r \bar{m}_a^r + \sum_{b=1}^{2} \sum_{r,l=1}^{n} \frac{1}{(\zeta-\bar{\mu}_r)(\zeta-\mu_l)}\, n_a^l m_b^l \bar{n}_c^r \bar{m}_b^r \right) \\
=: \; & \bar{n}_c^k \bar{m}_a^k + \sum_{l=1}^{n} n_a^l \bar{n}_c^k \, \Gamma^{kl} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \; & n_a^l = -\sum_{k=1}^{n} (\Gamma^{-1})^{lk} \bar{m}_a^k \quad , \quad \Gamma^{kl} = \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{\bar{\mu}_k - \mu_l}\, \bar{m}_a^k m_a^l .
\end{aligned}
$$

Die gleichen Argumente schränken die Funktionen m_a^k ein, denn die rechte Seite von (31) multipliziert mit ψ^{-1} ist ebenfalls unabhängig von ζ. Die Forderung nach verschwindenden Residuen ergibt Differentialgleichungen für m_a^k

$$
(\mu_k \partial_x - \partial_u) m_a^k = 0 = (\mu_k \partial_v - \partial_x) m_a^k .
$$

Diese sind erfüllt, wenn die m_a^k meromorphe Funktionen von

$$
\omega_k = x + \mu_k u + \frac{1}{\mu_k} v = x + \frac{1}{2}(\mu_k - \frac{1}{\mu_k}) y + \frac{1}{2}\,(\mu_k + \frac{1}{\mu_k}) t \tag{38}
$$

sind. Auf Grund von Homogenitätseigenschaften von ψ können die $(m_1^k, m_2^k) = (\,1, f_k(\omega_k))$ gewählt werden. In der momentanen Form von ψ gilt für die Determinante [12]

$$
\det\psi = \prod_{k=1}^{n} \frac{\bar{\mu}_k}{\mu_k} =: \alpha .
$$

Insgesamt lautet somit die Lösung von (25)

$$
(J^{-1})_{ab} = (\psi(\zeta = 0))_{ab} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\delta_{ab} + \sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\, (\Gamma^{-1})^{kl} \bar{m}_a^l m_b^k \right) , \tag{39}
$$

da $\det J^{-1} \stackrel{!}{=} 1$.

[3] Für das Residuum bei $\zeta = \mu_k$ ergibt sich lediglich das komplex konjugierte Ergebnis.

4.3 Solitonen

Der vollständige Ausdruck für J^{-1} bzw. J wird mit wachsendem n sehr schnell kompliziert. Deshalb sei im folgenden zunächst $n = 1$. Wie sich zeigen wird, ist die resultierende Energiedichte lokalisiert und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in der xy-Ebene ohne ihre Form zu verändern. Dies sind die anfangs erwähnten Charakteristika eines Solitons.

Für Γ und J ergibt sich für $n = 1$

$$\Gamma = \frac{1}{\bar{\mu} - \mu}(1 + |f|^2) \Rightarrow J = \frac{1}{|\mu|(1 + |f|^2)} \begin{pmatrix} \mu + \bar{\mu}|f|^2 & (\mu - \bar{\mu})f \\ (\mu - \bar{\mu})\bar{f} & \bar{\mu} + \mu|f|^2 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Damit keine Singularitäten auftreten, ist $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. In Polarkoordinaten, $\mu = me^{i\theta}$, wird die Energiedichte (29) zu

$$\mathcal{E} = \frac{2(1 + m^2)^2 \sin^2\theta}{m^2} \frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} \ , \ \ f' := \partial_\omega f. \quad (41)$$

Ward wählt die Funktion $f(\omega)$ rational, damit die Matrixelemente von J überall glatt und die Randbedingungen (30) erfüllt sind. Der Einfachheit halber sei $f(\omega) = \omega$, d.h. die Energiedichte ist um den Ursprung lokalisiert[4]. Für zeitunabhängige Lösungen, ($\mu = \pm i$), ist die Gesamtenergie

$$E = 8 \int dxdy \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 8\pi \int_0^\infty d\xi \frac{1}{(1 + \xi)^2} = 8\pi.$$

Solitonen, also zeitabhängige Lösungen, bewegen sich mit konstanter Geschwin-

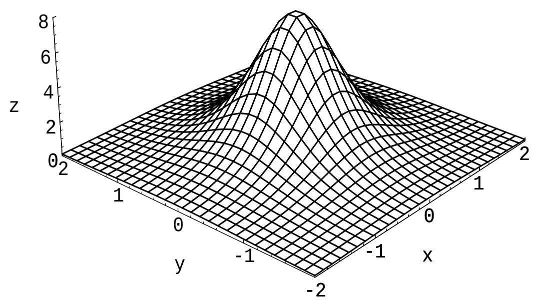

Abbildung 1: $\mathcal{E}$ für $f = \omega$ und $\mu = i$.

[4] Der allgemeine Fall, $f = \omega + c$, $c \in \mathbb{C}$, ist um c lokalisiert.

digkeit. Diese kann aus (38) bestimmt werden. Sei $\xi := \frac{1}{2}(\mu - \mu^{-1}), \tau := \frac{1}{2}(\mu + \mu^{-1})$ und $\omega = x' + iy'$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi})y + \frac{1}{2}(\tau + \bar{\tau})t \\ \frac{1}{2i}(\xi - \bar{\xi})y + \frac{1}{2i}(\tau - \bar{\tau})t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}) \\ 0 & \frac{1}{2i}(\xi - \bar{\xi}) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} t \right] \\
\Rightarrow \quad & v_y = \frac{\bar{\tau} - \tau}{\xi - \bar{\xi}} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \\
& v_x = \frac{1}{2}(\tau + \bar{\tau}) - \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi})v_y = \frac{-2m\cos\theta}{1 + m^2} \\
& v^2 = 1 - \frac{4m^2 \sin^2\theta}{(1 + m^2)^2}.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Die Konstante $\mu = me^{i\theta}$ parametrisiert folglich die Geschwindigkeit des Solitons. Da μ rein imaginär ist, folgt $\sin\theta \neq 0$ und somit $v^2 < 1$, d.h. das Soliton bewegt sich stets langsamer als Licht. Mit (41) folgt für die Gesamtenergie

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{2(1 + m^2)^2 \sin^2\theta}{m^2} \int dxdy \frac{1}{(1 + |\omega|^2)^2} \\
&= \frac{2(1 + m^2)^2 \sin^2\theta}{m^2} \int dxdy \frac{1}{(1 + x'^2 + y'^2)^2} \\
&= \frac{2i}{\xi - \bar{\xi}} \frac{2(1 + m^2)^2 \sin^2\theta}{m^2} \int dx'dy' \frac{1}{(1 + x'^2 + y'^2)^2} \\
&= 8\pi\gamma \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

wobei $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ den üblichen relativistischen Faktor bezeichnet.

Zum Schluß sollen noch zwei spezielle Lösungen diskutiert werden. Für $\theta = \pm\pi/2$ bewegt sich das Soliton in y-Richtung und verhält sich relativistisch, denn die Energie ist $8\pi\gamma$, die Ruheenergie 8π multipliziert mit $1/\sqrt{1 - v^2}$. Zusätzlich erfährt das Soliton eine Längenkontraktion in Bewegungsrichtung, d.h. das Profil in x-Richtung bleibt unverändert und in y-Richtung ist diese gemäß $\sqrt{1 - v^2}$ lorentzkontrahiert. Ist andererseits $m = 1$, so bewegt sich das Soliton in x-Richtung und verhält sich nicht relativistisch, denn die Energie ist $8\pi|\sin\theta|$ und somit kleiner als die Ruheenergie. Außerdem nimmt die Höhe von $\mathcal{E}$ ab, wenn die Geschwindigkeit steigt. Für andere Bewegungsrichtungen ergibt sich ein gemischtes Verhalten. Die Anisotropie von (25) äußert sich demnach insbesondere darin, daß die Energie von der Bewegungsrichtung abhängt.

Für $n = 2$ folgt aus der Lösung (39) eine Energiedichte, die zwei Lokalisationszentren aufweist, welche sich relativ zueinander bewegen, also ein Zwei-Soliton. Die $n = 2$-Lösung hängt von zwei Funktionen f_1 und f_2 sowie von zwei komplexen Parametern μ_1 und μ_2 ab. Ward wählt die f_k[12]

$$f_k(\omega_k) = \omega_k + c_k \ , \ \ c_k \in \mathbb{C} \ , k = 1, 2.$$

Die beiden Solitonen S_1 und S_2 bewegen sich jeweils auf einer Geraden, die durch μ_k und c_k festgelegt ist. Die Wechselwirkung ist trivial, die Solitonen streuen nicht noch verändern sie ihre Form. Ward zeigt dies an Hand des asymptotischen Verhaltens der Energiedichte $\mathcal{E}$. Setzt man sich nämlich z.B. in ein mit S_2 mitbewegtes System, so resultiert für $\mathcal{E}$ im Grenzfall $t \to -\infty$ bzw. $t \to +\infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{|t|\to\infty} &= B(A + |f_2|^2)^{-2} \qquad (43) \\ A &= |(\mu_1 - \bar{\mu}_2)/(\mu_1 - \mu_2)|^2 \ , \\ B &= \frac{1}{2} A|\mu_2|^{-4}(1 + |\mu_2|^2)^2|\mu_2 - \bar{\mu}_2|^2. \end{aligned}$$

Das triviale Streuverhalten hat seinen Ursprung in der Beschränkung auf einfache Polstellen im Ansatz (37). Sind beispielsweise auch Polstellen zweiter Ordnung zugelassen, so muß das Streuverhalten nicht zwangsläufig trivial sein[5].

4.4 Wellen

Die Gleichung (25) besitzt neben Solitonen noch eine andere Klasse von Lösungen, nämlich ebene Wellen. Solche Wellen sind in ihrer Bewegungsrichtung lokalisiert und senkrecht dazu unendlich ausgedehnt, sie haben im Gegensatz zu Solitonen unendliche Energie. R. Leese [14] konstruierte solche Lösungen und erkannte ihr nichttriviales Streuverhalten.

Leese betrachtet folgenden Exponentialansatz für f

$$f(\omega) = \exp(b\omega + c), \qquad (44)$$

womit aus (41) folgt

$$\mathcal{E} = \frac{2(1+m^2)^2 \sin^2\theta}{m^2} \frac{|b|^2|f|^2}{(1+|f|^2)^2}, \qquad (45)$$

mit $b \in \mathbb{C}$ und o.B.d.A. $c \in \mathbb{R}$. Wenn diese Formel folgendermaßen umgeformt wird

$$\mathcal{E} \ = \ \frac{2(1+m^2)^2 \sin^2\theta}{m^2} \frac{|b|^2}{(|f|^{-1} + |f|)^2}$$

[5]Siehe dazu z.B. [15].

$$= \frac{(1+m^2)^2 \sin^2\theta}{2m^2} \frac{|b|^2}{\cosh^2(\mathrm{Re}(b\omega)+c)},$$

so ist sofort klar, daß eine ebene Welle vorliegt. Ihr Maximum liegt entlang der

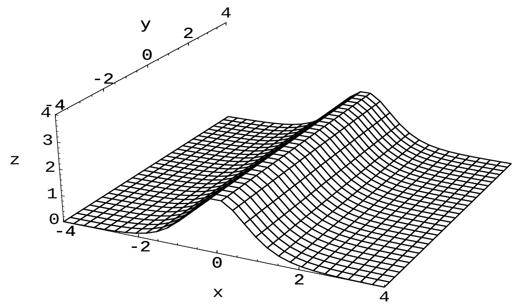

Abbildung 2: $\mathcal{E}$ für $b = 1, c = 0, \mu = i$.

Geraden $\mathrm{Re}(b\omega) + c = 0$. Mit variierendem t bleibt die Welle in ihrer Form konstant und bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Diese kann leicht abgelesen werden, wenn man schreibt ($b = |b|e^{i\alpha}$)

$$\mathrm{Re}(b\omega) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = Ct + D,$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= 2m\cos\alpha \\ B &= m^2\cos(\theta+\alpha) - \cos(\theta-\alpha) \\ C &= -m^2\cos(\theta+\alpha) - \cos(\theta-\alpha) \\ D &= -2mc/|b|. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} Ax + By = Ct + D \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} (Ct + D) \\ &\Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

oder in Komponenten

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{-2m\cos\alpha\,(\cos(\theta-\alpha) + m^2\cos(\theta+\alpha))}{m^4\cos^2(\theta+\alpha) + 2m^2(\sin^2\theta + \cos^2\alpha) + \cos^2(\theta-\alpha)} \\ v_y &= \frac{\cos^2(\theta-\alpha) - m^4\cos^2(\theta+\alpha)}{m^4\cos^2(\theta+\alpha) + 2m^2(\sin^2\theta + \cos^2\alpha) + \cos^2(\theta-\alpha)} \\ v^2 &= 1 - \frac{4m^2\sin^2\theta}{m^4\cos^2(\theta+\alpha) + 2m^2(\sin^2\theta + \cos^2\alpha) + \cos^2(\theta-\alpha)}. \end{aligned} \tag{46}$$

Die Energie ist nicht endlich, da das Integral über P_0 divergiert. Stattdessen kann man jedoch die Energie pro Enheitslänge $\hat{E}$ entlang der Wellenfront berechnen. Das Resultat ist [14]

$$\hat{E} = \frac{4\gamma|b||\sin^3\theta|(1+m^2)^2}{m^4\cos^2(\theta+\alpha)+2m^2(\sin^2\theta+\cos^2\alpha)+\cos^2(\theta-\alpha)}. \tag{47}$$

Alle durch den Exponentialansatz (44) erzeugten Lösungen lassen sich nur schwer klassifizieren. Die für jede solche Lösung charkteristischen Parameter c, m, $\theta, |b|$ und α haben keine einfache physikalische Interpretation[6]. Werden aber nur Teilmengen von Lösungen untersucht, indem an die Parameter zusätzliche Bedingungen gestellt werden, so wird die Charakterisierung der Lösungen transparenter. Ist zum Beispiel

$$(1+m^2)\tan\alpha = (1-m^2)\tan\theta,$$

so vereinfacht sich die Geschwindigkeit zu

$$(v_x, v_y) = (-\frac{2m\cos\theta}{1+m^2}, \frac{1-m^2}{1+m^2}),$$

was mit der Solitongeschwindigkeit identisch ist. Werden außerdem neue Parameter (k, ϕ, A) eingeführt, definiert durch

$$\begin{aligned} m &= [(1-k\sin\phi)/(1+k\sin\phi)]^{1/2} \\ \cos\theta &= -k\cos\phi/(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2} \\ |b| &= A(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}, \end{aligned}$$

so wird die Energiedichte $\mathcal{E}$ zu

$$\mathcal{E} = \frac{2A^2(1-k^2)}{1-k^2\sin^2\phi}\,\frac{1}{\cosh^2[A(x\cos\phi+y\sin\phi-kt)]}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß k die Wellengeschwindigkeit, ϕ der Winkel zwischen Bewegungsrichtung und x-Achse und A die Breite der Welle ist. Das Maximum oder die maximale Höhe der Welle ist dann eine einfache Funktion von k, ϕ und A.

Um Wechselwirkungen zweier ebener Wellen zu studieren, sei wie im voherigen Abschnitt $n = 2$ in der allgemeinen Lösung (39). Die Berechnung von $\mathcal{E}$ wird sehr vereinfacht, wenn die μ_k rein imaginär gewählt werden [14], $\mu_k = ip_k, p_k \in \mathbb{R}$. Eine Lösung, die zwei Wellen W_1 und W_2 beinhaltet, ist zum Beispiel

$$f_k(\omega_k) = \exp(b_k\omega_k + c_k)\ ,\ b_k = A_k[(1+p_k^2)\cos\phi - 2ip_k\sin\phi_k]. \tag{48}$$

[6] Es ist offensichtlich, daß c die Position der Welle zur Zeit $t = 0$ bestimmt.

Der volle Ausdruck für die Energiedichte ist trotz Einschränkung der μ_k auf rein imaginäre Werte immer noch sehr kompliziert. Jedoch reicht es wie bei der Zwei-Soliton Lösung aus, lediglich das asymptotische Verhalten der Energiedichte des Zweiwellensystems zu untersuchen. Das geschieht in ganz analoger Weise [14]. Die Gleichung der Wellenfront für W_1 bzw. W_2 lautet $\mathrm{Re}(b_k\omega_k)+c_k=0$. $\mathrm{Re}(b_1\omega_1)\to\pm\infty$ bedeutet, daß sich ein Beobachter auf der jeweiligen Seite weit weg von der ersten Welle W_1 befindet. Ist zur selben Zeit $\mathrm{Re}(b_2\omega_2)$ endlich, so ist dieser Beobachter jedoch in der Nähe von W_2. Für die f_k heißt das

$$\mathrm{Re}(b_k\omega_k)\to+\infty\ \Rightarrow\ |f_k|\to\infty\,,\ \mathrm{Re}(b_k\omega_k)\to-\infty\ \Rightarrow\ |f_k|\to 0.$$

Das wesentliche Verhalten von $\mathcal{E}$ läßt sich dann so zusammenfassen

$$\begin{aligned} |f_1|\to\infty\,,\ \ &\mathcal{E}\sim\mathrm{sech}^2[\mathrm{Re}(b_2\omega_2)+c_2-\gamma] \\ |f_1|\to 0\,,\ \ &\mathcal{E}\sim\mathrm{sech}^2[\mathrm{Re}(b_2\omega_2)+c_2+\gamma], \end{aligned} \tag{49}$$

wobei

$$\tanh\gamma=2p_1p_2/(p_1^2+p_2^2). \tag{50}$$

Die beiden Wellen wechselwirken demnach nicht trivial, sondern erfahren eine Phasenverschiebung von 2γ. Die inneren Parameter k, A und ϕ beeinflussen diese Phasenverschiebung ebenfalls, jedoch soll an dieser Stelle lediglich auf [14] verwiesen werden.

5 Nichtkommutative Wellen in 2+1 Dimensionen

5.1 Nichtkommutative Feldtheorie

Im letzten Kapitel wurde die modifzierte Feldgleichung eines nichtlinearen $SU(2)$ Sigma Modells und deren Solitonlösungen als auch ebene Wellen untersucht. Es zeigte sich, das die Wechselwirkung eines Zweisolitonsystems trivial ist, bei zwei Wellen hingegen eine Phasenverschiebung auftritt. Um das Modell über nichtkommutative Räume zu formulieren, werden zunächst der Begriff der nichtkommutativen Feldtheorie und die damit im Zusammenhang stehenden Formalismen vorgestellt.

Die Struktur einer gewöhnlichen kommutativen Mannigfaltigkeit M kann algebraisch durch die Algebra $\mathcal{A}=\mathcal{C}^\infty(M)$ der auf M unendlich oft differenzierbaren Funktionen, $f\,:\,M\to\mathbb{C}$, erfaßt werden, wobei das Produkt in $\mathcal{A}$ die übliche punktweise Multiplikation von Funktionen ist. Die Algebra $\mathcal{A}$ wird nun zu einer nichtkommutativen Algebra $\mathcal{A}_\theta$ erweitert, indem das auf $\mathcal{A}$ erklärte Produkt deformiert wird

$$f \star g = fg + \theta P(f,g) + \cdots,$$

wobei $P : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine zunächst willkürliche bilineare Abbildung ist. Für $\theta \to 0$ geht dieses Produkt in die gewöhnliche Multiplikation von Funktionen und $\mathcal{A}_\theta$ in $\mathcal{A}$ über. Ist zum Beispiel M der Phasenraum eines klassischen Systems, so ist $P(f,g)$ die Poissonklammer $\{f,g\}$ [25]. Hier und im folgenden ist M speziell $\mathbb{R}^{2,1}$, und das $\star$-Produkt ist erklärt durch das Moyalprodukt

$$f \star g(x) = f(x) \exp[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial_\mu} \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial_\nu}] g(x) \ , \ \mu, \nu = 0, 1, 2 \,, \tag{51}$$

wobei $\theta^{\mu\nu}$ eine reelle konstante antisymmetrische Matrix ist. Gleichung (51) impliziert sofort

$$[x^\mu, x^\nu]_\star := x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu}. \tag{52}$$

Die Koordinaten vertauschen folglich nicht mehr. Um weitere Komplikationen zu vermeiden, seien die einzigen von Null verschiedenen Komponenten von $\theta^{\mu\nu}$

$$\theta^{12} = -\theta^{21} =: \theta > 0,$$

so daß nur eine räumliche Nichtkommutativität vorliegt

$$[x, y]_\star = i\theta.$$

Um eine Feldtheorie über den nichtkommutativen $\mathbb{R}^{2,1}$ zu definieren, betrachtet man Felder, die Funktionen der Zeit t und den nichtkommutierenden Koordinaten x und y sind. In der Wirkung werden somit jegliche Produkte durch das Moyalprodukt ersetzt

$$S = \int dt dx dy \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)_\star.$$

Die Nichtlokalität des Moyalproduktes bereitet häufig Schwierigkeiten bei expliziten Berechnungen. Daher ist es sinnvoll, zu operatorwertigen Koordinaten überzugehen, für die

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x} = i\theta \tag{53}$$

gilt. Mit

$$\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y} \ , \ \hat{\bar{z}} = \hat{x} - iy \ \Rightarrow \ [\hat{z}, \hat{\bar{z}}] = 2\theta$$

und entsprechender Skalierung lassen sich Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ bzw. a einführen, so daß aus (53)

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \hat{z} \ , \ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \hat{\bar{z}} \ \Rightarrow \ [\, a, a^\dagger \,] = 1, \tag{54}$$

wird. Dieses ist die bekannte Oszillatoralgebra. a und $a^\dagger$ wirken im Hilbertraum $\mathcal{H}$ des harmonischen Oszillators mit Orthonormalbasis $\{|\, n\rangle, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ gemäß

$$a|\,0\rangle = 0 \ , \ \ a|\,n\rangle = \sqrt{n}|\,n-1\rangle \ , \ \ a^\dagger|\,n\rangle = \sqrt{n+1}|\,n+1\rangle \ , \ \ \langle n|m\rangle = \delta_{nm}.$$

Funktionen $f(t, z, \bar{z})$ werden durch Weylordnung einer operatorwertigen Funktion zugeordnet

$$\begin{aligned} f(t,z,\bar{z}) \to \hat{f}(t) &\equiv F(t,a,a^\dagger) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k \tilde{f}(k_x,k_y) e^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} \\ &= -\int \frac{dp d\bar{p}}{(2\pi^2)} dz d\bar{z} f(t,z,\bar{z}) e^{-i[\bar{p}\,(\sqrt{2\theta}a - z) + p\,(\sqrt{2\theta}a^\dagger - \bar{z})]}. \end{aligned} \tag{55}$$

Die Rücktransformation lautet

$$\begin{aligned} f(t,z,\bar{z}) &= 2\pi\theta \int \frac{2i dp d\bar{p}}{(2\pi)^2} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ F(t,a,a^\dagger) e^{i[\bar{p}\,(\sqrt{2\theta}a - z) + p\,(\sqrt{2\theta}a^\dagger - \bar{z})]} \right\} \\ &= F_\star\left(t, \frac{z}{\sqrt{2\theta}}, \frac{\bar{z}}{\sqrt{2\theta}}\right). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}$ die Spur über $\mathcal{H}$ und $p = \frac{1}{2}(k_x + ik_y)$. $F_\star$ erhält man, indem alle gewöhnlichen Produkte durch Moyalprodukte ersetzt werden. Mit dieser Abbildung ist

$$f \star g \to \hat{f}\hat{g}$$

und[1]

$$\int dx dy f = 2\pi\theta \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f} = 2\pi\theta \sum_{n\geq 0} \langle n|\hat{f}|\,n\rangle. \tag{56}$$

Die Einbeziehung von Ableitungen geht auf H.Weyl zurück. Nach (55) gilt zunächst

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_x f} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k d^2x (\partial_x f(x,y)) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k d^2x (-ik_x) f(x,y) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})}, \end{aligned} \tag{57}$$

wobei partiell integriert wurde unter der Annahme, daß f im Unendlichen schnell genug auf Null abfällt. Wegen $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \cdots$ gilt

$$\begin{aligned} e^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} \hat{x} e^{i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} &= \hat{x} - ik_y[\hat{y},\hat{x}] = \hat{x} - k_y\theta \\ e^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} \hat{y} e^{i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} &= \hat{y} + k_x\theta, \end{aligned}$$

[1]Siehe dazu Anhang A.

woraus mit $U := e^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})}$ und $U^\dagger U = e^{i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})}e^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} = 1$ folgt

$$[\hat{x}, U] = k_y\theta U \quad , \quad [\hat{y}, U] = -k_x\theta U.$$

Aus (57) ergibt sich schließlich

$$\widehat{\partial_x f} = -\frac{1}{i\theta}[\hat{y}, \hat{f}] \quad , \quad \widehat{\partial_y f} = \frac{1}{i\theta}[\hat{x}, \hat{f}],$$

oder

$$\partial_x \to \hat{\partial}_x := -\frac{1}{i\theta}[\hat{y},\ ] \quad , \quad \partial_y \to \hat{\partial}_y := \frac{1}{i\theta}[\hat{x},\ ]. \tag{58}$$

Diese Operatorableitung ist linear und genügt der Produktregel. Für die komplexen Variablen $z, \bar{z}$ gilt

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_z \to \hat{\partial}_z = \frac{1}{2}(\hat{\partial}_x - i\hat{\partial}_y) = & -\frac{1}{\sqrt{2\theta}}[a^\dagger,\ ] \\ \partial_{\bar{z}} \to \hat{\partial}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\hat{\partial}_x + i\hat{\partial}_y) = & \frac{1}{\sqrt{2\theta}}[a,\ ] \end{array}\right\}. \tag{59}$$

Zum Schluß seien noch ein paar einfache Operatoren und deren zugehörige Funktionen angegeben, indem das Sternprodukt direkt berechnet wird. Dazu ist es nützlich, dieses bezüglich der komplexen Koordinaten z und $\bar{z}$ zu formulieren, insbesondere dann, wenn die beiden Funktionen nur von jeweils einer der beiden Koordinaten abhängen

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) \star g(z) &= f(\bar{z}) \exp[\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_\mu}\theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial_\nu}]g(z) \\ &= f(\bar{z}) \exp[\theta(\overleftarrow{\partial_z}\overrightarrow{\partial_{\bar{z}}} - \overleftarrow{\partial_{\bar{z}}}\overrightarrow{\partial_z})]g(z) \\ &= f(\bar{z}) \exp[-\theta\overleftarrow{\partial_{\bar{z}}}\overrightarrow{\partial_z}]g(z), \end{aligned} \tag{60}$$

da $\theta^{z\bar{z}} = -\theta^{\bar{z}z} = -2i\theta$.

1. $$F = \sqrt{2\theta}a \to F_\star = z \ , \ F = \sqrt{2\theta}a^\dagger \to F_\star = \bar{z}$$

2. $$F = 2\theta a^\dagger a \to F_\star = \bar{z} \star z = z\bar{z} - \theta$$

3. $$F = \exp(a) \to F_\star = 1 + \frac{z}{\sqrt{2\theta}} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\theta}z \star z + \cdots = \exp(z/\sqrt{2\theta})$$

4.

$$
\begin{aligned}
F = \exp(a^\dagger)\exp(a) \to F_\star &= \exp(\bar{z}/\sqrt{2\theta}) \star \exp(z/\sqrt{2\theta}) \\
&= \exp[\bar{z}/\sqrt{2\theta}]\exp[z/\sqrt{2\theta}]\exp(-1/2) \\
&= \exp[\sqrt{2/\theta}\, x - 1/2] \\
F = \exp(a)\exp(a^\dagger) \to F_\star &= \exp(z/\sqrt{2\theta}) \star \exp(\bar{z}/\sqrt{2\theta}) \\
&= \exp[\sqrt{2/\theta}\, x + 1/2]. \qquad (61)
\end{aligned}
$$

Die letzten beiden Formeln können leichter wegen $e^{a^\dagger}e^a = e^{a^\dagger + a}e^{-1/2}$ hergeleitet werden, denn damit folgt unmittelbar $\exp(a^\dagger)\exp(a) \to \exp[\bar{z}/\sqrt{2\theta} + z/\sqrt{2\theta} - 1/2]$. Hier sollte lediglich einmal das Moyalprodukt direkt berechnet werden. Eine wichtige aus der Antisymmetrie des Moyalproduktes folgende Eigenschaft ist

$$f \star f = f^2.$$

5.2 Einschränkungen an Eichgruppen

Für Eichgruppen, die in einem flachen nichtkommutativen Raum realisiert werden können, gibt es Einschränkungen. Die Lie Algebren klassischer Lie Gruppen schließen unter Kommutation. Im nichtkommutativen Fall wird das normale Produkt durch das Moyalprodukt ersetzt, welches folgende Eigenschaft hat [19]

$$(X \star Y)^\dagger = Y^\dagger \star X^\dagger,$$

mit X und Y als raumzeitabhängige Matrizen. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
([X, Y]_\star)^\dagger &= Y^\dagger \star X^\dagger - X^\dagger \star Y^\dagger \\
&= X \star Y - Y \star X \\
&= -[X, Y]_\star,
\end{aligned}
$$

d.h. der Moyalkommutator ist antihermitesch. Da die Lie Algebra von $U(2)$ aus antihermiteschen Matrizen besteht, schließt diese unter Kommutation.

Die Lie Algebra von $SU(2)$ hingegen setzt sich aus spurlosen antihermiteschen Matrizen zusammen und schließt nicht unter dem Moyalkommutator. Als Beispiel seien dazu die beiden Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} ix & 0 \\ 0 & -ix \end{pmatrix} \ , \ Y = \begin{pmatrix} iy & 0 \\ 0 & -iy \end{pmatrix}$$

gegeben mit $\theta^{12} = \theta \neq 0$. Der Moyalkommutator ist damit

$$\begin{aligned}
[X,Y]_\star &= X(x) e^{\frac{i\theta}{2}(\overleftarrow{\partial_x}\overrightarrow{\partial_y} - \overleftarrow{\partial_y}\overrightarrow{\partial_x})} Y(y) - Y(y) e^{\frac{i\theta}{2}(\overleftarrow{\partial_x}\overrightarrow{\partial_y} - \overleftarrow{\partial_y}\overrightarrow{\partial_x})} X(x) \\
&= [X,Y] + \frac{i\theta}{2}(\partial_x X)(\partial_y Y) + \frac{i\theta}{2}(\partial_y Y)(\partial_x X) \\
&= i\theta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Diese Matrix hat eine nichtverschwindende Spur und liegt somit nicht in der Lie Algebra von $SU(2)$. Also schließt diese nicht unter $[\ ,\ ]_\star$. Um das von Ward untersuchte Modell in nichtkommutative Räume zu übertragen, muß folglich die Eichgruppe $SU(2)$ in $U(2)$ übergehen.

5.3 Nichtkommutatives $U(2)$ Sigma Modell

Die nichtkommutative Verallgemeinerung der Bewegungsgleichung (34) kann leicht durch Deformierung des gewöhnlichen Produktes erhalten werden [22]

$$\partial_x(J^{-1} \star \partial_x J) - \partial_v(J^{-1} \star \partial_u J) = 0. \tag{62}$$

Die Methoden zur Konstruktion von Soliton- bzw. Wellenlösungen sind in Abschnitt 4.2 bzw 4.3 für das kommutative Modell vorgestellt worden.

Für das nichtkommutative Modell ist es geschickter den Operatorformalismus zu wählen. Ausgangspunkt ist wieder das lineare System (31), wobei $\hat{\psi} = \psi(\hat{x}, \hat{y}, t, \zeta)$ nun eine 2×2 [2] Matrix ist, deren Elemente als Operatoren in $\mathcal{H}$ wirken ($\zeta \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
-\psi(\hat{x},\hat{y},t,\zeta)(\zeta\hat{\partial}_x - \hat{\partial}_u)[\psi(\hat{x},\hat{y},t,\bar{\zeta})]^\dagger &= A(t,\hat{x},\hat{y}) \\
-\psi(\hat{x},\hat{y},t,\zeta)(\zeta\hat{\partial}_v - \hat{\partial}_x)[\psi(\hat{x},\hat{y},t,\bar{\zeta})]^\dagger &= B(t,\hat{x},\hat{y}).
\end{aligned} \tag{63}$$

$\hat{\psi}$ genügt der Bedingung

$$\psi(\hat{x},\hat{y},t,\zeta)[\psi(\hat{x},\hat{y},t,\bar{\zeta})]^\dagger = 1. \tag{64}$$

Die Feldgleichung für $\hat{J}$,

$$\hat{\partial}_x(\hat{J}^{-1}\hat{\partial}_x\hat{J}) - \hat{\partial}_v(\hat{J}^{-1}\hat{\partial}_u\hat{J}) = 0, \tag{65}$$

kann wieder als Integrabiltätsbedingung des Systems (63) formuliert werden. Ist eine Lösung $\hat{\psi}$ gefunden, so löst $\hat{J} = \psi(\hat{x},\hat{y},t,\zeta = 0)^{-1}$ die ursprüngliche nichtlineare Gleichung (65). Die Dächer über den Operatoren $\hat{J}$, $\hat{x}$, $\hat{y}$, etc. werden der Einfachheit halber ab sofort weggelassen[3].

[2] Allgemein eine $n \times n$ Matrix. Hier $n = 2$ für $U(2)$ als Eichgruppe.

[3] Sollte die Gefahr einer Verwechslung auftreten, so werden die Dächer wieder hinzugefügt.

Der Lösungsansatz sei auf einfache Polstellen in ζ beschränkt

$$\psi(x,y,t,\zeta) = \mathbf{1}_{2\times 2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{\zeta - \mu_k}, \tag{66}$$

wobei $\mu_k \in \mathbb{C}$ und die Matrizen $R_k(t,x,y)$ von der Form

$$R_k = \sum_{l=1}^{m} T_l\, \Gamma^{lk}\, T_k^\dagger \tag{67}$$

sind mit $2\times r$ Matrizen $T_k(t,x,y)$ und $r\times r$ Matrizen $\Gamma^{lk}(t,x,y)$, $r\geq 1$. Hier sei nur der einfachste Fall berücksichtigt, nämlich $r=1$.

Um die Gleichungen (64) und (63) zu erfüllen, muß das Residuum bei $\zeta = \bar{\mu}$[4] der jeweils linken Seite verschwinden. Aus (64) ergibt sich [23]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{\zeta=\bar{\mu}_k} \psi(x,y,t,\zeta)[\psi(x,y,t,\bar{\zeta})]^\dagger \\
=\;& \lim_{\zeta\to\bar{\mu}_k} (\zeta - \bar{\mu}_k) \left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\zeta-\mu_p}\right) \left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{R_l^\dagger}{\zeta-\bar{\mu}_l}\right) \\
=\;& \left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\mu_p - \bar{\mu}_k}\right) R_k^\dagger \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow\;& \left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\mu_p - \bar{\mu}_k}\right) T_k = 0,
\end{aligned} \tag{68}$$

wobei aus (63)

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \textstyle\sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\mu_p-\bar{\mu}_k}\right) (\bar{\mu}_k \partial_x - \partial_u) R_k^\dagger = 0 \\
\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \textstyle\sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\mu_p-\bar{\mu}_p}\right) (\bar{\mu}_k \partial_v - \partial_x) R_k^\dagger = 0
\end{aligned} \tag{69}$$

folgt. Die algebraischen Gleichungen (68) legen die zu Γ^{kl} inversen Matrizen fest

$$\begin{aligned}
T_k - \sum_{p,l=1}^{m} T_l\, \Gamma^{lp} \frac{T_p^\dagger\, T_k}{\mu_p - \bar{\mu}_k} =: T_k - \sum_{p,l=1}^{m} T_l\, \Gamma^{lp}\, \tilde{\Gamma}_{pk} \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \sum_{p=1}^{m} \Gamma^{lp}\, \tilde{\Gamma}_{pk} = \delta_k^l.
\end{aligned} \tag{70}$$

Setzt man alles in (64) ein, so lautet die Lösung für (65)

$$J^{-1} = J^\dagger = \mathbf{1}_{2\times 2} - \sum_{k,l=1}^{m} \frac{1}{\mu_k}\, T_l\, \Gamma^{lk}\, T_k^\dagger, \tag{71}$$

[4]Siehe Abschnitt 4.2. Die Bedingung für verschwindendes Residuum bei $\zeta = \mu$ ergibt sich durch hermitesche Konjugation.

für jede Lösung von (68) und (69).

Es ist vorteilhaft, neue Koordinaten w_k , $\bar{w}_k$ zu definieren

$$\begin{aligned} w_k &:= \nu_k(x + \bar{\mu}_k u + \frac{1}{\bar{\mu}_k} v) = \nu_k[x + \frac{1}{2}\,(\bar{\mu}_k - \frac{1}{\bar{\mu}_k})y + \frac{1}{2}\,(\bar{\mu}_k + \frac{1}{\bar{\mu}_k})t] \\ \bar{w}_k &:= \bar{\nu}_k(x + \mu_k u + \frac{1}{\mu_k} v) = \nu_k[x + \frac{1}{2}\,(\mu_k - \frac{1}{\mu_k})y + \frac{1}{2}\,(\mu_k + \frac{1}{\mu_k})t], \end{aligned} \tag{72}$$

wobei die ν_k Funktionen der Konstanten μ_k sind

$$\nu_k = \left[\frac{4i}{\mu_k - \bar{\mu}_k - \mu_k^{-1} + \bar{\mu}_k^{-1}} \, \frac{\mu_k - \mu_k^{-1} - 2i}{\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_k^{-1} + 2i} \right]^{1/2} .$$

Die Gleichungen (69) können somit für jeden Pol zu einer einzigen zusammengefaßt werden, da $\bar{\mu}_k \partial_x - \partial_u$ und $\bar{\mu}_k \partial_v - \partial_x$ proportional zu $\partial_{\bar{w}_k}$ sind

$$\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\mu_p - \bar{\mu}_k} \right) \partial_{\bar{w}_k} R_k^\dagger = 0. \tag{73}$$

Der Kommutator der Operatoren w_k und $\bar{w}_k$ errechnet sich leicht zu

$$[w_k, \bar{w}_k] = 2\theta.$$

In Anlehnung an (54) werden neue Erzeuger und Vernichter c_k und $c_k^\dagger$ durch

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} w_k \ , \ c_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \bar{w}_k \ \Rightarrow \ [c_k, c_k^\dagger] = 1$$

mit Basissystem $\{ |n\rangle_k \}$ definiert. Mit (59) schreiben sich die Ableitungen

$$\sqrt{2\theta}\, \partial_{w_k} = -[c_k^\dagger, \ ] \ , \ \sqrt{2\theta}\, \partial_{\bar{w}_k} = [c_k, \ ] \,, \tag{74}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\mu_p - \bar{\mu}_k} \right) R_k^\dagger\, c_k &= R_k^\dagger\, c_k - \sum_{p,l,n=1}^{m} \frac{1}{\mu_p - \bar{\mu}_k} T_l\, \Gamma^{lp}\, T_p^\dagger\, T_k\, (\Gamma^{kn})^\dagger\, T_n^\dagger\, c_k \\ &= R_k^\dagger\, c_k - \sum_{p,l,n=1}^{m} T_l\, \Gamma^{lp}\, \tilde{\Gamma}_{pk}\, (\Gamma^{nk})^\dagger\, T_n^\dagger\, c_k \\ &= R_k^\dagger\, c_k - \sum_{n=1}^{m} T_k\, (\Gamma^{kn})^\dagger\, T_n^\dagger\, c_k \equiv 0, \end{aligned}$$

wird (73) in folgende Form gebracht

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\mu_p - \bar{\mu}_k} \right) [c_k, R_k^\dagger] = \left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\mu_p - \bar{\mu}_k} \right) c_k\, R_k^\dagger \\ &\Rightarrow \left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \sum_{p=1}^{m} \frac{R_p}{\mu_p - \bar{\mu}_k} \right) c_k\, T_k = 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Eine hinreichende Bedingung dafür ist offensichtlich (Siehe (68))

$$c_k\, T_k = T_k\, Z_k \tag{76}$$

für einen beliebigen Operator Z_k. Ist $Z_k = c_k$, dann gilt $[c_k, T_k] = 0$. Daraus folgt, daß jede Matrix T_k, deren Elemente willkürliche Funktionen von c_k sind (aber unabhängig von $c_k^\dagger$), eingesetzt in (70) und in (67), eine Lösung ψ des Systems (63) liefert. Die T_k sind also „holomorphe“ Funktionen von c_k[5].

Die Operatoren c_k und a hängen durch eine unitäre Transformation in $\mathcal{H}$ zusammen. Diese Transformation kann explizit angegeben werden [23]. Die w_k lauten als Funktion von z und $\bar{z}$

$$w_k = \nu_k \left[\frac{1}{1-\xi_k}\, z - \frac{\xi_k}{1-\xi_k}\, \bar{z} + \frac{1}{2}\,(\bar{\mu}_k + \frac{1}{\bar{\mu}_k}\,)\, t \right],$$

mit $\xi_k := \frac{\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_k^{-1} - 2i}{\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_k^{-1} + 2i}$. Definiert man nun

$$\alpha_k := \tau_k\, e^{i\vartheta_k}\ ,\ \beta_k := -\frac{1}{2}\nu_k(\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_k^{-1})/\sqrt{2\theta},$$

so existiert ein unitärer Operator $U_k(t)$ definiert durch

$$U_k(t) = e^{\frac{1}{2}\alpha_k a^{\dagger 2} - \frac{1}{2}\bar{\alpha}_k a^2}\, e^{(\beta_k\, a^\dagger - \bar{\beta}_k\, a)\, t},$$

und es gilt

$$c_k = U_k(t)\, a\, U_k^\dagger(t) = (\cosh \tau_k)\, a - (e^{i\vartheta_k} \sinh \tau_k)\, a^\dagger - \beta_k t, \tag{77}$$

mit den Beziehungen

$$\nu_k = \cosh \tau_k - e^{i\vartheta_k} \sinh \tau_k\ ,\ \ \xi_k = e^{i\vartheta_k} \tanh \tau_k .$$

Offensichtlich ist $|n\rangle_k = U_k(t)\, |n\rangle$.

Das modifizierte nichtlineare $U(2)$ Sigma Modell ist somit nichtkommutativ formuliert. Im nächsten Schritt wird das Streuverhalten zweier nichtkommutativer Wellen untersucht. Die Frage ist, ob dieses mit dem in 4.4 erwähnten Resultat übereinstimmt oder nicht. In [23][24] findet man eine ausführliche Diskussion über polynomiale Lösungen, d.h. die Elemente der Matrizen T_k sind Polynome in a bzw. $c = U(t)aU(t)^\dagger$. Insbesondere werden Zweisoliton Konfigurationen und deren asymptotisches Verhalten betrachtet. Als Ergebnis läßt sich festhalten, daß solche nichtkommutativen Solitonen sowohl ein triviales [23] als auch ein nichttriviales [24] Streuverhalten haben. Das bedeutet, daß sich das Streuverhalten des von Ward untersuchten kommutativen Zweisolitonsystems[6][12] durch die nichtkommutative Deformation nicht ändert.

[5]Für holomorphe Funktionen gilt ja $\partial_{\bar{w}_k} f = 0$.

[6]Siehe Seite 28.

5.4 Streuverhalten nichtkommutativer Wellen

Für $m = 1$ lautet nach (71) die Lösung für $J^\dagger$

$$\begin{aligned} J^\dagger &= \mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{1}{\mu} T\Gamma T^\dagger = \mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu} T(T^\dagger T)^{-1} T^\dagger \\ &=: \mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu} P \\ \Rightarrow J &= \mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{\bar{\mu} - \mu}{\bar{\mu}} P, \end{aligned} \tag{78}$$

mit hermiteschem Projektor $P = P^\dagger = P^2$. Wie im letzten Abschnitt erwähnt sind die Elemente von T Funktion von c. In Anlehnung an den Lösungsansatz von Leese sei T folgendermaßen gewählt

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{bw} \end{pmatrix}, \tag{79}$$

mit $b \in \mathbb{R}$. Daraus kann nun P konstruiert werden

$$\begin{aligned} P &= (1 \;\, e^{w})^T (1 + e^{b\bar{w}} e^{bw})^{-1} (1 \;\, e^{b\bar{w}}) \\ &= \begin{pmatrix} (1 + e^{b\bar{w}} e^{bw})^{-1} & (1 + e^{b\bar{w}} e^{bw})^{-1} e^{b\bar{w}} \\ e^{bw} (1 + e^{b\bar{w}} e^{bw})^{-1} & e^{bw} (1 + e^{b\bar{w}} e^{bw})^{-1} e^{b\bar{w}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{80}$$

Die allgemeine $m = 2$ Lösung lautet nach (71)

$$\begin{aligned} J^\dagger &= \mathbf{1}_{2\times 2} - \sum_{k,l=1}^{2} \frac{1}{\mu_k} T_l \Gamma^{lk} T_k^\dagger \\ &= \mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{1}{\mu_1} T_1 \Gamma^{11} T_1^\dagger - \frac{1}{\mu_2} T_1 \Gamma^{12} T_2^\dagger - \frac{1}{\mu_1} T_2 \Gamma^{21} T_1^\dagger - \frac{1}{\mu_2} T_2 \Gamma^{22} T_2^\dagger. \end{aligned} \tag{81}$$

Mit Hilfe von (70) lassen sich die Γ^{lp} durch $\tilde{\Gamma}_{pk} = \frac{T_p^\dagger T_k}{\mu_p - \bar{\mu}_k}$ ausdrücken, wobei die Nichtkommutativität der einzelnen Faktoren zu beachten ist

$$\begin{aligned} \Gamma^{11} &= [\tilde{\Gamma}_{11} - \tilde{\Gamma}_{12} \tilde{\Gamma}_{22}^{-1} \tilde{\Gamma}_{21}]^{-1} \\ \Gamma^{12} &= -[\tilde{\Gamma}_{11} - \tilde{\Gamma}_{12} \tilde{\Gamma}_{22}^{-1} \tilde{\Gamma}_{21}]^{-1} \tilde{\Gamma}_{12} \tilde{\Gamma}_{22}^{-1} \\ \Gamma^{21} &= -[\tilde{\Gamma}_{22} - \tilde{\Gamma}_{21} \tilde{\Gamma}_{11}^{-1} \tilde{\Gamma}_{12}]^{-1} \tilde{\Gamma}_{21} \tilde{\Gamma}_{11}^{-1} \\ \Gamma^{22} &= [\tilde{\Gamma}_{22} - \tilde{\Gamma}_{21} \tilde{\Gamma}_{11}^{-1} \tilde{\Gamma}_{12}]^{-1}. \end{aligned}$$

In (81) eingesetzt, erhält man $J^\dagger$ in expliziter Abhängigkeit von T_k bzw. $T_k^\dagger$

$$\begin{aligned} J^\dagger = \; & \mathbf{1}_{2\times 2} - T_1 [\, T_1^\dagger (\mathbf{1}_{2\times 2} - \sigma P_2\,) T_1]^{-1} T_1^\dagger (\, \frac{\mu_{11}}{\mu_1} \mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{\mu_{21}}{\mu_2} \sigma\, P_2\,) \\ & - T_2 [\, T_2^\dagger (\mathbf{1}_{2\times 2} - \sigma P_1\,) T_2]^{-1} T_2^\dagger (\, \frac{\mu_{22}}{\mu_2} \mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{\mu_{12}}{\mu_1} \sigma\, P_1\,), \end{aligned} \tag{82}$$

wobei die komplexen Parameter

$$\mu_{kl} = \mu_k - \bar{\mu}_l \ , \ \sigma = \frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{12}\mu_{21}}$$

eingführt wurden. Die P_k sind wieder hermitesche Projektoren

$$P_k = T_k (T_k^\dagger T_k)^{-1} T_k^\dagger \ , \ P_k^\dagger = P_k \ , \ P_k^2 = P_k, \tag{83}$$

mit T_k

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{b_k w_k} \end{pmatrix} \ , \ k = 1, 2. \tag{84}$$

Daraus folgt

$$P_k = \begin{pmatrix} (1 + e^{b_k \bar{w}_k} e^{b_k w_k})^{-1} & (1 + e^{b_k \bar{w}_k} e^{b_k w_k})^{-1} e^{b_k \bar{w}_k} \\ e^{b_k w_k} (1 + e^{b_k \bar{w}_k} e^{b_k w_k})^{-1} & e^{b_k w_k} (1 + e^{b_k \bar{w}_k} e^{b_k w_k})^{-1} e^{b_k \bar{w}_k} \end{pmatrix}. \tag{85}$$

Es erweist sich vorteilhaft, die erste Welle als ruhend zu betrachten, d.h. für die Konatanten $\mu_1 = -i$ und $\mu_2 =: \mu$ und folglich $w_1 = z$ bzw. $w_2 =: w$. Um überlange Formeln für den vollen Ausdruck für $J^\dagger$ zu vermeiden, werden zunächst zwei Abkürzungen eingeführt

$$\begin{aligned} [\cdots]_1^{-1} &:= [\, T_1^\dagger (\mathbf{1}_{2\times 2} - \sigma P_2 \,)\, T_1]^{-1} \\ &= [\, 1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_1 z} - \sigma\, (\, 1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_2 w})(\, 1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_2 w})^{-1} (\, 1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_1 z})]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\cdots]_2^{-1} &:= [\, T_2^\dagger (\mathbf{1}_{2\times 2} - \sigma P_1 \,)\, T_2]^{-1} \\ &= [\, 1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_2 w} - \sigma\, (\, 1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_1 z})(\, 1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_1 z})^{-1} (\, 1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_2 w})]^{-1}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann folgende explizite Form für die Elemente von $J^\dagger$

$$\begin{aligned} J_{11}^\dagger &= 1 + [\cdots]_1^{-1} \left\{ \frac{2i(\mu - \bar{\mu})}{\mu(\bar{\mu} + i)} (1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_2 w})(1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_2 w})^{-1} - 2 \right\} \\ &\quad + [\cdots]_2^{-1} \left\{ \frac{2(\mu - \bar{\mu})}{\mu - i} (1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_1 z})(1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_1 z})^{-1} - \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu} \right\} \\ J_{12}^\dagger &= [\cdots]_1^{-1} \left\{ \frac{2i(\mu - \bar{\mu})}{\mu(\bar{\mu} + i)} (1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_2 w})(1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_2 w})^{-1} e^{b_2 \bar{w}} - 2 e^{b_1 \bar{z}} \right\} \\ &\quad + [\cdots]_2^{-1} \left\{ \frac{2(\mu - \bar{\mu})}{\mu - i} (1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_1 z})(1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_1 z})^{-1} e^{b_1 \bar{z}} - \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu} e^{b_2 \bar{w}} \right\} \\ J_{21}^\dagger &= e^{b_1 z} [\cdots]_1^{-1} \left\{ \frac{2i(\mu - \bar{\mu})}{\mu(\bar{\mu} + i)} (1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_2 w})(1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_2 w})^{-1} - 2 \right\} \\ &\quad + e^{b_2 w} [\cdots]_2^{-1} \left\{ \frac{2(\mu - \bar{\mu})}{\mu - i} (1 + e^{b_2 \bar{w}} e^{b_1 z})(1 + e^{b_1 \bar{z}} e^{b_1 z})^{-1} - \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu} \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_{22}^{\dagger} &= 1 + e^{b_1 z}[\cdots]_1^{-1}\left\{\frac{2i(\mu-\bar{\mu})}{\mu(\bar{\mu}+i)}(1+e^{b_1\bar{z}}e^{b_2 w})(1+e^{b_2\bar{w}}e^{b_2 w})^{-1}e^{b_2\bar{w}} - 2e^{b_1\bar{z}}\right\}\\
&\quad + e^{b_2 w}[\cdots]_2^{-1}\left\{\frac{2(\mu-\bar{\mu})}{\mu-i}(1+e^{b_2\bar{w}}e^{b_1 z})(1+e^{b_1\bar{z}}e^{b_1 z})^{-1}e^{b_1\bar{z}} - \frac{\mu-\bar{\mu}}{\mu}e^{b_2\bar{w}}\right\}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Das zeitlich asymptotische Verhalten von $J^\dagger$ läßt sich leicht bestimmen, wenn der im Operator $w = \sqrt{2\theta}\,c$ auftauchende Faktor β [7] reell gewählt wird, damit in den Termen

$$
e^{\sqrt{2\theta}\,c} = e^{\sqrt{2\theta}\,(\cosh\tau)a - \sqrt{2\theta}\,(e^{i\vartheta}\sinh\tau)a^\dagger}e^{-\sqrt{2\theta}\,\beta t}
$$

keine durch die zeitliche Evolution bedingten Oszillationen auftreten. Dies kann man erreichen mit $\mu = ip$, wobei $p \in \mathbb{R}$ und $p > 1$, so daß für β gilt

$$
\beta = -\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\,\frac{p-\frac{1}{p}}{\sqrt{p+\frac{1}{p}}} < 0. \tag{87}
$$

Für große Zeiten t und mit $b_2 > 0$ bedeutet das $b_2 w = b_2\sqrt{2\theta}c \to -b_2\sqrt{2\theta}\beta t = +b_2\sqrt{2\theta}|\beta|t$ und die Exponentialfunktion wächst über alle Grenzen

$$
\lim_{t\to+\infty} e^{b_2 w} = \lim_{t\to+\infty} e^{b_2\bar{w}} = \infty.
$$

$J^\dagger$ hat so einen wohldefinierten Grenzwert ($b := b_1$)

$$
\begin{aligned}
J_{11}^{\dagger} &= 1 - 2[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}\\
J_{12}^{\dagger} &= 2\frac{1+p}{1-p}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar{z}}\\
J_{21}^{\dagger} &= -2e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1} -\\
&\quad \frac{4p}{1-p}[1-\sigma e^{bz}(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{bz}(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1}\\
J_{22}^{\dagger} &= 1 + 2\frac{1+p}{1-p}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar{z}} -\\
&\quad [1-\sigma e^{bz}(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1}e^{b\bar{z}}]^{-1}\left\{\frac{4p}{1-p}e^{bz}(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1}e^{b\bar{z}} + 2\right\}.
\end{aligned}
\tag{88}
$$

Durch algebraische Umformungen lassen sich einige der auftauchenden Terme vereinfachen. Mit der Reihendefinition

$$
(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1} = 1 - e^{b\bar{z}}e^{bz} + (e^{b\bar{z}}e^{bz})^2 - + \cdots \tag{89}
$$

[7] Siehe (77).

ist

$$\begin{aligned} e^{bz}(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1}e^{b\bar{z}} &= (1-e^{bz}e^{b\bar{z}}+(e^{bz}e^{b\bar{z}})^2-+\cdots)e^{bz}e^{b\bar{z}} \\ &= (1+e^{bz}e^{b\bar{z}})^{-1}e^{bz}e^{b\bar{z}} = 1-(1+e^{bz}e^{b\bar{z}})^{-1}. \end{aligned} \tag{90}$$

Daraus und wegen $(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1}=1$ folgt für $J^\dagger_{21}$

$$\begin{aligned} & [1-\sigma e^{bz}(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{bz}(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1} \\ = \; & [1-\sigma+\sigma(1+e^{bz}e^{b\bar{z}})^{-1}]^{-1}(1+e^{bz}e^{b\bar{z}})^{-1}e^{bz} \\ = \; & [\{(1-\sigma)(1+e^{bz}e^{b\bar{z}})+\sigma\}(1+e^{bz}e^{b\bar{z}})^{-1}]^{-1}(1+e^{bz}e^{b\bar{z}})^{-1}e^{bz} \\ = \; & (1+e^{bz}e^{b\bar{z}})[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}(1+e^{bz}e^{b\bar{z}})^{-1}e^{bz} \\ = \; & [1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{bz}, \end{aligned} \tag{91}$$

da $e^{bz}e^{b\bar{z}}$ mit Funktionen von $e^{bz}e^{b\bar{z}}$ vertauscht. Verfährt man mit den übrigen Termen in ähnlicher Weise, so vereinfacht sich (88) zu

$$\begin{aligned} J^\dagger_{11} &= 1-2[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1} \\ J^\dagger_{12} &= 2\frac{1+p}{1-p}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar{z}} \\ J^\dagger_{21} &= -2\frac{1+p}{1-p}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{bz} \\ J^\dagger_{22} &= 1-2[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}, \end{aligned}$$

so daß in Matrixform

$$\begin{aligned} J^\dagger_{+\infty} &:= \lim_{t\to+\infty} J^\dagger \\ &= \mathbf{1}_{2\times 2} - 2\begin{pmatrix} [1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1} & -\frac{1+p}{1-p}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar{z}} \\ \frac{1+p}{1-p}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{bz} & [1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{92}$$

Für große negative Zeiten t hingegen gilt $c\to\beta t=-|\beta|t$ und somit

$$\lim_{t\to-\infty} e^c = \lim_{t\to-\infty} e^{c^\dagger} = 0.$$

$J^\dagger$ hat in diesem Fall folgenden Grenzwert

$$\begin{aligned} J^\dagger_{11} = \; & 1+2\frac{1+p}{1-p}[1-\sigma+e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1} - \\ & [1-\sigma(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1}]^{-1}\left\{\frac{4p}{1-p}(1+e^{b\bar{z}}e^{bz})^{-1}+2\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J^\dagger_{12} &= -2[1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar z} - \\
&\quad [1-\sigma(1+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}]^{-1}\left\{\frac{4p}{1-p}(1+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}e^{b\bar z}\right\} \\
J^\dagger_{21} &= 2\frac{1+p}{1-p}\,e^{bz}[1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1} \\
J^\dagger_{22} &= 1-2e^{bz}(1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}e^{b\bar z}.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Diese Formeln können auf die selbe Weise zusammengefaßt werden, denn

$$
\begin{aligned}
& [1-\sigma(1+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}]^{-1}\left\{\frac{4p}{1-p}\,(1+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}e^{b\bar z}\right\} \\
=\;& [(1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz})(1+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}]^{-1}\left\{\frac{4p}{1-p}\,(1+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}e^{b\bar z}\right\} \\
=\;& (1+e^{b\bar z}e^{bz})(1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}\left\{\frac{4p}{1-p}\,(1+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}e^{b\bar z}\right\} \\
=\;& \frac{4p}{1-p}\,(1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz})^{-1}e^{b\bar z},
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
e^{b\bar z}e^{bz}[1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1} &= \frac{e^{b\bar z}e^{bz}}{1-\sigma}\,[1+\frac{e^{b\bar z}e^{bz}}{1-\sigma}]^{-1} = 1-[1+\frac{e^{b\bar z}e^{bz}}{1-\sigma}]^{-1} \\
&= 1-(1-\sigma)[1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1},
\end{aligned}
$$

woraus unmittelbar folgt

$$
\begin{aligned}
J^\dagger_{-\infty} &:= \lim_{t\to-\infty} J^\dagger \\
&= -\mathbf{1}_{2\times2} - 2\begin{pmatrix} -(1-\sigma)[1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1} & \frac{1+p}{1-p}\,[1-\sigma+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar z} \\ -\frac{1+p}{1-p}\,[1-\sigma+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-1}e^{bz} & -(1-\sigma)[1-\sigma+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{94}
$$

Hieraus läßt sich entnehmen, daß die beiden Grenzwerte nicht übereinstimmen und somit auch im nichtkommutativen Fall ein nichttriviales Streuverhalten vorliegt. Eine übersichtlichere Form von $J^\dagger_{\pm\infty}$ wird in Abschnitt 5.5 gegeben. Für einen Vergleich mit der Wechselwirkung des kommutativen Zweiwellensystem muß die Energiedichte $\mathcal{E}$ bzw. der Operator $\hat{\mathcal{E}}$ bestimmt werden[8].

Wie im kommutativen Fall besitzt das nichtkommutative Modell ebenfalls eine

[8]Siehe (49).

erhaltene Energie-Impuls Dichte [22]. Die Energiedichte lautet [9]

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} Sp \left[\partial_t J^\dagger \star \partial_t J + \partial_x J^\dagger \star \partial_x J + \partial_y J^\dagger \star \partial_y J\right] \\ &= \frac{1}{2} Sp \left[\partial_t J^\dagger \star \partial_t J\right] + Sp \left[\partial_z J^\dagger \star \partial_{\bar{z}} J + \partial_{\bar{z}} J^\dagger \star \partial_z J\right] \end{aligned} \tag{95}$$

Überträgt man diese Formel wieder in den Operatorformalismus, $J \to \hat{J}$, so erhält man mit $\partial_z \to -\frac{1}{\sqrt{2\theta}} [a^\dagger, \ ]$, usw. (Siehe (59))

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} Sp \left[\partial_t \hat{J}^\dagger \, \partial_t \hat{J}\right] + \frac{1}{2\theta} Sp \left[-[a^\dagger, \hat{J}^\dagger][a, \hat{J}] - [a, \hat{J}^\dagger][a^\dagger, \hat{J}]\right] \tag{96}$$

Betrachtet man das System wieder zu großen Zeiten, so verschwindet der erste Term, denn $\partial_t \hat{J}^\dagger \, \partial_t \hat{J} \to 0$. In diesem Grenzfall ist die Energiedichte

$$\hat{\mathcal{E}}_{t\to\pm\infty} = \frac{1}{2\theta} Sp \left[[a, \hat{J}^\dagger_{\pm\infty}][a, \hat{J}^\dagger_{\pm\infty}]^\dagger + [a^\dagger, \hat{J}^\dagger_{\pm\infty}][a^\dagger, \hat{J}^\dagger_{\pm\infty}]^\dagger\right], \tag{97}$$

mit $\hat{J}^\dagger_{\pm\infty}$ gegeben durch (92) bzw. (94). Die auftretenden Kommutatoren können mit Hilfe der in Anhang B angegebenen Formelsammlung berechnet werden. Damit ist zunächst

$$\left[a^\dagger, [1 + (1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}\right] = \sqrt{2\theta} b(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}[1 + (1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2},$$

$$\left[a^\dagger, [1 + (1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar{z}}\right] = \sqrt{2\theta} b(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}[1 + (1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar{z}},$$

$$\begin{aligned} \left[a^\dagger, [1 + (1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{bz}\right] &= \sqrt{2\theta} b(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}[1 + (1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}e^{bz} \\ &\quad -\sqrt{2\theta} b[1 + (1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{bz}, \end{aligned}$$

$$\left[a^\dagger, [1 + (1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}\right] = \sqrt{2\theta} b(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}[1 + (1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}.$$

In Matrixform sehen die Kommutatoren dann wie folgt aus

$$\left[a^\dagger, \hat{J}^\dagger_{+\infty}\right] =$$

$$-2\sqrt{2\theta} b(1-\sigma) \begin{pmatrix} e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2} & -\frac{1+p}{1-p} e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar{z}} \\ \begin{array}{l} \frac{1-p}{1+p} \Big\{ e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}e^{bz} \\ -(1-\sigma)^{-1}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{bz} \Big\} \end{array} & e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2} \end{pmatrix}.$$

[9]Da jetzt öfter zwischen Operator- und Sternproduktformalismus gewechselt wird, werden Operatoren wieder mit einem Dach gekennzeichnet. Einzige Ausnahme sind die Operatoren $\hat{z}$ und $\hat{\bar{z}}$, die weiterhin als z bzw. $\bar{z}$ geschrieben werden.

Durch hermitesche Konjugation der Operatoren bzw. der Matrix bekommt man

$$\left[a^\dagger, \hat{J}^\dagger_{+\infty}\right]^\dagger =$$

$$-2\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)\left(\begin{array}{cc} e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2} & \begin{array}{c}\frac{1-p}{1+p}\left\{e^{b\bar{z}}e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}\right. \\ \left.-e^{b\bar{z}}(1-\sigma)^{-1}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}\right\}\end{array} \\ -\frac{1+p}{1-p}e^{bz}e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2} & e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2} \end{array}\right),$$

da $\sigma = \bar{\sigma} = -\frac{4p}{(1-p)^2}$, $e^{b\bar{z}}e^{bz} = (e^{b\bar{z}}e^{bz})^\dagger$, und $e^{b\bar{z}}e^{bz}$ mit Funktionen von $e^{b\bar{z}}e^{bz}$ vertauscht. In ganz analoger Weise bekommt man die restlichen Terme in (97)

$$\left[a, [1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}\right] = -\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2},$$

$$\begin{aligned}\left[a, [1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{b\bar{z}}\right] &= -\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar{z}} \\ &\quad +\sqrt{2\theta}b[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar{z}},\end{aligned}$$

$$\left[a, [1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}e^{bz}\right] = -\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}e^{bz},$$

$$\left[a, [1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}\right] = -\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2},$$

die sich wiederum in Matrixform darstellen lassen

$$\left[a, \hat{J}^\dagger_{+\infty}\right] =$$

$$+2\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)\left(\begin{array}{cc} e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2} & \begin{array}{c}\frac{1-p}{1+p}\left\{(1-\sigma)^{-1}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar{z}}\right. \\ \left.-e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar{z}}\right\}\end{array} \\ \frac{1+p}{1-p}e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}e^{bz} & e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2} \end{array}\right),$$

und entsprechend der hermitesch konjugierte Operator

$$\left[a, \hat{J}^\dagger_{+\infty}\right]^\dagger =$$

$$+2\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)\left(\begin{array}{cc} \begin{array}{c}e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2} \\ \frac{1-p}{1+p}\left\{(1-\sigma)^{-1}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}\right. \\ \left.-e^{bz}e^{b\bar{z}}e^{bz}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2}\right\}\end{array} & \begin{array}{c}\frac{1+p}{1-p}e^{b\bar{z}}e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2} \\ \\ e^{bz}e^{b\bar{z}}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}\end{array} \end{array}\right).$$

Die Kommutatoren von $a^\dagger$ mit $\hat{J}^\dagger_{-\infty}$ ergeben

$$\left[a^\dagger, -(1-\sigma)[(1-\sigma)+e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}\right] = -\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2},$$

$$\left[a^\dagger, [(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{z}]^{-1}e^{b\bar z}\right] = \sqrt{2\theta}be^{b\bar z}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar z},$$

$$\begin{aligned}\left[a^\dagger, -[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-1}e^{bz}\right] &= \sqrt{2\theta}b[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-1}e^{bz}\\ &\quad -\sqrt{2\theta}be^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}e^{bz},\end{aligned}$$

$$\left[a^\dagger, -(1-\sigma)[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-1}\right] = -\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}.$$

Daraus folgt

$$\left[a^\dagger, \hat J^\dagger_{-\infty}\right] =$$

$$-2\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)\begin{pmatrix} -e^{b\bar z}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-2} & \frac{1}{1-\sigma}\frac{1+p}{1-p}e^{b\bar z}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar z} \\ \frac{1}{1-\sigma}\frac{1+p}{1-p}\left\{[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-1}e^{bz} -e^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}e^{bz}\right\} & -e^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}\end{pmatrix},$$

$$\left[a^\dagger, \hat J^\dagger_{-\infty}\right]^\dagger =$$

$$-2\sqrt{2\theta}(1-\sigma)\begin{pmatrix} -e^{b\bar z}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-2} & \frac{1}{1-\sigma}\frac{1+p}{1-p}\left\{e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-1} -e^{b\bar z}e^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}\right\} \\ \frac{1}{1-\sigma}\frac{1+p}{1-p}e^{bz}e^{b\bar z}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-2} & -e^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}\end{pmatrix}.$$

Die Kommutatoren von a mit $\hat J^\dagger_{-\infty}$ sind

$$\left[a, -(1-\sigma)[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1}\right] = +\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)e^{b\bar z}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-2},$$

$$\begin{aligned}\left[a, [(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar z}\right] &= \sqrt{2\theta}b[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar z}\\ &\quad -\sqrt{2\theta}be^{b\bar z}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar z},\end{aligned}$$

$$\left[a, -[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-1}e^{bz}\right] = \sqrt{2\theta}be^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}e^{bz},$$

$$\left[a, -(1-\sigma)[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-1}\right] = +\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}.$$

Damit ist

$$\left[a, \hat J^\dagger_{-\infty}\right] =$$

$$-2\sqrt{2\theta}b(1-\sigma)\begin{pmatrix} e^{b\bar z}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-2} & \frac{1}{1-\sigma}\frac{1+p}{1-p}\left\{[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-1}e^{b\bar z} -e^{b\bar z}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar z}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar z}\right\} \\ \frac{1}{1-\sigma}\frac{1+p}{1-p}e^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}e^{bz} & e^{bz}e^{b\bar z}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar z}]^{-2}\end{pmatrix}$$

$$\left[a, \hat{J}^\dagger_{-\infty}\right]^\dagger =$$

$$-2\sqrt{2\theta}(1-\sigma)\begin{pmatrix} e^{b\bar{z}}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2} & \frac{1}{1-\sigma}\frac{1+p}{1-p}\, e^{b\bar{z}}e^{bz}e^{b\bar{z}}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2} \\ \frac{1}{1-\sigma}\frac{1+p}{1-p}\Big\{e^{bz}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1} & \\ -e^{bz}e^{b\bar{z}}e^{bz}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}\Big\} & e^{bz}e^{b\bar{z}}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Terme in (97) können nun leicht durch Matrizenmultiplikation und Spurbildung gewonnen werden. Im einzelnen sieht dies so aus

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}_{t\to+\infty} &= \frac{1}{2\theta}\,Sp\left[[a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}][a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]^\dagger + [a^\dagger,\hat{J}^\dagger_{+\infty}][a^\dagger,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]^\dagger\right] \\
&= \frac{1}{2\theta}\Big[(\,[a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]_{11}[a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]^\dagger_{11} + [a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]_{12}[a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]^\dagger_{21} \\
&\quad +[a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]_{21}[a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]^\dagger_{12} + [a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]_{22}[a,\hat{J}^\dagger_{+\infty}]^\dagger_{22}\,) + \cdots\Big] \\
&= 4b^2\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2\Big\{2(1-\sigma)(e^{b\bar{z}}e^{bz})^2\,(\,[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2})^2 \\
&\quad +2(1-\sigma)(e^{bz}e^{b\bar{z}})^2\,(\,[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2})^2 \\
&\quad +e^{b\bar{z}}e^{bz}(\,[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1})^2 \\
&\quad +e^{bz}e^{b\bar{z}}(\,[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1})^2 \\
&\quad +2(1-\sigma)^2(e^{b\bar{z}}e^{bz})^3\,(\,[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2})^2 \\
&\quad +2(1-\sigma)^2(e^{bz}e^{b\bar{z}})^3\,(\,[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2})^2 \\
&\quad -2(1-\sigma)(e^{b\bar{z}}e^{bz})^2[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}[1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2} \\
&\quad -2(1-\sigma)(e^{bz}e^{b\bar{z}})^2[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}[1+(1-\sigma)e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}\Big\},
\end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, daß $1-\sigma = 1+4p/(1-p)^2 = (1+p)^2/(1-p)^2$. Für $t\to-\infty$ hingegen bekommt man

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}_{t\to-\infty} &= 4b^2\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2\Big\{2(1-\sigma)(e^{b\bar{z}}e^{bz})^2\,(\,[(1-\sigma)+e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2})^2 \\
&\quad +2(1-\sigma)(e^{bz}e^{b\bar{z}})^2\,(\,[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2})^2 \\
&\quad +e^{b\bar{z}}e^{bz}(\,[(1-\sigma)+e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1})^2 \\
&\quad +e^{bz}e^{b\bar{z}}(\,[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1})^2 \\
&\quad +2(e^{b\bar{z}}e^{bz})^3\,(\,[(1-\sigma)+e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2})^2 \\
&\quad +2(e^{bz}e^{b\bar{z}})^3\,(\,[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2})^2
\end{aligned}$$

$$-2(e^{b\bar{z}}e^{bz})^2[(1-\sigma)+e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}[(1-\sigma)+e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2}$$
$$-2(e^{bz}e^{b\bar{z}})^2[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}[(1-\sigma)+e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}\Big\}.$$

Um die Ergebnisse wieder zurück in gewöhnliche Funktionen zu transformieren, müssen lediglich sämtliche Produkte in Sternprodukte überführt werden, also

$$\hat{\mathcal{E}}_{t\to\pm\infty}(a,a^\dagger)\to\mathcal{E}_{t\to\pm\infty,\star}(z/\sqrt{2\theta},\bar{z}/\sqrt{2\theta}).$$

Dazu sei das Folgende bemerkt

- Die ständig auftretenden Operatorprodukte gehen über in[10]

$$\begin{aligned} e^{b\hat{\bar{z}}}e^{b\hat{z}} &\to e^{2b\,x-b^2\theta} \\ e^{b\hat{z}}e^{b\hat{\bar{z}}} &\to e^{2b\,x+b^2\theta} \end{aligned}$$

- Die durch ihre Potenzreihe definierten Funktionen $[1+\hat{O}]^{-1}$ und $[1+\hat{O}]^{-2}$ für positive hermitesche Operatoren $\hat{O}$ gehen wegen $f\star f=f\cdot f$ über in

$$[1+(1-\sigma)e^{b\hat{\bar{z}}}e^{b\hat{z}}]^{-1}\to\frac{1}{1+(1-\sigma)e^{b\bar{z}}\star e^{bz}}=\frac{1}{1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta}}$$

$$[(1-\sigma)+e^{b\hat{\bar{z}}}e^{b\hat{z}}]^{-1}\to\frac{1}{(1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta}}$$

$$[1+(1-\sigma)e^{b\hat{\bar{z}}}e^{b\hat{z}}]^{-2}\to\frac{1}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^2}$$

$$[(1-\sigma)+e^{b\hat{\bar{z}}}e^{b\hat{z}}]^{-2}\to\frac{1}{((1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta})^2}$$

  und entsprechend für vertauschte Produkte von $e^{b\hat{\bar{z}}}e^{b\hat{z}}$.

- Das Sternprodukt zweier Funktionen, die nur von x und nicht von y abhängen, ist identisch mit dem gewöhnlichen Produkt

$$\partial_y f=\partial_y g=0\to f\star g=fg.$$

Mit diesen Formeln kann nun $\mathcal{E}_{t\to+\infty,\star}$ und $\mathcal{E}_{t\to-\infty,\star}$ angegeben werden. Man erhält

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{t\to+\infty,\star} \\ = \;& 4b^2(1-\sigma)^2\Bigg\{2\frac{e^{4b\,x-2b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^4}+2\frac{e^{4b\,x+2b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta})^4}\end{aligned}$$

[10] Siehe (61). Zur Verdeutlichung sind Operatoren hier mit einem Dach gekennzeichnet.

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{1-\sigma}\,\frac{e^{2b\,x-b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^2}+\frac{1}{1-\sigma}\,\frac{e^{2b\,x+b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta})^2}\\
&+ \quad 2(1-\sigma)\frac{e^{6b\,x-3b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^4}+2(1-\sigma)\frac{e^{6b\,x+3b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta})^4}\\
&- \quad 2\frac{e^{4b\,x-2b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^3}-2\frac{e^{4b\,x+2b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta})^3}\Bigg\}\\
&= \quad 4b^2\frac{(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta}\left[(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^2+2(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta}\right]}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^4}\\
&\quad\;\; +4b^2\frac{(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta}\left[(1+(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta})^2+2(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta}\right]}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta})^4}\\
&\quad\;\; -8b^2(1-\sigma)^2\left\{\frac{e^{4b\,x-2b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^4}+\frac{e^{4b\,x+2b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta})^4}\right\}\\
&= \quad 4b^2(1-\sigma)\left\{\frac{e^{2b\,x-b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^2}+\frac{e^{2b\,x+b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta})^2}\right\},
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\quad\;\; \mathcal{E}_{t\to-\infty,\star}\\
&= \quad 4b^2(1-\sigma)^2\Bigg\{2\frac{e^{4b\,x-2b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta})^4}+2\frac{e^{4b\,x+2b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x+b^2\theta})^4}\\
&\quad\;\; +\frac{1}{1-\sigma}\,\frac{e^{2b\,x-b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta})^2}+\frac{1}{1-\sigma}\,\frac{e^{2b\,x+b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x+b^2\theta})^2}\\
&\quad\;\; +\frac{2}{1-\sigma}\frac{e^{6b\,x-3b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta})^4}+\frac{2}{1-\sigma}\frac{e^{6b\,x+3b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x+b^2\theta})^4}\\
&\quad\;\; -\frac{2}{1-\sigma}\frac{e^{4b\,x-2b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta})^3}-\frac{2}{1-\sigma}\frac{e^{4b\,x+2b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x+b^2\theta})^3}\Bigg\}\\
&= \quad 4b^2\frac{(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta}\left[((1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta})^2+2(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta}\right]}{((1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta})^4}\\
&\quad\;\; +4b^2\frac{(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta}\left[((1-\sigma)+e^{2b\,x+b^2\theta})^2+2(1-\sigma)e^{2b\,x+b^2\theta}\right]}{(1-\sigma)+e^{2b\,x+b^2\theta})^4}\\
&\quad\;\; -8b^2(1-\sigma)^2\left\{\frac{e^{4b\,x-2b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta})^4}+\frac{e^{4b\,x+2b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x+b^2\theta})^4}\right\}\\
&= \quad 4b^2(1-\sigma)\left\{\frac{e^{2b\,x-b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x-b^2\theta})^2}+\frac{e^{2b\,x+b^2\theta}}{((1-\sigma)+e^{2b\,x+b^2\theta})^2}\right\}.
\end{aligned}
$$

Diese Resultate lassen sich noch weiter zusammenfassen. Zum Beispiel ist

$$
\begin{aligned}
& \frac{e^{2b\,x-b^2\theta}}{(1+(1-\sigma)e^{2b\,x-b^2\theta})^2} = \frac{e^{2b\,x-b^2\theta}}{(1+e^{2b\,x-b^2\theta+\ln(1-\sigma)})^2} \\
= \; & \frac{1}{(e^{-b\,x+(b^2\theta)/2-\ln(1-\sigma)/2}+e^{b\,x-(b^2\theta)/2+\ln(1-\sigma)/2})^2}\frac{1}{e^{\ln(1-\sigma)}} \\
= \; & \frac{1}{4(1-\sigma)}\,\mathrm{sech}^2\left[b\,x-\frac{b^2\theta}{2}+\frac{1}{2}\ln(1-\sigma)\right].
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich insgesamt als Ergebnis für das asymptotische Verhalten der Energiedichte des nichtkommutativen Zweiwellensystems

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{t\to-\infty,\star} &= 4b^2\left\{\mathrm{sech}^2\left[b\,x-\frac{b^2\theta}{2}+\gamma\right]+\mathrm{sech}^2\left[b\,x+\frac{b^2\theta}{2}+\gamma\right]\right\} \\
\mathcal{E}_{t\to+\infty,\star} &= 4b^2\left\{\mathrm{sech}^2\left[b\,x-\frac{b^2\theta}{2}-\gamma\right]+\mathrm{sech}^2\left[b\,x+\frac{b^2\theta}{2}-\gamma\right]\right\}, \qquad (98)
\end{aligned}
$$

d.h. die ruhende Welle erfährt durch die Wechselwirkung eine Phasenverschiebung von 2γ, wobei

$$\gamma = -\frac{1}{2}\ln(1-\sigma) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2. \qquad (99)$$

Da $p>1$, gilt $0<\frac{2p}{1+p^2}<1$ und somit

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{2p}{1+p^2}}{1-\frac{2p}{1+p^2}}\right) = \mathrm{artanh}\left(\frac{2p}{1+p^2}\right),$$

woraus folgt

$$\tanh\gamma = -\frac{2p}{1+p^2}. \qquad (100)$$

Dieses Resultat stimmt mit dem von Leese erhaltenem Ergebnis für das kommutative Zweiwellensystem überein[11]. Die beiden Funktionen (98) sind im Anhang C für zwei verschiedene Werte für θ graphisch dargestellt. Es läßt sich leicht zeigen, daß für $\theta\to\infty$ die Energiedichte verschwindet. Dies ist nicht verwunderlich, denn die Operatoren $\hat{J}_{\pm\infty}$ gehen für $\theta\to\infty$ in eine konstante Matrix über, so daß sämtliche Kommutatoren in $\hat{\mathcal{E}}$ verschwinden. Darüberhinaus reproduzieren die Gleichungen (98) im kommutativen Grenzfall $\theta\to 0$ das Resultat von Leese (49).

[11] Siehe Gleichung (50) für $p_1=-1$ und $p_2=:p$. Danach ist $\tanh\gamma=-\frac{2p}{1+p^2}$.

5.5 Faktorisierung

Statt der additiven Form (81) von $J^\dagger$ kann alternativ auch ein multiplikativer Ansatz für das Zweiwellensystem konstruiert werden. Für $m = 1$ ist nach (66)

$$\psi_1 = \mathbf{1}_{2\times 2} + T_1 \frac{\Gamma^{11}}{\zeta - \mu_1} T_1^\dagger = \mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_1}{\zeta - \mu_1} P_1, \tag{101}$$

mit hermiteschem Projektor $P_1 = T_1(T_1^\dagger T_1)^{-1} T^\dagger$. Nun wird für die Zweiwellenlösung ein Produktansatz gemacht ($\mu_1 = -i\,,\ \mu_2 =: \mu$)

$$\psi_2 = \left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{-2i}{\zeta + i}\,\tilde{P}_1\right)\left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\mu - \bar{\mu}}{\zeta - \mu}\,\tilde{P}_2\right), \tag{102}$$

mit zunächst unbestimmten Operatoren $\tilde{P}_1$ und $\tilde{P}_2$. Wegen (64) müssen $\tilde{P}_1$ und $\tilde{P}_2$ beide hermitesche Projektoren sein

$$\tilde{P}_k = \tilde{T}_k(\tilde{T}_k^\dagger \tilde{T}_k)^{-1}\tilde{T}_k^\dagger\ ,\ \ k = 1, 2, \tag{103}$$

mit 2×1 Matrizen $\tilde{T}_k$[12]. Die Forderung nach verschwindendem Residuum in $\zeta = \bar{\mu}_2 = \bar{\mu}$ in (63) ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= -\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{2i}{\bar{\mu} + i}\,\tilde{P}_1\right)\left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\mu - \bar{\mu}}{\bar{\mu} - \mu}\,\tilde{P}_2\right)\partial_{\bar{w}_2}\tilde{P}_2\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{2i}{\bar{\mu} + i}\,\tilde{P}_1\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{2i}{\bar{\mu} + i}\,\tilde{P}_1\right)\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \tilde{P}_2\right)[c, \tilde{P}_2]\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{2i}{\bar{\mu} + i}\,\tilde{P}_1\right)\\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2\theta}}\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \frac{2i}{\bar{\mu} + i}\,\tilde{P}_1\right)\underbrace{\left(\mathbf{1}_{2\times 2} - \tilde{P}_2\right)\tilde{P}_2}_{\equiv 0}\left[c, \frac{2i}{\bar{\mu} + i}\,\tilde{P}_1\right]\\
&\Rightarrow\ (\mathbf{1}_{2\times 2} - \tilde{P}_2)c\tilde{P}_2 = 0\\
&\Rightarrow\ c\tilde{T}_2 = \tilde{T}_2 Z_2.
\end{aligned} \tag{104}$$

Mit $Z_2 = c$ gilt mit Blick auf (75) und (76), daß die Elemente von $\tilde{T}_2$ wieder irgendwelche Funktionen von c sind. Hier wird speziell wieder ein Exponentialansatz gemacht

$$\tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 e^{\gamma_3 c} \end{pmatrix}, \tag{105}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten γ_1, γ_2 und γ_3.

[12]Die $\tilde{T}_k$ sind nicht mit den T_k aus (84) zu verwechseln, denn hier liegt ein ganz anderer Lösungsansatz für ψ bzw. $J^\dagger = \psi(\zeta = 0)$ vor. Der Zusammenhang zwischen T_k und $\tilde{T}_k$ wird jedoch gefunden.

Für $\zeta \to i$ hingegen ergibt sich folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{1}_{2\times 2} - \tilde{P}_1)\left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\mu-\bar{\mu}}{i-\mu}\,\tilde{P}_2\right)\partial_{\bar{w}_1}\left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\bar{\mu}-\mu}{i-\bar{\mu}}\,\tilde{P}_2\right)\tilde{P}_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\mathbf{1}_{2\times 2} - \tilde{P}_1)\left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\mu-\bar{\mu}}{i-\mu}\,\tilde{P}_2\right)\left[a, \mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\mu-\bar{\mu}}{i-\bar{\mu}}\tilde{P}_2\right]\tilde{P}_1 \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{\theta}}(\mathbf{1}_{2\times 2} - \tilde{P}_1)\left[a, \tilde{P}_1\right]^{13} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\mathbf{1}_{2\times 2} - \tilde{P}_1)\left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\mu-\bar{\mu}}{i-\mu}\,\tilde{P}_2\right)a\left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\bar{\mu}-\mu}{i-\bar{\mu}}\,\tilde{P}_2\right)\tilde{P}_1. \qquad (106)
\end{aligned}$$

Dies ist keine „Holomorphie“-Bedingung für $\tilde{T}_1$ wie für $\tilde{T}_2$ in (105). Aber im Grenzfall $t \to \pm\infty$ gilt für $\tilde{P}_2$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_2 &= \begin{pmatrix} \gamma_1\bar{\gamma}_1(\gamma_1\bar{\gamma}_1 + \gamma_2\bar{\gamma}_2 e^{\bar{\gamma}_3 c^\dagger} e^{\gamma_3 c})^{-1} & \gamma_1\bar{\gamma}_2(\gamma_1\bar{\gamma}_1 + \gamma_2\bar{\gamma}_2 e^{\bar{\gamma}_3 c^\dagger} e^{\gamma_3 c})^{-1} e^{\bar{\gamma}_3 c^\dagger} \\ \bar{\gamma}_1\gamma_2 e^{\gamma_3 c}(\gamma_1\bar{\gamma}_1 + \gamma_2\bar{\gamma}_2 e^{\bar{\gamma}_3 c^\dagger} e^{\gamma_3 c})^{-1} & \gamma_2\bar{\gamma}_2 e^{\gamma_3 c}(\gamma_1\bar{\gamma}_1 + \gamma_2\bar{\gamma}_2 e^{\bar{\gamma}_3 c^\dagger} e^{\gamma_3 c})^{-1} e^{\bar{\gamma}_3 c^\dagger} \end{pmatrix} \\
&\to \begin{cases} \Pi_{-\infty} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & , t \to -\infty \\ \\ \Pi_{+\infty} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & , t \to +\infty \end{cases}, \qquad (107)
\end{aligned}$$

wobei $\gamma_3 \in \mathbb{R}$ benutzt wurde[14]. Weil $\Pi_{\pm\infty}$ koordinatenunabhängige Projektoren sind, kann der Operator a in (106) an $\tilde{P}_1$ gerückt werden, so daß in diesem Grenzfall auch eine Holomorphiebedingung für $\tilde{T}_1$ gilt

$$(1 - \tilde{P}_1)a\tilde{P}_1 = 0 \;\Rightarrow\; a\tilde{T}_1 = \tilde{T}_1 Z_1. \qquad (108)$$

Mit $Z_1 = a$ bedeutet dies, daß die Elemente von $\tilde{T}_1$ beliebige Funktionen von a sind. Mit einem allgemeinen Exponentialansatz ist

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 e^{\lambda_3 a} \end{pmatrix}. \qquad (109)$$

Im Limes $t \to \pm\infty$ führt dies durch (102) zu

$$J^\dagger_{\pm\infty} = \lim_{t\to\pm\infty} \psi_2(\zeta = 0) = (\mathbf{1}_{2\times 2} - 2\tilde{P}_{1\pm\infty})(\mathbf{1}_{2\times 2} - 2\Pi_{\pm\infty}), \qquad (110)$$

[13] Es gilt $\left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\mu-\bar{\mu}}{i-\mu}\,\tilde{P}_2\right)\left(\mathbf{1}_{2\times 2} + \frac{\bar{\mu}-\mu}{i-\bar{\mu}}\,\tilde{P}_2\right) = \mathbf{1}_{2\times 2}$.

[14] Die Konstanten γ_1 und γ_2 sind beliebige komplexe Zahlen. γ_3 muß reell sein, damit die Grenwerte $t \to \pm\infty$ existieren.

d.h. $J^\dagger_{\pm\infty}$ faktorisiert in eine modifizierte zeitunabhängige Einwellenlösung ($T_1 \to \tilde{T}_1$) und eine konstante Matrix ($\mathbf{1}_{2\times 2} - 2\Pi_{\pm\infty}$).

Wenn man (110) ausmultipliziert, so lassen sich durch Vergleich mit $J^\dagger_{-\infty}$ aus (94) Bestimmungsgleichungen für die λ_k aufstellen

$$\begin{aligned}
J^\dagger_{-\infty} &= \mathbf{1}_{2\times 2} - 2\Pi_{-\infty} - 2\tilde{P}_{1,-\infty} + 4\tilde{P}_{1,-\infty}\Pi_{-\infty} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad -2\begin{pmatrix} -\lambda_1\bar{\lambda}_1[\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 e^{\bar{\lambda}_3 a^\dagger} e^{\lambda_3 a}]^{-1} & \lambda_1\bar{\lambda}_2[\cdots]^{-1} e^{\bar{\lambda}_3 a^\dagger} \\ -\lambda_2\bar{\lambda}_1 e^{\lambda_3 a}[\cdots]^{-1} & \lambda_2\bar{\lambda}_2 e^{\lambda_3 a}[\cdots]^{-1} e^{\bar{\lambda}_3 a^\dagger} \end{pmatrix}^{15} \\
&\overset{(94)}{\Rightarrow} \lambda_3 = \bar{\lambda}_3 = \sqrt{2\theta}b \\
&\quad\ \lambda_1\bar{\lambda}_1 = 1 - \sigma \\
&\quad\ \lambda_2\bar{\lambda}_2 = 1 \\
&\quad\ \lambda_1\bar{\lambda}_2 = \lambda_2\bar{\lambda}_1 = \frac{1+p}{1-p} \\
&\quad\ 1 - \sigma = \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2 \\
&\Rightarrow \lambda_2 = \bar{\lambda}_2 = 1 \\
&\quad\ \lambda_1 = \bar{\lambda}_1 = \frac{1+p}{1-p} =: \lambda \\
&\Rightarrow \tilde{T}_{1,-\infty} = \begin{pmatrix} \lambda \\ e^{bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{bz} \end{pmatrix} = \left[\mathbf{1}_{2\times 2} + (\lambda - 1)\Pi_{-\infty}\right] T_1.
\end{aligned} \tag{111}$$

Im Limes $t \to +\infty$ hingegen erhält man durch Vergleich mit (92)

$$\begin{aligned}
J^\dagger_{+\infty} &= \mathbf{1}_{2\times 2} - 2\Pi_{+\infty} - 2\tilde{P}_{1,+\infty} + 4\tilde{P}_{1,+\infty}\Pi_{+\infty} \\
&\Rightarrow \tilde{T}_{1,+\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{bz} \end{pmatrix} = \left[\mathbf{1}_{2\times 2} + (\lambda - 1)\Pi_{+\infty}\right] T_1.
\end{aligned} \tag{112}$$

Es zeigt sich also, daß $J^\dagger$ im Limes $t \to \pm\infty$ faktorisiert

$$\lim_{t\to\pm\infty} J^\dagger = (1 - 2\tilde{P}_{1,\pm\infty})(1 - 2\Pi_{\pm\infty}), \tag{113}$$

wobei

$$\tilde{P}_{1,\pm\infty} = \left[\mathbf{1}_{2\times 2} + (\lambda - 1)\Pi_{\pm\infty}\right] T_1 \left[T_1^\dagger(\mathbf{1}_{2\times 2} - \sigma\Pi_{\pm\infty})T_1\right]^{-1} T_1^\dagger \left[\mathbf{1}_{2\times 2} + (\lambda - 1)\Pi_{\pm\infty}\right].$$

[15] $\lambda_2\bar{\lambda}_2 e^{\lambda_3 a}[\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 e^{\bar{\lambda}_3 a^\dagger} e^{\lambda_3 a}]^{-1} e^{a^\dagger} = 1 - \lambda_2\bar{\lambda_2}[\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 e^{\lambda_3 a} e^{\bar{\lambda}_3 a^\dagger}]^{-1}$.

6 Ergebnisse

Um Wellenlösungen des nichtkommutativen $U(2)$ Sigma Modells zu erhalten, wurde für die elementaren Matrizen T_k ein Exponentialansatz verwendet. Für die allgemeine $m = 2$ Lösung für $J^\dagger$ wurde der Limes $t \to \pm\infty$ berechnet und daraus die zeitliche Asymptotik der Energiedichte. Es zeigte sich, daß die Wechselwirkung zweier Wellen, eine statisch und die andere zeitabhängig, nicht von θ abhängt, wohl aber die funktionale Form von $\mathcal{E}_{t\to\pm\infty,\star}$. Die Phasenverschiebung, die die ruhende Welle durch die Wechselwirkung erfährt, ist mit der von Leese für zwei kommutative Wellen berechneten Phasenverschiebung identisch. Außerdem geht die Energiedichte $\mathcal{E}_{t\to\pm\star}$ im kommutativen Grenzfall in das von Leese erhaltene Ergebnis über.

Zusätzlich wurde noch gezeigt, daß das Zweiwellensystem im Grenzfall $t \to \pm\infty$ in eine Einwellenlösung und eine konstante Matrix faktorisiert. Daran läßt sich bereits auf dem Niveau von $J^\dagger$ erkennen, daß eine Wechselwirkung stattgefunden haben muß. Es wäre noch interessant gewesen, einen direkten Zusammenhang dieser beiden Operatoren zu finden, etwa in Form einer Streumatrix. Dies ist mir jedoch nicht gelungen.

A Beweis von (56)

Die Beziehung (56) läßt sich einfach beweisen, wenn die Spur mit Hilfe kohärenter Zustände berechnet wird. Dieser Basiswechsel ändert die Spur nicht, da diese unabhängig von der Basis von $\mathcal{H}$ ist.

Kohärente Zustände sind Eigenzustände von $a = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\hat{z}$, d.h.

$$a|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle.$$

Der Zusammenhang der $|\,\alpha\rangle$ mit den Zuständen $|n\rangle$ erhält man wie folgt

$$|\,\alpha\rangle \;=\; \sum_n |\,n\rangle\langle n|\,\alpha\rangle = \sum_n |\,n\rangle\langle 0|\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|\,\alpha\rangle = \langle 0|\,\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\,n\rangle.$$

Für die Bra-Vektoren gilt dann

$$\langle\alpha| = \langle\alpha|\,0\rangle \sum_n \langle n|\frac{(\bar{\alpha})^n}{\sqrt{n!}}.$$

Die Skalarprodukte vor den beiden Summen ergeben sich wegen $\langle\alpha|\,\alpha\rangle = 1$ zu

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\,\alpha\rangle &= \langle\alpha|\,0\rangle\langle 0|\,\alpha\rangle \sum_n \langle n|\,n\rangle \frac{(\alpha\bar{\alpha})^n}{n!} \\
&= |\,\langle\alpha|\,0\rangle|^{\,2}\, e^{\alpha\bar{\alpha}} \stackrel{!}{=} 1 \\
&\Rightarrow\; |\,\langle\alpha|\,0\rangle|^{\,2} = e^{-|\alpha|^2} \\
&\Rightarrow\; |\,\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\; e^{\alpha a^\dagger}|\,0\rangle.
\end{aligned}$$

Damit läßt sich sich die Spur von $\hat{f}$ bzw. von $e^{i\sqrt{2\theta}(\bar{p}a+pa^\dagger)}$ berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} e^{i\sqrt{2\theta}(\bar{p}a+pa^\dagger)} &= \sum_n \langle n|\, e^{i\sqrt{2\theta}(\bar{p}a+pa^\dagger)}|\,n\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\int d(\mathrm{Re}\,\alpha)d(\mathrm{Im}\,\alpha) \sum_n \langle n|\,\alpha\rangle\langle\alpha|\, e^{i\sqrt{2\theta}(\bar{p}a+pa^\dagger)}|\,n\rangle^1 \\
&= \frac{i}{2\pi}\int d\alpha d\bar{\alpha} e^{-|\alpha|^{\,2}}\, \underbrace{\langle 0|\, e^{\bar{\alpha}a} e^{i\sqrt{2\theta}(\bar{p}a+pa^\dagger)} e^{\alpha a^\dagger}|\,0\rangle}_{I}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Baker-Haussdorf Formel kann das Matrixelement vereinfacht werden

$$\begin{aligned}
I &= \langle 0|\, e^{\bar{\alpha}a} e^{i\sqrt{2\theta}\bar{p}a} e^{i\sqrt{2\theta}pa^\dagger} e^{\alpha a^\dagger}|\,0\rangle\, e^{\theta\bar{p}p} \\
&= \langle 0|\, e^{(\bar{\alpha}+i\sqrt{2\theta}\bar{p})a} e^{(\alpha+i\sqrt{2\theta}p)a^\dagger}|\,0\rangle\, e^{\theta\bar{p}p} \\
&= \langle 0|\, e^{(\alpha+i\sqrt{2\theta}p)a^\dagger} e^{(\bar{\alpha}+i\sqrt{2\theta}\bar{p})a}|\,0\rangle\, e^{(\bar{\alpha}+i\sqrt{2\theta}\bar{p})(\alpha+i\sqrt{2\theta}p)} e^{\theta\bar{p}p} \\
&= e^{|\,\alpha|^2 + i\bar{\alpha}p\sqrt{2\theta} + i\alpha\bar{p}\sqrt{2\theta} - \theta\bar{p}p}.
\end{aligned}$$

[1] Kohärente Zustände sind übervollständig, d.h. $\int d(\mathrm{Re}\,\alpha)d(\mathrm{Im}\,\alpha)|\,\alpha\rangle\langle\alpha| = \pi$.

Wieder eingesetzt ergibt sich mit den neuen Variablen $\alpha = x + iy$, $\bar{\alpha} = x - iy$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} e^{i\sqrt{2\theta}(\bar{p}a+pa^\dagger)} &= \frac{1}{\pi}\int dxdy e^{i\sqrt{2\theta}(p+\bar{p})x} e^{i\sqrt{2\theta}(p-\bar{p})y} e^{-\theta p\bar{p}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int dxdy e^{i\sqrt{2\theta}k_x x} e^{i\sqrt{2\theta}k_y y} e^{-\theta(k_x^2+k_y^2)} \\
&= \frac{1}{\pi}(2\pi)^2 \delta(\sqrt{2\theta}k_x)\delta(\sqrt{2\theta}k_y) = \frac{2\pi}{\theta}\,\delta^2(k).
\end{aligned}$$

Damit ist offensichtlich

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k \tilde{f}(k)\frac{2\pi}{\theta}\,\delta^2(k) = \frac{1}{2\pi\theta}\int d^2x f(x).$$

Dieser Beweis ist [26] entnommen.

B Kommutatoren

$$[z, \bar{z}] = 2\theta$$

$$[z, e^{b\bar{z}}] = 2\theta b + \frac{1}{2}\,b^2[z, \bar{z}^2] + \cdots = 2\theta b e^{b\bar{z}}$$

$$[\bar{z}, e^{bz}] = -2\theta b + \frac{1}{2}\,b^2[\bar{z}, z^2] + \cdots = -2\theta b e^{bz}$$

$$\begin{aligned}
[z, [1 + e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}] &= [z, 1 - e^{b\bar{z}}e^{bz} + (e^{b\bar{z}}e^{bz})^2 - + \cdots] \\
&= -2\theta b e^{b\bar{z}}e^{bz} + 2(2\theta b)(e^{a^\dagger}e^{a})^2 - 3(2\theta b)(e^{a^\dagger}e^{a})^3 + - \cdots \\
&= -2\theta b e^{b\bar{z}}e^{bz}(1 - 2e^{b\bar{z}}e^{bz} + 3(e^{b\bar{z}}e^{bz})^2 - + \cdots) \\
&= -2\theta b e^{b\bar{z}}e^{bz}[1 + e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2} \\
&= -2\theta b[1 + e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar{z}}e^{bz}.
\end{aligned}$$

Ebenso gilt

$$[\bar{z}, [1 + e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-1}] = 2\theta b e^{b\bar{z}}e^{bz}[1 + e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2} = 2\theta b[1 + e^{b\bar{z}}e^{bz}]^{-2}e^{b\bar{z}}e^{bz}$$

$$[z, [1 + e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}] = -2\theta b e^{bz}e^{b\bar{z}}[1 + e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2},$$

$$[\bar{z}, [1 + e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-1}] = 2\theta b e^{bz}e^{b\bar{z}}[1 + e^{bz}e^{b\bar{z}}]^{-2}.$$

C Energiedichte des Zweiwellensystems

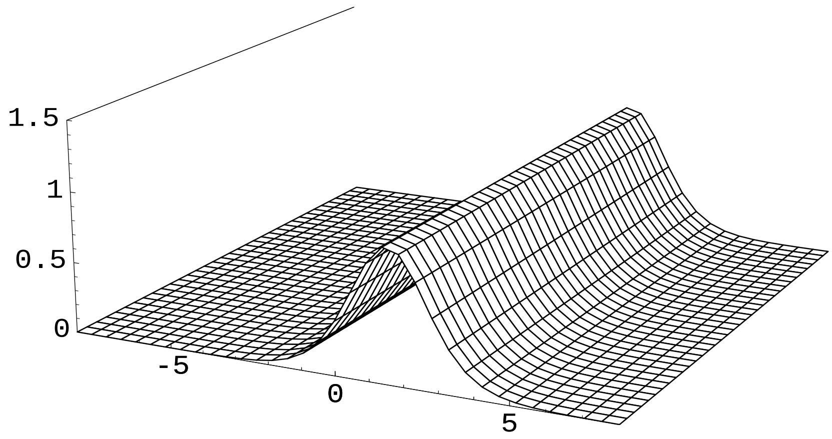

Abbildung 3: $\mathcal{E}_{-\infty,\star}$ für $b = 1, p = 2, \theta = 1$.

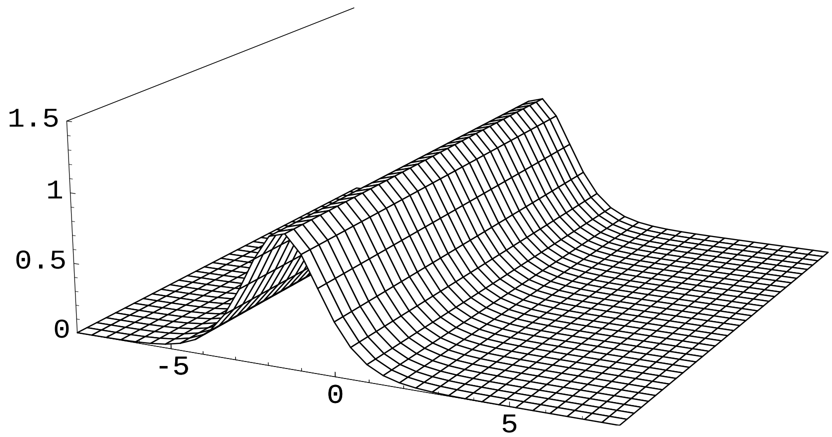

Abbildung 4: $\mathcal{E}_{+\infty,\star}$ für $b = 1, p = 2, \theta = 1$.

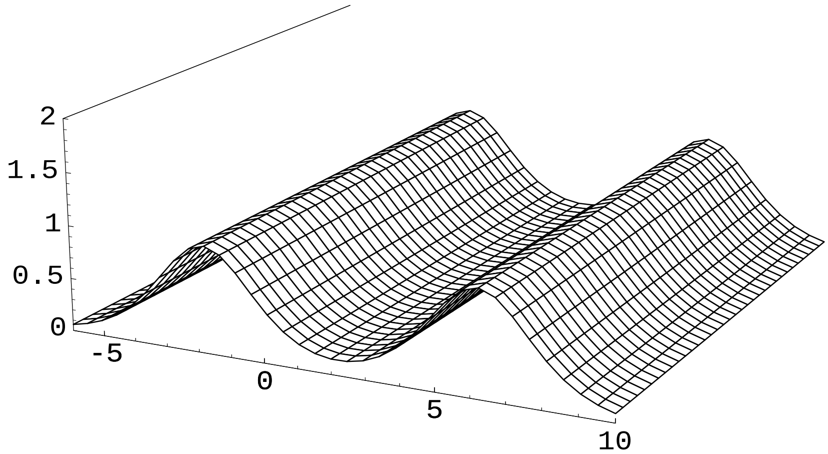

Abbildung 5: $\mathcal{E}_{-\infty,\star}$ für $b = 1, p = 2, \theta = 4$.

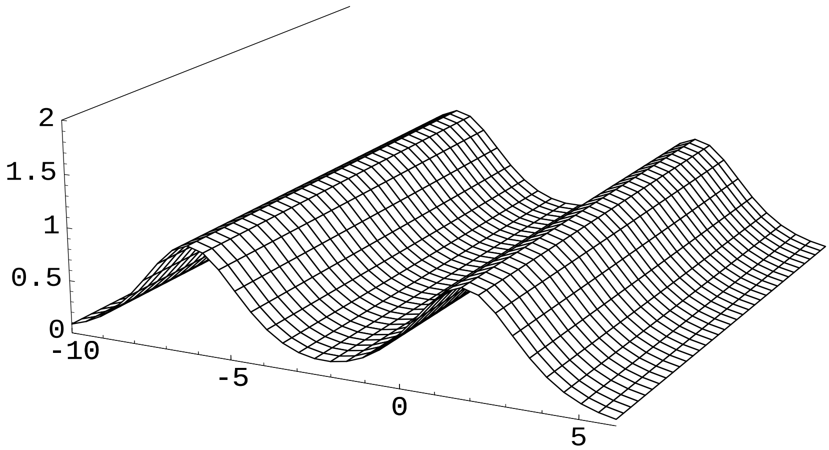

Abbildung 6: $\mathcal{E}_{+\infty,\star}$ für $b = 1, p = 2, \theta = 4$.

Literatur

[1] Sexl, R.U., Urbantke, H.K., *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer-Verlag, Wien, 1992.

[2] Georgi,H., *Lie Algebras in Particle Physics*, Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1999.

[3] Faddeev, L.D., Slavnov, A.A., *Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1992.

[4] Prasad, M.K., *Instantons and Monopoles in Yang-Mills Gauge Field Theories*, Physica 1**D** (1980) 167-191.

[5] Schwarz, A.S., *Quantum Field Theory and Topology*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

[6] Cheng, T.-P., Li, L.-F., *Gauge Theory and Elemantary Particle Physics*, Oxford University Press, Oxford, 1988.

[7] Peskin, M.E., Schroeder, D.V., *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1995.

[8] Ryder, L.H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[9] Rajaraman,R., *An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.

[10] Coleman, S., Commun. Math. Phys. **55** (1977) 113.

[11] 't Hooft, G., Phys.Rev.Lett. **37** (1976) 8.

[12] Ward, R.S., *Soliton Solutions in an Integrable Chiral Model in 2+1 Dimensions*, J.Math.Phys. **29** (1988) 386-389.

[13] Ward, R.S., *Twistors in 2+1 Dimesions*, J.Math.Phys. **30** (1989) 2246-2251.

[14] Leese, R., *Extended Wave Solutions in an Integrable Chiral Model in 2+1 Dimensions*, J.Math.Phys. **30** (1989) 2072-2077.

[15] Ioannidou, T., *Soliton Scaterring and Nontrivial Scattering in an Integrable Chiral Model in 2+1 Dimensions*, J.Math.Phys. **37** (1996) 3422-3441 [hep-th/9604126].

[16] Snyder, H.S., *Quantized Space-Time*, Phys.Rev. **71** (1947) 38-41.

[17] Seiberg, N., Witten, E., *String Theory and Noncommutative Geometry*, JHEP **9909** (1999) 032 [hep-th/9908142].

[18] Gross, D.J., Nekrasov, N.A., *Monopoles and Strings in Noncommutative Gauge Theory*, JHEP **0007** (2000) 034 [hep-th/0005204].

[19] Matsubara, K., *Restrictions on Gauge Groups in Noncommutative Gauge Theory*, Phys.Lett. **B482** (2000) 417-419 [hep-th/0003294].

[20] Alvarez-Gaume, L., Wadia, S.R., *Gauge Theory on a Quantum Phase Space*, Phys.Lett. **B501** (2001) 319-325 [hep-th/0006219].

[21] Lechtenfeld, O., Popov, A.D., Spendig, B., *Open $N = 2$ Strings in a B-Field Background and Noncommutative Self-dual Yang-Mills*, Phys.Lett. **B507** (2001) 317-326 [hep-th/0012200].

[22] Lechtenfeld, O., Popov, A.D., Spendig, B., *Noncommutative Solitons in Open $N = 2$ String Theory*, JHEP **0106** (2001) 011 [hep-th/0103196].

[23] Lechtenfeld, O., Popov, A.D., *Noncommutative Multi-Solitons in 2+1 Dimensions*, JHEP **0111** (2001) 040 [hep-th/0106213].

[24] Lechtenfeld, O., Popov, A.D., *Scattering of Noncommutative Solitons in 2+1 Dimensions*, Phys.Lett. **B523** (2001) 178-184 [hep-th/0108118].

[25] Harvey, J.A., *Komaba Lectures on Noncommutative Solitons and D-Branes* [hep-th/0102076].

[26] Morita, K., *Connes' Gauge Theory on Noncommutative Space-Times* [hep-th/0011080].

[27] Carroll, S.M.,Harvey, J.A., Kostelecky, V.A., Lane, C.D., Okamoto, T., *Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation*, Phys.Rev.Lett. **87** (2001) 141601 [hep-th/0105082].

[28] Dasgupta, K., Mukhi, S., Rajesh, G., *Noncommutative Tachyons*, JHEP **0006** (2000) 022 [hep-th/0005006].

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof.Dr. Olaf Lechtenfeld für die Vergabe der Diplomarbeit und Herrn Dr. Alexander D. Popov für die Betreuung und Motivation während der Bearbeitung. Es wurden mit ihrer Hilfe auftretende Fragen geklärt und auch technische Schwierigkeiten beseitigt.

Bedanken möchte ich mich auch bei meiner Freundin, die gerade in der Endphase großes Verständis zeigte.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich diese Diplomarbeit nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel selbständig angefertigt zu haben.