ITP-UH-14/96

Moduli und Amplituden des N=2 Strings

Vom Fachbereich Physik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Phys. Jan Bischoff
geboren am 25. April 1966 in Hannover

Abstract

This thesis is investigating the structure of moduli and amplitudes of the $N = 2$ string. The main interest of this work is the calculation of higher loop amplitudes for the closed $N = 2$ string, which are defined as path integrals over compact Riemann surfaces of higher genus. After a short discussion of the classical $N = 2$ string and its symmetries we calculate some local properties of the quantum theory, e.g. $N = 2$ algebra, BRS-transformations, vertex operators. The local formulation of this theory can be entirely treated by means of conformal field theory. In this context we are able to analyse the behaviour of picture changing and spectral flow. We find that spectral flow leads to new non-trivial BRS-invariant vertex operators which cannot be reached by picture changing. We then explicitly construct the path integral for the $N = 2$ string, respectively the gauge fixed integral over $N = 2$ moduli space. The most interesting new feature compared to the $N = 1$ string is the appearance of an additional $U(1)$ gauge group and its moduli. The evaluation of the integral over the $U(1)$ moduli can be performed explicitly by bosonizing the charged fields. This procedure leads to a deeper understanding of the $U(1)$ gauge group in the $N = 2$ string theory. The $U(1)$ moduli can be naturally combined with the soliton sector of the bosonized fields. The $U(1)$ moduli integral results explicitly in an integral over spin structures of the compact Riemann surfaces. The field content of the $N = 2$ string allows the definition of a connection-like $U(1)$ transformation law on these charged bosons with invariance of the bosonized action. A consequent exploitation of this formalism leads to an independance of the path integral from the chern number contribution for a non-trivial $U(1)$-bundle. Including punctured Riemann surfaces and their additional moduli together with spectral flow gives an explanation for the equivalence of Ramond and Neveu-Schwarz sectors. In the end some amplitudes are calculated, even for non-trivial chern number.

Referent: Prof. Dr. Lechtenfeld
Koreferent: Prof. Dr. Dragon
Tag der Promotion: 26.06.1996

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung der Moduli und der Berechnung von Amplituden des $N = 2$ Strings. Das Interesse gilt insbesondere den Loop-Amplituden des geschlossenen $N = 2$ Strings, also Pfadintegralen über kompakte Riemannflächen höheren Genus. Nach einer einführenden Diskussion des klassischen Strings und seiner Symmetrien werden zunächst die lokalen Eigenschaften der quantisierten Stringtheorie behandelt, wie $N = 2$ Algebra, BRS-Transformationen und die Konstruktion von Vertexoperatoren. Diese lokale Formulierung des Strings läßt sich vollständig mit den Techniken der konformen Feldtheorie behandeln.
In diesem Zusammenhang wird der Formalismus des Bildwechsels und die Wirkungsweise des spekralen Flußes auf den Vertexoperatoren analysiert. Es zeigt sich, daß der spektrale Fluß nicht einfach eine Kombination von Bildwechseln ist, sondern auf neue BRS-invariante, nicht-triviale Vertexoperatoren führt.
Nach der Diskussion der lokalen Eigenschaften folgt eine explizite Konstruktion des Pfadintegrals für den $N = 2$ String. Nach der Eichfixierung der Wirkung mit Hilfe der Faddeev-Popov-Methode wird die Struktur des $N = 2$ Modulraumes analysiert. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf der im Vergleich zu bosonischem und $N = 1$ String neuen $U(1)$-Eichgruppe. Die Entstehung der Bildwechsel-Operatoren wird auch im Zusammenhang mit den fermionischen Moduli der $N = 2$ Super-Riemannflächen vorgestellt.
Für die explizite Auswertung des $U(1)$-Moduli-Integrals hat sich gezeigt, daß die Bosonisierung der geladenen Felder zu neuen Einsichten für die Wirkungsweise der $U(1)$ im Pfadintegral führt. So koppelt die $U(1)$ nur an den Solitonsektor der entsprechenden Bosonen. Der Feldgehalt des $N = 2$ Strings erlaubt sogar die Definition von $U(1)$-Transformationen auf den geladenen Bosonen unter Invarianz der bosonisierten Wirkung. Es gelingt, die Integration über die $U(1)$-Moduli bei der Berechnung von Korrelationsfunktionen explizit in ein Integral über die Spinstrukturen der betrachteten kompakten Riemannflächen umzuschreiben. Auch bei der Diskussion der Auswirkungen der Chernzahl c_1 für ein nicht triviales $U(1)$-Bündel läßt die Bosonisierung eine neue Interpretation zu. Der Solitonsektor der geladenen Bosonen verhält sich wie der Modulraum der $U(1)$-Konnektion. Eine konsequente Ausnutzung dieser Tatsache führt schließlich zu einer Unabhängigkeit des Pfadintegrals von der Chernzahl des $U(1)$-Bündels. Am Ende der Arbeit werden die Verallgemeinerungen durch die Verwendung punktierter Riemannflächen beschrieben, auch die Chernzahl und den spektralen Fluß betreffend. Die zusätzlichen Moduli der $U(1)$ durch die Punktierungen führen zu spektralen Flüssen der Vertexoperatoren im Pfadintegral. Durch diesen Mechanismus läßt sich die Äquivalenz der Amplituden in Neveu-Schwarz- und Ramond-Sektor erklären. Den Abschluß bildet die Berechnung einiger Amplituden, auch für nicht-triviale Chernzahl.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die $N = 2$ erweitert supersymmetrischen Feldtheorien haben in den letzten Jahren nicht nur in der mathematischen Physik große Bedeutung gewonnen. Eine zentrale Rolle nehmen diese Theorien insbesondere in der Erforschung eines nicht-störungstheoretischen Zugangs in Quantenfeldtheorien und in diesem Zusammenhang auch bei der Untersuchung integrabler Modelle ein. Ein wesentlicher Grund für das Interesse gerade an $N = 2$ erweiterter Supersymmetrie liegt in den, mit der Anzahl der Supersymmetrien einhergehenden, weiteren Symmetriegruppen. Während die $N = 1$ Supersymmetrie die einfachste, durch Graduierung erweiterte Verallgemeinerung der Lorentz-Gruppe darstellt, enthält die Algebra der $N = 2$ Supersymmetrie eine zusätzliche $U(1)$-Symmetrie. Eine weitere, mit der $U(1)$ der $N = 2$ Theorien in Verbindung stehende Symmetrie realisiert sich auf der $N = 2$ Algebra als sogenannter spektraler Fluß [1]. Dieser spektrale Fluß ist in der $N = 2$ Stringtheorie ebenfalls von besonderer Bedeutung. Für die $N = 4$ supersymmetrischen Theorien vergrößert sich die zusätzliche Symmetrie zur $SU(2)$.
Diese weiteren Symmetriegruppen erlauben unter Zuhilfenahme der Werkzeuge der modernen Mathematik die größere Vorhersagekraft der erweitert supersymmetrischen Theorien. Bei $N = 4$ supersymmetrischen Modellen schränkt sich dadurch der Gehalt an Freiheitsgraden soweit ein, daß sich oft nur topologische Modelle finden lassen.
Die $N = 2$ Supersymmetrie scheint hingegen genau die richtige Größe zu haben, um genügend Freiheitsgrade für attraktive Modelle zuzulassen und trotzdem das Studium nicht-störungstheoretischer Phänomene zu erlauben. Das prominenteste Beispiel in dieser Richtung ist wohl die aufsehenerregende Arbeit von Seiberg und Witten [2], die ebenfalls von den Besonderheiten der $N = 2$ Supersymmetrie profitiert.
Die ersten Arbeiten über den $N = 2$ String sind mittlerweile etwa zwanzig Jahre alt [3] und trotzdem sind noch viele Fragen über diese Theorie offen geblieben. Aufgrund der phänomenologisch irrelevanten, kritischen Dimension mit Signatur $(2, 2)$ war das Interesse an einer ausführlicheren Untersuchung des $N = 2$ Strings zunächst klein. Doch die Zusammenhänge zu anderen Theorien, insbesondere durch die Beschreibung mit Hilfe effektiver Theorien, sind inzwischen zahlreich und vor allem auch mathematisch von Wichtigkeit. So lassen sich die Amplituden des geschlossenen Strings effektiv auch mit Hilfe selbstdualer Gravitation und die des offenen Strings an Hand selbstdualer Yang-Mills-Theorie berechnen, zumindest auf Tree-Level [4]. Es wird vermutet, daß die selbstduale Yang-Mills-Theorie durch dimensionale Reduktion auf alle zweidimensionalen, integrablen Modelle führt, so daß der $N = 2$ String als ein Modell für das Studium einer nicht-störungstheoretischen Quantentheorie bzw. einer Quantentheorie integrabler Modelle dienen könnte. Eine andere Entwicklung in die Richtung einer topologischen Beschreibung der Stringtheorie, ist die Einbettung des bosonischen Strings in den $N = 1$ String durch einen sogenannten topologischen Twist der Felder des bosonischen Strings. Bei diesem Twist werden per Hand die konformen Gewichte der Felder so verändert, daß sich aus den Feldern und Symmetriegeneratoren des bosonischen Strings die Symmetriegeneratoren des $N = 1$ Strings konstruieren lassen. Der Twist des bosonischen Strings verändert dabei die zentrale Ladung des kritischen bosonischen Strings zur zentralen Ladung des kritischen $N = 1$ Strings. Der gleiche Mechanismus läßt sich aber auch für den $N = 1$ und den $N = 2$ String anwenden, so daß man mit dem $N = 2$ String eine Art Mastertheorie zur Hand hätte, aus der sich alle Strings niedrigerer Supersymmetrie im Sinne dieses topologischen Twists erzeugen lassen.
Die aktuellste Entwicklung in diesem Bereich ist konsequenterweise die Einbettung des $N = 2$ in den $N = 4$ String, die auf Grund der einfachen Struktur des $N = 4$ Strings und seiner Amplituden weitreichende Aussagen über die Amplituden des $N = 2$ Strings zur Folge hat [5][6][7]. Für die Konstruktion dieser Einbettung ist unter anderem auch der spektrale Fluß von Bedeutung. Die Konstruktion dieser Zusammenhänge ist jedoch sehr formal und läßt noch Fragen offen, die die explizite Konstruktion einiger Aussagen betreffen. Zudem beschränkt man sich bei der Berechnung der $N = 2$ Amplituden in [7] auf einen Targetraum der Form $T^2 \times \mathbb{R}^2$.
Ein weiteres Feld für Anwendungen des $N = 2$ Strings, ist neuerdings auf dem Gebiet der String-Dualitäten zu erwarten. Nach der Prophezeihung der Existenz der "M"-Theorie, die in den verschiedensten Grenzfällen starker und schwacher Kopplung gerade die vielen, einander dualen Stringtheorien liefern soll, taucht in jüngster Zeit auch der Begriff der sogenannten "F"-Theorie auf. Im Laufe der Beschreibung dieser "F"-Theorie wird auch auf den $N = 2$ String zurückgegriffen [8].
Trotz dieser Arbeiten kann von einem tiefen Verständnis der $N = 2$ supersymmetrischen Stringtheorie keine Rede sein. Insbesondere an der expliziten Konstruktion der vorhergesagten mathematischen Zusammenhänge mangelt es immer noch. In dieser Hinsicht soll diese Arbeit einen Beitrag leisten. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt auf der Untersuchung der $U(1)$ und ihrer Rolle bei der Berechnung von Loop-Amplituden des geschlossenen $N = 2$ Strings mittels des Pfadintegrals über $N = 2$ Super-Riemannflächen. Nach einer allgemeinen Einführung in die $N = 2$ Stringtheorie und Diskussion ihrer lokalen Eigenschaften wie $N = 2$ Operator-Produkt-Algebra, spektralem Fluß und BRS-Quantisierung in Kapitel I, folgt in Kapitel II die Konstruktion möglicher Vertexoperato-

ren und die Untersuchung ihrer Bildentartung durch Bosonisierung der $U(1)$-geladenen konformen Felder. Diese Überlegungen lassen sich noch alle mittels der lokalen Techniken der konformen Feldtheorie ausführen. Zur Berechnung höherer Loop-Amplituden muß man sich des Pfadintegrals über $N = 2$ Super-Riemannflächen bedienen, dessen Definition und Fixierung durch die Faddeev-Popov-Methode in Kapitel III vorgestellt wird. Im Rahmen dieser Methoden erlangen die globalen Eigenschaften, insbesondere die Struktur des $N = 2$ Modulraumes, Kapitel IV, einige Bedeutung. In diesem Zusammenhang werden auch die $N = 2$ Super-Riemannflächen und die Entstehung der Bildwechsel-Operatoren diskutiert.

Anschließend folgt in Kapitel V eine ausführliche Behandlung der Bosonisierung im Pfadintegral und dem damit verbundenen Auftreten des Solitonsektors der Bosonen und ihren $U(1)$-Transformationseigenschaften. Durch Bosonisierung der geladenen Felder im Pfadintegral gelingt es in Kapitel VI, das Integral über den $U(1)$-Modulraum explizit in das erhoffte Integral über die Spinstrukturen der jeweiligen Korrelationsfunktionen umzuschreiben. Dieser Zugang erlaubt auch eine tiefere Einsicht in die Bedeutung der Chernzahl c_1 für den Fall eines nicht trivialen $U(1)$-Bündels über der Riemannfläche. Die nötigen Verallgemeinerungen beim Übergang zu punktierten Riemannflächen und ihr Zusammenhang mit der Symmetrie des spektralen Flusses werden in Kapitel VII kurz beschrieben.

Es lassen sich schließlich durch die Bosonisierung explizite Vorschriften für die Berechnung beliebiger, höherer Loop-Amplituden des geschlossenen Strings ableiten, von denen in Kapitel VIII neben einigen Tree-Amplituden auch die 1-Loop-3-Punkt-Amplitude und die 1-Loop-4-Punkt-Amplitude diskutiert werden.

Kapitel I:

Die N=2 Wirkung und ihre Symmetrien

Die Konstruktion der klassischen Wirkung des $N = 2$ erweitert supersymmetrischen Strings erfolgte schon vor zwanzig Jahren [3] im Zuge der Entwicklung des bosonischen und $N = 1$ Strings. Es dauerte jedoch einige Zeit, bis weitere Resultate über den $N = 2$ String erzielt wurden. Die vollständigen, klassischen Symmetrien, die nötig sind, die Felder der zwei-dimensionalen $N = 2$ Supergravitation zu fixieren, wurden erst fünf Jahre später angegeben [9] und auch die Bestimmung der kritischen Dimension nahm einige Zeit in Anspruch [10]. Diese Arbeiten über die grundlegenden Eigenschaften des $N = 2$ Strings bilden den Ausgangspunkt dieses Kapitels.

1. Der klassische N=2 String

Der Beschreibung des $N = 1$ Strings folgend, wird zunächst eine Stringkoordinate Z^μ eingeführt, die die vom String überstrichene, zweidimensionale Weltfläche in die D-dimensionale Raumzeit einbettet. Für die Konstruktion einer $N = 2$ Supersymmetrie werden weiterhin die zu Z^μ gehörigen supersymmetrischen Partner $\Psi^\mu, \bar{\Psi}^\mu$ benötigt und an die Supergravitation der String-Weltfläche gekoppelt. Eine der wichtigsten Eigenschaften einer Stringtheorie ist die kritische Dimension D. Wird eine Stringtheorie in der kritischen Dimension formuliert, so verschwindet die Anomalie der Weyl-Symmetrie, und gibt den Weg frei für eine Quantisierung der Stringtheorie. Inzwischen weiß man aber auch nicht-kritische Strings zu behandeln. Über die kritische Dimension des $N = 2$ Strings gab es in den Anfängen einige Meinungsverschiedenheiten. Erst Brink und Schwarz [10] haben gezeigt, daß die richtige, kritische Dimension des $N = 2$ Strings vier mit Signatur $(2, 2)$ beträgt.
Es ist sinnvoll, die Theorie des $N = 2$ Strings von Anfang an in der kritischen Dimension $(2, 2)$ zu definieren, entsprechende Notationen einführen und die Anomaliefreiheit in dieser Dimension anschließend festzustellen. Das Zusammenfassen der $(2, 2)$ reellen zu $(1, 1)$ komplexen Koordinaten, erlaubt eine kompaktere Schreibweise. Seien die vier $(2, 2)$-Stringkoordinaten durch die Zweitupel $(2, 0), (3, 0), (2, 1), (3, 1)$ indiziert, dann können die komplexen Größen

$$Z^{\pm\mu} = Z^{2\mu} \pm iZ^{3\mu}$$

gebildet werden. Der $(1, 1)$-Index μ durchläuft dann die Werte $0, 1$. Die komplexen $(1, 1)$-Stringkoordinaten sind also durch die Tupel $(\pm, 0), (\pm, 1)$ bezeichnet, wobei $(+, \mu)$ und $(-, \mu)$ jeweils zueinander komplex konjugiert sind. Das $(2, 2)$-Skalarprodukt zweier Vektoren k und p lautet in Komponenten also

$$\begin{aligned} k \cdot p &= \tfrac{1}{2}(k^+ \cdot p^- + k^- \cdot p^+) \\ &= \tfrac{1}{4}(k^{++}p^{--} + k^{+-}p^{-+} + k^{-+}p^{+-} + k^{--}p^{++}). \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Mit der Bezeichnung "$\cdot$" wird nicht zwischen dem $(2, 2)$- und dem $(1, 1)$-Skalarprodukt unterschieden. $(1, 1)$-Vektoren tragen immer einen Index "$\pm$", an dem auch das $(1, 1)$-Skalarprodukt erkannt werden kann. Entsprechend sind auch die fermionischen Partner $\Psi^{\pm\mu}, \bar{\Psi}^{\pm\mu}$ des zu Z gehörigen Supersymmetrie-Multipletts aus reellen Majorana-Weyl Spinoren zusammengesetzt.

$$\Psi^{\pm\mu} = \Psi^{2\mu} \pm i\Psi^{3\mu}.$$

Die vom $N = 2$ String im komplexen $(1, 1)$-dimensionalen Targetraum überstrichene Fläche wird durch $Z^{\pm\mu}$ beschrieben. Die zweidimensionale Weltfläche habe lokal die komplexen Koordinaten $z, \bar{z}$ und wird durch $Z(z, \bar{z})$ in den Targetraum eingebettet.
Die Größen $Z^{\pm\mu}(z, \bar{z})$ und $\Psi^{\pm\mu}(z, \bar{z})$ sind also Vektoren in den $(1, 1)$ komplexen Dimensionen des Targetraumes, bzw. ein Satz von skalaren Feldern und Spinoren auf der zweidimensionalen Weltfläche. Die Spinorindizes der Weltflächen-Spinoren werden mit $_{\uparrow,\downarrow}$ bezeichnet.

$$\Psi^{\pm\mu} = \begin{pmatrix} \Psi^{\pm\mu}_{\uparrow} \\ \Psi^{\pm\mu}_{\downarrow} \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

Das minimale $N = 2$ Multiplett der zweidimensionalen Supergravitation enthält das Zweibein ${e_m}^a$, die Gravitini $\chi^{\pm}_m$ und eine $U(1)$-Konnektion A_m. [1] Die supersymmetrische

[1] Diesen Feldgehalt bekommt man auch aus der vierdimensionalen $N = 1$ Supergravitation im $U(1)$-Superraum durch dimensionale Reduktion von vier auf zwei Dimensionen. Die 4-dim. Lorentz-Konnektion zerfällt dabei in die 2-dim. Lorentz-Konnektion und eine zusätzliche axiale $U(1)_A$ neben der vektoriellen $U(1)_V$ des $N = 1$ $U(1)$-Superraumes.

Lagrangedichte dieser Felder hat dann folgende Gestalt [9]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m = &\tfrac{1}{2}g^{mn}\partial_m Z^{-\mu}\partial_n Z^{+}{}_{\mu} + \tfrac{i}{2}\bar{\Psi}^{-\mu}\gamma^m \overleftrightarrow{D}_m \Psi^{+}{}_{\mu} + A_m \bar{\Psi}^{-\mu}\gamma^m \Psi^{+}{}_{\mu}\\ &+(\partial_m Z^{-\mu} + \bar{\Psi}^{-\mu}\chi^{+}_{m})\bar{\chi}^{-}_{n}\gamma^m\gamma^n\Psi^{+}{}_{\mu} + (\partial_m Z^{+\mu} + \bar{\chi}^{-}_{m}\Psi^{+\mu})\bar{\Psi}^{-}{}_{\mu}\gamma^n\gamma^m\chi^{+}_{n}.\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Die kinetischen Terme der zweidimensionalen Supergravitation sind topologisch und treten in der Wirkung nicht auf. Die zweidimensionale Supergravitation hat keine kinetischen Freiheitsgrade. Die Konventionen für γ-Matrizen und die Definition der Lorentz-kovarianten Ableitungen D_m sind in Anhang A erklärt. Die Wirkung wird folgendermaßen normiert

$$S = -\tfrac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} d^2z\sqrt{g}\mathcal{L}_m, \tag{1.1.4}$$

um später die übliche Normierung der Propagatoren zu erhalten. Diese Wirkung ist invariant unter einer großen Anzahl lokaler Symmetrien auf der Weltfläche, sowie unter einer globalen $U(1,1)$ im Targetraum. Die lokalen, infinitesimalen Symmetrie-Transformationen sind

$$\begin{aligned}\delta e_m{}^a &= \xi^n\partial_n e_m{}^a + e_n{}^a\partial_m\xi^n + l\varepsilon^a{}_b e_m{}^b + 2i(\bar{\chi}^{-}_{m}\gamma^a\epsilon^+ - \bar{\epsilon}^-\gamma^a\chi^{+}_{m}) + \sigma e_m{}^a,\\ \delta\chi^{+}_{m} &= \xi^n\partial_n\chi^{+}_{m} + \chi^{+}_{n}\partial_m\xi^n - \tfrac{1}{2}l\gamma_5\chi^{+}_{m} + \mathcal{D}_m\epsilon^+\\ &\quad+\tfrac{1}{2}\sigma\chi^{+}_{m} + i\alpha\chi^{+}_{m} + i\hat{\alpha}\gamma_5\chi^{+}_{m} + \gamma_m\eta^+,\\ \delta A_m &= \xi^n\partial_n A_m + A_n\partial_m\xi^n + \varepsilon^{nl}(\bar{\epsilon}^-\gamma_5\gamma_m\mathcal{D}\chi^{+}_{m}\mathcal{D}_n\bar{\chi}^{-}_{l}\gamma_m\gamma_5\epsilon^+)\\ &\quad+\partial_m\alpha + \varepsilon_m{}^n\partial_n\hat{\alpha} + \bar{\chi}^{-}_{n}\gamma_m\gamma^n\eta^+ + \bar{\eta}^-\gamma^n\gamma_m\chi^{+}_{n},\\ \delta Z^{+\mu} &= \xi^n\partial_n Z^{+\mu} - 2\bar{\epsilon}^-\Psi^{+\mu},\\ \delta Z^{-\mu} &= \xi^n\partial_n Z^{-\mu} - 2\bar{\Psi}^{-\mu}\epsilon^+,\\ \delta\Psi^{+\mu} &= \xi^n\partial_n\Psi^{+\mu} - \tfrac{1}{2}l\gamma_5\Psi^{+\mu} + i\gamma^n\epsilon^+(\partial_n Z^{+\mu} + 2(\bar{\chi}^{-}_{n}\Psi^{+\mu}))\\ &\quad-\tfrac{1}{2}\sigma\Psi^{+\mu} + i\alpha\Psi^{+\mu} + i\hat{\alpha}\gamma_5\Psi^{+\mu},\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

wobei die $U(1)$-kovarianten Ableitungen $\mathcal{D}$ durch

$$\mathcal{D}_m\epsilon^{\pm} = (D_m \mp iA_m)\epsilon^{\pm}, \quad \mathcal{D}_m\chi^{\pm}_{n} = (D_m \mp iA_m)\chi^{\pm}_{n} \tag{1.1.6}$$

definiert sind.
Die zu den Parametern gehörenden Symmetrien sind

ξ	$\to$	Diffeomorphismen,
$\epsilon^{\pm}$	$\to$	$N=2$ Supersymmetrie-Transformationen,
l	$\to$	Lorentz-Transformation,
α	$\to$	$U_V(1)$-Transformation,
$\hat{\alpha}$	$\to$	$U_A(1)$-Transformation,
σ	$\to$	bosonische Weyl-Transformation,
$\eta^{\pm}$	$\to$	fermionische Weyl-Transformationen.

Es ist sinnvoll, die zweidimensionalen γ-Matrizen zu eliminieren und die flachen Weltflächen-Indizes in der Lichtkegel-, bzw. nach der Wick-Rotation, in der holomorphen Basis $z, \bar{z}$ auszuschreiben,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m = &\partial_z Z^{-\mu}\partial_{\bar{z}}Z^{+}{}_{\mu} + \partial_{\bar{z}}Z^{-\mu}\partial_z Z^{+}{}_{\mu} + \Psi^{-\mu}_{\uparrow}\overleftrightarrow{D}_z\Psi^{+}_{\uparrow\,\mu} + \Psi^{-\mu}_{\downarrow}\overleftrightarrow{D}_{\bar{z}}\Psi^{+}_{\downarrow\,\mu}\\ &-2iA_z\Psi^{-\mu}_{\uparrow}\Psi^{+}_{\uparrow\,\mu} - 2iA_{\bar{z}}\Psi^{-\mu}_{\downarrow}\Psi^{+}_{\uparrow\,\mu}\\ &-4(\partial_z Z^{-\mu} - \Psi^{-\mu}_{\uparrow}\chi^{+}_{z\downarrow} + \Psi^{-\mu}_{\downarrow}\chi^{+}_{z\uparrow})\chi^{-}_{\bar{z}\uparrow}\Psi^{+}_{\downarrow\,\mu}\\ &+4(\partial_{\bar{z}}Z^{-\mu} - \Psi^{-\mu}_{\uparrow}\chi^{+}_{\bar{z}\downarrow} + \Psi^{-\mu}_{\downarrow}\chi^{+}_{\bar{z}\uparrow})\chi^{-}_{z\downarrow}\Psi^{+}_{\uparrow\,\mu}\\ &+4(\partial_z Z^{+\mu} - \chi^{-}_{z\uparrow}\Psi^{+\mu}_{\downarrow} + \chi^{-}_{z\downarrow}\Psi^{+\mu}_{\uparrow})\Psi^{-}_{\downarrow\,\mu}\chi^{+}_{\bar{z}\uparrow}\\ &-4(\partial_{\bar{z}}Z^{+\mu} - \chi^{-}_{\bar{z}\uparrow}\Psi^{+\mu}_{\downarrow} + \chi^{-}_{\bar{z}\downarrow}\Psi^{+\mu}_{\uparrow})\Psi^{-}_{\uparrow\,\mu}\chi^{+}_{z\downarrow}.\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Die lokalen Symmetrien (1.1.5) reichen aus, auf einer topologisch einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit (Sphäre, Ebene) die Freiheitsgrade des Gravitationsmultipletts wegzueichen (superkonforme Eichung). Dies ist unter anderem auch deshalb möglich, weil die Felder der Supergravitation $e_m{}^a, \chi^{\pm}_{m}, A_m$ keine dynamischen Freiheitsgrade besitzen.
Die verbleibende, eichfixierte Wirkung ist eine freie, zweidimensionale, supersymmetrische Feldtheorie und invariant unter einer globalen $SO(2,2) \supset U(1,1)$ [9],[11]. Die zur freien Theorie eichfixierte Lagrangedichte hat in dieser Basis die Form

$$\mathcal{L}_m = \partial_z Z^{-\mu}\partial_{\bar{z}}Z^{+}{}_{\mu} + \partial_{\bar{z}}Z^{-\mu}\partial_z Z^{+}{}_{\mu} + \Psi^{-\mu}_{\uparrow}\overleftrightarrow{D}_z\Psi^{+}_{\uparrow\,\mu} + \Psi^{-\mu}_{\downarrow}\overleftrightarrow{D}_{\bar{z}}\Psi^{+}_{\downarrow\,\mu}. \tag{1.1.8}$$

Es wird vermutet, daß die $SO(2,2)$ sich auch auf dem Level der String-Amplituden manifestieren [13] sollte, denn die $U(1,1)$ erlaubt im Gegensatz zur $SO(2,2)$ nur triviale Spinordarstellungen im Targetraum. Für die Konstruktion einer Raumzeit-Supersymmetrie im Targetraum ist die $SO(2,2)$ somit notwendig.
Die Bewegungsgleichungen für die Stringkoordinaten liefern in dieser Eichung wie üblich

(abgesehen von den Nullmoden der Bosonen) die Holomorphie der Felder Z, Ψ.

$$\begin{aligned}\partial_z\partial_{\bar z} Z^{\pm\mu}(z,\bar z)=0 \quad &\Rightarrow \quad Z^{\pm\mu}(z,\bar z)=Z^{\pm\mu}(z)+Z^{\pm\mu}(\bar z),\\ \partial_z \Psi_\uparrow^{\pm\mu}(z,\bar z)=0 \quad &\Rightarrow \quad \Psi_\uparrow^{\pm\mu}(z,\bar z)=\Psi_\uparrow^{\pm\mu}(\bar z),\\ \partial_{\bar z} \Psi_\downarrow^{\pm\mu}(z,\bar z)=0 \quad &\Rightarrow \quad \Psi_\downarrow^{\pm\mu}(z,\bar z)=\Psi_\downarrow^{\pm\mu}(z).\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Wir werden bei weiteren Betrachtungen zumeist nur den holomorphen Anteil der Theorie diskutieren, die Strukturen der antiholomorphen Hälfte sind exakt gleich.
Um die Bewegungsgleichungen aus der Variation der Wirkung (1.1.8) zu bekommen, müssen die Randterme aus der partiellen Integration der kinetischen Terme zum Verschwinden gebracht werden. Aufgrund der $U(1)$-Symmetrie auf den $(1,1)$-komplexen Koordinaten des Targetraumes erhält man für den geschlossenen $N=2$ String ein ganzes Kontinuum von möglichen Randbedingungen und nicht nur diskret viele (Neveu-Schwarz- und Ramond-Sektor) wie beim $N=1$ String. Die Möglichkeiten sind [24]

$$Z^{\pm\mu}(e^{2\pi i}z)=e^{\mp 2\pi i\lambda}Z^{\pm\mu}(z), \qquad \Psi^{\pm\mu}(e^{2\pi i}z)=e^{\mp 2\pi i\rho}\Psi^{\pm\mu}(z) \tag{1.1.10}$$

oder

$$Z^{\pm\mu}(e^{2\pi i}z)=e^{\mp 2\pi i\lambda}Z^{\mp\mu}(z), \qquad \Psi^{\pm\mu}(e^{2\pi i}z)=e^{\mp 2\pi i\rho}\Psi^{\mp\mu}(z). \tag{1.1.11}$$

Die Einwertigkeit der vollständigen Lagrangedichte (1.1.3) muß unter diesen Randbedingungen jedoch bewahrt bleiben. Daraus ergibt sich für die Supergravitationsfelder

$$\chi_m^{\pm}(e^{2\pi i}z)=e^{\mp 2\pi i(\rho-\lambda)}\chi_m^{\pm}(z), \qquad A_m(e^{2\pi i}z)=A_m(z) \tag{1.1.12}$$

oder

$$\chi_m^{\pm}(e^{2\pi i}z)=e^{\mp 2\pi i(\rho-\lambda)}\chi_\mu^{\mp}(z), \qquad A_m(e^{2\pi i}z)=-A_m(z). \tag{1.1.13}$$

Das Vielbein ${e_m}^a$ wird von (1.1.10), (1.1.11) nicht berührt. Fordert man eine einwertige $U(1)$-Konnektion, dann bleibt nur noch die erste Wahl der Randbedingungen übrig. Als einwertiges, bzgl. der $U(1)$ ungeladenes Boson, sollte auch $Z^{\pm\mu}$ nur trivialen Randbedingungen gehorchen, also der ersten Möglichkeit für $\lambda=0$. Unter diesen Kriterien erhält man als mögliche, nicht-triviale Monodromien

$$\Psi^{\pm\mu}(e^{2\pi i}z)=e^{\mp 2\pi i\rho}\Psi^{\pm\mu}(z), \qquad \chi_m^{\pm}(e^{2\pi i}z)=e^{\mp 2\pi i\rho}\chi_m^{\pm}(z), \tag{1.1.14}$$

das heißt, nur die unter $U(1)$ geladenen Felder haben auch nicht-triviale Randbedingungen oder Spinstrukturen. Dieses Kontinuum von Spinstrukturen wird uns auch beim spektralen Fluß und auf Riemannflächen höheren Genus wiederbegegnen.

2. $N=2$ Algebra und spektraler Fluß

Die Variationen der Lagrange-Dichte nach den Feldern der Supergravitation ${e_m}^a, \chi_m^{\pm}$ und A_m liefern die Symmetrieströme und Generatoren der Reparametrisierungen, Supersymmetrie- und $U(1)$-Transformationen, die in der superkonformen Eichung die $N=2$ superkonforme Algebra aufspannen. Klassisch müssen diese Variationen verschwinden, damit die Polyakov-Formulierung des Strings mit der Nambu-Goto-Formulierung übereinstimmt. Auf Quantenniveau wird sich das klassische Verschwinden der Generatoren als Constraint auf den physikalischen Zuständen auswirken und zur Klassifizierung durch die BRS(BFV)-Kohomologie führen.
In der Form (1.1.7) der Lagrangedichte lassen sich die Symmetrieströme der $N=2$ Algebra besonders einfach ablesen.

$$\begin{aligned} T_{ab} &= -\tfrac{1}{\sqrt{g}}\eta_{ac}{e_m}^c\frac{\delta\sqrt{g}\mathcal{L}}{\delta {e_m}^b}\,|_{A=\chi=0,e=1},\\ G^{\pm}_{a\uparrow\downarrow} &= -\tfrac{1}{4}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\chi^{\mp}_{a\downarrow\uparrow}}\,|_{A=\chi=0,e=1},\\ J_a &= -\tfrac{i}{4}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_a}\,|_{A=\chi=0,e=1}\ .\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Diese Tensoren zerfallen vollständig in holomorphe und antiholomorphe Komponenten, wenn man die Felder Z, Ψ onshell setzt, das heißt, wenn die Bewegungsgleichungen (1.1.9) erfüllt werden. Die holomorphen Generatoren sind

$$\begin{aligned} T_{zz} &= -\tfrac{1}{2}\partial_z Z^{-\mu}\partial_z {Z^+}_\mu - \tfrac{1}{4}\partial_z\Psi_\downarrow^{-\mu}{\Psi_\downarrow^+}_\mu - \tfrac{1}{4}\partial_z\Psi_\downarrow^{+\mu}{\Psi_\downarrow^-}_\mu,\\ G^{\pm}_{z\downarrow} &= \partial_z Z^{\mp\mu}{\Psi^{\pm}_\downarrow}_\mu,\\ J_z &= -\tfrac{1}{2}\Psi_\downarrow^{-\mu}{\Psi_\downarrow^+}_\mu.\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Analog ergeben die fehlenden Komponenten $T_{\bar z\bar z}, G^{\pm}_{\bar z\uparrow}$ und $J_{\bar z}$ der Generatoren die antiholomorphen Anteile. Da wir im folgenden meist nur die holomorphe Hälfte des geschlossenen Strings betrachten wollen, können die Indizes der Generatoren auch unterdrückt werden.
Die kanonische Quantisierung der freien Theorie liefert für die Stringkoordinaten folgende Propagatoren auf der Sphäre

$$\left\langle Z^{+\mu}(z)Z^{-\nu}(w)\right\rangle=-2\eta^{\mu\nu}\log(z-w), \qquad \left\langle \Psi_\downarrow^{+\mu}(z)\Psi_\downarrow^{-\nu}(w)\right\rangle=-2\eta^{\mu\nu}(z-w)^{-1}, \tag{1.2.3}$$

bzw. Operatorprodukte

$$Z^{\pm\mu}(z)Z^{\mp\nu}(w)\sim-2\eta^{\mu\nu}\log(z-w), \qquad \Psi_\downarrow^{\pm\mu}(z)\Psi_\downarrow^{\mp\nu}(w)\sim-2\eta^{\mu\nu}(z-w)^{-1}, \tag{1.2.4}$$

in der Sprache der konformen Feldtheorie. Die holomorphen Symmetrieströme bilden damit die folgende anomale Operator-Produkt-Algebra

$$
\begin{aligned}
T(z)T(w) &\sim 3(z-w)^{-4} + 2(z-w)^{-2}T(w) + (z-w)^{-1}\partial T(w), \\
T(z)G^{\pm}(w) &\sim \tfrac{3}{2}(z-w)^{-2}G^{\pm}(w) + (z-w)^{-1}\partial G^{\pm}(w), \\
T(z)J(w) &\sim (z-w)^{-2}J(w) + (z-w)^{-1}\partial J(w), \\
G^{+}(z)G^{-}(w) &\sim 8(z-w)^{-3} - 4(z-w)^{-2}J(w) \\
&\qquad +4(z-w)^{-1}(T(w) - \tfrac{1}{2}\partial J(w)), \\
G^{\pm}(z)G^{\pm}(w) &\sim 0, \\
J(z)G^{\pm}(w) &\sim \mp(z-w)^{-1}G^{\pm}(w), \\
J(z)J(w) &\sim 2(z-w)^{-2}.
\end{aligned}
\tag{1.2.5}
$$

Dies ist die $N=2$ superkonforme Algebra mit zentraler Ladung $c=6$ [1].
Um den spektralen Fluß der Algebra zu diskutieren, ist es hilfreich, sich via Modenentwicklung der Symmetrieströme die Algebra der Moden zu beschaffen.

$$
\begin{aligned}
T(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \qquad L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \\
G^{\pm}(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}\mp\rho} G_r^{\pm} z^{-r-\frac{3}{2}}, \qquad G_r^{\pm} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r+\frac{1}{2}} G^{\pm}(z), \\
J(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}, \qquad J_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n} J(z),
\end{aligned}
\tag{1.2.6}
$$

Dabei müssen die möglichen Randbedingungen für die fermionischen Felder $\Psi_{\downarrow}^{\pm\mu}$ und Generatoren $G^{\pm}$ berücksichtigt werden. Das ρ in der Modenentwicklung von $G^{\pm}$ ist mit dem in (1.1.14) identisch. Die Randbedingungen (1.1.14) werden in einer lokalen Koordinatenumgebung als Wurzelschnitt in der Potenzreihen-Entwicklung realisiert. Das konforme Gewicht h eines konformen Feldes $\Phi(z)$ wird durch den L_0-Eigenwert des Feldes gemessen.

$$
[L_0, \Phi(0)] = \oint \frac{dz}{2\pi i} z T(z)\Phi(0) = \oint \frac{dz}{2\pi i} z(\frac{h}{z^2}\Phi(0) + \ldots) = h\Phi(0).
\tag{1.2.7}
$$

Die Generatoren $T, G^{\pm}, J$ haben also die konformen Gewichte $2, 3/2, 1$, entsprechend ihrer Anzahl an unteren z-Indizes (Spinorindizes zählen nur halb). Die Algebra der Moden lautet

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \tfrac{1}{2}m(m^2-1)\delta_{m+n}, \\
[L_m, G_r^{\pm}] &= (\tfrac{1}{2}m - r)G_{m+r}^{\pm}, \\
[L_m, J_n] &= -nJ_{m+n}, \\
\{G_r^{+}, G_s^{-}\} &= 4(r^2 - \tfrac{1}{4})\delta_{r+s} - 2(r-s)J_{r+s} + 4L_{r+s}, \\
[J_m, G_r^{\pm}] &= \mp G_{m+r}^{\pm}, \\
[J_m, J_n] &= 2m\delta_{m+n}.
\end{aligned}
\tag{1.2.8}
$$

Eine Besonderheit der $N=2$ Algebra ist, daß sich die $N=2$ Algebren für verschiedenen Randbedingungen ρ aufeinander abbilden lassen. Die Struktur der Algebra ist invariant unter kontinuierlichen Verschiebungen des Modenindex r mit den Redefinitionen

$$
\begin{aligned}
L_n &\to L_n + \Theta J_n + \Theta^2\delta_n, \\
G_r^{\pm} &\to G_{r\mp\Theta}^{\pm}, \\
J_n &\to J_n + 2\Theta\delta_n.
\end{aligned}
\tag{1.2.9}
$$

Dieser kontinuierliche Automorphismus der $N=2$ Algebra wird als spektraler Fluß bezeichnet [1] und ist auf die geeichte $U(1)$-Symmetrie der Theorie zurückzuführen, die, wie schon erwähnt, ein ganzes Kontinuum von Randbedingungen (Spinstrukturen) zuläßt. Dieser spektrale Fluß läßt sich auf den konformen Feldern durch den "Spektral-Fluß-Operator" (SFO) realisieren.

$$
\mathrm{SFO}(\Theta, z) = \exp(\Theta \int^{z} J).
\tag{1.2.10}
$$

Die untere Grenze des Integrals im Exponenten bleibt bei dieser Definition unbestimmt. Eine explizite Form für diesen Ausdruck läßt sich erst nach der Bosonisierung der geladenen Felder angeben. Der Operator $\mathrm{SFO}(\Theta)$, der den spektralen Fluß auf der $N=2$ Algebra der konformen Felder $T, G^{\pm}$ und J ausführt, läßt sich als Produkt

$$
\mathrm{SFO}(\Theta) = \mathrm{SFO}(\Theta,\infty)\mathrm{SFO}(-\Theta,0) = \exp(\Theta \int_0^{\infty} J)
\tag{1.2.11}
$$

schreiben. Die Abbildung (1.2.9) realisiert sich auf den konformen Feldern als

$$
\begin{aligned}
T(z) \to T'(z) &= \mathrm{SFO}(\Theta)T(z) = T(z) + \frac{\Theta}{z}J(z) + \frac{\Theta^2}{z^2}, \\
G^{\pm}(z) \to G'^{\pm}(z) &= \mathrm{SFO}(\Theta)G^{\pm}(z) = z^{\mp\Theta}G^{\pm}(z), \\
J(z) \to J'(z) &= \mathrm{SFO}(\Theta)J(z) = J(z) + \frac{2\Theta}{z}.
\end{aligned}
\tag{1.2.12}
$$

Die Potenzreihe des SFO ist als sukzessive Anwendung von Operatorprodukten zu verstehen, z.B. der spektrale Fluß des Energie-Impuls-Tensors

$$
\begin{aligned}
T'(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\Theta \int_0^\infty dz J(z) \right)^n T(w) \\
&= T(w) + \Theta \int_0^\infty dz J(z) T(w) + \frac{\Theta^2}{2} \int_0^\infty dz' \int_0^\infty dz J(z')(J(z)T(w)) + \ldots \\
&= T(w) + \Theta \int_0^\infty dz \frac{1}{(z-w)^2} J(w) + \frac{\Theta^2}{2} \int_0^\infty dz' \int_0^\infty dz \frac{2}{(z-w)^2 (z'-w)^2} \\
&= T(w) + \frac{\Theta}{w} J(w) + \frac{\Theta^2}{w^2}.
\end{aligned} \tag{1.2.13}
$$

Um den spektralen Fluß der Generatoren $G^\pm$ zu erhalten, ist die Identität $\exp(\Theta \log w) = w^\Theta$ nützlich.
Auch auf dem Level der Vertexoperatoren und String-Amplituden sorgt der spektrale Fluß dafür, daß zwischen R- und NS-Sektor nicht unterschieden wird. Die Amplituden sind für R- und NS-Vertexoperatoren gleich [4],[11]. Wie es dazu kommt, wird in Kapitel II und Kapitel VII behandelt.

3. BRS-Quantisierung und Geister

Die im vorigen Abschnitt definierte $N = 2$ Algebra muß bei der Quantisierung der Stringtheorie als Constraint-Algebra auf den Zuständen des Fockraumes angemessen berücksichtigt werden. Die Constraints bestimmen dabei die physikalischen Zustände der zweidimensionalen Feldtheorie (vgl. Gupta-Bleuler in der QED). Die adäquate Beschreibung dieses Sachverhaltes liefert der BRS(BFV)-Formalismus.
Wesentliche Bestandteile des BRS(BFV)-Formalismus sind die Erweiterung des Feldgehaltes Z, Ψ um einen Geistfeld-Sektor und die Konstruktion eines nilpotenten BRS-Operators Q. Die reine "Materie"-Algebra (1.2.8) ist anomal, das heißt, es treten c-Zahl-Terme in der Algebra auf, sogenannte zentrale Erweiterungen. Diese Terme sind proportional zu δ_{m+n} und treten hier nur in den Kommutatoren von Operatoren gleicher Art auf. Die Anomalien lassen sich jedoch durch Erweiterung der Symmetrie-Generatoren um entsprechende Geist-Beiträge kompensieren. Dies geschieht in folgender Weise:
Für eine Algebra der Constraints und Geister der Form

$$[G_A, G_B] = f_{AB}{}^C G_C, \qquad [c^A, b_B] = \delta_A^B$$

bekommt man mit

$$Q = c^A G_A - \tfrac{1}{2} f_{AB}{}^C c^A c^B b_C$$

einen nilpotenten BRS-Operator. Die Algebra der Geisterweiterten Moden $\hat{G}_A = \{Q, b_A\}$ wird anomaliefrei.
Für jeden Symmetrie-Generator wird nun ein Geist-Antigeist-Paar eingeführt. Der Antigeist trägt das konforme Gewicht des Generators und die konformen Gewichte von Geist und Antigeist addieren sich zu 1. Die Modenentwicklung des Geist-Systems ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
c(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^{-n+1}, \quad b(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^{-n-2}, \\
\gamma^\pm(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}\pm\rho} \gamma_r^\pm z^{-r+\frac{1}{2}}, \quad \beta^\mp(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}\mp\rho} \beta_r^\mp z^{-r-\frac{3}{2}}, \\
\tilde{c}(z) &= \sum \tilde{c}_n z^{-n}, \quad \tilde{b}(z) = \sum \tilde{b}_n z^{-n-1},
\end{aligned} \tag{1.3.1}
$$

mit den entsprechenden Operatorprodukten

$$
\begin{aligned}
\beta^\pm(z)\gamma^\mp(w) &\sim \frac{-1}{z-w}, \\
b(z)c(w) &\sim \frac{1}{z-w}, \\
\tilde{b}(z)\tilde{c}(w) &\sim \frac{1}{z-w}.
\end{aligned} \tag{1.3.2}
$$

Die BRS-Ladung des $N = 2$ Strings erhält man auf diese Weise zunächst ausgedrückt durch die Moden. Geht man wieder zurück auf konforme Felder und Ströme, so ergibt sich schließlich als BRS-Strom

$$
\begin{aligned}
J_{BRS} = {} & cT + \gamma^+ G^- + \gamma^- G^+ + \tilde{c}J + c\partial cb + c\partial\tilde{c}\tilde{b} \\
& -4\gamma^+\gamma^- b + 2\partial\gamma^-\gamma^+\tilde{b} - 2\partial\gamma^+\gamma^-\tilde{b} \\
& +\tfrac{3}{4}\partial c(\gamma^+\beta^- + \gamma^-\beta^+) - \tfrac{3}{4}c(\partial\gamma^+\beta^- + \partial\gamma^-\beta^+) \\
& +\tfrac{1}{4}c(\gamma^+\partial\beta^- + \gamma^-\partial\beta^+) + \tilde{c}(\gamma^+\beta^- - \partial\gamma^-\beta^+).
\end{aligned} \tag{1.3.3}
$$

Die BRS-Ladung Q ist die Nullmode des Stroms, $Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} J_{BRS}$. Die aus $\hat{G} = [Q, b]$ resultierenden, geisterweiterten Ströme sind

$$
\begin{aligned}
\hat{T} &= \{Q, b\} \\
&= T + 2\partial cb + c\partial b + \partial\tilde{c}\tilde{b} - \tfrac{3}{2}(\partial\gamma^-\beta^+ + \partial\gamma^+\beta^-) - \tfrac{1}{2}(\gamma^-\partial\beta^+ + \gamma^+\partial\beta^-), \\
\hat{G}^\pm &= [Q, \beta^\pm] \\
&= G^\pm - 4\gamma^\pm b \mp 4\partial\gamma^\pm\tilde{b} \mp 2\gamma^\pm\partial\tilde{b} + \tfrac{3}{2}\partial c\beta^\pm + c\partial\beta^\pm \mp \tilde{c}\beta^\pm,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\hat{J} &= \{Q, \tilde{b}\} \\ &= J + \partial(c\tilde{b}) + (\gamma^+\beta^- - \gamma^-\beta^+).\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Die Generatoren (1.3.4) erfüllen die anomaliefreie $N = 2$ Algebra, also (1.2.5) ohne die zentralen Terme.

$$\begin{aligned}\hat{T}(z)\hat{T}(w) &\sim 2(z-w)^{-2}T(w) + (z-w)^{-1}\partial\hat{T}(w), \\ \hat{T}(z)\hat{G}^\pm(w) &\sim \tfrac{3}{2}(z-w)^{-2}\hat{G}^\pm(w) + (z-w)^{-1}\partial\hat{G}^\pm(w), \\ \hat{T}(z)\hat{J}(w) &\sim (z-w)^{-2}\hat{J}(w) + (z-w)^{-1}\partial\hat{J}(w), \\ \hat{G}^+(z)\hat{G}^-(w) &\sim -4(z-w)^{-2}\hat{J}(w) + 4(z-w)^{-1}(\hat{T}(w) - \tfrac{1}{2}\partial\hat{J}(w)), \\ \hat{G}^\pm(z)\hat{G}^\pm(w) &\sim 0, \\ \hat{J}(z)\hat{G}^\pm(w) &\sim \mp(z-w)^{-1}\hat{G}^\pm(w), \\ \hat{J}(z)\hat{J}(w) &\sim 0.\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Mittels des BRS-Stroms lassen sich auch die BRS-Transformationen der Felder Z, Ψ und der Geister in der superkonformen Eichung erzeugen. Die BRS-Transformationen der Antigeister ergeben gerade die geisterweiterten Symmetriegeneratoren.

$$\begin{aligned}[][Q, Z^{\pm\mu}] &= c\partial Z^{\pm\mu} - 2\gamma^\mp\Psi^{\pm\mu}, \\ \{Q, \Psi^{\pm\mu}\} &= c\partial\Psi^{\pm\mu} + \tfrac{1}{2}\partial c\Psi^{\pm\mu} - 2\gamma^\pm\partial Z^{\pm\mu} \mp \tilde{c}\Psi^{\pm\mu}, \\ \{Q, c\} &= c\partial c - 4\gamma^-\gamma^+, \\ [Q, \gamma^\pm] &= c\partial\gamma^\pm - \tfrac{1}{2}\partial c\gamma^\pm \mp \tilde{c}\gamma^\pm, \\ \{Q, \tilde{c}\} &= c\partial\tilde{c} - 2\gamma^-\partial\gamma^+ + 2\gamma^+\partial\gamma^-.\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Die BRS-Transformationen der Felder Z, Ψ und der Geister $c, \gamma^\pm, \tilde{c}$ erhält man auch, indem man in den klassischen Transformationen in superkonformer Eichung die Symmetrie-Parameter durch die entsprechenden Geister (mit geeigneter Reskalierung) ersetzt und $s^2 = 0$ bzw. $[Q,[Q,..]] = 0$ fordert. Die superkonformen Transformationen werden uns auch bei der Definition der $N = 2$ Super-Riemannflächen wiederbegegnen.
Das Vakuum $|0\rangle$ der $N = 2$ superkonformen Feldtheorie definiert sich durch die Bedingung, daß die konformen Felder Φ der $N = 2$ Stringtheorie einen regulären Ausdruck $\Phi(0)\,|0\rangle$ liefern. Für die Moden der Symmetrieströme bedeutet das

$$\begin{aligned}\hat{L}_n\,|0\rangle &= 0 \qquad \text{für} \quad n \geq -1, \\ \hat{G}_r\,|0\rangle &= 0 \qquad \text{für} \quad r > -\tfrac{3}{2}, \\ \hat{J}_n\,|0\rangle &= 0 \qquad \text{für} \quad n \geq 0.\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Das Vakuum ist somit invariant unter der $SL(2,\mathbb{C})$, einer Unteralgebra der Virasoro-Algebra, die durch $\hat{L}_{\pm1}, \hat{L}_0$ erzeugt wird. Außerdem ist $|0\rangle$ noch invariant unter der trivialen Algebra der $U(1)$, die durch $\hat{J}_0$ beschrieben wird. Für Neveu-Schwarz-Randbedingungen, also für Modenindex r halbzahlig, läßt sich diese Symmetrie des Vakuums supersymmetrisch durch Hinzunahme von $\hat{G}^\pm_{1/2}$ zu einer $SL(2\mid 1)$ erweitern. Diese supersymmetrisch erweiterte Algebra schließt aber nur mit der $SL(2,\mathbb{C})$ für diese spezielle Randbedingung.

Kapitel II: Vertexoperatoren und Bosonisierung

In diesem Kapitel werden wir uns der Konstruktion einiger Vertexoperatoren zuwenden. Diese Operatoren erzeugen die Stringzustände aus dem $SL(2 \mid 1)$-invarianten Vakuum $|0\rangle$ und entsprechen den ebenen Wellen des Strings mit definiertem Impuls k. Wir werden diese Vertexoperatoren hauptsächlich im Pfadintegral benutzen. Eine ausführlichere Diskussion ihrer Eigenschaften bezüglich der Operatorprodukt-Entwicklung, wie z.B. die Vertexoperator-Algebra, findet sich in [11].
Die für die Formulierung der Vertexoperatoren erforderliche Bosonisierung wird hier nur lokal, für die Berechnung einiger Operatorprodukte von Bedeutung sein. Eine ausführliche Diskussion der Bosonisierung erfolgt in Kapitel V. Das mit der Bosonisierung einhergehende Problem der "Bild"-Entartung und der spektrale Fluß werden ebenfalls kurz angesprochen.

1. Bosonisierung und Bilder

Für die explizite Konstruktion der Vertexoperatoren supersymmetrischer Stringtheorien ist es nötig, die SUSY-Geister β, γ und die Fermionen Ψ zu bosonisieren. Die Operatorprodukte der Felder werden durch entsprechende Ausdrücke in den Bosonen reproduziert. Für die $(2,2)$-Vektoren $Z^{\pm\mu}, \Psi^{\pm\mu}$ ist es sinnvoll, bezüglich des $(1,1)$-Index μ Lichtkegelkoordinaten $\pm$ zu wählen.

$$\begin{aligned} Z^{\pm+} &= Z^{\pm 0} + Z^{\pm 1}, \qquad Z^{\pm -} = Z^{\pm 0} - Z^{\pm 1}, \\ \Psi^{\pm+} &= \Psi^{\pm 0} + \Psi^{\pm 1}, \qquad \Psi^{\pm -} = \Psi^{\pm 0} - \Psi^{\pm 1}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Das einzige, nicht-verschwindende Operatorprodukt der Ψ ist dann

$$\Psi^{\pm+}(z)\Psi^{\mp-}(w) \sim -\frac{4}{z-w}. \tag{2.1.2}$$

Die Bosonisierungsvorschrift lautet damit

$$\begin{aligned} &\Psi^{\pm+} = 2iC^{\pm}e^{+\Phi^{\pm}}, \quad \Psi^{\mp-} = 2iC^{\pm}e^{-\Phi^{\pm}} \qquad \text{mit} \\ &\Phi^{\pm}(z)\Phi^{\pm}(w) \sim +\log(z-w), \\ &\gamma^{\pm} = \eta^{\pm}e^{+\varphi^{\pm}}, \quad \beta^{\mp} = e^{-\varphi^{\pm}}\partial\xi^{\mp} \qquad \text{mit} \\ &\varphi^{\pm}(z)\varphi^{\pm}(z) \sim -\log(z-w), \quad \xi^{\mp}(z)\eta^{\pm}(w) \sim +\frac{1}{z-w}. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Die Kozykelfaktoren $C^{\pm}$ sorgen dafür, daß die bosonisierten Ausdrücke für $\{C^+, C^-\} = 0, \quad (C^{\pm})^2 = 1$ der richtigen Statistik gehorchen. [1] Die zusätzlichen Felder η und ξ sind Hilfsfelder, die aufgrund der Differenz der zentralen Ladung $c_\varphi = (1+3Q)$ des φ-Systems zur zentralen Ladung $c = -(1-3Q)$ des $\beta\gamma$-Systems nötig sind.
Diese überzählig eingeführten Freiheitsgrade führen zur sogenannten Bild-Entartung der Stringzustände, bzw. Vertexoperatoren.
Auch η und ξ können noch mittels

$$\begin{aligned} &\eta^{\pm} = e^{-\chi^{\pm}}, \qquad \xi^{\mp} = e^{+\chi^{\pm}}, \\ &\chi^{\pm}(z)\chi^{\pm}(w) \sim \log(z-w) \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

bosonisiert werden. Dies ist für die Rechnungen auf dem Tree-Level jedoch nicht nötig. Man sieht jedoch schon hier, daß in die Bosonisierung der SUSY-Geister nur die Differenz der Bosonen φ, χ eingeht, das heißt, die Summe $\varphi + \chi$ wird die verschiedenen Bilder erzeugen. Die Operatoren, die im Operatorprodukt die Bildladung als Eigenwerte $q^{\pm}$ messen, sind

$$\Pi^{\pm} = \oint [-\partial_z\varphi^{\pm} + \partial_z\chi^{\pm}]. \tag{2.1.5}$$

Die Kombination $e^{\varphi^{\pm}-\chi^{\pm}}$ hat somit Bildladung 0, von $\varphi - \chi$ unabhängige Kombinationen werden einen Beitrag zum Eigenwert $q^{\pm}$ liefern.

[1] Wir werden sie jedoch meistens weglassen und nur im Abschnitt über Spinfelder ausführlicher diskutieren. Dort treten sie als Komponenten einer $(2,2)$-Dirac-Algebra auf.

Für die Konstruktion der Bildwechsel-Operatoren wird der bosonisierte BRS-Strom benötigt.

$$\begin{aligned}
&J_{BRS}\\
&= cT + \eta^+ e^{+\varphi^+} G^- + \eta^- e^{+\varphi^-} G^+ + \tilde{c}(\partial\Phi^- - \partial\Phi^+)\\
&+ c(\partial cb + \partial\tilde{c}\tilde{b} - \tfrac{1}{2}(\partial\varphi^+)^2 - \tfrac{1}{4}\partial^2\varphi^+ - \tfrac{1}{2}(\partial\varphi^-)^2 - \tfrac{1}{4}\partial^2\varphi^- - \eta^+\partial\xi^- - \eta^-\partial\xi^+)\\
&- 4\eta^+ e^{\varphi^+}\eta^- e^{\varphi^-}\tilde{b} + 2\partial(\eta^- e^{\varphi^-})\eta^+ e^{\varphi^+}\tilde{b} - 2\partial(\eta^+ e^{\varphi^+})\eta^- e^{\varphi^-}\tilde{b}\\
&+ \tfrac{3}{4}\partial c(\partial\varphi^+ + \partial\varphi^+) + \tilde{c}(\partial\varphi^+ - \partial\varphi^-).
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Mit dem BRS-Strom in dieser bosonisierten Form ist man in der Lage, sich die Bildwechsel-Operatoren $X^\pm$ zu konstruieren. Diese Operatoren müssen BRS-invariant, aber nicht BRS-trivial sein, damit BRS-invariante, BRS-nicht-triviale Vertexoperatoren wieder auf Vertexoperatoren mit den gleichen Eigenschaften abgebildet werden. Außerdem dürfen die Bildwechsel-Operatoren nicht wieder nur von der Differenz der Bosonen φ, χ abhängen, so daß durch die Anwendung eines solchen Operators die $\varphi + \chi$-Exponenten eines Vertexoperators wirklich geändert werden.
Die übliche Definition ist

$$X^\pm(z) = \{Q, \xi^\pm(z)\} = \oint_z \frac{dw}{2\pi i} J_{BRS}(w)\xi^\pm(z). \tag{2.1.7}$$

Diese Operatoren sind im Raum der ursprünglichen, nicht bosonisierten Felder BRS-nicht-trivial, da in die Bosonisierungs-Vorschrift ja nur die Ableitung $\partial\xi$ eingeht und somit die Nullmode ξ_0 des Feldes nicht zum ursprünglichen Feldgehalt gehört. Trotzdem sind $X^\pm$ natürlich BRS-invariant.
Man erhält im $N = 2$ String also zwei Bildwechsel-Operatoren, entsprechend der Zahl der Supersymmetrien. Ausgedrückt durch die Felder ergibt sich

$$X^\pm = c\partial\xi^\pm + e^{+\varphi^\mp}(G^\pm - 4\gamma^\pm b \mp 4\partial\gamma^\pm\tilde{b} \mp 2\gamma^\pm\partial\tilde{b}). \tag{2.1.8}$$

Das explizite Auftreten von $e^{+\varphi^\mp}$ und $\partial_z\xi^\pm$ zeigt, daß mit Hilfe von $X^\pm$ wirklich die Bildzahl verändert wird. Wir sind nun in der Lage, ausgehend von einigen einfachen, kanonischen Vertexoperatoren V, durch Anwenden von $X^\pm$ auf V einen ganzen Turm äquivalenter Vertexoperatoren verschiedener Bilder zu erzeugen. Wenden wir uns nun der Konstruktion dieser kanonischen Vertexoperatoren zu.

2. Vertexoperatoren

Vertexoperatoren definieren die ein- bzw. auslaufenden String-Zustände und tragen die Eigenschaften des Strings im Targetraum wie den $(2,2)$-dimensionalen Impuls $k^{\pm\mu}$ oder $(2,2)$-Spin. Zudem müssen sie neben BRS-Invarianz weitere Symmetrien erfüllen, die ihre Struktur weitgehend festlegen [21][11][14]. Ein typischer Vertexoperator im Neveu-Schwarz-Sektor (NS) ist

$$V^{\tilde{c}c}_{(-1,-1)} = \tilde{c}ce^{-\varphi^- - \varphi^+}e^{ik\cdot Z}, \tag{2.2.1}$$

mit $k \cdot Z = \frac{1}{2}(k^{+\mu}Z^-{}_\mu + k^{-\mu}Z^+{}_\mu)$. Die BRS-Invarianz verlangt $k^2 = 0$, wie sich durch Berechnung des Operatorproduktes $J_{BRS}(z)V_{(-1,-1)}(w)$ leicht überprüfen läßt. Die Indizierung (q^+, q^-) zählt die Summen der Potenzen von $e^{\varphi^+}, e^{\chi^+}$ und $e^{\varphi^-}, e^{\chi^-}$ ab und unterscheidet so die verschiedenen Bilder, bzw. $\Pi^\pm$-Eigenwerte $q^\pm$.
$V_{(-1,-1)}$ beschreibt also einen masselosen Zustand im Targetraum im $(-1,-1)$-Bild. Weitere masselose Vertexoperatoren in diesem Bild, jedoch mit unterschiedlichem Geistgehalt sind

$$\begin{aligned}
V^{\int}_{(-1,-1)} &= \int e^{-\varphi^- - \varphi^+}e^{ik\cdot Z}, & V^{c}_{(-1,-1)} &= ce^{-\varphi^- - \varphi^+}e^{ik\cdot Z},\\
V^{c\partial c}_{(-1,-1)} &= c\partial ce^{-\varphi^- - \varphi^+}e^{ik\cdot Z}, & V^{\tilde{c}c\partial c}_{(-1,-1)} &= \tilde{c}c\partial ce^{-\varphi^- - \varphi^+}e^{ik\cdot Z}.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Von diesen Operatoren ausgehend, lassen sich nun weitere Vertexoperatoren in höheren Bildern berechnen. In niedrigere Bilder als $(-1,-1)$ kommt man auf diese Weise leider nicht, weil sich in dieser Beschreibung kein inverser Bildwechsel-Operator finden läßt. Eine umfangreichere Liste möglicher Vertexoperatoren findet sich im Anhang von [11]. Alle diese Vertexoperatoren in den verschiedenen Bildern bleiben aber masselos. Es lassen sich keine massiven, BRS-invarianten Vertexoperatoren konstruieren. Eine vollständige Analyse der BRS-Kohomologie steht aber noch aus.
Auch der Ramond-Sektor (R) wird keine neuen Stringzustände liefern, es ist aber trotzdem sehr instruktiv, einige Untersuchungen im R-Sektor anzustellen. Für die Konstruktion der Vertexoperatoren im R-Sektor ist es nötig, sogenannte Spinfelder einzuführen.

Spinfelder

Spinfelder in supersymmetrischen Stringtheorien dienen der Realisierung von Spinor-Freiheitsgraden im Targetraum. Ziel ist die Konstruktion einer $(2,2)$-Raumzeit-Supersymmetrie auf den Vertexoperatoren, bzw. String-Zuständen. Dieses Ziel ist für den $N = 2$ String jedoch bislang noch nicht erreicht worden. Die Ursache hierfür ist wieder der spektrale Fluß [11].
Betrachten wir zunächst die Bosonisierung der Fermionen Ψ in $(1,1)$-Minkowski-

Koordinaten,

$$\Psi^{\pm\mu} = C^\mu e^{\pm\Phi^\mu} \qquad \text{mit}$$
$$\Phi^\mu(z)\Phi^\nu(w) \sim +\delta^{\mu\nu}\log(z-w). \tag{2.2.3}$$

Dabei wurden wieder Kozykelfaktoren C^μ eingeführt. Deren genauere Eigenschaften werden uns hier etwas näher beschäftigen, um zu zeigen, daß die Spinfelder wirklich Spin-Freiheitsgrade im $(2,2)$-Targetraum repräsentieren. Diese Bosonisierung unterscheidet sich von (2.1.3), ist aber für die Konstruktion der Spinfelder und ihrer Lorentz-Transformationen etwas praktischer.
Eine Möglichkeit, die Faktoren C^μ darzustellen, ist, einen Anzahloperator N^μ für die Bosonen Φ^μ zu benutzen [12].

$$N^\mu = \oint \frac{dz}{2\pi i}\partial_z\Phi^\mu,$$
$$[N^\mu, \Psi^{\pm\nu}] = \delta^{\mu\nu}\Psi^{\pm\nu} \qquad \text{(keine Summe)}. \tag{2.2.4}$$

Damit läßt sich der Kozykelfaktor C^μ definieren als

$$C^\mu = (i)^\mu\sqrt{2}\exp[i\pi M^\mu{}_\nu N^\nu] \quad \text{mit} \quad M^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.5}$$

Also

$$\Psi^{\pm\mu} = i\sqrt{2}(i)^\mu\exp[\pm\Phi^\mu \pm i\pi M^\mu{}_\nu N^\nu]. \tag{2.2.6}$$

Mit dieser Definiton werden $\Psi^{\pm 0}$ und $\Psi^{\pm 1}$ antivertauschen. Die zugehörigen Spinfelder werden definiert als

$$S^A(z) = \exp[A_\mu(\Phi^\mu(z) + i\pi M^\mu{}_\nu N^\nu)]. \tag{2.2.7}$$

Der “Spinorindex” A durchläuft die Werte $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Diese Spinfelder bilden eine Realisierung von Spinoren der $SO(2,2)$ im $(2,2)$-dimensionalen Targetraum. Das Operator-Produkt mit dem $(2,2)$-Vektor $\Psi^{\pm\mu}$ lautet

$$\Psi^{\pm\mu}(z)S^A(w) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{z-w}^{-1}(\Gamma^{\pm\mu})^A{}_B S^B, \tag{2.2.8}$$

wobei die Matrizen $\Gamma^{\pm\mu}$, deren Komponenten aus den Kozykelfaktoren bestehen, eine $(2,2)$-Dirac-Algebra erfüllen.

$$\{\Gamma^{a\mu}, \Gamma^{b\nu}\} = 2\delta^{ab}\eta^{\mu\nu}, \tag{2.2.9}$$

mit $a, b \in \{+,-\}$ und $\delta^{+-} = 2$. Der Strom $L^{a\mu b\nu} = -\Psi^{a\mu}\Psi^{b\nu}$ erzeugt im Operatorprodukt die Lorentz-Algebra.

$$L^{a\mu b\nu}(z)L^{c\rho d\sigma}(w) \sim (z-w)^{-1}\delta^{ad}\eta^{\mu\sigma}L^{b\nu c\rho}(w) + ... \tag{2.2.10}$$

Auf den Spinfeldern erzeugt der Strom $L^{a\mu b\nu}$ die entsprechende Lorentz-Transformation eines $(2,2)$-Spinors

$$L^{a\mu b\nu}(z)S^A(w) \sim (z-w)^{-1}\tfrac{1}{4}[\Gamma^{a\mu}, \Gamma^{b\nu}]^A{}_B S^B(w) \tag{2.2.11}$$

in Übereinstimmung mit der Spinordarstellung $\frac{1}{4}[\Gamma^{a\mu}, \Gamma^{b\nu}]$ der Lorentz-Generatoren.
Diese Spinfelder sind nötig, um “fermionische” Vertexoperatoren im R-Sektor zu konstruieren, z.B.

$$V^{\tilde{c}c}_{(-1/2,-1/2)} = \tilde{c}cu_A S^A e^{-\frac{1}{2}\varphi^+ - \frac{1}{2}\varphi^-}e^{ik\cdot Z}, \tag{2.2.12}$$

für einen konstanten Spinor u_A. Dieser Vertexoperator ist BRS-invariant für $k^2 = 0$ und

$$u_A k^\pm_\mu(\Gamma^{\mp\mu})^A{}_B = 0, \qquad (\sum_\mu A_\mu)u_A = 0, \quad \forall A. \tag{2.2.13}$$

Die erste Gleichung ist die Dirac-Gleichung für einen masselosen Spinor, die zweite Bedingung folgt aus der $U(1)$-Invarianz und erfordert

$$u_{(1/2,1/2)} = u_{(-1/2,-1/2)} = 0. \tag{2.2.14}$$

Eine mögliche Lösung für die restlichen Spinorkomponenten ist

$$u_{(-1/2,1/2)} = k^{+1}, \quad u_{(1/2,-1/2)} = k^{+0} \quad \text{oder}$$
$$u_{(-1/2,1/2)} = k^{-0}, \quad u_{(1/2,-1/2)} = k^{-1}. \tag{2.2.15}$$

Für die Bosonisierung in der Lichtkegelbasis (2.1.3) lautet dieser Vertexoperator

$$V^{\tilde{c}c}_{(-1/2,-1/2)} = \tilde{c}ce^{-\frac{1}{2}\varphi^+ - \frac{1}{2}\varphi^-}[k^{\pm-}e^{+\frac{1}{2}\Phi^-}e^{+\frac{1}{2}\Phi^+} \pm ik^{\pm+}e^{-\frac{1}{2}\Phi^-}e^{-\frac{1}{2}\Phi^+}]e^{ik\cdot Z}, \tag{2.2.16}$$

wobei das $\pm$ den beiden Lösungen des Spinors u entspricht. Diesen Vertexoperator erhält man aber auch durch Anwendung von X^+ und X^- auf

$$V^{\tilde{c}c}_{(-3/2,-3/2)} = \tilde{c}ce^{-\frac{3}{2}\varphi^+ - \frac{3}{2}\varphi^-}e^{-\frac{1}{2}\Phi^+ - \frac{1}{2}\Phi^-}e^{ik\cdot Z}. \tag{2.2.17}$$

Die Vertexoperatoren $V^c_{(-3/2,-3/2)}, V^{c\partial c}_{(-3/2,-3/2)}$ und $V^{\int}_{(-3/2,-3/2)}$ ergeben sich analog.
Es lassen sich auch durch Fusion zweier Vertexoperatoren wieder Vertexoperatoren erhalten. Das Operatorprodukt zweier Vertexoperatoren ist dabei regulär. Die Vertexoperator-Algebra schließt aber erst nach Bildung von BRS-Äquivalenzklassen [11].
Als weitere Frage stellt sich, wie der spektrale Fluß in Form des SFO auf diese Algebra wirkt.

Vertexoperatoren und spektraler Fluß

Für bosonisierte Felder nehmen der $U(1)$-Strom $\hat{J}$ und der geisterweiterte SFO die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \partial_z(-\Phi^+ + \Phi^- + \varphi^+ - \varphi^- + c\tilde{b}), \\ \mathrm{SFO}(\Theta, z) &= e^{\int^z \hat{J}} = e^{\Theta(-\Phi^+ + \Phi^- + \varphi^+ - \varphi^- + c\tilde{b})}(z). \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Der geisterweiterte SFO ist aufgrund der BRS-Trivialität des $U(1)$-Stromes $\hat{J}$ BRS-invariant,

$$[Q, \mathrm{SFO}(\Theta, z)] = [Q, \int^z \{Q, \Theta\tilde{b}\}]\mathrm{SFO}(\Theta, z) = 0, \quad (2.2.19)$$

aber wegen der nicht lokalen Konstruktion durch das Integral über $\hat{J}$ nicht BRS-trivial. Der Ausdruck $\partial_z\mathrm{SFO}$ hingegen ist wieder BRS-trivial, das heißt, das Translationen des Arguments den SFO nur durch BRS-triviale Beiträge verändern.

$$\partial_z\mathrm{SFO}(\Theta, z) = \Theta J(z)\mathrm{SFO}(\Theta, z) = \Theta\{Q, \tilde{b}(z)\}\mathrm{SFO}(\Theta, z) = \Theta\{Q, \tilde{b}(z)\mathrm{SFO}(\Theta, z)\}. \quad (2.2.20)$$

Zählt man die $\varphi^\pm$-Exponenten, liegt der Verdacht nahe, den SFO für eine Art kontinuierlichen Bildwechsel-Operator zu halten, der (q^+, q^-)-Bilder in $(q^+ + \Theta, q^- - \Theta)$-Bilder dreht. Das Operatorprodukt des SFO mit $U(1)$-neutralen Vertexoperatoren ist für beliebige Θ lokal und regulär.

Eine Analyse der Operatorprodukte zeigt jedoch, daß eine Anwendung des SFO nicht einer Kombination $X^+(X^-)^{-1}$ entspricht, z.B. für einen Vertexoperator im $(-1, 0)$-Bild und einen spektralen Parameter $\Theta = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{SFO}(1, z)V^c_{(-1,0)}(w) &\sim e^{-\Phi^+ + \Phi^- + \varphi^+ - \varphi^- + c\tilde{b}}(z) ck^- \cdot \Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik\cdot Z}(w) \\ &\sim c\tfrac{1}{2}(k^{-+}\Psi^{--} - k^{--}\Psi^{-+})e^{-\varphi^-} e^{ik\cdot Z}(w) \\ &= c\tilde{k}^+ \cdot \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik\cdot Z}(w) =: \tilde{V}^c_{(0,-1)}(w), \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

mit $\tilde{k}^{+\mu} = \varepsilon^\mu{}_\nu k^{-\nu}$. Das Ergebnis dieses Flusses ist aber nicht der Vertexoperator

$$V^c_{(0,-1)} = ck^+ \cdot \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik\cdot Z},$$

da der Impuls $k^\pm$ vom SFO nicht entsprechend verändert wird. Insbesondere ist die Kombination $(k^{-+}\Psi^{--} - k^{--}\Psi^{-+})$ wegen der $\pm$-Asymmetrie nicht mehr $U(1,1)$-invariant. Trotzdem ist der entstehende Vertexoperator als Produkt zweier BRS-invarianter Operatoren BRS-invariant und insbesondere nicht BRS-trivial. Es läßt sich aber mit Hilfe einer besonderen Kombination von SFO-Einsetzungen in den Amplituden des $N = 2$ Strings die Äquivalenz der Amplituden von NS- ($q^\pm$ ganzzahlig) und R-Vertexoperatoren ($q^\pm$ halbzahlig) nachweisen. Die Einsetzung

$$\prod_i \mathrm{SFO}(z_i, \theta_i) \qquad \text{mit} \qquad \sum_i \theta_i = 0 \quad (2.2.22)$$

ist BRS-trivial, da sich wegen der BRS-Trivialität der Translationen $\partial_z\mathrm{SFO}(z, \Theta)$ alle SFOs BRS-äquivalent zur Identität zusammenziehen lassen. Die Bildladung wird insgesamt nicht verändert. Auch die $U(1,1)$-Invarianz bleibt wegen $\sum_i \theta_i = 0$ gewahrt. Ein Produkt aus NS-Vertexoperatoren wird durch die Einsetzung (2.2.22) also nur BRS-äquivalent verändert. Wendet man die SFO für halbzahlige Parameter θ_i auf die NS-Vertexoperatoren an, so erhält man Vertexoperatoren in halbzahligen Bildern, also R-Vertexoperatoren. Ein Produkt aus NS-Vertexoperatoren unterscheidet sich somit von einem Produkt aus R-Vertexoperatoren nur durch BRS-triviale Terme. Die Amplituden aus NS- und R-Sektor sind somit gleich. Die Kombination (2.2.22) der SFO tritt bei einer Formulierung der Amplituden als Integral über punktierte Riemannflächen ganz natürlich auf (vgl. Kapitel VII).

Kapitel III: Eichfixierung im Pfadintegral

In diesem Kapitel soll die Wirkung des $N = 2$ Strings im Pfadintegral-Formalismus eichfixiert werden. Eine Besonderheit der Stringtheorien ist, daß die Felder der zweidimensionalen Supergravitation keine dynamischen Freiheitsgrade besitzen und daher ausintegriert werden können. Dabei muß jedoch die Divergenz des Pfadintegrals aufgrund eichäquivalenter Konfigurationen der Supergravitationsfelder beachtet werden.
Eine, für den Pfadintegral-Formalismus besonders geeignete Vorschrift, eine Eichung zu fixieren, ist die Faddeev-Popov Methode. Hierbei wird das Pfadintegral aufgespalten in ein Integral über eichinäquivalente Felder (Moduli) und ein Integral über eichäquivalente Felder (Eichorbit). Für Stringtheorien entspricht der Moduliraum der Supergravitationsfelder dem Raum der Äquivalenzklassen der entsprechenden Super-Riemannflächen und ist im allgemeinen endlich-dimensional.
Eine "Koordinatentransformation" im Pfadintegral von den eichäquivalenten Feldern auf die Symmetrie-Parameter erlaubt die Ausintegration des Eichorbits. Die auftretende Jacobi-Determinante läßt sich als Zustandssumme des Geistsektors schreiben. Jacobi-Determinanten entstehen bei der Transformation von Volumenformen und sind daher im Tangentialraum zu bestimmen. Zur Berechnung dieser Determinante benötigt man zunächst die infinitesimalen Symmetrie-transformationen (Tangenten an den Eichorbit) in geeigneter Form.

1. Der Tangentialraum der Supergravitationsfelder

Die bereits in Kapitel I in der superkonformen Eichung eingeführten Geister tragen eigentlich Lorentz-Indizes entsprechend ihres konformen Gewichtes. Damit die in diesem Kapitel bei der Eichfixierung auftretenden Geister sich nicht von den früher eingeführten unterscheiden, sollten zur Bestimmung der Jacobi-Determinante die Symmetrie-Transformationen der Lorentz-kovarianten Felder benutzt werden. Um die Variationen der Super-Gravitationsfelder in kovarianter Form zu bekommen, werden sämtliche Welt-Indizes m, n mit Hilfe des inversen Vielbeins ${e_a}^m$ durch Lorentz-Indizes ersetzt. Dabei muß das Vielbein teilweise an partiellen Ableitungen vorbei gezogen werden. Die dabei entstehenden Terme sind Teil der Lorentz-Konnektion und bilden schließlich kovariante Ableitungen D_a.

$$\begin{aligned}
{e_b}^m \delta {e_m}^a = {h_b}^a &= D_b\xi^a - 2i(\bar\epsilon^- \gamma^a \chi_b^+ - \bar\chi_b^- \gamma^a \epsilon^+) - (l + \omega_c \xi^c){\epsilon_b}^a + \sigma\delta_b^a - I^a \varepsilon_{bc}\xi^c, \\
{e_a}^m \delta\chi_m^\pm = h_a^\pm &= D_a\xi^b\chi_b^\pm + \xi^b D_b\chi_a^\pm + \mathcal{D}_a\epsilon^\pm \pm i\alpha\chi_a^\pm \mp i\gamma_5\hat\alpha\chi_a^\pm \\
&\quad -\tfrac{1}{2}(l + \omega_c\xi^c)\gamma_5\chi_a^\pm + \tfrac{1}{2}\sigma\chi_a^\pm + \gamma_a\eta^\pm - \chi_c^\pm \varepsilon_{ab}\xi^b I^c, \\
{e_a}^m \delta A_m = H_a &= D_a\xi^b A_b + \xi^b D_b A_a + \varepsilon^{bc}(\bar\epsilon^-\gamma_5\gamma_a\mathcal{D}_b\chi_c^+ - \mathcal{D}_b\bar\chi_c^-\gamma_a\gamma_5\epsilon^+) \\
&\quad -I^d(\bar\epsilon^-\gamma_5\gamma_a\chi_d^+ - \bar\chi_d^-\gamma_a\gamma_5\epsilon^+) \\
&\quad +\partial_a\alpha + {\varepsilon_a}^b\partial_b\hat\alpha + \bar\chi_b^-\gamma_a\gamma^b\eta^+ + \bar\eta^-\gamma^b\gamma_a\chi_b^+ .
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Der kovariante Ausdruck

$$I^a = i\varepsilon^{bc}\bar\chi_b^-\gamma^a\chi_c^+$$

tritt auf, um die oben angesprochenen Terme des Vielbeins zur Lorentz-Konnektion ω_m zu ergänzen (siehe Anhang A).
Durch Redefinition der verschiedenen Symmetrie-Parameter ist es möglich, die Symmetrie-Transformationen in einander unabhängige Transformationen zu zerlegen. Dazu sind folgende Redefinitionen der Symmetrie-Parameter nötig:

$$\begin{aligned}
\tilde\sigma &= \sigma + \tfrac{1}{2}D_a\xi^a, \\
\tilde l &= l + \omega_c\xi^c + \tfrac{1}{2}(D_{\bar z}\xi^{\bar z} - D_z\xi^z), \\
\tilde\eta^\pm &= \eta^\pm + \tfrac{1}{2}\gamma^a\mathcal{D}_a\epsilon^\pm .
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Die Redefinition von σ und λ orthogonalisiert die bosonische Weyl- und die Lorentz-Transformation mit der Reparametrisierung, durch die Redefinition von η werden die fermionische Weyl- und die Supersymmetrie-Transformationen unabhängig. Für die Trennung der fermionischen Weyl- und der Supersymmetrie-Transformationen wurden die Eigenschaften des Projektors ${P_a}^b = \frac{1}{2}\gamma^b\gamma_a$ ausgenutzt.
Einige Komponenten der Felder lassen sich durch diese Symmetrien komplett wegeichen

und dadurch fixieren. So lassen sich $h_z{}^z, h_{\bar z}{}^{\bar z}$ durch $\tilde\sigma, \tilde l$ und $\chi^\pm_{\bar z\downarrow}, \chi^\pm_{z\uparrow}$ durch $\tilde\eta^\pm_{\uparrow\downarrow}$ eliminieren.
Es müssen im weiteren also nur noch Reparametrisierungen, Supersymmetrie, $U_A(1)$ und $U_V(1)$ behandelt werden. Es bleiben die Transformationen

$$\begin{aligned}
h_{\bar z}{}^z &= D_{\bar z}\xi^z - 4(\epsilon^-_\uparrow \chi^+_{\bar z\uparrow} - \chi^-_{\bar z\uparrow}\epsilon^+_\uparrow),\\
h_z{}^{\bar z} &= D_z\xi^{\bar z} + 4(\epsilon^-_\downarrow \chi^+_{z\downarrow} - \chi^-_{z\downarrow}\epsilon^+_\downarrow),\\
h^\pm_{\bar z\uparrow} &= \xi^z D_z\chi^\pm_{\bar z\uparrow} + \xi^{\bar z} D_{\bar z}\chi^\pm_{\bar z\uparrow} + D_{\bar z}\xi^{\bar z}\chi^\pm_{\bar z\uparrow} - \tfrac{1}{2}D_z\xi^z\chi^\pm_{\bar z\uparrow} + \mathcal{D}_{\bar z}\epsilon^\pm_\uparrow \pm i(\alpha - \hat\alpha)\chi^\pm_{\bar z\uparrow},\\
h^\pm_{z\downarrow} &= \xi^z D_z\chi^\pm_{z\downarrow} + \xi^{\bar z} D_{\bar z}\chi^\pm_{z\downarrow} + D_z\xi^z\chi^\pm_{z\downarrow} - \tfrac{1}{2}D_{\bar z}\xi^{\bar z}\chi^\pm_{z\downarrow} + \mathcal{D}_z\epsilon^\pm_\downarrow \pm i(\alpha + \hat\alpha)\chi^\pm_{z\downarrow}.
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Hier bieten sich noch weitere Redefinitionen an, um die Transformation zu "diagonalisieren" [15], also $\xi^{\bar z}$ aus $h^\pm_{\bar z\uparrow}$ und ξ^z aus $h^\pm_{z\downarrow}$ zu eliminieren.

$$\begin{aligned}
\tilde\epsilon^\pm_\uparrow &= \epsilon^\pm_\uparrow + \xi^{\bar z}\chi^\pm_{\bar z\uparrow},\\
\tilde\epsilon^\pm_\downarrow &= \epsilon^\pm_\downarrow + \xi^z\chi^\pm_{z\downarrow},\\
\tilde\alpha - \tilde{\hat\alpha} &= \alpha - \hat\alpha + \xi^{\bar z}A_{\bar z},\\
\tilde\alpha + \tilde{\hat\alpha} &= \alpha + \hat\alpha + \xi^z A_z.
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Diese Redefinitionen lassen $h_a{}^b$ invariant. Für $h^\pm_{a\uparrow\downarrow}$ und H_a ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
h^\pm_{\bar z\uparrow} &= \xi^z D_z\chi^\pm_{\bar z\uparrow} - \tfrac{1}{2}D_z\xi^z\chi^\pm_{\bar z\uparrow} + \mathcal{D}_{\bar z}\tilde\epsilon^\pm_\uparrow \pm i(\tilde\alpha - \tilde{\hat\alpha})\chi^\pm_{\bar z\uparrow},\\
h^\pm_{z\downarrow} &= \xi^{\bar z} D_{\bar z}\chi^\pm_{z\downarrow} - \tfrac{1}{2}D_{\bar z}\xi^{\bar z}\chi^\pm_{z\downarrow} + \mathcal{D}_z\tilde\epsilon^\pm_\downarrow \pm i(\tilde\alpha + \tilde{\hat\alpha})\chi^\pm_{z\downarrow},\\
H_{\bar z} &= D_{\bar z}\xi^z A_z + \xi^z D_z A_{\bar z} - 4iD_z\xi^{\bar z}\chi^-_{\bar z\uparrow}\chi^+_{\bar z\uparrow}\\
&\quad -2i[\tilde\epsilon^-_\uparrow\mathcal{D}_z\chi^+_{\bar z\uparrow} + \mathcal{D}_z\chi^-_{\bar z\uparrow}\tilde\epsilon^+_\uparrow - \chi^-_{\bar z\uparrow}\mathcal{D}_z\tilde\epsilon^+_\uparrow - \mathcal{D}_z\tilde\epsilon^-_\uparrow\chi^+_{\bar z\uparrow}] + \partial_{\bar z}(\tilde\alpha - \tilde{\hat\alpha}),\\
H_z &= D_z\xi^{\bar z} A_{\bar z} + \xi^{\bar z} D_{\bar z} A_z - 4iD_{\bar z}\xi^z\chi^-_{z\downarrow}\chi^+_{z\downarrow}\\
&\quad -2i[\tilde\epsilon^-_\downarrow\mathcal{D}_{\bar z}\chi^+_{z\downarrow} + \mathcal{D}_{\bar z}\chi^-_{z\downarrow}\tilde\epsilon^+_\downarrow - \chi^-_{z\downarrow}\mathcal{D}_{\bar z}\tilde\epsilon^+_\downarrow - \mathcal{D}_{\bar z}\tilde\epsilon^-_\downarrow\chi^+_{z\downarrow}] + \partial_z(\tilde\alpha + \tilde{\hat\alpha}).
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Für die Konstruktion der Geist-Wirkung ist es notwendig, sich die Transformationen der Felder $\chi^\pm_{a\uparrow\downarrow}$ und A_a zu besorgen, also die Variationen für die Felder mit Lorentz-Indizes zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\delta\chi^\pm_{a\uparrow\downarrow} &= \delta(e_a{}^m\chi^\pm_{m\uparrow\downarrow}) = -h_a{}^b\chi^\pm_{b\uparrow\downarrow} + h^\pm_{a\uparrow\downarrow},\\
\delta A_a &= -h_a{}^b A_b + H_a.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Damit ergibt sich in dieser Eichung

$$\begin{aligned}
\delta\chi^\pm_{\bar z\uparrow} &= h^\pm_{\bar z\uparrow},\\
\delta\chi^\pm_{z\downarrow} &= h^\pm_{z\downarrow},\\
\delta A_{\bar z} &= \xi^z D_z A_{\bar z} - 4iD_z\xi^{\bar z}\chi^-_{\bar z\uparrow}\chi^+_{\bar z\uparrow}\\
&\quad +2i[D_z\chi^+_{\bar z\uparrow}\tilde\epsilon^-_\uparrow - D_z\chi^-_{\bar z\uparrow}\tilde\epsilon^+_\uparrow + \chi^-_{\bar z\uparrow}D_z\tilde\epsilon^+_\uparrow - \chi^+_{\bar z\uparrow}D_z\tilde\epsilon^-_\uparrow] + \partial_{\bar z}(\tilde\alpha - \tilde{\hat\alpha}),\\
\delta A_z &= \xi^{\bar z} D_{\bar z} A_z - 4iD_{\bar z}\xi^z\chi^-_{z\downarrow}\chi^+_{z\downarrow}\\
&\quad +2i[D_{\bar z}\chi^+_{z\downarrow}\tilde\epsilon^-_\downarrow - D_{\bar z}\chi^-_{z\downarrow}\tilde\epsilon^+_\downarrow + \chi^-_{z\downarrow}D_{\bar z}\tilde\epsilon^+_\downarrow - \chi^+_{z\downarrow}D_{\bar z}\tilde\epsilon^-_\downarrow] + \partial_z(\tilde\alpha + \tilde{\hat\alpha}).
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Veränderungen haben sich hier nur bei der Transformation der $U_V(1)$-Konnektion ergeben, im wesentlichen sind dort die Lorentz-$U_V(1)$-kovarianten Ableitungen durch nur Lorentz-kovariante ersetzt worden. Diese haben die folgende Form:

$$\begin{aligned}
D_z\chi^\pm_{\bar z\uparrow} &= \partial_z\chi^\pm_{\bar z\uparrow} - \tfrac{1}{2}\omega_z\chi^\pm_{\bar z\uparrow}, &\quad D_{\bar z}\chi^\pm_{z\downarrow} &= \partial_{\bar z}\chi^\pm_{z\downarrow} + \tfrac{1}{2}\omega_{\bar z}\chi^\pm_{z\downarrow},\\
D_z\tilde\epsilon^\pm_\uparrow &= \partial_z\tilde\epsilon^\pm_\uparrow + \tfrac{1}{2}\omega_z\tilde\epsilon^\pm_\uparrow, &\quad D_{\bar z}\tilde\epsilon^\pm_\downarrow &= \partial_{\bar z}\tilde\epsilon^\pm_\downarrow - \tfrac{1}{2}\omega_{\bar z}\tilde\epsilon^\pm_\downarrow,\\
D_z\xi^{\bar z} &= \partial_z\xi^{\bar z} + \omega_z\xi^{\bar z}, &\quad D_{\bar z}\xi^z &= \partial_{\bar z}\xi^z - \omega_{\bar z}\xi^z.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Damit sind die Symmetrie-Transformationen in die gewünschte Form gebracht. Da die Lorentz-, Weyl- und Superweyl-Transformationen direkt fixiert werden können, müssen Geister nur noch für die Reparametrisierung, SUSY, $U_A(1)$ und $U_V(1)$ eingeführt werden, also genau die Geister, die wir schon aus dem BRS-Formalismus in der superkonformen Eichung aus Kapitel I kennen.

2. Die Faddeev-Popov-Determinante

Nun zur Berechnung der Jacobi- bzw. Faddeev-Popov-Determinante. Eine beliebige Variation $\Delta\Phi$ eines Feldes läßt sich zerlegen in einen durch die Symmetrien erzeugten Anteil $\delta\Phi$ und einen, dazu orthogonalen (bzgl. eines vorher definierten Skalarproduktes), endlich dimensionalen Anteil (Moduli), der sich nicht über Symmetrie-Transformationen erreichen läßt [15].

$$\Delta\Phi_i = T_{i\alpha}\delta x^\alpha + T_{im}\delta y^m. \tag{3.2.1}$$

Hierbei sind δx^α die Symmetrie-Parameter und δy^m die (endlich vielen) Moduli-Parameter, genauer gesagt, Koordinaten des Tangentialraumes an den Symmetrie- bzw. Modulraum an einer Stelle Φ_0. Der Index i durchläuft die Freiheitsgrade der Felder, also auch die Koordinaten $z, \bar z$. Die $T_{i\alpha}$ bzw. T_{im} sind die Basisvektoren der beiden, bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle T_\alpha \mid T_m\rangle = \sum_i T_{i\alpha}T_{im} = 0 \tag{3.2.2}$$

zueinander orthogonalen Tangentialräume. Die Prozedur der Eichfixierung besteht nun darin, im Pfadintegral von den Koordinaten $\Phi_i, \quad i = 1,..,N$ zu den Koordinaten $x^\alpha, y^m, \quad \alpha = 1,..,n; \quad m = n+1,..,N$ überzugehen.

$$\prod_i [d\Phi_i] = \mathrm{sdet}(T)[dx^\alpha]d^{N-n}y \tag{3.2.3}$$

Die Laufbereiche N und n der Indizes i und α sind dabei unendlich, die Dimension des Modulraumes $N-n$ ist aber endlich. Die bei der Substitution auftretende Superdeterminante läßt sich als Gaußsches Pfadintegral über die Geist- und Antigeistfelder C, B darstellen [15]

$$\mathrm{sdet}(A) = \int \prod_{i=1}^{N} dB^i \prod_{\alpha=1}^{n} dC^\alpha \exp(B^i T_{i\alpha} C^\alpha) \prod_{m=n+1}^{N} \delta(B^i T_{im}) \tag{3.2.4}$$

und ergänzt so im Pfadintegral die Materie-Wirkung um den Geistanteil. Zusätzlich erhält man die δ-Funktionen im Integralmaß, die dafür sorgen, daß die Integration über die Nullmoden der Antigeister B nicht verschwindet.

Beweis:
Um (3.2.4) zu beweisen, führt man die Variablen

$$\tilde{C}_\alpha = B^i T_{i\alpha}, \qquad \tilde{D}_m = B^i T_{im}$$

ein. Bei der Substitution des Integralmaßes

$$\prod_i^N dB^i = \prod_{\alpha=1}^{n} d\tilde{C}_\alpha \prod_{m=n+1}^{N} d\tilde{D}_m \mathrm{sdet}(T)$$

tritt als Jacobi-Determinante wieder $\mathrm{sdet}(T)$ auf (nicht $\mathrm{sdet}(T)^{-1}$, wegen der Statistik der Geister). Es ergibt sich

$$\int \prod_\alpha dC^\alpha d\tilde{C}_\alpha exp(\tilde{C}_\alpha C^\alpha) \prod_m d\tilde{D}_m \prod_m \delta(\tilde{D}_m)\mathrm{sdet}(T) = \mathrm{sdet}(T),$$

für ein auf 1 normiertes Gaußsches Integral. QED

Wegen der Invarianz des Integranden unter den Symmetrie-Transformationen $T_{i\alpha}\delta x^\alpha$ kann das Integral über x als unendlicher Faktor abgespalten und ausdividiert werden.
Wie wir gesehen haben, lassen sich bis auf Reparametrisierungen (ξ^a), SUSY ($\epsilon_\uparrow^\pm$) und $U(1)$ $(\alpha, \hat{\alpha})$ alle Symmetrien direkt fixieren. Die noch nicht fixierten Symmetrien gehen inhomogen nur über Differentialoperatoren in die Transformationsgesetze ein und zwar ξ^a nur beim Vielbein, $\epsilon_\uparrow^\pm$ beim Gravitino und $\alpha \pm \hat{\alpha}$ nur bei der Konnektion $A_z, A_{\bar{z}}$. Im Falle des $N=2$ Strings läßt sich die Gleichung (3.2.1) für die Supergravitations-Felder ${e_m}^a, \chi_a^\pm, A_a$ formal schreiben als

$$\begin{pmatrix} {h_{\bar{z}}}^z \\ \delta\chi_{\bar{z}\uparrow}^\pm \\ \delta A_{\bar{z}} \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \xi^z \\ \tilde{\epsilon}_\uparrow^\pm \\ \tilde{\alpha} - \tilde{\hat{\alpha}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{i\bar{z}}^z & 0 & 0 \\ 0 & \nu_j^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{k\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^i \\ \zeta_{\bar{z}\uparrow}^{j\pm} \\ C^k \end{pmatrix}, \tag{3.2.5}$$

wobei wir nur eine holomorphe Hälfte betrachten wollen. Hierbei sind t, ζ, C Koordinaten des jeweiligen Modulraumes. $\mathcal{P}$ entspricht dem $T_{i\alpha}$ und die Diagonalmatrix mit den Einträgen μ, ν, ω dem T_{im}. Der Differentialoperator $\mathcal{P}$ definiert sich über die Transformationen

$$\begin{aligned} {h_{\bar{z}}}^z &= D_{\bar{z}}\xi^z - 4(\epsilon_\uparrow^- \chi_{\bar{z}\uparrow}^+ - \chi_{\bar{z}\uparrow}^- \epsilon_\uparrow^+), \\ \delta\chi_{\bar{z}\uparrow}^\pm &= \xi^z D_z \chi_{\bar{z}\uparrow}^\pm - \tfrac{1}{2} D_z \xi^z \chi_{\bar{z}\uparrow}^\pm + \mathcal{D}_{\bar{z}} \tilde{\epsilon}_\uparrow^\pm \pm i(\tilde{\alpha} - \tilde{\hat{\alpha}})\chi_{\bar{z}\uparrow}^\pm, \\ \delta A_{\bar{z}} &= \xi^z D_z A_{\bar{z}} - 4i D_z \xi^{\bar{z}} \chi_{\bar{z}\uparrow}^- \chi_{\bar{z}\uparrow}^+ \\ &\quad + 2i[D_z \chi_{\bar{z}\uparrow}^+ \tilde{\epsilon}_\uparrow^- - D_z \chi_{\bar{z}\uparrow}^- \tilde{\epsilon}_\uparrow^+ + \chi_{\bar{z}\uparrow}^- D_z \tilde{\epsilon}_\uparrow^+ - \chi_{\bar{z}\uparrow}^+ D_z \tilde{\epsilon}_\uparrow^-] + \partial_{\bar{z}}(\tilde{\alpha} - \tilde{\hat{\alpha}}). \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Die Determinante dieses Operators wird im Maß des Pfadintegrals auftreten und die Wirkung um den Geistanteil erweitern. Wir erhalten die vollständige Geist-Wirkung (holomorpher Teil) in üblicher Notation durch die Identifikation

$$\begin{aligned} c &:= \xi^z, \quad \tilde{\epsilon}_\uparrow^\pm := \gamma^\pm, \quad \tilde{\alpha} - \tilde{\hat{\alpha}} = i\tilde{c} \\ (\ \bar{c} &:= \xi^{\bar{z}}, \quad \tilde{\epsilon}_\downarrow^\pm := \bar{\gamma}^\pm, \quad \tilde{\alpha} + \tilde{\hat{\alpha}} = i\bar{\tilde{c}}) \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

und Einführen der entsprechenden Antigeister $b, \beta^\mp, \tilde{b}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gh}^{hol} &= b{h_{\bar{z}}}^z + \beta^- \delta\chi_{\bar{z}\uparrow}^+ + \delta\chi_{\bar{z}\uparrow}^- \beta^+ - i\tilde{b}\delta A_{\bar{z}} \\ &= bD_{\bar{z}}c + \beta^- D_{\bar{z}}\gamma^+ + \beta^+ D_{\bar{z}}\gamma^- + \tilde{b}\partial_{\bar{z}}\tilde{c} \\ &\quad + \chi_{\bar{z}\uparrow}^-[-4b\gamma^+ + D_z(c\beta^+) + \tfrac{1}{2}\beta^+ D_z c - \beta^+\tilde{c} - 2D_z\tilde{b}\gamma^+ - 4\tilde{b}D_z\gamma^+] \\ &\quad + [+4b\gamma^- - D_z(c\beta^-) - \tfrac{1}{2}\beta^- D_z c - \beta^-\tilde{c} - 2D_z\tilde{b}\gamma^- - 4\tilde{b}D_z\gamma^-]\chi_{\bar{z}\uparrow}^+ \\ &\quad - iA_{\bar{z}}[\beta^-\gamma^+ - \beta^+\gamma^- - D_z(c\tilde{b})] - (4\tilde{b}\chi_{\bar{z}\uparrow}^- \chi_{\bar{z}\uparrow}^+ D_z\bar{c}) + \text{tot. Abl.} \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Die konformen Gewichte der Antigeister müssen dabei dergestalt sein, daß sich das Produkt der Variationen ${h_{\bar{z}}}^z, \delta\chi_{\bar{z}\uparrow}^\pm, \delta A_{\bar{z}}$ mit den entsprechenden Antigeistern integrieren läßt. Die Antigeister sind somit dual zu den jeweiligen Moduli $\mu_i, \nu_j^\pm, \omega_{k\bar{z}}$.
Der in χ quadratische, anholomorphe Term verschwindet nach geeigneter Wahl eines Trägers für das Gravitino. Die Geist-Wirkung mit richtiger Normierung lautet

$$S_{gh} = \tfrac{1}{\pi} \int d^2z \sqrt{g} \mathcal{L}_{gh}. \tag{3.2.9}$$

Es läßt sich leicht überprüfen, daß die Variationsableitungen nach ${e_m}^a, \chi_a^\pm, A_a$ die gleichen geisterweiterten Symmetrie-Generatoren liefern wie nach der BFV-Methode (1.3.4).

Das eichfixierte Pfadintegral

Die holomorphe Hälfte des eichfixierten Pfadintegrals des $N = 2$ Strings nimmt damit die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{hol} &= \int \frac{[de_m{}^a][d\chi_m^\pm][dA_m]}{\text{Symmetrievolumen}}[dZ][d\Psi]e^{-S[e,\chi,A,Z,\Psi]} \\ &= \int dt d\zeta^+ d\zeta^- dC[dZ][d\Psi][dcdb][d\gamma d\beta][d\tilde{c}d\tilde{b}] \\ &\quad \prod_i \langle \mu_i | b\rangle \prod_k \left\langle \omega_k | \tilde{b}\right\rangle \prod_j \delta(\langle \nu_j^+ | \beta^- \rangle) \prod_j \delta(\langle \nu_j^- | \beta^+ \rangle) \\ &\quad e^{-S[t,\zeta^\pm,C,Z,\Psi,c,b,\gamma^\pm,\beta^\mp,\tilde{c},\tilde{b}]} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Das Skalarprodukt $\langle .. \mid .. \rangle$ ist dabei einfach das Integral $\int \sqrt{g}....$ Die Moduli haben die gleichen konformen Eigenschaften wie die Variationen in der Geist-Wirkung, die Produkte aus Antigeist und Moduli lassen sich daher einfach integrieren. Als nächstes müssen die Dimensionen der verschiedenen $N = 2$ Modulräume untersucht werden.

Kapitel IV:
Die $N = 2$ Moduli

In diesem Kapitel wird der $N = 2$ Modulraum, der sich aus den metrischen, den fermionischen und $U(1)$-Moduli zusammensetzt, genauer untersucht und der Zusammenhang mit den $N = 2$ Super-Riemannflächen hergestellt. Die Dimensionen aller Räume lassen sich mit Hilfe des Atiyah-Singer-Indextheorems bestimmen. Die fermionischen Moduli des Gravitinos werden explizit angegeben und anschließend ausintegriert. Die Integration über die fermionischen Moduli wird zu Einsetzungen von Bildwechsel-Operatoren im verbleibenden Pfadintegral führen. Insbesondere der $U(1)$-Modulraum wird ausführlich behandelt und explizit konstruiert.

1. Das Indextheorem

Um die Moduli zu ermitteln, muß festgestellt werden, welche Variationen sich über den Wertebereich der jeweiligen Differentialoperatoren erreichen lassen und welche nicht.
Wie bei der orthogonalen Zerlegung der Symmetrie-Transformationen untereinander, sind auch die Moduli orthogonal zu den Transformationen definiert. Moduli sind also all die Variationen, die senkrecht auf dem Wertebereich der Differentialoperatoren stehen.

$$m \in \{\text{Moduli}\} \Leftrightarrow \langle m|D\xi\rangle = 0 \quad \forall\xi. \tag{4.1.1}$$

Das orthogonale Komplement des Wertebereichs eines Differentialoperators läßt sich für ein nicht entartetes Skalarprodukt gut mit Hilfe des adjungierten Operators beschreiben.

$$0 = \langle m|D\xi\rangle = \left\langle D^\dagger m|\xi\right\rangle \quad \forall\xi \qquad \Leftrightarrow \qquad m \in \ker(D^\dagger). \tag{4.1.2}$$

Über die komplexe Dimension der Kerne $\ker(D)$ und $\ker(D^\dagger)$ macht das Indextheorem von Aythia und Singer eine sehr weitreichende Aussage. Für einen Differentialoperator $D^n_{\bar z} = \partial_{\bar z} - n\omega_{\bar z}$ auf Feldern vom Lorentz-Gewicht n gilt

$$\dim\ker(D^{n\,\dagger}_{\bar z}) - \dim\ker(D^n_{\bar z}) = (2n+1)(g-1), \tag{4.1.3}$$

(also $n = 1$ für ξ^z, $n = \frac{1}{2}$ für $\epsilon^\pm_\uparrow$ und $n = 0$ für $\alpha - \hat\alpha$). Um nun wirklich die Dimension von $\ker(D^{n\,\dagger}_{\bar z})$ zu ermitteln, muß $\dim\ker(D^n_{\bar z})$ bekannt sein.
Die Dimension des Raumes holomorpher (-n)-Differentiale, also $\dim\ker(D^n_{\bar z})$, ist gegeben durch [35]

Genus	Gewicht	dim ker$(D^n_{\bar z})$
$g=0$	$n \geq 0$	$2n+1$
	$n<0$	0
$g=1$	alle n	1
$g>1$	$n>0$	0
	$n=0$	1
	$n=-1$	g
	$n<-1$	$(2n+1)(1-g)$

Damit lassen sich auch die entsprechenden Dimensionen von $\ker(D^\dagger)$ sofort aus dem Indextheorem ablesen.

$U(1)$-Verallgemeinerungen

Wie gesehen, enthält der Operator $\mathcal{P}$ auch $U(1)$-kovariante Ableitungen, für die das oben diskutierte Indextheorem noch modifiziert werden muß. Neben der topologischen Invarianten g der Reparametrisierungen wird auch die Topologie des $U(1)$-Bündels, also die Chernzahl c_1 eingehen. Es ist also nötig, das Indextheorem für $U(1)$-kovariante Ableitungen $\mathcal{D}^{n,q}_{\bar z} = \partial_{\bar z} - n\omega_{\bar z} + iqA_{\bar z}$ zu betrachten. Die Indizes n, q sind wieder das Lorentz-Gewicht und die $U(1)$-Ladung der Felder, auf welche die Ableitung wirkt. Das $U(1)$-verallgemeinerte Indextheorem lautet

$$\dim\ker(\mathcal{D}^{n,q\,\dagger}_{\bar z}) - \dim\ker(\mathcal{D}^{n,q}_{\bar z}) = (2n+1)(g-1) + qc_1. \tag{4.1.4}$$

Für den $N = 2$ String sind die Operatoren auf den Geistern $c, \gamma^\pm, \tilde c$ bzw. die adjungierten Operatoren auf den Antigeistern zu betrachten. Man erhält für die Dimensionen der entsprechenden Kerne

g	n	$\dim\ker(\mathcal{D}^{n,q\,\dagger}_{\bar z})$	$\dim\ker(\mathcal{D}^{n,q}_{\bar z})$
0	≥ 0	qc_1	$2n+1$
1	alle n	qc_1+1	1
>1	>0	$(2n+1)(g-1)+qc_1$	0
>1	0	$(2n+1)(g-1)+qc_1+1$	$1.$

Die Dimension $\dim\ker(\mathcal{D}_{\bar z}^{n,q\dagger})$ darf natürlich nicht negativ werden. Dies schränkt bei gegebenem Genus g den Bereich von q und c_1 ein. Man erhält also für $g > 1$ für die Dimension des $N = 2$ Modulraumes

$$\begin{array}{cl} 3g-3 & (n=1, q=0) \text{ metrische Moduli } t, \\ 2g-2\mp c_1 & (n=\frac{1}{2}, q=\mp 1) \text{ fermionische Moduli } \zeta \text{ für } \chi^{\pm}_{\bar z\uparrow}, \\ g & (n=0)\ U(1)\text{-Moduli } C. \end{array}$$

Die möglichen Werte der Chernzahl sind dabei durch

$$|c_1| \leq 2(g-1) \tag{4.1.5}$$

festgelegt. Die Summe $2g - 2 \mp c_1$ darf nicht negativ werden, weil sonst das Pfadintegral durch das Auftreten nicht kompensierbarer Nullmoden von $\gamma^{\pm}$ verschwindet [7]. Das Integral über die metrischen Moduli kann nicht weiter reduziert oder ausintegriert werden, da die Vertexoperatoren und Korrelatoren von diesen Moduli über die Metrik direkt oder die Periodenmatrix τ in den Thetafunktionen abhängen. Die Integration der metrischen Moduli erfolgt daher erst zuletzt bei der Berechnung von String-Amplituden und wird im folgenden nicht weiter behandelt.

2. Die fermionischen Moduli und Bildwechsel-Operatoren

Der nächste Schritt in der Berechnung des Pfadintegrals ist die Ausintegration der fermionischen Moduli. Die dadurch enstehenden Einsetzungen im Pfadintegral lassen sich formal mit den bereits bekannten Bildwechsel-Operatoren $X^{\pm}$ identifizieren. Um die fermionischen Moduli ausintegrieren zu können, muß zunächst die Struktur des fermionischen Modulraumes untersucht werden. Die fermionischen Moduli sind Teil der supersymmetrischen Moduli der $N = 2$ Super-Riemannflächen, deren geometrische Struktur nicht einfach zu definieren ist. Mathematisch wohldefiniert ist nur eine Untermenge der Super-Riemannflächen, die sogenannten "split Super-Riemannflächen". Dazu einige erklärende Worte.

$N = 2$ Super-Riemannflächen

Im Zusammenhang mit Super-Riemannflächen interessieren wir uns besonders für die geometrischen Eigenschaften des fermionischen Sektors. Ein Problem, die Definition von Mannigfaltigkeiten auf Super-Mannigfaltigkeiten zu erweitern, ist das Fehlen einer Metrik im üblichen Sinne für fermionische Koordinaten. Alle kommutierenden Größen, die aus fermionischen Komponenten konstruiert werden, sind nilpotent. Die gebräuchlichen "Metriken" in Superräumen bilden somit nicht in die reellen Zahlen ab. "Abstände" im fermionischen Sektor sind nicht vergleichbar. Damit sind die topologischen und geometrischen Begriffe, wie z.B. Trennungseigenschaften, nicht so ohne weiteres übertragbar.

Für die Definition der Super-Riemannflächen wird lediglich der Begriff der Super-Koordinatenumgebung definiert. Die zugrunde liegende Super-Mannigfaltigkeit sei im rein bosonischen Sektor, auch "Body" genannt, wie üblich definiert, im fermionischen Sektor werden nur Spezialfälle definierbar sein. [16]
Ein Satz Koordinaten im $N = 2$ Superraum bestehe aus

$$\mathbf{z} := (z, \Theta^+, \Theta^-), \qquad \bar{\mathbf{z}} := (\bar z, \bar\Theta^+, \bar\Theta^-). \tag{4.2.1}$$

Entsprechend definiert man sich Super-Ableitungen

$$D_{\pm} := \partial_{\pm} + \tfrac{i}{2}\Theta^{\pm}\partial_z, \qquad \bar D_{\pm} := \bar\partial_{\pm} + \tfrac{i}{2}\bar\Theta^{\pm}\partial_{\bar z}. \tag{4.2.2}$$

Endliche, "superholomorphe" Koordinatentransformationen haben im $N = 2$ Superraum folgende Entwicklung

$$\begin{aligned} \tilde\Theta^{\pm} &= f^{\pm}(z) + \Theta^{\pm} f(z) + \Theta^{\mp} f^{\pm\pm}(z) + \Theta^{\pm}\Theta^{\mp} g^{\pm}(z), \\ \tilde z &= h(z) + \Theta^+ h^-(z) + \Theta^- h^+(z) + \Theta^+\Theta^- F(z), \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

für holomorphe Komponentenfunktionen. Eine *superkonforme* Koordinatentransformation ist dann durch die Bedingung

$$D_{\pm}\tilde z = \tfrac{i}{2}(\tilde\Theta^- D_{\pm}\tilde\Theta^+ + \tilde\Theta^+ D_{\pm}\tilde\Theta^-) \tag{4.2.4}$$

definiert. Unter dieser Nebenbedingung transformieren die Super-Ableitungen mit

$$D_{\pm} = (D_{\pm}\tilde\Theta^+)\tilde D_+ + (D_{\pm}\tilde\Theta^-)\tilde D_-. \tag{4.2.5}$$

Die Lösung der Bedingung (4.2.4) läßt sich als Entwicklung in den Komponentenfunktionen $f^{\pm}, h$ aus (4.2.3) und einem zusätzlich eingeführten $U(1)$-Parameter α angeben.

$$\begin{aligned} \tilde\Theta^{\pm} &= f^{\pm} + \Theta^{\pm}\sqrt{\partial_z h}\, e^{\mp i\alpha} + \tfrac{i}{2}\Theta^{\pm}\Theta^{\mp}\partial_z f^{\pm}, \\ \tilde z &= h + \tfrac{i}{2}(\Theta^+ f^- \sqrt{\partial_z h}\, e^{-i\alpha} + \Theta^- f^+ \sqrt{\partial_z h}\, e^{+i\alpha}) + \tfrac{1}{2}\Theta^+\Theta^-\partial_z(f^- f^+), \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

oder (mit $f^{\pm} =: \sqrt{\partial_z h}\,\epsilon^{\pm}$)

$$\begin{aligned} \tilde\Theta^{\pm} &= \sqrt{\partial_z h}[\epsilon^{\pm} + \Theta^{\pm} e^{\mp i\alpha} + \tfrac{i}{2}\Theta^{\pm}\Theta^{\mp}(\partial_z\epsilon^{\pm} + \epsilon^{\pm}\partial_z \log(\partial_z h))], \\ \tilde z &= h + \tfrac{i}{2}\partial_z h(\Theta^+\epsilon^- e^{-i\alpha} + \Theta^-\epsilon^+ e^{+i\alpha}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Theta^+\Theta^-\partial_z h[\partial_z(\epsilon^-\epsilon^+) + \epsilon^-\epsilon^+\partial_z \log(\partial_z h)]. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Damit sind alle Begriffe für die Definition einer Super-Riemannfläche eingeführt.

Definition: Eine Super-Riemannfläche ist ein Atlas von Super-Koordinatenumgebungen $\{U_\alpha(z_\alpha, \Theta^A_\alpha)\}$ mit superkonformen Übergangsfunktionen

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta, \Theta^B_\beta), \qquad \Theta^A_\alpha = f^A_{\alpha\beta}(z_\beta, \Theta^B_\beta), \tag{4.2.8}$$

wobei der Index A die Anzahl der Supersymmetrien durchläuft.

Den Spezialfall einer *split* Super-Riemannfläche erhält man, wenn die Komponentenfunktion $\epsilon^\pm$ in (4.2.7) Null gesetzt wird. Die verbleibende Transformation

$$\tilde\Theta^\pm = \sqrt{\partial_z h(z)}\, e^{\mp i\alpha}\Theta^\pm, \qquad \tilde z = h(z) \tag{4.2.9}$$

entspricht der holomorphen Koordinatentransformation eines Spinbündels mit zusätzlicher $U(1)$, für das die Basismannigfaltigkeit durch die "normale" Riemannfläche mit Koordinate z und die Faser durch die Spinoren $\Theta^\pm$ gegeben ist.
Für diesen Spezialfall einer Super-Riemannfläche ist alles wohldefiniert. Den allgemeinen Fall für nicht-verschwindendes $\epsilon^\pm$ werden wir nur als "infinitesimale" Abweichung von der split Super-Riemannfläche definieren können. Das heißt, höhere Ordnungen in $\epsilon^\pm$ werden vernachlässigt.
Tensoren bzw. Superfelder $\Phi(z, \Theta^\pm)$ mit superkonformem Gewicht (h^+, h^-) transformieren unter den $N = 2$ superkonformen Transformationen mit

$$\Phi(z, \Theta^\pm) = \tilde\Phi(\tilde z, \tilde\Theta^\pm)(D_+\tilde\Theta^+)^{2h^+}(D_+\tilde\Theta^+)^{2h^-}. \tag{4.2.10}$$

Das $N = 2$ Superfeld hat dabei folgende Entwicklung in seine Komponentenfelder:

$$\Phi(z, \Theta^\pm) = \phi(z) + \Theta^+\Psi^-(z) + \Theta^-\Psi^+(z) + \Theta^+\Theta^- L(z). \tag{4.2.11}$$

Für infinitesimale Transformationen mit $h(z) = z + \Delta(z)$ mit $\Delta \ll 1$ und auch $\alpha \ll 1$ sowie "$\epsilon^\pm \ll 1$" ergibt sich in erster Ordnung

$$\begin{aligned}
\delta\Theta^\pm &= \epsilon^\pm + \tfrac{1}{2}\partial_z\Delta\Theta^\pm \mp i\alpha\Theta^\pm + \Theta^\pm\Theta^\mp\partial_z\epsilon^\pm,\\
\delta z &= \Delta + \tfrac{i}{2}(\Theta^+\epsilon^- + \Theta^-\epsilon^+),\\
\delta\phi &= \Delta\partial_z\phi + (h^+ + h^-)\partial_z\Delta\phi + \epsilon^+\Psi^- + \epsilon^-\Psi^+ - 2i(h^+ - h^-)\alpha\phi,\\
\delta\Psi^\pm &= \Delta\partial_z\Psi^\pm + (h^+ + h^-)\partial_z\Delta\Psi^\pm - 2i(h^+ - h^- \mp \tfrac{1}{4})\alpha\Psi^\pm\\
&\quad + \tfrac{i}{2}\epsilon^\pm\partial_z\phi + 2ih^\pm\partial_z\epsilon^\pm\phi \mp \epsilon^\pm L,\\
\delta L &= \Delta\partial_z L + (h^+ + h^- + 1)\partial_z L - 2i(h^+ - h^-)\alpha L - i(h^+ - h^-)\partial_z^2\Delta\phi\\
&\quad - (h^+ + h^-)\phi\partial_z\alpha + \tfrac{i}{2}(\epsilon^+\partial_z\Psi^- - \epsilon^-\partial_z\Psi^+)\\
&\quad + 2i(\tfrac{1}{4} - \varepsilon h^+)\partial_z\epsilon^+\Psi^- - 2i(\tfrac{1}{4} - \varepsilon h^-)\partial_z\epsilon^-\Psi^+,
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

mit $\varepsilon = +1$ für bosonisches Φ und $\varepsilon = -1$ für fermionisches Φ. Definiert man sich z.B. das Superfeld $Y^{\pm\mu} = Z^{\pm\mu} + \Theta^\mp\Psi^{\pm\mu}$, so erhält man aus (4.2.12) für geeignete Reskalierungen von $\Delta, \epsilon^\pm$ und α die bekannten superkonformen, bzw. nach Identifikation der Transformationsparameter mit den Geistern, BRS-Transformationen.
Um den Modulraum der $N = 2$ Super-Riemannflächen zu definieren, wird der gesamte Raum der $N = 2$ Super-Riemannflächen durch die Gruppe der superkonformen Transformationen dividiert. Der $N = 2$ Modulraum besteht also aus den Äquivalenzklassen der Super-Riemannflächen, dessen Dimension mit Hilfe des Indextheorems bestimmt wurde.

Gravitino und Bildwechsel-Operatoren

Eine Möglichkeit, die fermionischen Moduli zu beschreiben, ist die quasi-superkonforme Transformation. Zwei, in den fermionischen Moduli infinitesimal benachbarte Äquivalenzklassen lassen sich so formal durch eine infintesimale, quasi-superkonforme "Koordinatentransformation" verknüpfen. Die für eine solche quasi-superkonforme Transformation nötigen Parameter $\epsilon_q^\pm$ sind dann aber als Felder auf der Super-Riemannfläche nicht mehr einwertig, sondern mehrwertig. Die quasi-superkonforme Transformation hat dabei die gleiche Form wie die infinitesimale superkonforme Transformation (4.2.12). Der aus ihr hervorgehende Atlas und somit auch die Super-Riemannfläche sind aber inäquivalent zur ursprünglichen Struktur.
Die Parameter $\epsilon_q^\pm$ lassen sich nach einer Basis des fermionischen Modulraumes in den Koordinaten $\zeta^{\pm j}$ linear entwickeln. Da die quasi-superkonformen Transformationen nur infinitesimal sind, ist der so definierte fermionische Modulraum mit dem fermionischen Tangentialraum an den Modulraum identisch. Da das Gravitino $\chi^\pm$ von diesen Moduli abhängt, läßt es sich in gleicher Weise nach den $\zeta^{\pm j}$ entwickeln wie die durch $\epsilon_q^\pm$ beschriebene Transformation $\delta\chi^\pm$. Die Entwicklung von $\delta\chi^\pm$ und $\chi^\pm$ ist also in diesem Sinne identisch.
Es ist möglich für die fermionischen Moduli einen diskreten Träger zu wählen, so daß die Moduli nur aus δ-Funktionen bestehen [16][15].

$$\delta\chi^\pm_{\bar z\uparrow} = \chi^\pm_{\bar z\uparrow} = \sum_{j=1}^{2g-2\mp c_1}\zeta^{\pm j}_{\bar z\uparrow}\delta^2(z - z_j^\pm), \qquad \text{das heißt}, \quad \nu^{\pm j} = \delta^2(z - z_j^\pm). \tag{4.2.13}$$

Die fermionischen Moduli in (3.2.10), die in der Wirkung aufgrund des Gravitinos und in den δ-Funktionen aufgrund der Antigeist-Nullmoden auftauchen, sind somit gleich.
Wählt man die Trägerpunkte für $\chi^+_{\bar z\uparrow}$ und $\chi^-_{\bar z\uparrow}$ verschieden, so verschwindet auch der in $\chi^\pm_{\bar z\uparrow}$ quadratische Term der Geist-Wirkung.
Das Gravitino $\chi^\pm$ koppelt in der Wirkung an die geisterweiterten Symmetrieströme $\hat G^\mp$, so daß die Ausintegration der $\zeta^{\pm j}_{\bar z\uparrow}$ Einsetzungen der $G^\pm$ im verbleibenden Pfadintegral

liefert.

$$\mathcal{Z}_{hol} = \int d^{3g-3}t d^g C[dZ][d\Psi][dcdb][d\gamma d\beta][d\tilde{c}d\tilde{b}] \prod_{i=1}^{3g-3} \langle \mu_i | b \rangle \prod_{k=1}^{g} \left\langle \omega_k | \tilde{b} \right\rangle$$
$$\prod_{j=1}^{2g-2-c_1} \delta(\beta^-(z_j^+)) \hat{G}^-(z_j^+) \prod_{j=1}^{2g-2+c_1} \delta(\beta^+(z_j^-)) \hat{G}^+(z_j^-)$$
$$e^{-S[t,C,Z,\Psi,c,b,\gamma^\pm,\beta^\mp,\tilde{c},\tilde{b}]} \tag{4.2.14}$$

Die im Pfadintegral auftretende Kombination $\delta(\beta^\mp(z))G^\mp(z)$ ist nach Normalordnung identisch mit dem Bildwechsel-Operator $X^\mp(z)$.

$$\begin{aligned} X^\pm(z) &= \{Q_{BRS}, \xi^\pm(z)\} = \{Q_{BRS}, H(\beta^\pm(z))\} \\ &= \delta(\beta^\pm(z))\{Q_{BRS}, \beta^\pm(z)\} = \delta(\beta^\pm(z))\hat{G}^\pm(z). \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Die Funktion H ist dabei die Heaviside-Stufenfunktion, deren Ableitung die δ-Funktion ergibt. Es wurden dabei die formalen Identifikationen

$$\xi^\pm = H(\beta^\pm), \qquad e^{\varphi^\mp} = \delta(\beta^\pm) \tag{4.2.16}$$

aus [16] benutzt.

3. Der U(1)-Modulraum

Dieser Abschnitt wird sich detailliert mit der $U(1)$-Konnektion beschäftigen, dem im Vergleich zum $N = 1$ String wirklich neuen Beitrag zu Pfadintegral und Amplituden. Zunächst wenden wir uns der Struktur des $U(1)$-Modulraumes für eine Riemannfläche ohne Punktierungen (kompakte Riemannflächen) zu. Die Verallgemeinerung auf Riemannflächen mit Punktierungen ergibt sich dann sehr natürlich durch den Übergang von holomorphen zu meromorphen Differentialen. Die Eigenschaften der meromorphen Differentiale werden in Kapitel VII untersucht.

Der U(1)-Modulraum des trivialen Bündels

Die im Indextheorem auftretenden, wesentlichen Größen zur Bestimmung der $U(1)$-Moduli sind die Chernzahl c_1 und der Raum $\ker(D_{\bar{z}}^{n\dagger}) = \ker(D_z^{n-1})$ für Gewicht $n = 0$. Tatsächlich definiert dieser Kern auch den $U(1)$-Teichmüller-Raum, eine Überlagerung des Modulraumes, vollständig. Die Bedingung $D_z^{-1}\omega = 0$ für die $U(1)$-Moduli ω von $A_{\bar{z}}$ mit $\omega \in \ker(D_z^{-1})$ definiert den Raum der antiholomorphen 1-Formen, bzw. holomorphen 1-Formen für A_z. Der Teichmüller-Raum der reellen Konnektion A wird somit durch die reellen Linearkombinationen der holomorphen, bzw. antiholomorphen 1-Formen, also die harmonischen 1-Formen aufgespannt. Um den $U(1)$-Modulraum zu konstruieren, werden wir die Struktur der $U(1)_{A,V}$-Eichtransformationen allerdings etwas detaillierter untersuchen müssen.

U(1)-Prinzipalbündel sind zunächst einmal topologisch durch eine ganze Zahl, die Chernzahl c_1 klassifiziert, die sich als Integral der ersten Chernklasse über die Riemannfläche $\mathcal{M}$

$$c_1 = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}} F, \qquad F = dA \quad \text{lokal} \tag{4.3.1}$$

ergibt. Der Raum der $U(1)$-Konnektionen ist ein affiner Raum, der es ermöglicht, ein festes Hintergrundfeld A_{c_1} mit gegebener Chernzahl c_1 abzuspalten und nur die "Fluktuationen" mit verschwindender Chernzahl zu betrachten. Die Wahl der Konnektion A_{c_1} ist dabei beliebig, da die Differenz zweier Konnektionen mit gleicher Chernzahl wieder trivial ist.

$$\begin{aligned} &A = A_{c_1} + A_0, \\ &c_1 = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}} F_{c_1}, \qquad 0 = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}} F_0. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Es reicht somit aus, sich nur auf die Struktur der $U(1)$-Moduli mit Chernzahl 0 zu beschränken.

Ein $U(1)$-Bündel mit Chernzahl 0 ist ein sogenanntes triviales Bündel, das heißt, alle Konnektionen können als global definierte 1-Formen gewählt werden. Es bietet sich daher an, die Konnektionen des trivialen Bündels nach einem Theorem von Hodge in exakte, koexakte und harmonische 1-Formen zu zerlegen.

$$A_0 = d\lambda + *d\phi + h. \tag{4.3.3}$$

Die $U(1)$-Konnektion A des $N = 2$ Strings transformiert unter der $U_V(1)$

$$A' = g^{-1}(A + id)g = A + d\alpha, \tag{4.3.4}$$

(für $g = e^{-i\alpha}$) also wie eine $U_V(1)$-Konnektion, aber A transformiert auch unter der $U_A(1)$

$$A' = A + i * d\hat{\alpha}. \tag{4.3.5}$$

Das heißt, $*A$ transformiert wieder wie eine $U_V(1)$-Konnektion. Damit läßt sich für die in (4.3.3) zerlegte Konnektion der exakte Anteil via $U_V(1)$ und der koexakte via $U_A(1)$ wegeichen, übrig bleibt nur der harmonische Anteil.

Eine allgemeine Linearkombination aus den $2g$ harmonischen Basisdifferentialen (siehe Anhang B) hat die Form

$$A_0 = h = 2\pi A^i \alpha_i + 2\pi B^i \beta_i, \quad \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^g. \tag{4.3.6}$$

Aber auch im harmonischen Anteil stecken noch Eichfreiheiten, die "großen" $U_V(1)$-Eichtransformationen mit mehrwertigem Parameter α, aber einwertigem Gruppenelement g. Diese Transformationen haben folgende Form:

$$g = \exp\{2\pi i \int_p^z (\vec{m} \cdot \vec{\alpha} + \vec{n} \cdot \vec{\beta})\} \tag{4.3.7}$$

mit $\vec{m}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^g$. Den Ursprung dieser Transformationen werden wir später noch im Zusammenhang mit der Hintergrund-Konnektion A_{c_1} behandeln.
Dividiert man diese Transformationen ebenfalls aus, so gelangt man vom Teichmüller- zum Modulraum des trivialen $U(1)$-Bündels, einem reell $2g$-dimensionalen Torus.

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\pi A^i \alpha_i + 2\pi B^i \beta_i, \quad \vec{A}, \vec{B} \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^g \\ &= 2\pi(B - \bar{\tau}A)(\tau - \bar{\tau})^{-1}\omega - 2\pi(B - \tau A)(\tau - \bar{\tau})^{-1}\bar{\omega} \\ &=: i\pi\bar{C}(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\omega - i\pi C(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\bar{\omega} \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Die komplexe Matrix τ_{ij} ist die Periodenmatrix der holomorphen Differentiale ω_i, (siehe Anhang B). Die Vektor-Indizes der Moduli und holomorphen 1-Formen werden im folgenden unterdrückt. Es beibt nur noch, möglichst geeignete Ausdrücke für das nicht-triviale Hintergrundfeld A_{c_1} der $U(1)$-Instantonen zu finden.

4. Der $U(1)$-Hintergrund

Der $N = 2$ String besitzt eine Vielzahl von lokalen Symmetrien, das heißt, Symmetrie-Transformationen mit $z, \bar{z}$-abhängigen Parametern. Eine nicht-triviale Bündelstruktur läßt sich allerdings nur für die $U_V(1)$ und die Diffeomorphismen (also für die Symmetrien, für die auch Konnektionen eingeführt wurden) konstruieren, deren topologische Invarianten dann die Chernzahl c_1 und der Genus g sind.

Der Krümmungsskalar transformiert unter Weyl-Transformationen σ und die $U_V(1)$-Feldstärke transformiert unter $U_A(1)$-Transformationen mit einer totalen Ableitung

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} + \Delta\sigma, \qquad F' = F + \Delta\hat{\alpha},$$

so daß die integrierten Größen c_1, g wohldefiniert sind, solange Weyl- und $U_A(1)$-Transformationen global definierte Parameter haben, das heißt triviale Bündel sind.

Für eine nicht-verschwindende Chernzahl ist es nicht möglich, eine global definierte 1-Form als Konnektion A anzugeben. Eine konkrete Darstellung als 1-Form gibt es für

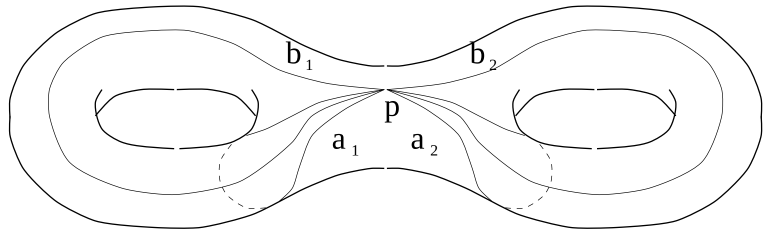

Abbildung 1: Genus 2 Riemannfläche.

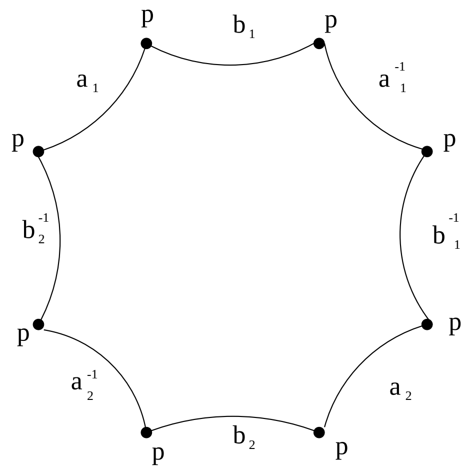

Abbildung 2: Aufgeschnittene Genus 2 Riemannfläche.

A nur innerhalb einer Koordinatenumgebung. Die 1-Formen verschiedener Koordinaten-Umgebungen müssen im Schnitt der Umgebungen durch eine $U_V(1)$-Transformation ineinander übergehen. Hierbei müssen die Kozykel-Bedingungen beachtet werden. Nicht-triviale Twists des Bündels über einer kompakten Riemannfläche können nur entlang der Homologiebasis a_i, b_i entstehen.
Dazu ist es sinnvoll, die Riemannfläche entlang der Homologiebasis (ausgehend von einem gemeinsamen Basispunkt p) aufzuschneiden (Abb.1). Man erhält ein einfach zusammenhängendes Gebiet (Abb.2). Hierbei sind die Kanten a_i, a_i^{-1} bzw b_i, b_i^{-1} zu identifizieren, um wieder die kompakte Riemannfläche zu erhalten. Die Konstruktion eines $U_V(1)$-Bündels erfordert nun die Angabe von Übergangsfunktionen auf den Kanten der aufgeschnittenen Fläche. Wählt man in jeder Koordinatenumgebung die Lorentz-Eichung

für die U(1)-Konnektion
$$\partial_z A_{\bar z} + \partial_{\bar z} A_z = 0 = d * A, \tag{4.4.1}$$
so bleibt als Restsymmetrie eine U(1) mit harmonischem Transformationsparameter α.
$$\begin{aligned}&\partial_z\partial_{\bar z}\alpha = 0,\\ &\alpha(z,\bar z) = \alpha(z) + \bar\alpha(\bar z).\end{aligned} \tag{4.4.2}$$
Eine endliche $U(1)$-Transformation hat die Form
$$\begin{aligned}A' &= g^{-1}(A+id)g = A + d\Lambda,\\ g &= \exp\{-i\Lambda\}, \quad \partial_z\partial_{\bar z}\Lambda = 0.\end{aligned} \tag{4.4.3}$$
Die möglichen Parameter Λ lassen sich wieder aus den harmonischen 1-Formen α_i, β_i konstruieren. Als zughörige Übergangsfunktionen g_{a_i}, g_{b_i} auf den Zykeln a_i, b_i ergeben sich
$$\begin{aligned}g_{a_i} &= \exp\{-2\pi i \int_p^z \sum_{j=1}^g (\alpha_j u^a_{ji} + \beta_j v^a_{ji})\},\\ g_{b_i} &= \exp\{-2\pi i \int_p^z \sum_{j=1}^g (\alpha_j u^b_{ij} + \beta_j v^b_{ij})\}.\end{aligned} \tag{4.4.4}$$
Versucht man, eine Transformation (4.4.4) auf die gesamte Riemannfläche fortzusetzen und verlangt Einwertigkeit auf der gesamten Riemannfläche, so werden alle Koeffizienten auf $\mathbb{Z}$ eingeschränkt. Man erhält somit die global definierte Eichtransformation (4.3.7). Eine besonders einfache Form einer Feldstärke mit Chernzahl c_1 ist
$$F_{c_1} = -\tfrac{\pi i c_1}{g}\omega(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\bar\omega. \tag{4.4.5}$$
Eine zugehörige (mehrwertige) Konnektion lautet
$$A_{c_1} = \tfrac{\pi i c_1}{2g}[\omega(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\int_p^z \bar\omega - \bar\omega(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\int_p^z \omega]. \tag{4.4.6}$$
Betrachtet man die Monodromien dieser Konnektion auf der Homologiebasis a_i, b_i, so ergibt sich
$$\begin{aligned}A_{c_1}(z+a_k) - A_{c_1}(z) &= \tfrac{\pi i c_1}{2g}(\omega_i + \bar\omega_i)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}_{ik} = i g^{-1}_{b_k} d g_{b_k},\\ A_{c_1}(z+b_k) - A_{c_1}(z) &= \tfrac{\pi i c_1}{2g}(\omega_i(\mathrm{Im}\tau)^{-1}_{ij}\bar\tau_{jk} - \bar\omega_i(\mathrm{Im}\tau)^{-1}_{ij}\tau_{jk}) = i g^{-1}_{a_k} d g_{a_k}.\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Der Ausdruck $z + a_k, b_k$ meint dabei die Verschiebung von z entlang eines Zykels a_k, b_k. Diese Mehrwertigkeiten lassen sich allerdings durch $U(1)$-Transformationen mit
$$\begin{aligned}g_{b_k} &= \exp[\tfrac{\pi c_1}{2g} e_k (\mathrm{Im}\tau)^{-1}(\int_p^z \omega - \int_p^z \bar\omega)],\\ g_{a_k} &= \exp[\tfrac{\pi c_1}{2g} e_k (\bar\tau(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\int_p^z \omega - \tau(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\int_p^z \bar\omega)],\\ e_k &= (0,..,0,1,0,..,0) \quad \text{k-ter Einheitsvektor des } \mathbb{R}^g\end{aligned} \tag{4.4.8}$$
aufheben, das heißt, die Konnektion A_{c_1} ist auf der Riemannfläche wohldefiniert. Die Übergangsfunktionen g sind auf dem Rand der aufgeschnittenen Riemannfläche definiert und dort auch einwertig für ein $c_1 \in \mathbb{Z}$. Die Feldstärke ist in diesem Fall "gleichmäßig" über die Fläche verteilt.
Eine andere, einfache Realisierung eines nicht-trivialen Hintergrundes ist eine $U(1)$-Feldstärke in Form einer δ-Funktion.

δ-Funktions-$U(1)$-Feldstärke

Für die Konstruktion einer δ-artig verteilten Feldstärke werden die holomorphen Differentiale nicht mehr ausreichen. Die Konnektion wird einfache Pole haben müssen, die in der Feldstärke $F = dA$ eine δ-Singularität erzeugen. Die Konnektion muß also in mindestens einer Koordinatenumgebung durch meromorphe Differentiale beschrieben werden. Meromorphe Differentiale m haben die Eigenschaft, daß die Summe ihrer Residuen verschwindet [35](vgl. Kapitel VII).
$$\sum_{P\in\mathcal{M}} \mathrm{res}_P(m) = 0, \tag{4.4.9}$$
das heißt, mit einer globalen meromorphen 1-Form wird in der Summe kein Pol zu erzeugen sein. Ein einfacher Pol in der Konnektion produziert auf Grund der Identität
$$\partial_{\bar z}\frac{1}{z} = \partial_z \frac{1}{\bar z} = 2\pi\delta^2(z) \tag{4.4.10}$$
eine δ-Funktion in der Feldstärke. Mit der Summe der Residuen der Konnektion verschwindet somit auch das Integral über die Feldstärke und damit die Chernzahl. Dies war zu erwarten, weil in einem nicht-trivialen Bündel eine Konnektion nicht durch eine globale 1-Form beschrieben werden kann. Da Differentiale mit beliebiger, endlicher Anzahl einfacher Pole aus meromorphen Differentialen mit nur zwei einfachen Polen konstruiert werden können, ist es sinnvoll, die normierten meromorphen 1-Formen ω_{PQ}

einzuführen.

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_P(\omega_{PQ}) &= -\mathrm{res}_Q(\omega_{PQ}) = 1, \\ \int_{a_k} \omega_{PQ} &= 0 \quad k = 1..g. \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Eine Konnektion, die die gewünschte δ-Singularität in der Feldstärke F erzeugt, kann aus einer holomorphen und der meromorphen 1-Form (4.4.11) zusammengesetzt werden: Sei $\mathcal{D}$ eine offene Scheibe auf $\mathcal{M}$ um den Punkt P und ω_{PQ} eine meromorphe 1-Form mit

$$P \in \mathcal{D}, \qquad Q \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{D}.$$

Sei $\mathcal{D}'$ eine abgeschlossene Scheibe um P im Inneren von $\mathcal{D}$ und die Konnektion A_0 definiert durch

$$\begin{aligned} A_{c_1} &= \tfrac{c_1}{2i}(\omega_{PQ} - \bar{\omega}_{PQ}) \qquad \text{auf} \quad \mathcal{D}, \\ A'_{c_1} &= (\omega + \bar{\omega}) \qquad \text{auf} \quad \mathcal{M} \backslash \mathcal{D}', \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

für eine holomorphe Form ω. Unterteilt man die oben definierten Koordinatenumgebungen feiner, so daß das Gebiet $(\mathcal{M}\backslash\mathcal{D}') \cap \mathcal{D}$ aus mehreren, einfach zusammenhängenden Stücken besteht, dann folgt aus dem Poincaré-Lemma wegen $\partial_{\bar{z}}(\frac{c_1}{2i}\omega_{PQ} - \omega) = 0$, daß die Differenz der beiden Konnektionen $(\frac{c_1}{2i}\omega_{PQ} - \omega + c.c.)$ exakt ist auf jedem dieser Stücke. Man kann also auf dem Überlapp $(\mathcal{M}\backslash\mathcal{D}') \cap \mathcal{D}$ die beiden Konnektionen A und A' durch eine $U_V(1)$-Transformation $d\Lambda = -ig^{-1}dg$ ineinander überführen.
Die zu prüfenden Kozykel-Bedingungen besagen dann, daß g, bzw. das Hintereinanderschalten der verschiedenen g's auf einem Weg um den Pol einwertig sein muß. Das heißt,

$$\oint_P d\Lambda = \oint_P (\tfrac{c_1}{2i}\omega_{PQ} - \omega + c.c.) = 2\pi c_1 \in 2\pi\mathbb{Z},$$

was für $c_1 \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist.
Die Feldstärke $F_{c_1} = (\partial_z A_{c_1\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_{c_1 z})dz \wedge d\bar{z}$ hat dann die Form

$$F_{c_1} = 2\pi i c_1 \delta^2(z - z_P) dz \wedge d\bar{z}. \tag{4.4.13}$$

Die gesamte Feldstärke ist also auf den Punkt P mit Koordinate z_P konzentriert mit

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{M}} F_{c_1 z\bar{z}} d^2 z \in \mathbb{Z}.$$

Diese Form der $U(1)$-Feldstärke wird bei einer Möglichkeit der Auswertung des Pfadintegrals für das Auftreten des SFO verantwortlich sein.

Kapitel V:
Bosonisierung

Um die Wirkungsweise der $U(1)$-Moduli in der String-Amplitude zu verstehen, wird sich die Bosonisierung der geladenen Felder $\Psi^{\pm\mu}, \beta^{\pm}, \gamma^{\mp}$ als sehr nützlich erweisen. In der bosonisierten Formulierung der Theorie läßt sich die Wirkungsweise der $U(1)$-Symmetrie an Hand expliziter Rechnungen studieren.

1. Bosonisierung ohne $U(1)$

Die Möglichkeit, fermionische Felder durch Bosonen auszudrücken, wurde ausführlich von Friedan, Martinec und Shenker [18] im Rahmen der konformen Feldtheorie behandelt. Betrachtet man z.B. ein Geist-System b, c mit konformen Gewichten $\lambda, 1-\lambda$ und der Wirkung

$$S = \tfrac{1}{\pi}\int d^2z (bD_{\bar{z}}^{\lambda-1}c + \text{c.c.}), \tag{5.1.1}$$

so ergeben sich für die holomorphen Felder die Operatorprodukte

$$c(z)b(w) \sim (z-w)^{-1}, \quad b(z)c(w) \sim \varepsilon(z-w)^{-1}, \tag{5.1.2}$$

wobei $\varepsilon = +1$ ist, wenn b, c antivertauschen und $\varepsilon = -1$, wenn b, c vertauschen. Die Virasoro-Algebra der konformen Transformationen wird durch den Energie-Impuls-Tensor

$$\begin{aligned} T &= -\lambda b\partial_z c + (1-\lambda)\partial_z bc, \\ T(z)T(w) &\sim -\varepsilon(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)(z-w)^{-4} + 2T(w)(z-w)^{-2} + \partial_w T(w)(z-w)^{-1} \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

erzeugt, mit zentraler Ladung $c = -2\varepsilon(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) = \varepsilon(1-3Q^2)$ für eine Hintergrund-Ladung $Q = \varepsilon(1-2\lambda)$. Zusätzlich läßt die Operatorprodukt-Algebra noch die Definition eines $U(1)$-Stromes $j_z = -bc$ zu, mit den Produkten

$$\begin{aligned} j_z(z)j_z(w) &\sim \varepsilon(z-w)^{-2}, \\ T(z)j_z(w) &\sim Q(z-w)^{-3} + j_z(w)(z-w)^{-2} + \partial_w j_z(w)(z-w)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Versucht man, den Energie-Impuls-Tensor T durch j auszudrücken,

$$T_j = \varepsilon(\tfrac{1}{2}j_z^2 - \tfrac{1}{2}Q\partial_z j_z) \tag{5.1.5}$$

so ergibt sich die gleiche Algebra, allerdings mit etwas anderer zentraler Ladung.

$$T_j(z)T_j(w) = \frac{1}{2}(1-\varepsilon Q^2)(z-w)^{-4} + 2T(w)(z-w)^{-2} + \partial_w T(w)(z-w)^{-1}. \tag{5.1.6}$$

Für den antivertauschenden Fall mit $\varepsilon = +1$ sind die zentralen Ladungen $c = \varepsilon(1-3Q^2)$ und $c_j = (1-3\varepsilon Q^2)$ identisch. Für den kommutierenden Fall, $\varepsilon = -1$, ergibt sich eine Differenz $c_j - c = 2$. Den holomorphen Strom j_z kann man wiederum auch durch

$$j_z = \varepsilon\partial_z\phi \quad \text{mit} \quad \phi(z)\phi(w) \sim \varepsilon\log(z-w) \tag{5.1.7}$$

beschreiben, wobei ϕ der holomorphe Anteil eines Bosons Φ ist. Identifiziert man weiterhin die Geister b, c mit

$$\begin{aligned} c(z) &= e^{\phi(z)}, \quad b(z) = e^{-\phi(z)}, \qquad ,\varepsilon = +1, \quad \text{(Fermionen)} \\ c(z) &= \eta(z)e^{\phi(z)}, \quad b(z) = e^{-\phi(z)}\partial\xi(z), \qquad ,\varepsilon = -1, \quad \text{(Bosonen)} \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

so reproduziert man auch die Operatorprodukte von b, c mit T und j_z. Die Hilfsfelder η und ξ sind im bosonischen Fall nötig, um die Differenz der zentralen Ladungen des ϕ-Systems und des bc-Systems $c_j - c = 2$ auszugleichen. Die fermionischen Hilfsfelder η, ξ mit konformen Gewichten $1, 0$ und $Q = -1$ haben das Operatorprodukt

$$\xi(z)\eta(w) \sim \frac{1}{z-w} \tag{5.1.9}$$

und können ebenfalls noch bosonisiert werden.

$$\eta = e^{-\chi}, \qquad \xi = e^{+\chi} \qquad \text{mit} \quad \chi(z)\chi(w) \sim \log(z-w). \tag{5.1.10}$$

Auf dem Level der konformen Feldtheorie sind also das b, c- und das Φ-,bzw. $\Phi\eta\xi$-System ununterscheidbar. Selbst eine Wirkung läßt sich für das Φ-System finden, die zu den entsprechenden Symmetrieströmen T_j, j_z führt.

$$S = -\tfrac{1}{2\pi}\int d^2z[\varepsilon\partial_z\Phi\partial_{\bar{z}}\Phi + \tfrac{1}{2}Q\sqrt{g}\mathcal{R}\Phi]. \tag{5.1.11}$$

Bei der Bosonisierung von Bosonen muß die Wirkung um das System der Hilfsfelder erweitert werden. In bosonisierter Form erhält man für die $\eta\xi$-Wirkung

$$S_{\eta\xi} = -\tfrac{1}{2\pi}\int d^2z[\partial_z\chi\partial_{\bar z}\chi - \tfrac{1}{2}\sqrt{g}\mathcal{R}\chi]. \qquad (5.1.12)$$

Diese Wirkungen beschreiben die holomorphe *und* die antiholomorphe Hälfte des bc-Systems. Das Operatorprodukt des vollen Bosons Φ liefert

$$\Phi(z)\Phi(w) \sim 2\varepsilon\log|z-w| = \varepsilon[\log(z-w)+\log(\bar z-\bar w)]. \qquad (5.1.13)$$

Doch auch auf Riemannflächen höheren Geschlechts läßt sich die Bosonisierung anwenden [19], allerdings sind dann auch globale Eigenschaften des Bosons auf der Riemannfläche von Bedeutung. Doch auch die bisher gemachten Beobachtungen lassen globale Eigenschaften der bosonisierten Wirkung (5.1.11) erkennen.
So läßt sich das Indextheorem in diesen Betrachtungen wiederfinden. Der Strom $j_z = -bc$ ist nicht holomorph, sondern entwickelt eine Anomalie

$$\partial_{\bar z}j_z = \varepsilon\partial_{\bar z}\partial_z\phi = \tfrac{1}{8}Q\sqrt{g}\mathcal{R}. \qquad (5.1.14)$$

In der nicht bosonisierten Formulierung läßt sich diese Anomalie mit Heatkernel-Methoden berechnen. Analog ergibt sich eine Anomalie für die antiholomorphe Stromkomponente $j_{\bar z}$. Diese Anomalie manifestiert sich im bosonisierten Formalismus einfach als Feldgleichung für Φ

$$\partial_{\bar z}\partial_z\Phi = \partial_{\bar z}\partial_z(\phi+\bar\phi) = \tfrac{1}{4}\varepsilon Q\sqrt{g}\mathcal{R}, \qquad (5.1.15)$$

die sich leicht an der bosonisierten Wirkung ablesen läßt. Die Stromanomalie (5.1.14) ist äquivalent zum Indextheorem für den Differentialoperator $D_{\bar z}^{\lambda-1}$ (vgl. (4.1.3))

$$\dim\ker(D_{\bar z}^{\lambda-1})^\dagger - \dim\ker(D_{\bar z}^{\lambda-1}) = Q(g-1), \qquad (5.1.16)$$

auf einem Geradenbündel über einer Riemannfläche vom Genus g. Die Wirkung (5.1.11) enthält somit globale Informationen über die Theorie.

Beweis:
Die Greensche Funktion $P(z,w) = \langle b(z)c(w)\rangle$ (nur holomorphe Hälfte) erfüllt definitionsgemäß die Gleichungen

$$\partial_{\bar z}P(z,w) = +2\varepsilon\pi\delta^2(z-w) - 2\varepsilon\pi\sum_{k=1}^{m}\nu_k^*(z)\nu_k(w)\rho^\lambda(z),$$
$$\partial_{\bar w}P(z,w) = -2\varepsilon\pi\delta^2(z-w) + 2\varepsilon\pi\sum_{k=1}^{n}\mu_k(z)\mu_k^*(w)\rho^{1-\lambda}(w), \qquad (5.1.17)$$

wobei μ,ν eine orthogonale Basis der Nullmoden von b,c bezüglich der Skalarprodukte

$$\langle\mu_i|\mu_j\rangle = \int d^2z\rho^{1-\lambda}\mu_i^*\mu_j = \delta_{ij},$$
$$\langle\nu_i|\nu_j\rangle = \int d^2z\rho^{\lambda}\nu_i^*\nu_j = \delta_{ij} \qquad (5.1.18)$$

bilden. Die δ-Funktion rührt vom "Kurzabstands"-Propagator $\varepsilon(z-w)^{-1}$ mit $\partial_{\bar z}(z)^{-1} = 2\pi\delta^2(z)$ her. Betrachtet man nun $\langle j_z\rangle = -\langle bc\rangle$ als Grenzfall von $P(z,w)$ für $z\to w$, so ergibt sich

$$\partial_{\bar z}\langle j_z(w)\rangle = \varepsilon\partial_{\bar z}\partial_z\phi = \lim_{z\leftarrow w}\varepsilon 2\pi[\sum_{k=1}^{m}\nu_k^*(z)\nu_k(w)\rho^\lambda(z) - \sum_{k=1}^{n}\mu_k(z)\mu_k^*(w)\rho^{1-\lambda}(w)],$$
$$\int d^2z\partial_{\bar z}\langle j_z\rangle = \varepsilon 2\pi[\sharp(b\text{−Nullmoden}) - \sharp(c\text{−Nullmoden})]$$
$$= -2\pi Q(g-1), \qquad (5.1.19)$$

wegen $\int\sqrt{g}\mathcal{R} = -8\pi(g-1)$. QED

Die naive Verallgemeinerung dieser Überlegungen für eine zusätzliche $U(1)$-Struktur ersetzt $Q\mathcal{R}$ durch die entsprechende verallgemeinerte Feldstärke $Q\mathcal{R}+qF$, damit die Bewegungsgleichung des Bosons das $U(1)$-erweiterte Indextheorem richtig wiedergibt. Dieser Ansatz ist jedoch nicht ganz richtig und ergibt nicht alle Eigenschaften der $U(1)$ im Pfadintegral, wie wir in Kapitel VI sehen werden. Der Term $(Q\mathcal{R}+qF)\Phi$ hat seinen Ursprung eigentlich in der Kopplung der jeweiligen Konnektionen an den Strom der Fermionen $j = -bc = \partial\Phi$. Erst wenn $\int A\partial\Phi$ partiell integriert wird, ergeben sich die entsprechenden Feldstärken. Dies setzt jedoch voraus, daß der Strom j als Differential wirklich exakt ist. Diese Eigenschaft wird durch das Auftreten mehrwertiger Solitonen jedoch nicht erfüllt. Wird trotzdem partiell integriert, erzeugt man nicht-wohldefinierte Beiträge zur Wirkung, und es kann im Fall der $U(1)$ auch Information verloren gehen.
Wir werden daher im folgenden Abschnitt einen etwas anderen Weg einschlagen und zunächst die Auswirkungen einer nicht partiell integrierten Kopplung von $\partial\Phi$ an die $U(1)$-Konnektion diskutieren.

2. Bosonisierung mit $U(1)$

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, wie sich U(1)-Transformationen auf den Bosonen der bosonisierten, geladenen Felder formulieren lassen und welche Form die $U(1)$-Kopplung in der bosonisierten Wirkung annimmt.
Wir betrachten zunächst nur die Materiefelder $\Psi_\downarrow^\pm$, $\Psi_\uparrow^\pm$ mit $Q=0$. Der Index μ wird unterdrückt.

Die Wirkung

$$S_\Psi = -\tfrac{1}{8\pi}\int d^2z\ \big(\ \Psi_\downarrow^-\partial_{\bar z}\Psi_\downarrow^+ + \Psi_\downarrow^+\partial_{\bar z}\Psi_\downarrow^- + \Psi_\uparrow^-\partial_z\Psi_\uparrow^+ + \Psi_\uparrow^+\partial_z\Psi_\uparrow^- \\ - 2iA_{\bar z}\Psi_\downarrow^+\Psi_\downarrow^- - 2iA_z\Psi_\uparrow^+\Psi_\uparrow^-\big) \qquad (5.2.1)$$

ist invariant unter der folgenden $U_V(1)$-Transformation:

$$A'_z = A_z + \partial_z\alpha, \qquad A'_{\bar z} = A_{\bar z} + \partial_{\bar z}\alpha \\ \Psi_\downarrow^{\pm\prime} = e^{\pm i\alpha}\Psi_\downarrow^\pm, \qquad \Psi_\uparrow^{\pm\prime} = e^{\pm i\alpha}\Psi_\uparrow^\pm. \qquad (5.2.2)$$

Diese Invarianz gilt offshell für beliebige, anholomorphe $\Psi^\pm$ und α. Bosonisiert man nun die Felder Ψ onshell, also für holomorphes $\Psi_\downarrow^\pm$ und antiholomorphes $\Psi_\uparrow^\pm$,

$$\Psi_\downarrow^\pm(z) = i\sqrt{2}e^{\pm\phi(z)}, \qquad \Psi_\uparrow^\pm(\bar z) = i\sqrt{2}e^{\mp\bar\phi(\bar z)}, \qquad (5.2.3)$$

mit $\phi(z)\phi(w) \sim \log(z-w)$, erhält man für den $U(1)$-Strom

$$\Psi_\downarrow^+\Psi_\downarrow^- = -2\partial_z\phi. \qquad (5.2.4)$$

Die holomorphen bzw. antiholomorphen Bosonen $\phi(z), \bar\phi(\bar z)$ genügen gemäß (5.2.2) folgendem Transformationsgesetz

$$\phi' = \phi + i\alpha, \qquad \bar\phi' = \bar\phi - i\alpha. \qquad (5.2.5)$$

Die bosonisierte Wirkung lautet

$$S_\Phi = -\tfrac{1}{2\pi}\int d^2z(\partial_{\bar z}\Phi\partial_z\Phi + iA_{\bar z}\partial_z\Phi - iA_z\partial_{\bar z}\Phi). \qquad (5.2.6)$$

Wie wir später sehen werden, ist eine Besonderheit des $N=2$ Strings, daß aufgrund des Materie- und Geistgehaltes die bosonisierte Wirkung in A quadratisch ergänzt werden kann.
Betrachten wir also gleich die Wirkung

$$S_\Phi = \tfrac{1}{2\pi}\int d^2z(\partial_{\bar z}\Phi + iA_{\bar z})(\partial_z\Phi - iA_z). \qquad (5.2.7)$$

Alle weiteren Folgerungen gelten dann allerdings nur speziell für den $N=2$ String.
Für eine $U(1)$-Transformation der Konnektion $A' = A + d\alpha$ folgt aus der Invarianz der Wirkung

$$\partial_z\Phi' = \partial_z\Phi + i\partial_z\alpha, \qquad \partial_{\bar z}\Phi' = \partial_{\bar z}\Phi - i\partial_{\bar z}\alpha. \qquad (5.2.8)$$

Das heißt, $d\Phi$ transformiert inhomogen, also wie die $U(1)$-Konnektion selbst oder richtiger gesagt, wie $*A$. Diese Transformationen des Bosons sind konsistent mit (5.2.5), da für die entsprechende Ableitung nur der holomorphe oder antiholomorphe Anteil von $\Phi = \phi + \bar\phi$ beiträgt. Die $U(1)$-Transformation ist zunächst nur für die Ableitungen des offshell-Bosons definierbar. Mehr ist im Moment auch nicht nötig. Ob und wie sich die Transformationen (5.2.5) konsistent auch auf den Bosonen direkt definieren lassen, ist erst nach Einführung der Solitonen zu beantworten.
Die bosonisierte Wirkung liefert die Bewegungsgleichung

$$\partial_{\bar z}\partial_z\Phi = -\tfrac{i}{2}(\partial_z A_{\bar z} - \partial_{\bar z}A_z) = -\tfrac{i}{2}F_{z\bar z}, \qquad (5.2.9)$$

die dem Indextheorem äquivalent sein muß. Es gilt

$$\left\langle\Psi_\downarrow^+(z)\Psi_\downarrow^-(w)\right\rangle = -2\left\langle e^{\phi(z)}e^{-\phi(w)}\right\rangle \to -2\partial_w\phi(w) \quad \text{für} \quad z\to w. \qquad (5.2.10)$$

Das heißt,

$$2\pi[\sharp(\Psi^+\text{–Nullmoden}) - \sharp(\Psi^-\text{–Nullmoden})] = -2\int d^2z\partial_{\bar z}\partial_z\Phi = 2\pi c_1, \qquad (5.2.11)$$

in Übereinstimmung mit dem $U(1)$-erweiterten Indextheorem ($Q=0$, wegen $\lambda = \frac{1}{2}$ für $\Psi^\pm$).

3. Solitonen in der bosonisierten Wirkung

Die aus der Bosonisierung stammenden Bosonen Φ sind kompakte Bosonen, die einen auf der Riemannfläche mehrwertigen Solitonanteil mit definierten Windungszahlen um die Homologiezykel a_i, b_i besitzen. Es ist sinnvoll diese Bosonen entsprechend in Φ_0 für den Solitonanteil und $\tilde\Phi$ für den einwertigen Anteil aufzuspalten.

$$\Phi = \Phi_0 + \tilde\Phi \qquad (5.3.1)$$

Eine spezielle Solitonenkonfiguration läßt sich explizit mit Hilfe der holomorphen 1-Formen ω angeben.

$$\Phi_0 = 2\pi i(m - n\bar\tau)(\tau-\bar\tau)^{-1}\int_{z_0}^{z}\omega - 2\pi i(m-n\tau)(\tau-\bar\tau)^{-1}\int_{\bar z_0}^{\bar z}\bar\omega \\ = \pi(m-n\bar\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\int_{z_0}^{z}\omega - \pi(m-n\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\int_{\bar z_0}^{\bar z}\bar\omega. \qquad (5.3.2)$$

Φ_0 ist rein imaginär, $n, m \in \mathbb{Z}^g$ sind die Windungszahlen um die a- bzw. b-Zykel,

$$\Phi_0(z+a_k) - \Phi_0(z) = 2\pi i n_k, \\ \Phi_0(z+b_k) - \Phi_0(z) = 2\pi i m_k, \qquad (5.3.3)$$

wobei der Ausdruck $z + a_k, b_k$ wieder die Verschiebung des Argumentes z entlang eines Homologiezykels meint. Φ_0 besteht aus der Summe eines holomorphen und antiholomorphen Teils und erfüllt somit die Gleichung

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \Phi_0 = 0. \tag{5.3.4}$$

Die Aufspaltung (5.3.1) ist aber nicht eindeutig, da das Soliton Φ_0 noch durch einwertige Anteile redefiniert werden kann. Dies läßt auch Möglichkeiten für eine Solitonkonfiguration zu, die nicht die Bewegungsgleichung erfüllt.
Das Differential $d\Phi_0$ ist eine Linearkombination der holomorphen 1-Formen und deshalb als Differential einer *mehrwertigen* Funktion nicht exakt. Das Differential $d\tilde{\Phi}$ hingegen ist exakt und kann daher, beispielsweise in der Wirkung, partiell integriert werden.
Es ist zudem besonders natürlich, die $U_V(1)$-Transformationen ganz auf Φ_0 auszuführen. Dies ist möglich, weil das Boson wie eine Konnektion inhomogen transformiert, also auch einen affinen Raum bildet. Die auf $d\Phi$ definierte $U(1)$-Transformation läßt sich für den Fall eines harmonischen Transformationsparameters α, also für Lorentz-geeichte $U(1)$-Konnektionen, auch für das nicht differenzierte Boson Φ konsistent konstruieren. Auf den Solitonen lassen sich diese Transformationen besonders einfach verstehen. Der harmonische Parameter läßt sich nach (4.4.2) in einen holomorphen und antiholomorphen Anteil zerlegen. Die $U(1)$-Transformation auf dem Soliton Φ_0 lautet dann

$$\Phi_0'(z, \bar{z}) = \Phi_0(z, \bar{z}) + i\alpha(z) - i\bar{\alpha}(\bar{z}). \tag{5.3.5}$$

Eine beliebige harmonische Transformation (4.4.4) führt somit zu kontinuierlichen, im holomorphen und antiholomorphen Anteil entgegengesetzten Verschiebungen der Windungszahlen.

$$\Phi_0'(z, \bar{z}) = \pi[(m+v)-(n+u)\bar{\tau}](\mathrm{Im}\tau)^{-1} \int_{z_0}^{z} \omega - \pi[(m-v)-(n-u)\tau](\mathrm{Im}\tau)^{-1} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \bar{\omega}. \tag{5.3.6}$$

Die “große” Transformation (4.3.7) bewirkt auf Φ_0 lediglich eine ganzzahlige Verschiebung der Windungszahlen.
Wird die Kopplung des Eichfeldes A an den einwertigen Teil $\tilde{\Phi}$ des Bosons partiell integriert, lassen sich einige interessante Eigenschaften der bosonisierten Wirkung erkennen.

$$\begin{aligned} S_\Phi &= \tfrac{1}{2\pi} \int d^2 z \,(\, \partial_{\bar{z}}(\Phi_0 + \tilde{\Phi}) + iA_{\bar{z}})(\partial_z(\Phi_0 + \tilde{\Phi}) - iA_z\,) \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int d^2 z \,[\, (\partial_{\bar{z}}\Phi_0 + iA_{\bar{z}})(\partial_z \Phi_0 - iA_z) \\ &\qquad - \tilde{\Phi}\partial_z(\partial_{\bar{z}}\Phi_0 + iA_{\bar{z}}) - \tilde{\Phi}\partial_{\bar{z}}(\partial_z\Phi_0 - iA_z) + \partial_{\bar{z}}\tilde{\Phi}\partial_z\tilde{\Phi}] \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int d^2 z \,[\, (\partial_{\bar{z}}\Phi_0 + iA_{\bar{z}})(\partial_z \Phi_0 - iA_z) \\ &\qquad - 2\tilde{\Phi}\partial_z\partial_{\bar{z}}\Phi_0 - i\tilde{\Phi}(\partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z) + \partial_{\bar{z}}\tilde{\Phi}\partial_z\tilde{\Phi}]. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Die Mischterme $\tilde{\Phi}\Phi_0$ und die $U(1)$-Kopplung an $\tilde{\Phi}$ verschwinden, wenn Φ_0 die Gleichung

$$\partial_z\partial_{\bar{z}}\Phi_0 = -\tfrac{i}{2}(\partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z) = -\tfrac{i}{2} F_{z\bar{z}} \tag{5.3.8}$$

erfüllt. Für harmonisches A_0 aus (4.3.8) und das Φ_0 in (5.3.2) ist das wegen $F = dA_0 = 0$ und (5.3.4) der Fall. Die bosonisierte Wirkung (5.3.7) vereinfacht sich zu

$$S_{A\Phi} = \tfrac{1}{2\pi} \int d^2 z[(\partial_{\bar{z}}\Phi_0 + iA_{0\bar{z}})(\partial_z\Phi_0 - iA_{0z}) + \partial_{\bar{z}}\tilde{\Phi}\partial_z\tilde{\Phi}]. \tag{5.3.9}$$

Den Fall für nicht-triviale Feldstärke werden wir im nächsten Abschnitt ausführlich behandeln.
Setzt man nun (4.3.8) und (5.3.2) in die Soliton-$U(1)$-Wirkung ein, so ergibt sich unter Verwendung der Integrationsregeln für holomorphe Differentiale in Anhang B

$$S_\Phi = \tfrac{\pi}{2}[m - B - \bar{\tau}(n - A)](\mathrm{Im}\tau)^{-1}[m + B - \tau(n + A)] - \tfrac{1}{2\pi}\int d^2 z \partial_{\bar{z}}\tilde{\Phi}\partial_z\tilde{\Phi}. \tag{5.3.10}$$

Das Eichfeld und das Soliton bilden also eigentlich nur *ein* Objekt. Die ganzzahligen (je nach Spinstruktur auch halbzahligen) Windungszahlen $m, n \in \mathbb{Z}^g$ kombinieren sich mit den kompakten Moduli $A, B \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^g$ zu kontinuierlichen Parametern in $\mathbb{R}^g$. Die Eichfreiheiten der “großen” Transformationen (4.3.7) sind sozusagen nur in den Solitonanteil des Bosons geschafft worden und zwar in Form von Windungszahlen des Solitons. Dieses Zusammenspiel ist insofern nicht verwunderlich, da auch für die Eichinvarianz nur Konnektion und kinetischer Term gemeinsam einen wohldefinierten, über die Mannigfaltigkeit integrierbaren Ausdruck bilden. Diese Betrachtungsweise wird sich auch für den Fall $c_1 \neq 0$ eines nicht-trivialen $U(1)$-Bündels als nützlich erweisen.

Solitonen und Chernzahl

Für ein $U(1)$-Bündel mit nicht-trivialer Chernzahl wird die $U(1)$-Feldstärke nicht mehr identisch verschwinden, so daß der Repräsentant Φ_0 aus (5.3.2) die Gleichung (5.3.8) nicht mehr erfüllen wird. Für die nicht-triviale Feldstärke F_{c_1} der Konnektion A_{c_1} aus (4.4.6) läßt sich leicht ein anderer Repräsentant Φ_s finden, der (5.3.8) löst.

$$\Phi_s = \frac{\pi c_1}{2g} \int_p^z \omega (\mathrm{Im}\tau)^{-1} \int_{\bar{p}}^{\bar{z}} \bar{\omega}. \tag{5.3.11}$$

Diese Lösung ist auf der Riemannfläche natürlich wieder mehrwertig. Auch $d\Phi_s$ weist noch eine Mehrwertigkeit auf, die von der Nicht-Trivialität des $U(1)$-Bündels herrührt. Die Bosonisierung in einem nicht-trivialen $U(1)$-Bündel erfordert wegen der nötigen nicht-trivialen Übergangsfunktionen des Bündels $U(1)$-Transformationen auf den Bosonen. $*d\Phi_s$ ist mit A_{c_1} aus (4.4.6) identisch und unterliegt auch den gleichen $U(1)$-Transformationen. Φ_s "lebt" in dem von A_{c_1} definierten, nicht-trivialen $U(1)$-Bündel. Setzt man diese "Hintergrund"-Lösung (5.3.11) von Φ in die Wirkung ein, so heben sich die Beiträge von Φ_s und A_{c_1} in der Wirkung weg.

$$\partial_{\bar{z}}\Phi_s - iA_{c_1\bar{z}} = \partial_z\Phi_s + iA_{c_1 z} = 0. \tag{5.3.12}$$

Φ_s hat also die Funktion einer quasi-$U(1)$-Transformation für die Konnektion $*A$. Eine Abhängigkeit von der Chernzahl tritt somit in der Wirkung nicht mehr auf!
Der restliche Anteil des Bosons $\Phi_0 + \tilde{\Phi}$ erfüllt dann allerdings nur das Indextheorem für Chernzahl $c_1 = 0$, da dieses Boson wegen der Abspaltung des nicht-trivialen Hintergrunds Φ_s nun in einem trivialen $U(1)$-Bündel lebt.
Konsequenterweise sollte dann auch die Anzahl der Bildwechsel-Operatoren nicht mehr von der Chernzahl abhängen. Folgt man der Bosonisierung zurück bis zur Eichfixierung, so ergibt sich aus der fest gewählten Hintergrundlösung, daß über Chernzahl-abhängige Nullmoden gar nicht integriert wird, sondern eben nur über Solitonen Φ_0 und einwertige $\tilde{\Phi}$. Diese Behandlung des Bosons Φ ist mit dem Verfahren bei der Pfadintegration über die $U(1)$-Konnektion völlig identisch. Das Pfadintegral wird nur über die "Fluktuationen" $\Phi_0 + \tilde{\Phi}$ des trivialen Bündels ausgeführt. Jede Konfiguration eines nicht-trivialen Bosons läßt sich als $\Phi_s + \Phi_0 + \tilde{\Phi}$ schreiben. Somit wären das Pfadintegral und auch die String-Amplituden von der Chernzahl c_1 unabhängig.
Eine andere Vorschrift, die Kopplung an die nicht-triviale $U(1)$-Konnetion A_{c_1} zu behandeln, ist, doch nur Solitonen Φ_0 wie in (5.3.2) zu erlauben, also keine spezielle Lösung Φ_s zu addieren und die Solitonen genau wie $\tilde{\Phi}$ trotz ihrer Mehrwertigkeit partiell zu integrieren. Wählt man für diese Verfahrensweise die δ-funktionsartige Feldstärke (4.4.13), so läßt sich die Kopplung auf einfache Art auswerten.

$$S_{\Phi F} = -\frac{i}{2\pi} \int d^2z F_{z\bar{z}}\Phi = c_1\Phi(z_D). \tag{5.3.13}$$

Dieser Anteil der Wirkung führt dann im Pfadintegral des $N = 2$ Strings zu einer Einsetzung des SFO mit spektralem Parameter $\Theta = -c_1 \in \mathbb{Z}$, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden [5]. Ein Problem dieser Methode ist, daß die mehrwertigen Solitonen Φ_0 an eine einwertige, eichinvariante Feldstärke F koppeln. Die Lagrangedichte wird durch den Term $F\Phi_0$ somit mehrwertig. Da die Wirkung im Pfadintegral jedoch nur als Exponent eingeht, macht sich diese Mehrwertigkeit für eine δ-förmige Feldstärke F nur als Phase bemerkbar. Für ganzzahlige Windungszahlen der Solitonen und einen ganzzahligen spektralen Parameter $\Theta = c_1$ reduziert sich auch dieses Problem. Die durch Mehrwertigkeit aufgenommene Phase ist die Identität. Wie schon in Kapitel II gesehen, enthält der Exponent des SFO des $N = 2$ Strings die Summe von vier Bosonen und somit auch vier Solitonen der Form (5.3.2).

$$\mathrm{SFO}(\Theta, z) = e^{\Theta(-\Phi^+ + \Phi^- + \varphi^+ - \varphi^-)(z)}.$$

Ein ganzzahliges $\Theta = c_1$ liefert also immer einen wohldefinierten SFO. Für die spezielle Kombination der SFO aus (2.2.22) ist sogar der spektrale Parameter beliebig, solange alle $\mathrm{SFO}(\theta_i, z_i)$ zugleich entlang eines Zykels verschoben werden. Die Windungszahl um einen Zykel wird dann im Exponenten mit $\sum_i \theta_i = 0$ multipliziert.
Eine weiterer, interessanter Aspekt dieser Methode ist die Ähnlichkeit der Wirkung mit den topologischen BF-Theorien. Im Rahmen dieser Theorien läßt sich eine Einsetzung des SFO im Pfadintegral als Änderung der Chernzahl auffassen, also als Topologiewechsel des $U(1)$-Bündels [17].

Der Grund ist einfach. Wird ein Operator der Form

$$\exp n\Phi(z), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

in die Zustandssumme unter dem Pfadintegral eingesetzt und enthält die Wirkung einen Term

$$S_{BF} = \frac{1}{2\pi} \int F\Phi \qquad \text{mit} \quad c_1 = \frac{1}{2\pi} \int F,$$

so läßt sich die Einsetzung des zusätzlichen Operators durch eine Redefinition der Feldstärke absorbieren.

$$e^{n\Phi(z)} e^{\frac{1}{2\pi}\int F\Phi} = e^{\frac{1}{2\pi}\int dx (F(x) + 2\pi n\delta(x-z))\Phi(x)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int F'}.$$

Die redefinierte Feldstärke F' gehört zu einem Bündel mit Chernzahl $c_1' = c_1 + n$.

Die Einsetzung des SFO sollte also aus einem Pfadintegral für Chernzahl 0 ein Pfadintegral mit Chernzahl c_1 machen. Die Anzahl der Bildwechsel-Operatoren wird durch den SFO jedoch nicht verändert.
Für beide Vorgehensweisen bei der Behandlung der Kopplung an die nicht triviale Konnektion A_{c_1} sollte die Kopplung an den trivialen Anteil A_0 weiterhin nicht partiell integriert und die Moduli-abhängige Soliton-Wirkung (5.3.10) benutzt werden. Eine partielle Integration auch bei A_0 würde die für die Berechnung und Interpretation der Korrelationsfunktionen so wichtige Abhängigkeit der Soliton-Wirkung von den Moduli A, B zerstören, da $F_0 = dA_0 = 0$ gilt. Auch daran läßt sich noch einmal die Nicht-Äquivalenz der Umformung durch partielle Integration verdeutlichen.

4. Bosonen und $U(1)$ beim N=2 String

Dieser Abschnitt wird sich mit den Besonderheiten der Bosonisierung beim $N=2$ String beschäftigen. Die Geiststruktur und die kritische Dimension des Strings spielen hierbei eine wichtige Rolle für das Wirken der $U(1)$-Symmetrie im Pfadintegral.
Es reicht dafür aus, nur die geladenen Felder zu bosonisieren, also die Fermionen $\Psi^{\pm\mu}_{\uparrow\downarrow}$ und die SUSY-Geister $\beta^{\pm}, \gamma^{\mp}$. Wie gesehen, werden dadurch immer holomorphe und antiholomorphe Komponenten gleichzeitig behandelt. Wir benutzen wieder $(1,1)$-Lichtkegelkoordinaten wie schon in Kapitel I. Zur Erinnerung noch einmal die Bosonisierungsvorschrift.

$$\begin{aligned}
&\Psi^{\pm+} = \Psi^{\pm 0} + \Psi^{\pm 1}, \qquad \Psi^{\pm-} = \Psi^{\pm 0} - \Psi^{\pm 1}, \\
&\Psi^{\pm+}(z)\Psi^{\mp-}(w) \sim \frac{-4}{z-w}, \\
&\Psi^{\pm+} = 2ie^{+\Phi^{\pm}}, \quad \Psi^{\mp-} = 2ie^{-\Phi^{\pm}} \qquad \text{mit} \\
&\Phi^{\pm}(z)\Phi^{\pm}(w) \sim +\log(z-w), \\
&\gamma^{\pm} = \eta^{\pm}e^{+\varphi^{\pm}}, \quad \beta^{\mp} = e^{-\varphi^{\pm}}\partial\xi^{\mp} \qquad \text{mit} \\
&\varphi^{\pm}(z)\varphi^{\pm}(w) \sim -\log(z-w), \quad \xi^{\mp}(z)\eta^{\pm}(w) \sim \frac{+1}{z-w}, \\
&\eta^{\pm} = e^{-\chi^{\pm}}, \qquad \xi^{\mp} = e^{\chi^{\pm}}, \\
&\chi^{\pm}(z)\chi^{\pm}(w) \sim \log(z-w).
\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen läßt sich nun die bosonisierte Form der Wirkung ermitteln

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{4\pi}\int d^2z\, \{ \frac{1}{2}(\Psi_{\downarrow}^{-+}\overleftrightarrow{D}_{\bar z}\Psi_{\downarrow}^{+}{}_{-} + \Psi_{\downarrow}^{-+}\overleftrightarrow{D}_{\bar z}\Psi_{\downarrow}^{+}{}_{-}) - \beta^{-}D_{\bar z}\gamma^{+} - 4\beta^{+}D_{\bar z}\gamma^{-} \\
&\qquad +4iA_{\bar z}[-\tfrac{1}{4}(\Psi_{\downarrow}^{-+}\Psi_{\downarrow}^{+-} + \Psi_{\downarrow}^{-+}\Psi_{\downarrow}^{+-}) + D_{\bar z}(c\tilde b) + \gamma^{+}\beta^{-} - \gamma^{-}\beta^{+}] \\
&\qquad +c.c.\} \\
&\sim -\tfrac{1}{2\pi}\int d^2z\, \{ \partial_z\Phi^{+}\partial_{\bar z}\Phi^{+} + \partial_z\Phi^{+}\partial_{\bar z}\Phi^{+} - \partial_z\varphi^{+}\partial_{\bar z}\varphi^{+} - \partial_z\varphi^{-}\partial_{\bar z}\varphi^{-} \\
&\qquad +\partial_z\chi^{+}\partial_{\bar z}\chi^{+} + \partial_z\chi^{-}\partial_{\bar z}\chi^{-} \\
&\qquad +iA_{\bar z}\partial_z[-\Phi^{+} + \Phi^{-} + \varphi^{+} - \varphi^{-}] - iA_z\partial_{\bar z}[-\Phi^{+} + \Phi^{-} + \varphi^{+} - \varphi^{-}] \\
&\qquad -iF_{z\bar z}c\tilde b + \sqrt{g}\mathcal{R}[\varphi^{+} + \varphi^{-} - \tfrac{1}{2}(\chi^{+} + \chi^{-})]\}.
\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Die Kopplung der Geist-Bosonen φ^{+}, φ^{-} und χ^{+}, χ^{-} an den Krümmungsskalar $\mathcal{R}$ ist, wie gesehen, wegen der nicht-verschwindenden Hintergrundladung der Geister notwendig

[18].
Der im $U(1)$-Strom auftretende Term $D_{\bar z}(c\tilde b)$ ist exakt und kann immer partiell integriert werden. Im Pfadintegral trägt dieser Term aber nicht bei, da der Antigeist $\tilde b$ den zur Absorbtion der auf jeder Riemannfläche auftretenden konstanten Nullmode nötigen Geist $\tilde c$ vernichtet. Es ist daher möglich, diesen Term in den folgenden Betrachtungen zu vernachlässigen.
Aufgrund der kritischen Dimension $D=2$ (komplex) und der beiden SUSY-Geister mit bosonischer Statistik, lassen sich, wie schon erwähnt, die kinetischen Terme $U(1)$-kovariant ergänzen.

$$\begin{aligned}
S_{U(1)} = -\tfrac{1}{2\pi}\int d^2z\, \{ &(\partial_z\Phi^{+} + iA_z)(\partial_{\bar z}\Phi^{+} - iA_{\bar z}) + (\partial_z\Phi^{-} - iA_z)(\partial_{\bar z}\Phi^{-} + iA_{\bar z}) \\
&- (\partial_z\varphi^{+} + iA_z)(\partial_{\bar z}\varphi^{+} - iA_{\bar z}) - (\partial_z\varphi^{-} - iA_z)(\partial_{\bar z}\varphi^{-} + iA_{\bar z}) \\
&+ \partial_z\chi^{+}\partial_{\bar z}\chi^{+} + \partial_z\chi^{-}\partial_{\bar z}\chi^{-} + \sqrt{g}\mathcal{R}[\varphi^{+} + \varphi^{-} - \tfrac{1}{2}(\chi^{+} + \chi^{-})]\}.
\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Die quadratischen Ergänzungen $A_zA_{\bar z}$ der Materie heben sich immer mit den gleichen Termen der Geister weg. Das relative Vorzeichen zwischen den kinetischen Termen der Bosonen Φ und φ rührt vom relativen Vorzeichen ihrer Propagatoren, bzw. Operatorprodukte (5.4.1) her.
Trennt man nun Φ in Φ_0 und $\tilde\Phi$ und integriert den einwertigen Anteil partiell, so erhält man

$$\begin{aligned}
S_{U(1)} = -\tfrac{1}{2\pi}\int d^2z\, \{ &(\partial_z\Phi_0^{+} + iA_z)(\partial_{\bar z}\Phi_0^{+} - iA_{\bar z}) + (\partial_z\Phi_0^{-} - iA_z)(\partial_{\bar z}\Phi_0^{-} + iA_{\bar z}) \\
&- (\partial_z\varphi_0^{+} + iA_z)(\partial_{\bar z}\varphi_0^{+} - iA_{\bar z}) - (\partial_z\varphi_0^{-} - iA_z)(\partial_{\bar z}\varphi_0^{-} + iA_{\bar z}) \\
&+ \partial_z\tilde\Phi^{+}\partial_{\bar z}\tilde\Phi^{+} + \partial_z\tilde\Phi^{+}\partial_{\bar z}\tilde\Phi^{+} - \partial_z\tilde\varphi^{+}\partial_{\bar z}\tilde\varphi^{+} - \partial_z\tilde\varphi^{-}\partial_{\bar z}\tilde\varphi^{-} \\
&- \tilde\Phi^{+}(2\partial_z\partial_{\bar z}\Phi_0^{+} - iF_{z\bar z})\} - \tilde\Phi^{-}(2\partial_z\partial_{\bar z}\Phi_0^{-} + iF_{z\bar z})\} \\
&+ \tilde\varphi^{+}(2\partial_z\partial_{\bar z}\varphi_0^{+} - iF_{z\bar z}) + \tilde\varphi^{-}(2\partial_z\partial_{\bar z}\varphi_0^{-} + iF_{z\bar z}) \\
&+ \partial_z\chi^{+}\partial_{\bar z}\chi^{+} + \partial_z\chi^{-}\partial_{\bar z}\chi^{-} + \sqrt{g}\mathcal{R}[\varphi^{+} + \varphi^{-} - \tfrac{1}{2}(\chi^{+} + \chi^{-})]\}.
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Die im vorigen Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse über das Wechselspiel von $U(1)$-Moduli und Solitonsektor lassen sich direkt übertragen. Die Windungszahlen der Solitonen $\Phi_0^{\pm}$ und $\varphi_0^{\pm}$ werden analog durch die Moduli der $U(1)$ verschoben. Die Bosonen $\chi^{\pm}$ der Hilfsfelder $\eta^{\pm}, \xi^{\mp}$ tragen auch einen Solitonensektor, der allerdings nicht an die $U(1)$ koppelt. Die Solitonen $\chi_0^{\pm}$ werden aber trotzdem bei der Definiton der Solitonen-Zustandssumme der $\varphi_0^{\pm}$ noch eine wichtige Rolle spielen.

Auch das über die nicht-triviale Chernzahl Gesagte trifft in gleicher Weise zu. Setzt man zusätzlich zu $\Phi_0 + \tilde{\Phi}$ die Lösung Φ_s der Bewegungsgleichung der Bosonen in die Wirkung ein, so heben sich wieder die Chernzahl-Abhängigkeiten weg. Integriert man die Kopplung der Solitonen an A_{c_1} hingegen auch noch partiell und benutzt den Bosonen-Hintergrund Φ_s nicht, erhält man eine Einsetzung des SFO für spektralen Parameter $\Theta = -c_1$. Die vollständige Wirkung hat dann die Form

$$\begin{aligned} S_{U(1)} = & \tfrac{\pi}{2}[M^+ + B - \bar{\tau}(N^+ + A)](\mathrm{Im}\tau)^{-1}[M^+ - B - \tau(N^+ - A)] \\ & + \tfrac{\pi}{2}[M^- - B - \bar{\tau}(N^- - A)](\mathrm{Im}\tau)^{-1}[M^- + B - \tau(N^- + A)] \\ & - \tfrac{\pi}{2}[m^+ + B - \bar{\tau}(n^+ + A)](\mathrm{Im}\tau)^{-1}[m^+ - B - \tau(n^+ - A)] \\ & - \tfrac{\pi}{2}[m^- - B - \bar{\tau}(n^- - A)](\mathrm{Im}\tau)^{-1}[m^- + B - \tau(n^- + A)] \\ & - c_1(-\Phi^+ + \Phi^- + \varphi^+ - \varphi^-)(z_P) \\ & - \tfrac{1}{2\pi}\int d^2z(\partial_z\tilde{\Phi}^+\partial_{\bar{z}}\tilde{\Phi}^+ + \partial_z\tilde{\Phi}^+\partial_{\bar{z}}\tilde{\Phi}^+ - \partial_z\tilde{\varphi}^+\partial_{\bar{z}}\tilde{\varphi}^+ - \partial_z\tilde{\varphi}^-\partial_{\bar{z}}\tilde{\varphi}^-) \\ & - \tfrac{1}{2\pi}\int d^2z(\partial_z\chi^+\partial_{\bar{z}}\chi^+ + \partial_z\chi^-\partial_{\bar{z}}\chi^- + \sqrt{g}\mathcal{R}[\varphi^+ + \varphi^- - \tfrac{1}{2}(\chi^+ + \chi^-)]). \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Die Windungszahlen $M^\pm$ und $m^\pm$ gehören dabei zu den Solitonen $\Phi_0^\pm$ und $\varphi_0^\pm$. Mit dieser Form der Wirkung für die geladenen Felder des $N = 2$ Strings wollen wir in den nächsten Kapiteln einige String-Amplituden berechnen. Die Verschiebung der Windungszahlen durch die $U(1)$-Moduli wird sich dabei eindeutig interpretieren lassen. Die Funktion des SFO ist da etwas problematischer.

Kapitel VI:

Korrelationsfunktionen

In diesem Kapitel werden wir die Korrelationsfunktionen auf höheren Riemannflächen für Vertexoperatoren der geladenen Felder in der bosonisierten Formulierung berechnen. Schließlich werden auch noch die elementaren Korrelatoren der ungeladenen Felder auf höheren Riemannflächen vorgestellt.
Der Einbau der $U(1)$-Moduli in die Berechnung der Korrelatoren der geladenen Bosonen erfolgt für den Solitonsektor in ganz natürlicher Weise. Zum besseren Verständnis der Techniken bei der Berechnung der Solitonkorrelatoren ist es sinnvoll, zunächst die Modifikationen durch die $U(1)$ im Solitonsektor wegzulassen.

1. Solitonkorrelator ohne U(1)

Die bosonisierte Zustandssumme für die bosonischen Geister $\beta^{\pm}, \gamma^{\mp}$ weist besondere Schwierigkeiten auf, die wir erst dann behandeln wollen, wenn der einfachere Fall der $\Psi^{\pm\mu}$ verstanden wurde. Betrachten wir daher zuerst wieder nur ein komplexes Fermion $\Psi^{\pm}$ mit $Q = 0$ und sein Boson Φ.
Die zu untersuchenden Vertexoperatoren sind im allgemeinen von der Form

$$V_q(z) = e^{q\Phi(z)}. \tag{6.1.1}$$

Es genügt zunächst, den Erwartungswert nur eines Vertexoperators zu betrachten. Für Solitonen ist also die folgende, diskrete Summe zu berechnen:

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}^g} e^{-S_{\Phi_0}+\Phi_0(z)}. \tag{6.1.2}$$

Es genügt, nur ganzzahlige Windungszahlen m, n zu betrachten, da nach Hinzunahme der $U(1)$-Moduli die Windungszahlen beliebig verschoben werden können. Für Hintergrund-Ladung $Q = 0$ und ohne $U(1)$-Moduli hat die Wirkung die Form

$$S_{\Phi_0} = \tfrac{1}{2}\pi(m+n\bar{\tau})(\mathrm{Im}\tau)^{-1}(m+\tau n). \tag{6.1.3}$$

Das Soliton mit Windungszahlen $n, m \in \mathbb{Z}^g$ aus (5.3.2) ist von der Form

$$\Phi_0 = \pi(m-n\bar{\tau})(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\int_p^z \omega - \pi(m-n\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\int_{\bar{p}}^{\bar{z}} \bar{\omega}.$$

Die Solitonsumme über $m, n \in \mathbb{Z}^g$ ist Gaußsch und konvergent. Zu ihrer Berechnung erweisen sich die Redefinitionen $n = (n' + 2\alpha_1)$ und $m = (m' + 2\alpha_2)$ mit $m', n' \in \mathbb{Z}^g$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in (\mathbb{Z}/2)^g$ als nützlich. Zudem wird für die Summe über m' die Poisson-Resummierung,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \tfrac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-ikt}, \tag{6.1.4}$$

angewendet [19]. Nach einer etwas längeren, aber im Prinzip einfachen Rechnung ergibt sich

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}^g} e^{-S_{\Phi_0}+\Phi_0(z)} = (\det\tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\tau)^{\frac{g}{2}} \sum_{\alpha\in\{0,\frac{1}{2}\}^{2g}} \exp(2\pi \mathrm{Im}z(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\mathrm{Im}z)\,|\Theta[\alpha](z)|^2. \tag{6.1.5}$$

Die Thetafunktion mit Charakteristik $\alpha \in \mathbb{R}^{2g}$ wird definiert durch

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp[i\pi(n+\alpha_1)\tau(n+\alpha_1) + 2\pi i(\alpha_1+n)(z+\alpha_2)], \tag{6.1.6}$$

wobei z als Abel-abgebildet, also als $\int^z \omega$ zu verstehen ist. Das Argument τ, die Periodenmatrix, in der Thetafunktion wird zumeist unterdrückt. Der Ausdruck $\mathrm{Im}z$ meint

$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2i}\Big(\int^z \omega - \int^{\bar{z}} \bar{\omega}\Big). \tag{6.1.7}$$

Die bei der Redefinition der Windungszahlen m, n eingeführten Größen α gehen in die Charakteristik der Thetafunktion ein, die die Spinstruktur festlegt. In der bosonisierten Formulierung der Theorie bekommt man also von vorherein eine Summe über Spinstrukturen, auch wenn keine $U(1)$ angekoppelt wird.
Von besonderer Wichtigkeit im Ergebnis ist hierbei der anholomorphe Faktor $\exp(2\pi \mathrm{Im} z (\mathrm{Im}\tau)^{-1} \mathrm{Im} z)$. Dieser Faktor kürzt sich gerade mit dem inversen Faktor, der bei der Berechnung von Korrelatoren für den einwertigen Anteil der Bosonen entsteht. Dadurch ergibt sich im Gesamtergebnis für die Amplituden von Vertexoperatoren kompakter Bosonen ein holomorphes Betragsquadrat. Die Amplitude faktorisiert also holomorph, wie es aus der fermionischen Berechnung schon erwartet wird. Wir werden bei der Diskussion des Boson-Propagators für den einwertigen Teil $\tilde{\Phi}$ darauf zurückkommen. Wenden wir uns nun den Modifikationen durch Addition der $U(1)$-Kopplungen zu.

2. Solitonkorrelator mit U(1)

Die Veränderungen durch die $U(1)$-Moduli machen sich nur in der Soliton-Wirkung bemerkbar und nicht in den Vertexoperatoren. Die Wirkung lautet (vgl. (5.3.10))

$$S_{\Phi_0} = \tfrac{\pi}{2}[m + B - (n + A)\bar{\tau}](\mathrm{Im}\tau)^{-1}[m - B - \tau(n - A)]. \tag{6.2.1}$$

Dabei sind $m, n \in \mathbb{Z}^g$ wieder die Windungszahlen des Solitons und $A, B \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^g$ die $U(1)$-Moduli. Für die Auswertung von

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^g} e^{-S_{\Phi_0} + \Phi_0(z)} \tag{6.2.2}$$

erweist es sich als vorteilhaft, das Produkt in der Wirkung auszumultiplizieren und die quadratischen Ergänzungen in den Moduli A, B wieder wegzulassen.
Es ist praktisch, dabei die Abkürzungen $C := B - \tau A$ für die komplexe Kombination der $U(1)$-Moduli zu benutzen.

$$\begin{aligned} S_{A\Phi_0} + \Phi_0(z) &= \tfrac{\pi}{2}(m - n\bar{\tau})(\mathrm{Im}\tau)^{-1}(m - \tau n) \\ &+ \pi(m - n\bar{\tau})(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\Big(\int_p^z \omega + \tfrac{1}{2}C\Big) \\ &- \pi(m - n\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\Big(\int_{\bar{p}}^{\bar{z}} \bar{\omega} + \tfrac{1}{2}\bar{C}\Big). \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Die in C und $\bar{C}$ linearen Zusatzterme durch die Ankopplung der $U(1)$ können dann durch eine Redefinition von $\mathrm{Re} z$ und $\mathrm{Im} z$ absorbiert werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_{m,n \in \mathbb{Z}^g} e^{-S_{A\Phi_0} + \Phi_0(z)} = \\ &(\det \tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\tau)^{\frac{1}{2}} e^{2\pi \mathrm{Im}(z + \frac{C}{2})(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\mathrm{Im}(z + \frac{C}{2})} \sum_{\alpha \in \{0,\frac{1}{2}\}^{2g}} \left| \Theta\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}(z + \frac{C}{2}) \right|^2 . \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Dieser Ausdruck kann unter Verwendung der Identität

$$\Theta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z, \tau) = \exp[i\pi a\tau a + 2\pi i a(z + b)]\Theta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(z + \tau a + b, \tau) \tag{6.2.5}$$

umgeformt werden in

$$\sum_{m,n} e^{-S_{A\Phi_0} + \Phi(z)} = (\det \tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\tau)^{\frac{1}{2}} e^{2\pi \mathrm{Im}(z)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\mathrm{Im}(z)} \sum_{\alpha \in \{0,\frac{1}{2}\}^{2g}} \left| \Theta\begin{bmatrix}\alpha_1 - \frac{A}{2}\\ \alpha_2 + \frac{B}{2}\end{bmatrix}(z) \right|^2 . \tag{6.2.6}$$

Den für die holomorphe Faktorisierung der Boson-Amplitude so wichtigen anholomorphen Faktor $\exp\{2\pi \mathrm{Im}(z)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\mathrm{Im}(z)\}$ erhält man also auch unter Einbeziehung der $U(1)$-Kopplung. Die Moduli der $U(1)$-Konnektion gehen nur in die Charakteristik der Thetafunktion, also in die Spinstruktur ein.
Das Integral über die Moduli, zusammen mit der Summe über die diskreten Spinstrukturen α, wird damit zu einem Integral über den vollen Torus $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}$ kontinuierlicher Spinstrukturen.
Der Wertebereich $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}$ ist gerade so beschaffen, daß die diskrete Summe über $\mathbb{Z}^g$ in der Definition der Thetafunktion zusammen mit der Integration über die Charakteristik gerade zu einem Integral über $\mathbb{R}^g$ ergänzt wird.
Die Zustandssumme des Solitons wird für $z = 0$ definiert. Außerdem muß über alle $N = 2$ Moduli integriert werden.

$$\mathcal{Z}_{hol} = \int dt^{3g-3}(\det \tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\tau)^{\frac{1}{2}} \int d^gA\, d^gB \sum_{\alpha \in \{0,\frac{1}{2}\}^{2g}} \left| \Theta\begin{bmatrix}\alpha_1 - \frac{A}{2}\\ \alpha_2 + \frac{B}{2}\end{bmatrix}(0) \right|^2 . \tag{6.2.7}$$

Das Integral über die $U(1)$-Moduli in der Zustandssumme kann einfach ausgeführt werden und kürzt gerade die Determinante $\det \frac{1}{2}\mathrm{Im}\tau$. Die Zustandssumme ergibt also gerade das Volumen der metrischen Moduli.

$$\mathcal{Z}_{hol} = \int dt^{3g-3}. \tag{6.2.8}$$

Der Boson-Propagator

In diesem Abschnitt sollen die Eigenschaften des Korrelators für den einwertigen Teil der Bosonen $\tilde{\phi}$ diskutiert werden, insbesondere die des Propagators [19].
Die Bewegungsgleichung eines freien Bosons ist die Laplace-Gleichung

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \tilde{\Phi}(z, \bar{z}) = 0. \tag{6.2.9}$$

Der Propagator $p(z,w) = \left\langle \tilde{\Phi}(z,\bar{z})\tilde{\Phi}(w,\bar{w}) \right\rangle$ ist definiert als Greensche Funktion zum Laplace-Operator. Da das Spektrum des Laplace-Operators auch Nullmoden enthält, kann der Operator nicht auf dem vollständigen Raum der Funktionen invertiert werden. Die "Vollständigkeitsrelation" des entsprechenden Unterraumes wird also nicht nur die δ-Funktion, sondern auch einen Projektor auf die Nullmoden enthalten. Aus der Darstellung der Greenschen Funktion über ein orthogonales Eigenfunktionen-System des Laplace-Operators folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\int d^2 z \sqrt{g} p(z,w) = 0, \\
&\partial_z \partial_{\bar{z}} p(z,w) = +\pi \delta^2 (z-w) - \tfrac{\pi}{A} \sqrt{g(z)}, \\
&\partial_z \partial_{\bar{w}} p(z,w) = -\pi \delta^2 (z-w) + \pi \sum_{i,j} \omega_i(z) (\mathrm{Im}\tau)^{-1}_{ij} \bar{\omega}_j(\bar{w}).
\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Hierbei ist $A = \int d^2 z \sqrt{g}$ der Flächeninhalt der Mannigfaltigkeit. Die Korrektur durch das Auftreten der Nullmoden bricht die Weyl-Invarianz der Greenschen Funktion $p(z,w)$. Unter einer Reskalierung $g_{mn} = e^{\sigma} \hat{g}_{mn}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
p(z,w) = &\hat{p}(z,w) - \frac{1}{A} \int d^2 y \sqrt{g(y)} (\hat{p}(z,y) + \hat{p}(y,w)) \\
&+ \frac{1}{A^2} \int d^2 x d^2 y \sqrt{g(x) g(y)} \hat{p}(x,y).
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Der für zusammenfallende Punkte $z = w$ regularisierte Propagator enthält den Weyl-Parameter σ sogar direkt,

$$\begin{aligned}
p_R(z,z) = &\hat{p}_R(z,z) - \sigma(z) - \frac{2}{A} \int d^2 y \sqrt{g(y)} \hat{p}_R(z,y) \\
&+ \frac{1}{A^2} \int d^2 x d^2 y \sqrt{g(x) g(y)} \hat{p}_R(x,y).
\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

Für die Korrelationsfunktion zweier normal geordneter Vertexoperatoren

$$V_q(z) = \rho^{\frac{q^2}{2}}(z) e^{q\tilde{\Phi}(z)}, \qquad (\rho = 2g_{z\bar{z}}) \tag{6.2.13}$$

ergibt sich ein in den Greenschen Funktionen regularisierter Ausdruck. Man findet

$$\langle V_q(z) V_p(w) \rangle = (F(z,w))^{-q^2} \delta(q+p) \tag{6.2.14}$$

mit

$$F(z,w) = (\rho(z)\rho(w))^{-\frac{1}{2}} \exp[-p(z,w) - \tfrac{1}{2} p_R(z,z) - \tfrac{1}{2} p_R(w,w)]. \tag{6.2.15}$$

Diese Funktion F ist Weyl-invariant und verhält sich unter konformen Transformationen $z \to z'(z)$ wie ein $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$-Differential,

$$F(z', w') = \left| \frac{\partial z'}{\partial z} \right| \left| \frac{\partial w'}{\partial w} \right| F(z,w). \tag{6.2.16}$$

Außerdem folgt aus (6.2.10)

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \log F(z,w) = \pi \delta(z-w) + \pi \sum_{i,j} \omega_i(z) (\mathrm{Im}\tau)^{-1}_{ij} \bar{\omega}_j(w). \tag{6.2.17}$$

Diese Eigenschaften von F reichen aus, um es als Funktion auf einer Riemannfläche eindeutig zu bestimmen.

$$F(z,w) = \exp[2\pi \mathrm{Im} \int_w^z \omega (\mathrm{Im}\tau)^{-1} \mathrm{Im} \int_w^z \bar{\omega}] \, |E(z,w)|^2 . \tag{6.2.18}$$

Die holomorphe $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$-Form $E(z,w)$ ist die sogenannte Prime-Form [35] und im wesentlichen über die Thetafunktion in einer ungeraden Spinstruktur definiert. Die wichtigsten Eigenschaften sind

$$\begin{aligned}
E(z,w) &= -E(w,z), \\
E(z,w) &\sim z - w \qquad \text{für} \qquad z \sim w, \\
E(z + a_k, w) &= E(z,w), \\
E(z + b_k, w) &= -\exp(-i\pi\tau_{kk} - 2\pi i \int_w^z \omega_k) E(z,w).
\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

Die vollständige Korrelationsfunktion zweier Vertexoperatoren ist das Produkt des einwertigen Teils mit dem Solitonanteil (6.2.6)

$$\left\langle \rho^{\frac{1}{2}}(z) e^{-\Phi(z)} \rho^{\frac{1}{2}}(w) e^{+\Phi(w)} \right\rangle = \left| \Theta \begin{bmatrix} \alpha_1 - \frac{A}{2} \\ \alpha_2 + \frac{B}{2} \end{bmatrix} (z-w) \frac{1}{E(z,w)} \right|^2 . \tag{6.2.20}$$

Die anholomorphen Terme kürzen sich, so daß die vollständige Amplitude, wie schon erwähnt, holomorph faktorisiert. Die Verallgemeinerung auf N-Punkt-Funktionen lautet (nur die holomorphe Wurzel)

$$\left\langle \prod_i V_{q_i}(z_i) \right\rangle_{hol} = \Theta\begin{bmatrix} \alpha_1 - \frac{A}{2} \\ \alpha_2 + \frac{B}{2} \end{bmatrix}(\sum q_i z_i) \prod_{i<j} E(z_i, z_j)^{q_i q_j}. \tag{6.2.21}$$

Der Divisor $\sum_i q_i z_i$ muß dabei die Bedingung $\sum_i q_i = 0$ erfüllen, damit der Referenzpunkt z_0 der Abel-Abbildung $\int_{z_0}^{z} \omega$ herausfällt. Kommen wir nun zu den Korrelatoren der problematischeren SUSY-Geister.

3. Korrelatoren bosonisierter Bosonen

Eine schöne Eigenschaft der $U(1)$-geladenen Felder ist, wie gesehen, daß sich die quadratischen Ergänzungen der Konnektion aufgrund des relativen Vorzeichens zwischen den kinetischen Termen fermionischer und bosonischer Felder gerade wegheben. Dieses relative Vorzeichen ist hingegen fatal für die Konvergenz der Zustandsumme der bosonisierten Bosonen. Der Exponent der "Gaußschen Summe" der Solitonen hat das falsche Vorzeichen. Ein Ausweg aus dem Dilemma wurde von Watamura et al [30] gegeben.
Die nicht-verschwindende Amplitude eines β, γ-Systems bosonischer SUSY-Geister mit Hintergrundladung Q hat die Form

$$\int [d\beta][d\gamma] \prod_{j=1}^{Q(g-1)} \delta(\beta(x_j)) \prod_k \beta(z_k)\gamma(w_k) e^{-S[\beta,\gamma]}. \tag{6.3.1}$$

Der richtig bosonisierte, konvergente Ausdruck dieser Amplitude für die übliche Bosonisierung wird definiert durch

$$\int [d\varphi][d\xi][d\eta]\xi(y) \prod_{i=1}^{g} \mathcal{P}_i \prod_{j=1}^{Q(g-1)} e^{\varphi(x_j)} \prod_k e^{-\varphi(z_k)} \partial\xi(z_k)\eta(w_k) e^{\varphi(w_k)}. \tag{6.3.2}$$

Der einzige Unterschied zu der naiven Verwendung der bosonisierten Geister besteht in der zusätzlichen Einsetzung der g Operatoren $\mathcal{P}_i$, die die divergente Solitonsumme auf eine konvergente Untersumme projizieren.
Bosonisiert man auch $\xi = \exp(\chi), \eta = \exp(-\chi)$, ergibt sich die Wirkung

$$S = -\tfrac{1}{2\pi} \int d^2 z \{ -\partial_z \varphi \partial_{\bar z} \varphi + \partial_z \chi \partial_{\bar z} \chi + \sqrt{g}\mathcal{R}\varphi - \tfrac{1}{2}\sqrt{g}\mathcal{R}\chi \}. \tag{6.3.3}$$

Setzt man nun die Solitonen

$$\varphi_0 = \pi(m - n\bar\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1} \int_{z_0}^{z} \omega - \pi(m - n\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1} \int_{\bar z_0}^{\bar z} \bar\omega$$

in die Wirkung ein, und seien die Windungszahlen der Solitonen von φ und χ mit m, n und k, l bezeichnet, dann ergibt sich für die Solitonwirkung

$$S_{\varphi_0 \chi_0} = -\tfrac{\pi}{2}(m - n\bar\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}(m - \tau n) + \tfrac{\pi}{2}(k - l\bar\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}(k - \tau l), \tag{6.3.4}$$

das heißt, die Summe über m, n von e^{-S} divergiert, während die Summe über k, l konvergiert. In der Divergenz der Solitonsumme schlägt sich die Überzähligkeit der Freiheitsgrade durch die Bosonisierung nieder. In die Bosonisierungsvorschrift von β und γ geht nur die Differenz der Bosonen ϕ und χ ein, die überzählige Kombination $\phi + \chi$ muß durch entsprechende Projektoren eliminiert werden. Die notwendigen Projektoren haben die Form

$$\mathcal{P}_i = \left| \oint \frac{dz}{2\pi i} \eta(z) \right|^2 \delta(k_i - m_i - P_i)\delta(l_i - n_i - P_i'). \tag{6.3.5}$$

Die Werte $P_i, P_j' \in \mathbb{Z}/2$ sind dabei zunächst beliebig. Die Amplitude wird im Ergebnis nicht mehr von diesen P_i, P_j' abhängen.
Es reicht also, die Amplitude

$$W(\sum r_j w_j, \sum q_k z_k) = \left\langle \prod_{i=1}^{g} \mathcal{P}_i \prod_j e^{r_j \chi(w_j)} \prod_k e^{q_k \varphi(z_k)} \right\rangle_{hol} \tag{6.3.6}$$

mit den Einschränkungen

$$\sum_i r_i = 1 \qquad \text{und} \qquad \sum_k q_k = Q(g-1) \tag{6.3.7}$$

zu betrachten. Der ursprüngliche Ausdruck (6.3.2) kann dann durch Anwenden der entsprechenden Ableitungen auf (6.3.6) wieder erzeugt werden. Durch das Einsetzen der Projektoren bricht die divergente Summe über die m, n zusammen, das Ergebnis ist wieder konvergent. Das Resultat (unter Einbeziehung der Amplitude des einwertigen Teils der Bosonen) lautet

$$W(\sum r_j w_j, \sum q_k z_k) = Z_1^{3/2} \frac{\prod_{i<j} E(w_i, w_j)^{r_i r_j}}{\prod_{i<k} E(z_i, z_k)^{q_i q_k}} \prod_k \sigma(z_k)^{-Q q_k} \prod_j \Theta\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}(\sum r_i w_i - w_j - Q\Delta, \tau)^{-r_j} \tag{6.3.8}$$

wobei Δ der Divisor der sogenannten Riemann-Klasse mit $\deg(\Delta) = g-1$ und σ ein bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmtes, holomorphes $\frac{g}{2}$-Differential [19] ist. Ein Beziehung zu den bisher bekannten Funktionen besteht in

$$\frac{\sigma(z)}{\sigma(w)} = \frac{\Theta(z-\sum p_i + \Delta)}{\Theta(w - \sum p_i + \Delta)} \prod_i \frac{E(w,p_i)}{E(z,p_i)}, \tag{6.3.9}$$

für beliebige Punkte p_i , $i = 1,..,g$. Wie gesehen, koppelt die $U(1)$ des $N = 2$ Strings nur an die Bosonen $\varphi^\pm$ und nicht an die Felder ξ, η. Da sich die in den $U(1)$-Moduli linearen Zusatzterme als Verschiebung des Abel-abgebildeten Divisors $\sum q_k z_k$ schreiben lassen, treten die Moduli A, B in gleicher Weise in der Thetafunktion von (6.3.8) auf, wie bei der Bosonisierung der Fermionen Ψ. Verwendet man wieder die Identität (6.2.5), so gehen die $U(1)$-Moduli ebenfalls nur in die Charakteristik der Thetafunktion ein.

$$W_{U(1)}(\sum r_j w_j, \sum q_k z_k) =$$
$$Z_1^{3/2} \frac{\prod_{i<j} E(w_i,w_j)^{r_i r_j}}{\prod_{i<k} E(z_i,z_k)^{q_i q_k}} \prod_k \sigma(z_k)^{-Q q_k} \prod_j \Theta\begin{bmatrix}\alpha_1 - \frac{A}{2}\\ \alpha_2 + \frac{B}{2}\end{bmatrix}(\sum r_i w_i - w_j - Q\Delta, \tau)^{-r_j} \tag{6.3.10}$$

Das $U(1)$-Moduliintegral ist auch für SUSY-Geistkorrelatoren nur eine Integration über kontinuierliche Spinstrukturen.

4. Korrelatoren der ungeladenen Felder

In diesem Abschnitt werden die noch fehlenden Amplituden der bc- und $\tilde{b}\tilde{c}$-Geistsysteme sowie der Bosonen $Z^{\pm\mu}$ diskutiert.
Da die verschiedenen Geistsysteme sich nur durch ihr konformes Gewicht λ, bzw. durch ihre Hintergrund-Ladung $Q = (2\lambda - 1)$ unterscheiden, ist es sinnvoll eine universelle Bezeichnung für die entsprechenden Amplituden zu definieren. Eine Korrelationsfunktion auf einer Riemannfläche hängt typischerweise von den Orten und Gewichten der Vertexoperatoren z_i und q_i, dem konformen Gewicht λ und der Spinstruktur α ab. Die allgemeine Form der holomorphen Wurzel solch einer Korrelationfunktion lautet [29]

$$Z_{\alpha,\lambda}(\sum q_i z_i) := Z_1^{\frac{1}{2}} \Theta\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}(\sum q_i z_i - Q\Delta) \prod_{i<j} E(z_i,z_j)^{q_i q_j} \prod_i \sigma(z_i)^{Q q_i}, \tag{6.4.1}$$

wobei $\deg(\sum q_i z_i) = \sum q_i = Q(g-1)$. Der Normierungsfaktor Z_1 ist durch

$$Z_1 = Z_{0,1}(\sum_{i=1}^{g} z_i - w)[\det\omega_i(w_j)]^{-1} \tag{6.4.2}$$

definiert. Diese Definition ist von der Wahl der Punkte z_i und w unabhängig. Damit ergibt sich für die fermionischen Geist-Amplituden

$$\left\langle \prod_{j=1}^{n+3(g-1)} b(w_j) \prod_{i=1}^{n} c(z_i) \right\rangle = Z_{0,2}(\sum w_i - \sum z_i),$$
$$\left\langle \prod_{j=1}^{n+g-1} \tilde{b}(w_j) \prod_{i=1}^{n} \tilde{c}(z_i) \right\rangle = Z_{0,1}(\sum w_i - \sum z_i). \tag{6.4.3}$$

Einwertige Bosonen

Ein Progagator, der etwas aus dem Rahmen fällt, ist der der Stringkoordinaten $Z^{\pm\mu}$. Da diese Bosonen nicht kompakt sind und daher keinen Solitonsektor besitzen, besteht der Propagator nur aus dem einwertigen Anteil $\log(F(z,w))$ aus (6.2.18). Der anholomorphe Vorfaktor hebt sich somit nicht mit einem entsprechenden Faktor aus einer Solitonkorrelation weg, so daß die Amplituden für $Z^{\pm\mu}$ nicht in ein holomorphes Betragsquadrat faktorisieren.
Damit man sich trotzdem auf eine holomorphe Hälfte beschränken kann, behilft man sich durch die Einführung von sogenannten Loop-Impulsen. Betrachten wir zunächst nur ein Boson $X(z)$. Der volle Propagator ist dann

$$\begin{aligned}\langle X(z)X(w)\rangle &= \log F(z,w)\\ &= \log|E(z,w)|^2 - 2\pi \mathrm{Im}\int_w^z \omega(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\mathrm{Im}\int_w^z \bar{\omega},\\ \text{mit}\quad \partial_z\partial_{\bar{z}}\log(F(z,w)) &= 2\pi\delta(z-w) - \pi\omega(z)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\bar{\omega}(\bar{z}).\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

Man definiert nun zunächst einen Propagator nur für den holomorphen Anteil des Bosons, also insbesondere ohne die Nullmoden

$$\langle X(z)X(w)\rangle_{hol} = \log E(z,w). \tag{6.4.5}$$

Der vollständige Ausdruck für die Amplitude zweier Vertexoperatoren $e^{\pm X}$ läßt sich dann reproduzieren durch

$$\begin{aligned}\left\langle e^{+X(z)} e^{-X(w)}\right\rangle &= \det(\tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\tau)^{\frac{1}{2}} \int d^g p \left| e^{i\pi p\tau p} \left\langle e^{X(z)+2\pi i p\int^z \omega} e^{-X(w)-2\pi i p\int^w \omega}\right\rangle_{hol}\right|^2\\ &= \det(\tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\tau)^{\frac{1}{2}} \int d^g p e^{-2\pi p \mathrm{Im}\tau p} e^{4\pi p \mathrm{Im}(\int_w^z \omega)} |E(z,w)|^{-2}.\\ &= F(z,w)^{-1}\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

Man erhält also den anholomorphen Korrelator $F(z,w)$ als Integral über ein holomorphes Betragsquadrat. Um die holomorphe Wurzel des Integranden zu bekommen, verschiebt man zunächst das Boson

$$X(z) \quad \rightarrow \quad X(z) + 2\pi ip \int^{z} \omega \tag{6.4.7}$$

und berechnet die Kontraktionen der Bosonen mit dem holomorphen Propagator. Schließlich muß noch mit

$$e^{i\pi p\tau p}$$

multipliziert und über p integriert werden. Dieser Faktor ist jedoch unabhängig von z und w und für die analytischen Eigenschaften der holomorphen Wurzel unwichtig.
Aus der Darstellung (6.4.6) lassen sich auch andere Korrelatoren berechnen, z.B. gilt

$$\langle \partial_z X(z) X(w) \rangle = -\frac{\partial_z \left\langle e^{X(z)} e^{-X(w)} \right\rangle}{\left\langle e^{X(z)} e^{-X(w)} \right\rangle}. \tag{6.4.8}$$

Für die mit dem Loop-Impuls p verschobene, holomorphe Amplitude erhält man

$$\langle \partial_z X(z) X(w) \rangle_{chiral} \quad \rightarrow \quad \partial_z \log E(z,w) + 2\pi ip\omega_z(z). \tag{6.4.9}$$

Nun zu den Bosonen $Z^{\pm\mu}$ der Stringkoordinaten im Targetraum. Wegen der etwas anderen Normierung der Bosonen $Z^{\pm\mu}$ verändern sich die Regeln für die Loop-Impuls-Einsetzung ein wenig.

$$Z^{\pm\mu}(z) \quad \rightarrow \quad Z^{\pm\mu} - 2\pi p^{\pm\mu} \int^{z} \omega. \tag{6.4.10}$$

In allen zu berechnenden Amplituden sind die Bosonen immer mit $(2,2)$-Impulsen $k^{\pm\mu}$ kontrahiert, es ist deshalb praktisch, z.B. $\langle k^{\pm} \cdot \partial_z Z^{\mp}(z) k'^{\mp} \cdot Z^{\pm}(w) \rangle$ zu diskutieren. Der chirale Propagator hat die Form

$$\left\langle k^{\pm} \cdot \partial_z Z^{\mp}(z) k'^{\mp} \cdot Z^{\pm}(w) \right\rangle_{hol} = -2k^{\pm} \cdot k'^{\mp} \partial_z \log E(z,w). \tag{6.4.11}$$

Die verschobene holomorphe Amplitude lautet dann

$$\begin{aligned} \left\langle k^{\pm} \cdot \partial_z Z^{\mp}(z) k'^{\mp} \cdot Z^{\pm}(w) \right\rangle_{hol} &\rightarrow -2k^{\pm} \cdot k'^{\mp} \partial_z \log E(z,w) - 2\pi k^{\pm} \cdot p^{\mp} \omega_z(z) \\ &= -2k^{\pm} \cdot k'^{\mp} [\partial_z \log E(z,w) + \pi \frac{k^{\pm} \cdot p^{\mp}}{k^{\pm} \cdot k'^{\mp}} \omega_z(z)]. \end{aligned} \tag{6.4.12}$$

Dieser Ausdruck wird bei der Berechnung der 1-Loop-3-Punkt-Amplitude von Bedeutung sein.

Kapitel VII:
Punktierte Riemannflächen

In diesem Kapitel werden wir uns mit den Verallgemeinerungen für punktierte Riemannflächen beschäftigen. Die Beschreibung von String-Amplituden durch punktierte Riemannflächen ist im Zusammenhang mit der Betrachtung asymptotisch freier Anfangs- und Endzustände der Strings die angemessene Formulierung. Die ein- und auslaufenden Stringzustände lassen sich durch konforme Transformationen auf Punkte abbilden, die aus der kompakten Riemannfläche herausgenommen werden müssen. Die Randbedingungen an diesen Punkten entsprechen den Quantenzahlen der asymptotisch freien Strings. Die differentialgeometrische Beschreibung der punktierten Flächen läßt sich jedoch recht einfach auf die der kompakten Flächen zurückführen. Äquivalent zu holomorphen Differentialen auf punktierten Riemannflächen sind die meromorphen Differentiale auf den entsprechenden kompakten Riemannflächen. Die Randbedingungen der punktierten Flächen gehen dann auf die Residuen der meromorphen Differentiale der kompakten Flächen über. Untersuchen wir daher zunächst die meromorphen Differentiale kompakter Riemannflächen.

1. Meromorphe Differentiale

Da uns im wesentlichen nur Differentiale mit Residuen interessieren, ist es sinnvoll, zunächst eine meromorphe 1-Form ω_{PQ} mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} &\mathrm{res}_P \omega_{PQ} = -\mathrm{res}_Q \omega_{PQ} = \tfrac{1}{2\pi i}, \\ &\oint_{a_k} \omega_{PQ} = 0, \qquad k = 1, .., g \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

zu definieren. Diese Bedingungen bestimmen ω_{PQ} eindeutig. Für beliebige meromorphe Differentiale m gilt

$$\sum_{P \in \mathcal{M}} \mathrm{res}_P m = 0. \tag{7.1.2}$$

Ein mermorphes Differential mit

$$\mathrm{res}_{P_i} m = \theta_i \qquad \text{für} \quad P_i \in \mathcal{M}, \quad i = 1, .., n, \qquad \sum_i \theta_i = 0,$$

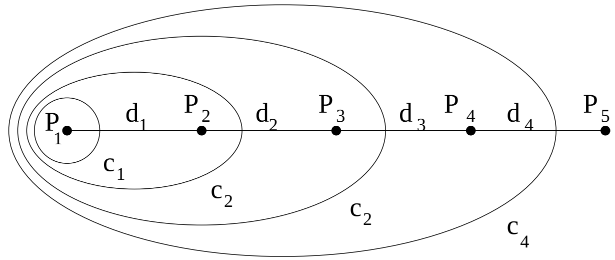

Abbildung 3: Zusätzliche Wege für eine 5-punktierte Fläche.

$$\begin{aligned} &\mathrm{res}_P m = 0 \qquad \text{für} \quad P \in \mathcal{M} \backslash \{P_1, .., P_n\}, \\ &\oint_{a_k} m = 0 \qquad \text{für} \quad k = 1, .., g, \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

läßt sich mit Hilfe der Differentiale $\omega_{P_i P_{i+1}}$ für $i = 1, .., n$ durch

$$m = \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi i \Big(\sum_{j=1}^{i} \theta_j\Big) \omega_{P_i P_{i+1}} \tag{7.1.4}$$

konstruieren. Die Differentiale $\omega_{P_i P_{i+1}}$ für $i = 1, .., n-1$ erweitern also die Basis $\{\omega_i; i = 1, .., g\}$ der holomorphen Differentiale zu einer Basis auch für die meromorphen Differentialen mit n einfachen Polen. Dies entspricht einer Basis der holomorphen Differentiale auf der n-punktierten Riemannfläche.
Durch die Punktierung der Riemannfläche ändert sich auch die Homologiebasis der geschlossenen Wege auf der Fläche. Wege, die die herausgenommenen Punkte umschließen, sind topologisch nicht-trivial und müssen zur Homologiebasis mit hinzugenommen werden. Eine für die oben definierten Differentiale besonders günstige Wahl der Wege c_i, $i = 1, .., n-1$ ist so, daß c_i die Punkte P_1 bis P_i umschließt, siehe Abb. 3. Die Wegintegrale über die c_i sind dann folgendermaßen normiert:

$$\oint_{c_j} \omega_{P_i P_{i+1}} = \delta_{ij}. \tag{7.1.5}$$

Es ist außerdem nötig, die Wege d_i von P_i bis P_{i+1} einzuführen. Denkt man sich die mit n Punkten punktierte Riemannfläche vom Genus g als eine entartete kompakte Riemannfläche vom Genus $g+n-1$, indem man die Punkte $P_1, ..P_n$ identifiziert, so entsprechen die Wege c den $n-1$ zusätzlichen a-Zykeln und die d den $n-1$ zusätzlichen b-Zykeln. Eine sinnvolle Definition der Homologiebasis der punktierten Riemannfläche ist also

$$\begin{aligned} &\{a_1, .., a_g, c_1, .., c_{n-1}\} \equiv \{a_1, .., a_{g+n-1}\}, \\ &\{b_1, .., b_g, d_1, .., d_{n-1}\} \equiv \{b_1, .., b_{g+n-1}\}. \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

Die entsprechende duale Basis der auf der punktierten Riemannfläche holomorphen Differentiale lautet dann

$$\{\omega_1, .., \omega_g, \omega_{P_1P_2}, ..\omega_{P_{n-1}P_n}\} \equiv \{\omega_1, .., \omega_{g+n-1}\}. \tag{7.1.7}$$

Es ergeben sich folgende Wegintegrale

$$\begin{aligned} &\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij} \quad \text{für} \quad i,j = 1, .., g+n-1, \\ &\oint_{b_i} \omega_j = \tau_{ij} \quad \text{für} \quad i,j = 1, .., g, \\ &\oint_{b_i} \omega_j = \rho_{ij} \quad \text{für} \quad i = 1, .., g; j = g, .., g+n-1, \\ &\oint_{b_i} \omega_j = \bar{\rho}_{ij} \quad \text{für} \quad i = g+1, .., g+n-1; \quad j = 1, .., g, \\ &\oint_{b_i} \omega_j = \sigma_{ij} \quad \text{für} \quad i,j = g+1, .., g+n-1. \end{aligned} \tag{7.1.8}$$

Man erhält also eine $g+n-1$-dimensionale Periodenmatrix T

$$\oint_{b_i} \omega_j = T_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & \rho \\ \bar{\rho} & \sigma \end{pmatrix}_{ij}. \tag{7.1.9}$$

Die Entartung der Riemannfläche durch das Zusammenziehen von $n-1$ Henkeln auf einen Punkt, schlägt sich in den teilweise divergenten Integralen σ_{ij} nieder. Die Diagonale σ_{ii} besteht z.B. aus Ausdrücken

$$\int_{P_i}^{P_{i+1}} \omega_{P_iP_{i+1}}. \tag{7.1.10}$$

Das Integral ist an den Randpunkten jeweils logarithmisch divergent. Ansonsten sind die Strukturen der n-punktierten Riemannfläche vom Genus g mit denen einer entarteten, kompakten Riemannfläche vom Genus $g+n-1$ identisch.

N=2 Moduli punktierter Super-Riemannflächen

In diesem Abschnitt werden wir die Dimensionen des $N=2$ Modulraums punktierter Riemannflächen ermitteln. Wie in Kapitel IV gesehen, wird der Modulraum kompakter Riemannflächen aufgespannt durch holomorphe Differentiale bestimmter konformer Gewichte. Im Falle $N=2$ sind die bosonischen Moduli durch die Basis der Differentiale vom Gewicht 2, die fermionischen durch die Basis der Differentiale vom Gewicht $\frac{3}{2}$ und die $U(1)$-Moduli durch die holomorphen 1-Formen ω gegeben.
Die Dimension des Modulraumes einer n-punktierten Flächen erhält man analog durch Abzählen der Basis der entsprechenden meromorphen Differentiale.
Eine 1-Form $\hat{\omega}$ mit n einfachen Polen und verschwindenden a-Perioden ist durch die Angabe ihrer Residuen eindeutig bestimmt und läßt sich auch eindeutig aus den $\omega_{P_iP_{i+1}}$ linear kombinieren. Dieses Differential $\hat{\omega}$ muß dann wegen $\deg(\hat{\omega}) = 2g-2$ (Riemann-Roch-Theorem) auch $2g-2+n$ einfache Nullstellen $Q_0..Q_{2g-3+n}$ besitzen. Mit Hilfe dieser 1-Form lassen sich nun folgende quadratische, meromorphe Differentiale mit den gleichen Polen und Residuen wie bei $\hat{\omega}$ konstruieren:

$$\begin{aligned} &\hat{\omega}\omega_i \quad \text{für} \quad i = 1, .., g, \\ &\hat{\omega}\omega_{Q_0Q_j} \quad \text{für} \quad j = 1, .., 2g-3+n, \end{aligned} \tag{7.1.11}$$

insgesamt also $3g-3+n$ quadratische Differentiale.
Für die Konstruktion der $\frac{3}{2}$-Differentiale muß zwischen geraden und ungeraden Spinstrukturen unterschieden werden.
Für eine gerade Spinstruktur existiert kein holomorphes, aber ein meromorphes $\frac{1}{2}$-Differential κ_Q mit einem einfachen Pol bei Q. Die möglichen meromorphen $2g-2+n$ $\frac{3}{2}$-Differentiale sind dann

$$\hat{\omega}\kappa_{Q_j} \quad \text{für} \quad j = 0, .., 2g-3+n. \tag{7.1.12}$$

Für eine ungerade Spinstruktur existiert hingegen ein holomorphes $\frac{1}{2}$-Differential h und noch zusätzlich ein meromorphes $\frac{1}{2}$-Differential κ_{PQ} mit einfachen Polen und Residuen $+1, -1$ in den Punkten P, Q. Damit lassen sich die meromorphen $\frac{3}{2}$-Differentiale

$$\begin{aligned} &\hat{\omega}\kappa_{Q_0Q_j} \quad \text{für} \quad j = 1, .., 2g-3+n, \\ &\hat{\omega}h \end{aligned} \tag{7.1.13}$$

angeben. Die möglichen 1-Formen, die den $U(1)$-Modulraum aufspannen, sind die schon bekannten ω_j für $j = 1, .., g+n-1$ aus (7.1.7).
Der Modulraum der $N=2$ Super-Riemannflächen hat somit die folgende komplexe Dimension:

$$\begin{aligned} &3g-3+n && \text{metrische Moduli,} \\ &2g-2+n \pm c_1 && \text{fermionische Moduli,} \\ &g-1+n && U(1)\text{-Moduli.} \end{aligned}$$

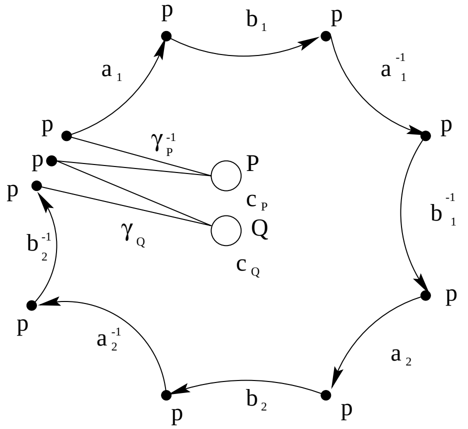

Abbildung 4: Aufgeschnittene 2-punktierte Fläche.

Für die Chernzahl ergibt sich wieder die Einschränkung $|c_1| \leq 2g-2+n$, da sonst nicht kompensierbare Nullmoden die Zustandssumme wieder zum Verschwinden bringen.

2. Integration auf punktierten Riemannflächen

Da punktierte Riemannflächen entarteten, kompakten Riemannflächen höheren Genus entsprechen, läßt sich auch die Integrationsregel für holomorphe bzw. meromorphe Formen $\omega, \bar\omega$

$$\int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \bar\omega = \sum_{k=1}^{g} [\oint_{a_k} \omega \oint_{b_k} \bar\omega - \oint_{b_k} \omega \oint_{a_k} \bar\omega]$$

verallgemeinern. Betrachten wir zunächst nur zwei Punktierungen P, Q und das Integral

$$\int \omega \wedge \bar\omega_{PQ}, \tag{7.2.1}$$

wobei ω_{PQ} Residuen r und $-r$ bei P und Q haben möge. Für die Berechnung des Integrals ist es sinnvoll die 2-punktierte Riemannfläche entlang ihrer Homolologiebasis aufzuschneiden, siehe Abb. 4. Diese aufgeschnittene Riemannfläche $\mathcal{M}'$ ist einfach zusammenhängend, die Differentiale $\omega, \bar\omega_{PQ}$ sind auf $\mathcal{M}'$ holomorph und daher geschlossen, also nach dem Lemma von Poincaré auch exakt. Sei also

$$\omega = df, \qquad f = \int_{z_0}^{z} \omega, \tag{7.2.2}$$

dann folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}'} \omega \wedge \bar\omega_{PQ} &= \int_{\partial\mathcal{M}'} f\bar\omega_{PQ} \\ &= \sum_k \int_{a_k + a_k^{-1}} f\bar\omega_{PQ} + \sum_l \int_{b_l + b_l^{-1}} f\bar\omega_{PQ} \\ &\quad + \int_{\gamma_Q + \gamma_Q^{-1}} f\bar\omega_{PQ} + \oint_{c_Q} f\bar\omega_{PQ} + \int_{\gamma_P + \gamma_P^{-1}} f\bar\omega_{PQ} + \oint_{c_P} f\bar\omega_{PQ}.\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Die Integrale entlang γ tragen nicht bei und für die Integrale um P und Q ergibt sich

$$\oint_{c_Q} f\bar\omega_{PQ} + \oint_{c_P} f\bar\omega_{PQ} = -2\pi i\bar c \int_Q^P \omega, \tag{7.2.4}$$

insgesamt also

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}'} \omega \wedge \bar\omega_{PQ} &= \sum_{k=1}^{g} [\oint_{a_k} \omega \oint_{b_k} \bar\omega_{PQ} - \oint_{b_k} \omega \oint_{a_k} \bar\omega_{PQ}] - 2\pi i\bar r \int_Q^P \omega. \\ &= \sum_{k=1}^{g} [\oint_{a_k} \omega \oint_{b_k} \bar\omega_{PQ} - \oint_{b_k} \omega \oint_{a_k} \bar\omega_{PQ}] \\ &\quad + \oint_{c_P} \omega \int_Q^P \bar\omega_{PQ} - \int_Q^P \omega \oint_{c_P} \bar\omega_{PQ}\end{aligned} \tag{7.2.5}$$

Dies entspricht dem Ergebnis, das man auf einer entarteten, kompakten Riemannfläche vom Genus $g+1$ erwarten würde. Der geschlossene Weg c_P um P repräsentiert dabei den zusätzlichen a-Zykel und der Weg von P nach Q entspricht dem zusätzlichen b-Zykel. Analog läßt sich auch der allgemeinere Fall für das Produkt zweier meromorpher Differentiale bestimmen:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}'} \omega_{P_1P_2} \wedge \bar\omega_{P_3P_4} &= \sum_{k=1}^{g} [\oint_{a_k} \omega_{P_1P_2} \oint_{b_k} \bar\omega_{P_3P_4} - \oint_{b_k} \omega_{P_1P_2} \oint_{a_k} \bar\omega_{P_3P_4}] \\ &\quad + \oint_{c_{P_1}} \omega_{P_1P_2} \int_{P_2}^{P_1} \bar\omega_{P_3P_4} - \int_{P_2}^{P_1} \omega_{P_1P_2} \oint_{c_{P_1}} \bar\omega_{P_3P_4} \\ &\quad + \oint_{c_{P_3}} \omega_{P_1P_2} \int_{P_4}^{P_3} \bar\omega_{P_3P_4} - \int_{P_4}^{P_3} \omega_{P_1P_2} \oint_{c_{P_3}} \bar\omega_{P_3P_4}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{g+3} [\oint_{a_k} \omega_{P_1P_2} \oint_{b_k} \bar{\omega}_{P_3P_4} - \oint_{b_k} \omega_{P_1P_2} \oint_{a_k} \bar{\omega}_{P_3P_4}]. \qquad (7.2.6)$$

Dieser Ausdruck ist nur wohldefiniert für paarweise verschiedene Punkte $P_1, .., P_4$. Für zusammenfallende Punkte bekommt man, wie leicht zu sehen ist, logarithmische Divergenzen. Formal sind die Ausdrücke jedoch mit denen regulärer Riemannflächen identisch. Es gilt allgemein für die holomorphen oder meromorphen 1-Formen ω_i für $i = 1, .., g+n-1$ aus (7.1.7)

$$\int_{\mathcal{M}'} \omega_i \wedge \bar{\omega}_j = \sum_{k=1}^{g+n-1} [\oint_{a_k} \omega_i \oint_{b_k} \bar{\omega}_j - \oint_{b_k} \omega_i \oint_{a_k} \bar{\omega}_j]. \qquad (7.2.7)$$

Für das Produkt $\omega_i \wedge \omega_j$ gilt die Regel (7.2.7) ebenfalls. Da aber das $\wedge$-Produkt zweier holomorpher oder meromorpher Differentiale $\omega_i \wedge \omega_j$ verschwindet, erhält man aus (7.2.7) auch die Symmetrie der verallgemeinerten Periodenmatrix T_{ij}, das heißt, $\bar{\rho}^T = \rho, \sigma^T = \sigma$.

3. Das Pfadintegral über punktierte Riemannflächen

Die für die Berechnung von String-Amplituden "richtige" Mannigfaltigkeit ist die punktierte Riemannfläche. Die Abbildung der Ränder der ein- und auslaufenden Strings auf die Punkte einer punktierten Riemannfläche muß in diesen Punkten singulär sein. Die Felder der $N = 2$ Supergravitation $e_m{}^a, \chi_m^{\pm}$ und A_m, die diese punktierte Riemannfläche beschreiben, können daher einfache Pole in diesen Punkten entwickeln.
Die an die Gravitation und $U(1)$ koppelnden Felder dürfen aber nicht auch noch Pole entwickeln, weil sonst divergente Beiträge aus den kinetischen Termen zur Wirkung beitragen und somit diese singulären Feldkonfigurationen unterdrücken. Die Pole der meromorphen 1-Formen gehen bei der Verallgemeinerung zu punktierten Riemannflächen insbesondere in den Solitonanteil der geladenen Bosonen Φ und φ der Wirkung ein. Der Solitonanteil der Wirkung in (5.3.10) ist auch auf der entarteten Riemannfläche vom Genus g eine Bilinearform in den Windungszahlen.

$$S = \tfrac{\pi}{2}[m - \bar{T}n](\mathrm{Im}T)^{-1}[m - Tn]$$

Die Solitonkonfigurationen mit nicht-verschwindenden Windungszahlen um die Punktierungen koppeln an die divergenten Komponenten der Periodenmatrix T und werden somit im Pfadintegral durch e^{-S} unterdrückt.
Um das vollständige Pfadintegral über die n-punktierten Riemannflächen zu erhalten, muß auch noch über die durch den Genus g und Chernzahl c_1 klassifizierten Topologien summiert werden. Die einzelnen Summanden werden dabei verschieden gewichtet.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}_{hol} = \\
&= \sum_g \sum_{c_1=-2g+2-n}^{2g-2+n} \kappa^{2-2g+n} \lambda^{c_1} \int (d^{3g-3+n}t)(d^{g-1+n}C)[dZ][d\Psi][dcdb][d\gamma d\beta][d\tilde{c}d\tilde{b}] \\
&\prod_{i=1}^{3g-3+n} \langle \mu_i | b \rangle \prod_{k=1}^{g-1+n} \left\langle \omega_k | \tilde{b} \right\rangle \prod_{j=1}^{2g-2-c_1+n} X^-(z_j^+) \prod_{j=1}^{2g-2+c_1+n} X^+(z_j^-) \\
&e^{-S[t,C,c_1;Z,\Psi,c,b,\gamma^{\pm},\beta^{\mp},\tilde{c},\tilde{b}]}.
\end{aligned} \qquad (7.3.1)$$

Wertet man die Kopplung an den $U(1)$-Hintergrund A_{c_1} in der Wirkung durch partielle Integration aus, dann läßt sich im Pfadintegral der Operator $\mathrm{SFO}(-c_1, z_P)$ abspalten.

$$e^{-S[t,C,c_1;Z,\Psi,c,b,\gamma^{\pm},\beta^{\mp},\tilde{c},\tilde{b}]} = e^{-S[t,C,0;Z,\Psi,c,b,\gamma^{\pm},\beta^{\mp},\tilde{c},\tilde{b}]}\mathrm{SFO}(-c_1, z_P). \qquad (7.3.2)$$

Die Stringkopplungen κ und λ resultieren aus den kinetischen Termen der reinen $N = 2$ Supergravitation. Diese kinetischen Terme sind in zwei Dimensionen jedoch topologisch, das heißt, sie enthalten keine dynamischen Freiheitsgrade und können vollständig integriert werden. Der kinetische Term für das Vielbein liefert z.B. die Euler-Charakteristik

$$S_{Einstein} = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z e \mathcal{R} \sim 2g - 2, \qquad (7.3.3)$$

die den Exponenten der Stringkopplung κ in der Störungs-Reihe ergibt. Für die punktierte Riemannfläche modifiziert sich der Exponent natürlich zu $2g - 2 + n$ aufgrund der Singularitäten in den Punktierungen.
Die Kopplung λ kann aber auch noch Beiträge aus der Einsetzung des $\mathrm{SFO}(-c_1, z_P)$ erhalten.
Das Integral über die zusätzlichen bosonischen Moduli ist dabei mit dem Integral über die Orte z_i der Punktierungen identisch. Üblicherweise werden diese Integrationen in die Definition der Vertexoperatoren vom Typ $V^{\int}$ gezogen. Die Anzahl der Antigeister b im Pfadintegral ändert sich auch entsprechend.
Der Vergrößerung des fermionischen Modulraums durch die Punktierungen muß im Pfadintegral in der Zahl der Bildwechsel-Operatoren und Nullmoden-Einsetzungen der bosonischen Antigeister Rechnung getragen werden.
Die komplexen $U(1)$-Moduli C hängen über $C = 2i(\mathrm{Im}\tau)^{-1}(B - \tau A)$ mit den reellen Moduli $A, B \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{g-1+n}$ zusammen. Die Basis der zusätzlichen Moduli der $U(1)$ bilden genau die meromorphen 1-Formen aus (7.1.7). Diese Moduli erlangen im Zusammenhang mit dem spektralen Fluß besondere Bedeutung.

Spektraler Fluß und Punktierungen

Die Meromorphie der $U(1)$-Konnektion A bewirkt SFO-Einsetzungen der besonderen Art. Hierzu ist die Kopplung des geisterweiterten $U(1)$-Stromes $\hat{J}$ an den meromorphen Anteil A^{mero} der $U(1)$-Konnektion

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}'} d^2z[iA_{\bar{z}}^{mero}\partial_z(-\Phi^+ + \Phi^- + \varphi^+ - \varphi^- + c\tilde{b}) + c.c.] \\ =&\tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}'} *A^{mero}\wedge\hat{J}, \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

für eine meromorphe 1-Form $*A$ mit Residuen θ_i und $\sum\theta_i = 0$ auszuwerten. Diese Kopplung muß aber nicht partiell integriert werden, sondern kann mit Hilfe von (7.2.7) ausgewertet werden. Das Ergebnis ist aber für den Fall der meromorphen Differentiale identisch mit dem partiell integrierten Ausdruck. Im Pfadintegral ergibt sich dadurch die Einsetzung

$$e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}'} *A^{mero}\wedge\hat{J}} = e^{\sum\theta_i(-\Phi^+ + \Phi^- + \varphi^+ - \varphi^- + c\tilde{b})(z_i)}. \tag{7.3.5}$$

Dies ist exakt die in Kapitel II diskutierte SFO-Kombination (2.2.22). Da Translationen den SFO nur um BRS-triviale Anteile ändern, kann (7.3.5) wegen $\sum\theta_i = 0$ BRS-äquivalent zur Identität zusammengezogen werden.
Das heißt, alle Einsetzungen des SFO durch die Moduli der Punktierungen sind aufgrund der verschwindenden Summe der Residuen meromorpher Differentiale BRS-äquivalent zur Identität. Einsetzungen dieser Art verändern das Ergebnis bei der Berechnung der Amplituden nicht, sondern interpolieren nur zwischen der Neveu-Schwarz- und der Ramond-Formulierung der String-Amplituden. Um Amplituden vom Neveu-Schwarz-Sektor auf den Ramond-Sektor abzubilden, müssen die Residuen θ_i halbzahlig sein und die SFO auf die Vertexoperatoren angewendet werden. Jede der beiden Bildladungen q^+ und q^- der gesamten Amplitude bleibt bei diesen Transformationen natürlich für sich erhalten.
Es stellt sich die Frage, ob nicht auch die SFO-Einsetzung aufgrund der Chernzahl c_1 durch eine globale meromorphe 1-Form beschrieben werden könnte. Dadurch könnte die unzulässige, partielle Integration in der Kopplung an den nicht-trivialen $U(1)$-Hintergrund A_{c_1} umgangen werden. Die Einsetzung SFO$(-c_1, z_P)$ fügt sich sehr natürlich in die asymmetrische Verteilung der Bildwechsel-Operatoren ein.
Betrachtet man die Kombination aus Bildwechsel-Operator- und SFO-Einsetzungen aus (7.3.1) und (7.3.2) (vgl. [5][7])

$$\prod_{j=1}^{2g-2-c_1+n} X^-(z_j^+) \prod_{j=1}^{2g-2+c_1+n} X^+(z_j^-)\mathrm{SFO}(-c_1, z_P) \tag{7.3.6}$$

und zählt die Potenzen von $e^{\varphi^\pm}$, also den Bildgehalt von (7.3.6) für $X^\pm \sim e^{\varphi^\mp}$ und SFO$(c_1) \sim e^{c_1(\varphi^+ - \varphi^-)}$, so stellt man fest, daß sich die Asymmetrie in φ^+ und φ^- aus den Bildwechsel-Operatoren gerade mit dem SFO wieder weghebt. Doch wie schon am Beispiel des Vertexoperators $V^c_{(0,-1)}$ gesehen, entspricht der SFO$(-c_1, z)$ nicht einer Kombination $(X^+/X^-)^{-c_1}$. Die Anwendung des SFO$(1, z)$ auf $V^c_{(-1,0)}$ erzeugt *nicht* den Vertexoperator $V^c_{(0,-1)}$, sondern einen Operator $\tilde{V}^c_{(0,-1)}$, der zwar im gleichen Bild liegt, aber eine andere Impulsabhängigkeit besitzt. Insbesondere wird die $U(1,1)$-Symmetrie der Amplituden im Targetraum durch diese SFO-Einsetzung gebrochen. Wir werden die Abhängigkeit der Amplituden von der Chernzahl am Beispiel der 3-Punkt-Tree-Amplitude explizit sehen.
Bei der Konstruktion von A_{c_1} für die δ-förmige $U(1)$-Feldstärke wurde das meromorphe Differential ω_{PQ} benutzt. Damit sich eine nicht-verschwindene Chernzahl ergab, mußte der Pol am Punkt Q außerhalb der betrachteten Koordinatenumgebung $\mathcal{D}$ liegen, (vgl. (4.4.12)). Auf der doppelten Überlagerung der zugrunde liegenden Riemannfläche kann A_{c_1} als global aufgefaßt werden. Die beiden Pole bei P und Q liegen dann auf den zwei verschiedenen "Schichten" der doppelten Überlagerung.
Ein möglicher Ausweg, die Chernzahl-Abhängigkeit von (7.3.6) zu "reparieren", ist, die wegtransformierte SFO-Einsetzung SFO(c_1, z_Q) am Pol Q als Teil der Kopplungskonstante λ^{c_1} im Pfadintegral zu betrachten. Auf diese Weise wären beide Pole einer "globalen" meromorphen Konnektion A_{c_1} vorhanden. Zumindest könnte die Verletzung der $U(1,1)$-Invarianz durch ein nicht-triviales Transformationsverhalten der Kopplungskonstante λ wieder repariert werden [31].

Kapitel VIII: Amplituden

Es ist in den vorangegangenen Kapiteln gelungen, das Pfadintegral durch endliche Moduliintegrale und explizite Rechenvorschriften auszudrücken. Insbesondere konnten die Funktion und die Auswertung des $U(1)$-Integrals durch die Bosonisierung der geladenen Felder verdeutlicht werden.
Die zu berechnenden, holomorphen Wurzeln der Amplituden für gegebenen Genus g und Chernzahl c_1 sind von der Form

$$\begin{aligned} A^{c_1}_{g,n} &= \langle V(z_1,k_1)..V(z_n,k_n)\rangle^{g,c_1}_{hol} \\ &= \int (d^{3g-3+n}t)(d^{g-1+n}C)[dZ][d\Psi][dcdb][d\gamma d\beta][d\tilde{c}d\tilde{b}] \\ &\quad \prod_{i=1}^{3g-3+n} \langle \mu_i|b\rangle \prod_{k=1}^{g-1+n} \left\langle \omega_k|\tilde{b}\right\rangle \prod_{j=1}^{2g-2+n-c_1} X^-(z_j^+) \prod_{j=1}^{2g-2+n+c_1} X^+(z_j^-) \\ &\quad V(z_1,k_1)..V(z_n,k_n)e^{-S[t,C,c_1,Z,\Psi,c,b,\gamma^\pm,\beta^\mp,\tilde{c},\tilde{b}]}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Zur Berechnung der Amplitude (8.1) wird nur der holomorphe $Z^{\pm\mu}$-Propagator benutzt. Die vollständige, reelle Amplitude des geschlossenen $N = 2$ Strings erhält man als Betragsquadrat von (8.1). Dabei muß selbstverständlich die Behandlung der $Z^{\pm\mu}$-Propagatoren berücksichtigt und die entsprechenden Loop-Impuls-Einsetzungen ergänzt werden. Für die volle Störungsreihe muß außerdem über den Genus g und die Chernzahl c_1 in den angegebenen Grenzen summiert werden

$$\begin{aligned} A_n = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{c_1=2-2g-n}^{2g-2+n} \kappa^{2-2g}\lambda^{c_1} \int dp^{\pm\mu}\ \exp(i\pi p\cdot\tau p) \\ \left| \langle V(z_1,k_1)..V(z_n,k_n)\rangle^{g,c_1}_{hol\ \ Z\to Z-2\pi p\int^z \omega} \right|^2 . \end{aligned} \tag{8.2}$$

Als "Standard"-Vertexoperator V ist

$$V = V^{\tilde{c}c}_{(-1,-1)} = \tilde{c}ce^{-\varphi^- -\varphi^+} e^{ik\cdot Z} \tag{8.3}$$

einzusetzen. Alternativ können auch Vertexoperatoren aus dem Ramond-Sektor, $V^{\tilde{c}c}_{(-1/2,-1/2)}$ und $V^{\tilde{c}c}_{(-3/2,-3/2)}$, verwendet werden, so daß die einzelnen Summen der Bildladungen q^+ und q^- aber unverändert bleiben. Man muß also immer eine gerade Anzahl Vertexoperatoren des Ramond-Sektors einsetzen. Es hat sich aber gezeigt, daß sich bei der Verwendung von Vertexoperatoren halbzahliger Bilder bis auf Normierungsfaktoren dieselben Amplituden ergeben. Diese Tatsache läßt sich auf den spektralen Fluß zurückführen, siehe Kapitel VII.
Es reicht daher aus, nur Vertexoperatoren von Typ $V^{\tilde{c}c}_{(-1,-1)}$ zu benutzen. Die Antigeist-Einsetzungen von b und $\tilde{b}$ können soweit wie möglich mit den Geistern c und $\tilde{c}$ kontrahiert werden. Auf diese Weise ergibt sich immer der richtige Überschuß an Antigeistern oder Geistern, um die im Pfadintegral auftretenden Nullmoden oder Killing-Vektoren zu absorbieren. Es ist außerdem günstig, die Bildwechsel-Operatoren auf die Vertexoperatoren $V_{(-1,-1)}$ anzuwenden.
Alle im Pfadintegral auftretenden Nullmoden-Einsetzungen sind also berücksichtigt, wenn in den Amplituden Vertexoperatoren mit dem richtigen Geistgehalt und der richtigen, totalen Bildladung benutzt werden. Zur Berechnung der holomorphen Amplitude (8.1) wird das Produkt der eingesetzten Vertexoperatoren nach dem Wickschen Theorem vollständig kontrahiert und durch ein Produkt der entsprechenden, holomorphen Geist- und Materie-Propagatoren ersetzt. Insbesondere wird bei der Berechnung de Amplituden für $c_1 \neq 0$ die Kombination (7.3.6) von Bildwechsel-Operatoren und SFO benutzt und der Erwartungswert der Amplitude mit der Wirkung für triviale Chernzahl $c_1 = 0$ gebildet.
Eine andere Möglichkeit, den nicht-trivialen Hintergrund für $c_1 \neq 0$ und asymmetrische $\beta^\pm$-Nullmoden zu berücksichtigen, ist, die zusätzliche SFO-Einsetzung $\mathrm{SFO}(-c_1, z_P)$ wegzulassen und dafür die Asymmetrie der Nullmoden durch ein entsprechend asymmetrisches Vakuum $|c_1\rangle$ zur Bildung des Erwartungswertes $\langle..\rangle$ aufzufangen [31].

$$\langle...\rangle = \langle 0|\ldots|c_1\rangle = \langle 0|\ldots\mathrm{SFO}(-c_1,0)\,|0\rangle\,. \tag{8.4}$$

Für die Rechnung im Pfadintegral ändert diese Sichtweise jedoch nichts, da für die Kompensation des asymmetrischen Erwartungswertes genau die Nullmoden benötigt werden, die sonst durch die SFO-Einsetzung kompensiert werden (vgl. (8.4)). Wir werden bei der Berechnung der Amplituden den ersten Weg und die Einsetzung (7.3.6) wählen.
Nimmt man jedoch den in Kapitel V diskutierten Zugang über die Bosonisierung und die Möglichkeit der Definition von $U(1)$-Transformationen auf den Bosonen ernst, so verschwindet jegliche Chernzahl-Abhängigkeit der Amplituden. Es gibt dann nur Amplituden für $c_1 = 0$.
Es treten beim $N = 2$ String keine Determinanten des Laplace-Operators Δ bzw. Dedekinsche η-Funktionen im Integral über den Modulraum auf. Alle Determinanten von Δ aus den Integrationen über $Z, \Psi, c, b, \beta, \gamma, \tilde{c}, \tilde{b}$ kürzen sich aufgrund der verschiedenen Statistiken der Felder.

1. Die Drei- und Vier-Punkt-Amplituden auf der Sphäre

Wenden wir uns zunächst der Berechnung von Tree-Level-Amplituden, also den Amplituden auf der Sphäre zu. Auf der Sphäre, bzw. der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ mit ∞, sind die singulären Terme der Operatorprodukte schon die vollständigen Propagatoren der Felder. Auch werden die Effekte der $U(1)$-Integration keine Rolle spielen, weil auf der Sphäre aufgrund der einfachen Topologie keine Spinstrukturen existieren.

Drei-Punkt-Amplituden

Die einzige Drei-Punkt-Amplitude mit Chernzahl $c_1 = 0$ für den NS-Sektor lautet

$$\begin{aligned}
A^{c_1=0}_{g=0,n=3} &= \left\langle V^{c}_{(-1,0)}(z_1) V^{c}_{(0,-1)}(z_2) V^{\tilde{c}c}_{(-1,-1)}(z_3) \right\rangle \\
&= \left\langle c k_1^+ \cdot \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_1\cdot Z}(z_1) c k_2^- \cdot \Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_2\cdot Z}(z_2) \tilde{c} c e^{-\varphi^- -\varphi^+} e^{ik_3\cdot Z}(z_3) \right\rangle \\
&= \langle \tilde{c}(z_3)\rangle \langle c(z_1)c(z_2)c(z_3)\rangle \left\langle e^{-\varphi^-}(z_1) e^{-\varphi^+}(z_2) e^{-\varphi^- -\varphi^+}(3) \right\rangle \\
&\quad \left\langle k^+ \cdot \Psi^-(z_1) k^- \cdot \Psi^+(z_2) \right\rangle . \left\langle e^{ik_1\cdot Z}(z_1) e^{ik_2\cdot Z}(z_2) e^{ik_3\cdot Z}(z_3) \right\rangle . \qquad (8.1.1)
\end{aligned}$$

Die dabei auftretenden Geist-Amplituden dienen der Absättigung der jeweiligen Nullmoden-Integration. Der $U(1)$-Geist $\tilde{c}$ absorbiert die auf jeder Riemannfläche auftretende konstante Nullmode, die metrischen Geister c absorbieren die drei Killing-Vektoren der Sphäre. Die einzelnen Erwartungswerte werden schließlich nach dem Wickschen Theorem ausgewertet. Für die Zwei-Punkt-Kontraktionen können auf der Sphäre nun die entsprechenden Operator-Produkte eingesetzt werden. Für den Koba-Nielsen-Term ergibt sich

$$\left\langle e^{ik_1\cdot Z}(z_1) e^{ik_2\cdot Z}(z_2) e^{ik_3\cdot Z}(z_3) \right\rangle = (z_1-z_2)^{-k_1\cdot k_2}(z_1-z_3)^{-k_1\cdot k_3}(z_2-z_3)^{-k_2\cdot k_3}. \quad (8.1.2)$$

Die Kinematik der Drei-Punkt-Amplitude mit

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0, \qquad k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = 0, \qquad (8.1.3)$$

läßt auch die Produkte $k_i \cdot k_j$ verschwinden, so daß aus dem Koba-Nilsen-Term keine Beiträge folgen. Es bleibt aus den Ψ- und Geist-Korrelatoren

$$\begin{aligned}
A^{c_1}_{g=0,n=3} &= (z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_3)(z_1-z_3)^{-1}(z_2-z_3)^{-1} 2k_1^+ \cdot k_2^- (z_1-z_2)^{-1} \\
&= k_1^+ \cdot k_2^- - k_1^- \cdot k_2^+ =: c_{12}. \qquad (8.1.4)
\end{aligned}$$

Die gleiche Amplitude erhält man auch für die Rechnung im R-Sektor mit

$$\left\langle V^{\tilde{c}c}_{(-1,-1)}(z_1) V^{c}_{(-1/2,-1/2)}(z_2) V^{c}_{(-1/2,-1/2)}(z_3) \right\rangle . \qquad (8.1.5)$$

Für Chernzahl $c_1 = 1$ erhält man eine asymmetrische Verteilung der Bildladungen und eine Einsetzung des SFO, wenn man der Vorgehensweise von Berkovits und Vafa [6] folgt. Der SFO kann wie die Bildwechsel-Operatoren einfach auf einen Vertexoperator für $z \sim w$ gemäß der Operatorprodukt-Regeln angewendet werden, da Translationen des SFO BRS-trivial sind. Wie in Kapitel I gesehen, ergibt der SFO, angewendet auf einen $(0,-1)$-Operator,

$$\mathrm{SFO}(-1,z) V^{\tilde{c}c}_{(0,-1)}(w) \tilde{c} c k^- \cdot \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik\cdot Z}(w) = \tilde{V}^{\tilde{c}c}_{(-1,0)}(w). \qquad (8.1.6)$$

Die “geflossene” 3-Punkt-Amplitude für Chernzahl $c_1 = 1$ lautet also

$$A^{c_1=1}_{g=0,n=3} = \left\langle \tilde{V}^{c}_{(-1,0)}(z_1) V^{c}_{(0,-1)}(z_2) V^{\tilde{c}c}_{(-1,-1)}(z_3) \right\rangle \sim k_2^{-\nu} \varepsilon_{\nu\mu} k_3^{-\mu} \neq c_{23}. \qquad (8.1.7)$$

Diese Amplitude verletzt wegen der Impulskombination zweier $k^{-\mu}$ explizit die $U(1,1)$-Invarianz.

Vier-Punkt-Amplituden

Die Vier-Punkt-Amplituden für $c_1 = 0$ enthält die Vertexoperatoren

$$\begin{aligned}
A^{c_1=0}_{g=0,n=4} &= \left\langle V^{\tilde{c}c}_{(-1,0)}(z_1) V^{\int}_{(-1,0)}(z_2) V^{c}_{(0,-1)}(z_3) V^{c}_{(0,-1)}(z_4) \right\rangle \\
&= \Bigg\langle (\tilde{c} c k_1^+ \cdot \Psi^- e^{-\varphi^-} - 2ic\eta^-) e^{ik_1\cdot Z}(z_1) \int dz_2 k_2^+ \cdot \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_2\cdot Z}(z_2) \\
&\quad c k_3^- \cdot \Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_3\cdot Z}(z_3) c k_4^- \cdot \Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_4\cdot Z}(z_4) \Bigg\rangle . \qquad (8.1.8)
\end{aligned}$$

Da der zweite Summand des $V^{\tilde{c}c}_{(-1,0)}$-Operators keinen $U(1)$-Geist $\tilde{c}$ zur Neutralisierung der konstanten Nullmode beinhaltet, wird der Beitrag dieses Summanden in der Amplitude nicht auftreten. Die Auswertung mit Wickschem Theorem und Operatorprodukten ergibt

$$\begin{aligned} A^{c_1=0}_{g=0,n=4} = 4 \int & dz_2 (z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_3 - z_4)(z_1 - z_2)^{-1}(z_3 - z_4)^{-1} \\ & [k_1^+ \cdot k_3^- (z_1 - z_3)^{-1} k_2^+ \cdot k_4^- (z_2 - z_4)^{-1} \\ & - k_1^+ \cdot k_4^- (z_1 - z_4)^{-1} k_2^+ \cdot k_3^- (z_2 - z_3)^{-1}] \prod_{1 \le i < j \le 4} (z_i - z_j)^{k_i \cdot k_j}. \end{aligned} \tag{8.1.9}$$

Aufgrund der drei Killing-Vektoren der Sphäre kann

$$z_1 = 0, \qquad z_3 = 1, \qquad z_4 = \infty \tag{8.1.10}$$

gewählt werden. Anschließend ist nur noch die Integration über z_2 auszuführen. Die auftetenden Integrale sind von der Form

$$\int dz^2 \, |z|^{-a} \, |1 - z|^{-b} = \pi \frac{\Gamma(1 - \frac{a}{2})\Gamma(1 - \frac{b}{2})\Gamma(\frac{a+b}{2} - 1)}{\Gamma(2 - \frac{a+b}{2})\Gamma(a)\Gamma(b)}, \tag{8.1.11}$$

wobei Γ die Gammafunktion mit $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ist. Das Ergebnis der Amplitude ist proportional zu

$$(k_1^+ \cdot k_3^-)(k_2^+ \cdot k_4^-)t + (k_1^+ \cdot k_4^-)(k_2^+ \cdot k_3^-)u = 0 \tag{8.1.12}$$

mit den Mandelstam-Variablen $s = -2k_1 \cdot k_2$, $t = -2k_2 \cdot k_3$, $u = -2k_1 \cdot k_3$. Überraschenderweise verschwindet dieser kinematische Faktor aufgrund der speziellen $(2,2)$-Impulserhaltung und $k_i^2 = 0$ [4].

$$A^{c_1=0}_{g=1,n=4} = 0. \tag{8.1.13}$$

Zur Berechnung der Vier-Punkt-Amplitude für nicht-trivale Chernzahl wird wie im Fall der Drei-Punkt-Amplitude verfahren. Es erfolgt eine Einsetzung des SFO vor asymmetrischem Hintergrund der Bildladungen. Kontraktionen und Integrale ergeben sich dann analog zur Vier-Punkt-Amplitude mit $c_1 = 0$.
Für die Vier-Punkt-Amplituden mit Chernzahl $c_1 = 1$ und $c_1 = 2$ ergeben sich die Proportionalitäten

$$\begin{aligned} A^{c_1=1}_{g=0,n=4} &= \left\langle V^{\tilde{c}c}_{(-1,0)}(z_1) V^{\int}_{(-1,0)}(z_2) V^{c}_{(-1,0)}(z_3) V^{c}_{(0,-1)}(z_4) \mathrm{SFO}(1,w) \right\rangle \\ &\sim (k_1^{++} k_4^{--} - k_1^{+-} k_4^{-+})(k_2^{++} k_3^{+-} - k_2^{+-} k_3^{++})u \\ &\quad + (k_1^{++} k_3^{--} - k_1^{+-} k_3^{-+})(k_2^{++} k_4^{+-} - k_2^{+-} k_4^{++})t = 0, \end{aligned} \tag{8.1.14}$$

$$\begin{aligned} A^{c_1=2}_{g=0,n=4} &= \left\langle V^{\tilde{c}c}_{(-1,0)}(z_1) V^{\int}_{(-1,0)}(z_2) V^{c}_{(-1,0)}(z_3) V^{c}_{(0,-1)}(z_4) \mathrm{SFO}(2,w) \right\rangle \\ &\sim (k_1^{++} k_4^{+-} - k_1^{+-} k_4^{++})(k_2^{++} k_3^{+-} - k_2^{+-} k_3^{++})u \\ &\quad + (k_1^{++} k_3^{+-} - k_1^{+-} k_3^{++})(k_2^{++} k_4^{+-} - k_2^{+-} k_4^{++})t = 0. \end{aligned} \tag{8.1.15}$$

Die kinematischen Faktoren der Amplituden verschwinden also ebenfalls.

2. Die 3-Punkt-1-Loop-Amplitude

Bei der Berechnung der 1-Loop-Amplitude treten zum ersten Mal die speziellen Funktionen wie Primeform und Thetafunktionen auf, die das Auswerten der Amplitude erschweren.
Die Amplitude für Genus $g = 1$, $n = 3$ und Chernzahl $c_1 = 0$ besteht nur aus Vertexoperatoren im $(0,0)$-Bild. Die Geister werden vollständig durch die Antigeist-Einsetzungen neutralisiert.

$$A^{c_1=0}_{g=1,n=3} = \left\langle V^{\int}_{(0,0)}(z_1) V^{\int}_{(0,0)}(z_2) V^{\int}_{(0,0)}(z_3) \right\rangle \tag{8.2.1}$$

mit

$$V^{\int}_{(0,0)} = \int [(k^+ \cdot \partial Z^-) - (k^- \cdot \partial Z^+) - i(k^+ \cdot \Psi^-)(k^- \cdot \Psi^+)] e^{ik \cdot Z}. \tag{8.2.2}$$

Es tauchen in der Amplitude nur Materie-Propagatoren auf. Die einfache Kinematik der 3-Punkt-Amplitude erlaubt, alle auftretenden Impulsfaktoren zu einem c_{12} umzuformen. Es läßt sich insgesamt ein Faktor $(c_{12})^3$ ausklammern. Für den Integranden der chiralen Amplitude, also Z-Propagatoren ohne Loop-Impuls-Verschiebung, ergibt sich mit Hilfe des Wickschen Theorems

$$\begin{aligned} & I(z_1, z_2, z_3) = \\ & -ic_{23}^3 \Bigg[- \left(\frac{\Theta(z_1 - z_2)}{\Theta(0) E(z_1, z_2)} \right)^2 \partial_{z_3} \log \frac{E(z_3, z_1)}{E(z_3, z_2)} - \left(\frac{\Theta(z_2 - z_3)}{\Theta(0) E(z_2, z_3)} \right)^2 \partial_{z_3} \log \frac{E(z_1, z_2)}{E(z_1, z_3)} \\ & \qquad - \left(\frac{\Theta(z_3 - z_1)}{\Theta(0) E(z_3, z_1)} \right)^2 \partial_{z_2} \log \frac{E(z_2, z_3)}{E(z_2, z_1)} \\ & \qquad + \partial_{z_1} \log \frac{E(z_1, z_2)}{E(z_1, z_3)} \partial_{z_2} \log \frac{E(z_2, z_3)}{E(z_2, z_1)} \partial_{z_3} \log \frac{E(z_3, z_1)}{E(z_3, z_2)} \\ & \qquad - 2 \frac{\Theta(z_1 - z_2)\Theta(z_2 - z_3)\Theta(z_3 - z_1)}{\Theta(0)^3 E(z_1, z_2) E(z_2, z_3) E(z_3, z_1)} \Bigg]. \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

Dieser Ausdruck muß noch über z_1, z_2, z_3 sowie über die Spinstruktur und den metrischen Modulus τ integriert werden. Eine analytische Lösung dieser Integrale scheint nicht

möglich, wenden wir uns daher der Diskussion des Integranden zu.
Zunächst soll uns die Polstruktur in den Punkten $z_1,..,z_3$ interessieren. Betrachtet man den Fall, daß alle Punkte $z_1..z_3$ nah zusammenkommen, dann können die Primeformen $E(z_i,z_j)$ durch $z_i - z_j$ genähert und die Thetafunktionen $\Theta(z_i - z_j)$ mit $\Theta(0)$ gekürzt werden. Man erhält

$$I(z_1,z_2,z_3) \sim \frac{1}{(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)}(1+1+1-1-2) = 0. \tag{8.2.4}$$

Der dreifache Pol für $z_1 \sim z_2 \sim z_3$ verschwindet. Als nächstes halten wir zwei beliebige Punkte z_1, z_2 fest und betrachten (8.2.3) als Funktion der dritten Koordinate z_3. Man kann nun erneut das Polverhalten für den Fall $z_3 \sim z_1$ und den Fall $z_3 \sim z_2$ studieren und die entsprechenden Funktionen wieder nähern. Dabei ist zu beachten, daß gilt

$$\partial_z \log \frac{E(x,z)}{E(x,w)} = \omega_{zw}(x) \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{res}_z \omega_{zw} = 1 = -\mathrm{res}_w \omega_{zw}. \tag{8.2.5}$$

Der Ausdruck (8.2.5) bildet in x also ein meromorphes Differential mit Polen in z und w. Außerdem gilt für $z \sim w$, daß $E(z,w) \sim z - w$ genähert werden kann. Damit läßt sich das Kurzabstands-Verhalten einiger Terme sofort hinschreiben, andere Terme können regulär entwickelt werden. Betrachte wir den Fall $z_3 \sim z_1$:

$$\begin{aligned} I(z_1,z_2,z_3) \sim & -\left(\frac{\Theta(z_1-z_2)}{\Theta(0)E(z_1,z_2)}\right)^2 \frac{1}{z_3-z_1} - \left(\frac{\Theta(z_2-z_3)}{\Theta(0)E(z_2,z_3)}\right)^2 \frac{-1}{z_1-z_3} \\ & - \left(\frac{\Theta(z_3-z_1)}{\Theta(0)E(z_3,z_1)}\right)^2 \partial_{z_2} \log(1 + \frac{(z_3-z_1)\partial_{z_1}E(z_2,z_1)}{E(z_2,z_1)}) \\ & + \frac{-1}{z_1-z_3}\partial_{z_2}\log(1+\frac{(z_3-z_1)\partial_{z_1}E(z_2,z_1)}{E(z_2,z_1)})\frac{1}{z_3-z_1} \\ & -2\frac{\Theta(z_1-z_2)\Theta(z_2-z_1)\Theta(0)}{\Theta(0)^3E(z_1,z_2)E(z_2,z_1)(z_3-z_1)} \\ \sim & \, 0. \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

Eine analoge Rechnung ergibt sich für den Fall $z_3 \sim z_2$. Aus der zyklischen Symmetrie $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$ des Integranden $I(z_1,z_2,z_3)$ folgt das gleiche Resultat auch für andere festgehaltene Paare z_i, z_j. Man stellt also fest, daß sich auch alle einfachen Pole wegheben.
Eine holomorphe Funktion ohne Pole auf einem Torus wäre konstant, die z-Integrale wären trivial und ergäben nur den Flächeninhalt der Riemannfläche. Nur handelt es sich bei (8.2.3) leider nicht um eine einwertige Funktion auf dem Torus.

Die Primeform und die Thetafunktion haben folgendes Verhalten unter einer Verschiebung entlang der Homologiebasis a, b des Torus

$$\begin{aligned} E(z+a,w) &= E(z,w) \\ E(z+b,w) &= -e^{-i\pi\tau - 2\pi i \int_z^w \omega} E(z,w) \\ \Theta\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}(z+a) &= \Theta\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}(z+1) = e^{2\pi i \delta_1}\Theta\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}(z) \\ \Theta\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}(z+b) &= \Theta\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}(z+\tau) = e^{-2\pi i\delta_2 - \pi i \tau - 2\pi i z}\Theta\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}(z). \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

Der Ausdruck

$$\left(\frac{\Theta(z-w)}{\Theta(0)E(z,w)}\right)^2$$

ist dabei im wesentlichen einwertig und nimmt nur die Phase $e^{4\pi i\delta}$ auf, die beim holomorphen Betragsquadrat wieder verschwindet. Der Term

$$\partial_x \log \frac{E(x,z)}{E(x,w)} \tag{8.2.8}$$

erfährt beim b-Shift eine Verschiebung um $2\pi i$.

$$\partial_x \log \frac{E(x,z)}{E(x,w)} \to \partial_x \log \frac{E(x,z)}{E(x,w)} - 2\pi i. \tag{8.2.9}$$

Die Amplitude ist in der obigen Form als Integral über $I(z_1,z_2,z_3)$ nicht wohldefiniert. Der Integrand ist aber auch noch nicht vollständig, es fehlt noch die Ergänzung des holomorphen $Z^{\pm\mu}$-Propagators um den Loop-Impuls $p^{\pm\mu}$. Die Amplitude muß erst nach der Integration über den Loop-Impuls einwertig werden. Es reicht also aus, wenn die chirale Amplitude nach Einführung der Loop-Impulse nur bis auf Verschiebungen im Loop-Impuls einwertig ist.
Um die vollständige Amplitude zu erhalten, führen wir nun die Loop-Impulse $p^{\pm\mu}$ ein. Die Verschiebung $Z^{\pm\mu}(z) \to Z^{\pm\mu}(z) - 2\pi p^{\pm\mu} z$ berührt nur die $\partial \log E$-Terme aus

$$\begin{aligned} &\left\langle (k_1^+ \cdot \partial Z^- - k_1^- \cdot \partial Z^+)(z)(k_2^+ \cdot Z^- + k_2^- \cdot Z^+)(w)) \right\rangle = \\ &-4(k_1^+ \cdot k_2^-)(\partial_z \log E(z,w) + \pi \frac{k_1 \cdot p}{k_1^+ \cdot k_2^-}). \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

Das heißt, man muß in (8.2.3) etwa

$$\partial_{z_1} \log \frac{E(z_1,z_2)}{E(z_1,z_3)}$$

durch

$$\partial_{z_1} \log \frac{E(z_1,z_2)}{E(z_1,z_3)} + 2\pi \frac{k_1 \cdot p}{k_1^+ \cdot k_2^-}.$$

ersetzen. Die Analyse der Polstruktur der zusätzlichen Terme ergibt, daß auch nach Hinzunahme der Loop-Impulse noch immer alle Pole verschwinden. Die Mehrwertigkeit von (8.2.8) kann wieder durch eine Verschiebung im Loop-Impuls repariert werden.

$$p^{\pm +} \to p^{\pm +} - k_1^{\pm +} \qquad p^{\pm -} \to p^{\pm -} + k_1^{\pm -}. \tag{8.2.11}$$

Aber auch nach der Ausintegration des Loop-Impulses können sich keine Pole entwickeln, nur ist der Integrand I nun nicht mehr holomorph und die Theoreme der Funktionentheorie sind nicht mehr anwendbar.
Eine Methode, die 3-Punkt-Amplitude indirekt zu berechnen, wurde von Bonini, Gava, Iengo [32] vorgeschlagen. Da die Verwendung der Loop-Impulse für die Diskussion des Integranden keinen Vorteil bringt, ist es sinnvoll gleich den vollständigen Z-Propagator $\log F(z,w)$ zu benutzen. Da der holomorphe Anteil der Amplitude keine Pole besitzt, können die interessanten, anholomorphen Beiträge des Propagators durch antiholomorphe Ableitungen $\partial_{\bar{z}_i}, \quad i = 1,2,3$ herausprojiziert werden. Auf dieses Weise lassen sich Differentialgleichungen für die Amplitude aufstellen und lösen.
Das Ergebnis der vollständigen, modular invarianten Amplitude von Bonini, Gava und Iengo lautet

$$\left|A^{c_1=0}_{g=1,n=3}\right|^2 = c_{12}^6 \int \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2} (\mathrm{Im}\tau)^3 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{|n - m\tau|^2}. \tag{8.2.12}$$

Bei dieser Berechnung der Amplitude mußte kein Gebrauch von einer bestimmten Spinstruktur gemacht werden. Die Integration über die $U(1)$-Moduli konnte also als konstanter Faktor abgespalten werden.
Die Integration über den Modulus τ liefert eine IR-Divergenz für $\mathrm{Im}\tau \to \infty$. Eine weitere Auswertung des Integrals [26]

$$\left|A^{c_1=0}_{g=1,n=3}\right|^2 = c_{12}^6 \int_0^\infty d(\mathrm{Im}\tau) \frac{\mathrm{Im}\tau}{7!} \tag{8.2.13}$$

läßt die IR-Divergenz explizit werden. Der kinematische Faktor c_{12}^6 unterscheidet sich von dem der Tree-Level-Amplitude c_{12}^2. Diese Potenz ist aber konsistent mit der Vorstellung, daß die 3-Punkt-1-Loop-Amplitude aus drei 3-Punkt-Tree-Amplituden zusammengesetzt werden kann, so daß sich die kinematischen Faktoren der Tree-Amplituden zu c_{12}^6 multiplizieren.
Mit diesem Mechanismus lassen sich auch sofort die Ein-Loop-Amplituden für Chernzahl $c_1 = 1,2,3$ hinschreiben. Jede Erhöhung oder Erniedrigung der Chernzahl um 1 bewirkt den Twist des kinematischen Faktors einer Tree-Level-Amplitude

$$c_{12} = k_1^+ \cdot k_2^- - k_1^- \cdot k_2^+ = 2k_1^+ \cdot k_2^-$$

zu

$$c_{12}^\pm = k_1^{\pm\nu} \varepsilon_{\nu\mu} k_2^{\pm\mu}.$$

Die Drei-Punkt-Ein-Loop-Amplituden für Chernzahl $c_1 = \pm k$ mit $k = 1,2,3$ lauten somit

$$\left|A^{c_1=\pm k}_{g=1,n=3}\right|^2 = \left(\frac{c_{12}^\pm}{c_{12}}\right)^{2k} \left|A^{c_1=0}_{g=1,n=3}\right|^2. \tag{8.2.14}$$

3. Die 4-Punkt-1-Loop-Amplitude

Die 4-Punkt-1-Loop-Amplitude läßt sich wie alle Ein-Loop-Amplituden nur mit Vertexoperatoren vom Typ $V^{\int}_{(0,0)}$ berechnen. Die Anzahl der Moduli und damit die Anzahl der Bildwechsel- und Antigeist-Einsetzungen der Ein-Loop-Amplituden ist gleich der Anzahl der Punktierungen. Jeder "Standard"-Vertexoperator vom Typ $V^{\tilde{c}c}_{(-1,-1)}$ kann damit in ein $V^{\int}_{(0,0)}$ verwandelt werden. Wir betrachten also

$$\left\langle V^{\int}_{(0,0)}(z_1) V^{\int}_{(0,0)}(z_2) V^{\int}_{(0,0)}(z_3) V^{\int}_{(0,0)}(z_4) \right\rangle. \tag{8.3.1}$$

Ein Problem, diese Amplitude in eine handhabbare Form zu bringen, ist das Auftreten verschiedenster Impulskombinationen. Aufgrund der etwas komplizierteren Kinematik der Vier-Punkt-Amplitude, lassen sich die Produkte der Impulse nicht mehr zu nur einem Ausdruck c_{12} umformen, wie das der Fall bei der Drei-Punkt-Amplitude war. Um die Struktur der Amplitude und der auftretenden Impulsfaktoren zu verdeutlichen, ist es sinnvoll, für den Vertexoperator die formale Abkürzung

$$\begin{aligned} V^{\int}_{(0,0)} &= \int [(k^+ \cdot \partial Z^-) - (k^- \cdot \partial Z^+) - i(k^+ \cdot \Psi^-)(k^- \cdot \Psi^+)] e^{ik\cdot Z} \\ &=: \int [\partial Z + \Psi^2] e^Z \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

einzuführen. Die Integranden der vier Vertexoperatoren ergeben mit dem Wickschen Theorem bis auf Permutationen die Terme

$$\left\langle \Psi^2(1)\Psi^2(2)\right\rangle \left\langle \Psi^2(3)\Psi^2(4)\right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&+ \langle \partial Z(1) \partial Z(2) \rangle \langle \partial Z(3) \partial Z(4) \rangle \\
&+ \left\langle \Psi^2(1) \Psi^2(2) \right\rangle [\langle \partial Z(3) \partial Z(4) \rangle + \langle \partial Z(3) Z(1,2,4) \rangle \langle \partial Z(4) Z(1,2,3) \rangle] \\
&+ \langle \partial Z(1) \partial Z(2) \rangle \langle \partial Z(3) Z(1,2,4) \rangle \langle \partial Z(4) Z(1,2,3) \rangle \\
&+ \langle \partial Z(1) Z(2,3,4) \rangle \langle \partial Z(2) Z(1,3,4) \rangle \langle \partial Z(3) Z(1,2,4) \rangle \langle \partial Z(4) Z(1,2,3) \rangle . \quad (8.3.3)
\end{aligned}
$$

Die dabei in Erscheinung tretenden, holomorphen Zwei-Punkt-Funktionen sind von der Form

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Psi^2(i) \Psi^2(j) \right\rangle &= -4(k_i^+ \cdot k_j^-)(k_i^- \cdot k_j^+) \left(\frac{\Theta(z_i - z_j)}{\Theta(0) E(z_i, z_j)} \right)^2 , \\
\langle \partial Z(i) \partial Z(j) \rangle &= -4(k_i \cdot k_j) \partial_{z_i} \partial_{z_j} \log E(z_i, z_j), \\
\langle \partial Z(i) Z(j) \rangle &= -i[(k_i^+ \cdot k_j^-) - (k_i^- \cdot k_j^+)] \partial_{z_i} \log E(z_i, z_j) \\
&= -i c_{ij} \partial_{z_i} \log E(z_i, z_j). \qquad (8.3.4)
\end{aligned}
$$

Zieht man noch alle möglichen Permutationen in Betracht, so ergeben sich insgesamt 206 Terme. Die möglichen auftretenden Impulsfaktoren sind

$$
\begin{aligned}
&(k_i^+ \cdot k_j^-)(k_i^- \cdot k_j^+)(k_k^+ \cdot k_l^-)(k_k^- \cdot k_l^+), \\
&(k_i^+ \cdot k_j^-)(k_i^- \cdot k_j^+)(k_k \cdot k_l), \\
&(k_i \cdot k_j)(k_k \cdot k_l), \\
&(k_i^+ \cdot k_j^-)(k_i^- \cdot k_j^+) c_{kl} c_{mn}, \\
&(k_i \cdot k_j) c_{kl} c_{mn}, \\
&c_{1i} c_{2j} c_{3k} c_{4l}. \qquad (8.3.5)
\end{aligned}
$$

Es läßt sich leicht überprüfen, daß diese Impulsfaktoren für generische Indexkombinationen i, j, k, l, m, n nicht verschwinden. Wenn sich für die 4-Punkt-1-Loop-Amplitude Null ergibt, dann erst wieder nach Integration über die z_i, $i = 1, .., 4$, wie auch im Falle der 4-Punkt-Tree-Amplitude. Diese Integration läßt sich aber analytisch nicht mehr ausführen.

Kapitel IX: Zusammenfassung

Es ist in dieser Arbeit gelungen, das Pfadintegral des $N = 2$ Strings über $N = 2$ Super-Riemannflächen durch ein Integral über den $N = 2$ Modulraum zu definieren und Vorschriften zur expliziten Berechnung der String-Amplituden anzugeben. Die metrischen und fermionischen Moduli konnten analog zu den vom $N = 1$ String bekannten Vorgehensweisen behandelt werden. Die Ausintegration der fermionischen Moduli lieferte dabei Einsetzungen der Bildwechsel-Operatoren $X^{\pm}$ im Pfadintegral, deren Anzahl $2g - 2 \mp c_1$ vom Genus g der Riemannfläche und der Chernzahl c_1 des $U(1)$-Bündels abhängt. Das Integral über die $U(1)$-Moduli konnte durch die Bosonisierung der geladenen Felder explizit in das erwartete Integral über die Spinstrukturen umgeschrieben werden.

Der besondere Feldgehalt des $N = 2$ Strings gestattete es zudem, $U(1)$-Transformationen auf den geladenen Bosonen zu definieren. Die geladenen Bosonen verhalten sich unter diesen Transformationen wie eine $U(1)$-Konnektion. Verfährt man konsequenterweise mit den Bosonen analog zur Behandlung der $U(1)$-Konnektion A bei der Definition des Pfadintegrals, so verschwindet jegliche Abhängigkeit von der Chernzahl c_1. Der nicht-triviale, Chernzahl-abhängige Anteil der Bosonen bewirkt eine quasi-$U(1)$-Transformation, die das nicht-triviale $U(1)$-Bündel für $c_1 \neq 0$ auf das triviale für $c_1 = 0$ abbildet.

Eine andere Methode, die nicht-trivialen Beiträge für $c_1 \neq 0$ auszuwerten, wie sie in [5][6][7] verfolgt wird, führt zu einer Einsetzung des $\mathrm{SFO}(-c_1, z_P)$ im Pfadintegral. Der bei diesem Weg im Pfadintegral auftretende Ausdruck

$$\prod_{i=1}^{2g-2-c_1} X^{+}(z_i) \prod_{j=1}^{2g-2+c_1} X^{-}(z_j)\mathrm{SFO}(-c_1, z_P)$$

ist aber *abhängig* von der Chernzahl, wie es am Beispiel der 3-Punkt-Tree-Amplitude und am Vertexoperator $V_{(-1,-1)}$ nachgewiesen wurde. Zudem brechen die nach dieser Vorschrift berechneten Amplituden explizit die Targetraum-Symmetrie $U(1, 1)$ der Wirkung.

Es konnte weiter gezeigt werden, daß das Pfadintegral auf punktierten Riemannflächen sich vollständig im Formalismus der kompakten Riemannflächen behandeln läßt, wenn man zusätzlich entartete Riemannflächen erlaubt. Die durch die Punktierungen bei z_i erzeugten zusätzlichen $U(1)$-Moduli führen zur Einsetzung von $\prod_i \mathrm{SFO}(\theta_i, z_i)$, die aber wegen $\sum \theta_i = 0$ keinen Beitrag zur Chernzahl ergibt. Diese Einsetzung kann die BRS-Äquivalenz zwischen den Vertexoperatoren des Neveu-Schwarz- und des Ramond-Sektors bei der Berechnung der String-Amplituden erklären. Alle Vertexoperatoren des Neveu-Schwarz- und des Ramond-Sektores beschreiben also nur einen einzigen, masselosen, skalaren Stringzustand.

Schließlich konnten noch einige Tree-Amplituden auch für $c_1 \neq 0$ berechnet, die 3-Punkt-1-Loop-Amplitude und die Struktur der 4-Punkt-1-Loop-Amplitude diskutiert werden.

Es bleiben aber weiterhin noch einige interessante Amplituden auszuwerten, z.B. höhere Loop-Beiträge zur Vier-Punkt-Amplitude, die aufgrund ihres hohen rechnerischen Aufwandes aber nur noch schwer analytisch ausgewertet werden können. Hier bieten sich eventuell numerische Verfahren an. Diese Amplituden ergäben eine wichtige Überprüfung der Ergebnisse von Ooguri und Vafa [7], die mittels einer Einbettung des $N = 2$ Strings in einen topologisch getwisteten $N = 4$ String das Verschwinden aller höheren Loop-Beiträge der $N = 2$ String-Amplituden für eine Targetraumzeit $T^2 \times \mathbb{R}^2$ postulieren. Die kinematische Struktur der höheren Loop-Korrekturen zur Drei-Punkt-Amplitude erlaubt einen direkten Test der Vermutung, daß die Dynamik des masselosen Freiheitsgrades durch die selbstduale Yang-Mills-Theorie oder selbstduale Gravitation ohne Stringkorrekturen exakt beschrieben wird.

Anhang A: Konventionen

Spinor-Notationen:

$$
\begin{aligned}
\Psi^{\pm\mu} &= \Psi^{2\mu} \pm i\Psi^{3\mu}, \\
\Psi^{\pm\mu} &= \begin{pmatrix} \Psi^{\pm\mu}_{\uparrow} \\ \Psi^{\pm\mu}_{\downarrow} \end{pmatrix}, \\
\bar{\Psi} &= \Psi^{\dagger}\gamma^{0}.
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

wobei $\Psi^{i\mu}; i = 2,3; \mu = 0,1$ Majorana-Spinoren sind. μ ist dabei der $SO(1,1)$ Lorentz-Index und i der $SO(2)$ euklidische bzw. komplexe Index der totalen $SO(2,2)$-Lorentz-Gruppe.
Die Dirac-Algebra:

$$
\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\tag{A.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}, \qquad \gamma^a\gamma^b = \eta^{ab} + \epsilon^{ab}\gamma_5, \\
&\gamma_b\gamma^a\gamma^b = 0, \\
&\eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon^{01} = 1 = \epsilon_{10},
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

$$
{\gamma^{\mu}}^{\dagger} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0.
\tag{A.4}
$$

Die Lorentz-Algebra und ihre Darstellungen:

$$
\left[L^{ab}, L^{cd}\right] = \eta^{ad}L^{bc} - \eta^{bd}L^{ac} - \eta^{bc}L^{ad} + \eta^{ac}L^{bd}.
\tag{A.5}
$$

Die Darstellung der Lorentz-Algebra auf Vektoren v und Spinoren Ψ lautet

$$
\begin{aligned}
(L^{ab})_r{}^s v_s &= (\delta^a_r\eta^{bs} - \delta^b_r\eta^{as})v_s, \\
L^{ab}\Psi &= \frac{1}{4}\left[\gamma^a, \gamma^b\right]\Psi = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\gamma_5\Psi.
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

Lorentz-kovariante Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
D_m v^a &= \partial_m v^a + \frac{1}{2}\omega_{mcd}(L^{cd})_b{}^a v^b \\
&= \partial_m v^a + \omega_m \epsilon^a{}_b v^b, \\
D_m\Psi &= \partial_m\Psi + \frac{1}{2}\omega_{mcd}(L^{cd})\Psi \\
&= \partial_m\Psi + \frac{1}{2}\omega_m\gamma_5\Psi,
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\omega_m &= \frac{1}{2}\omega_{mab}\epsilon^{ab}, \\
e_a{}^m\omega_m &= \epsilon^{nl}(\partial_l e_{na} + i\bar{\chi}_l^-\gamma_a\chi_n^+).
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

Lichtkegelkoordinaten auf der Weltfläche:

$$
\begin{aligned}
x^{\pm} = x^0 \pm x^1, &\qquad \partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1), \\
\eta^{+-} = 2, &\qquad \eta_{-+} = \frac{1}{2},
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

$$
\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\tag{A.10}
$$

Eine anschließende Wick-Rotation $x^0 \to -ix^0$ führt zu folgenden Definitionen:

$$
\begin{aligned}
&x^+ \to z, \quad x^- \to \bar{z}, \quad \partial_+ \to \partial_z, \quad \partial_- \to \partial_{\bar{z}}, \\
&\gamma^0 \to -i\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\gamma^z = \gamma^+, \qquad \gamma^{\bar{z}} = \gamma^-.
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

Anhang B: Differentialformen und Integrale

Hier nun einige nützliche Formeln für den Umgang mit Differentialformen.

1. Differentialformen auf kompakten Riemannflächen

In einer lokalen Koordinatenumgebung lassen sich 1- und 2-Formen durch Koordinatendifferentiale ausdrücken.

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_z dz + \omega_{\bar{z}} d\bar{z}, \\
df &= \partial_z f dz + \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}, \\
\phi &= \phi_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z}, \\
d\omega &= (\partial_z \omega_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \omega_z) dz \wedge d\bar{z}.
\end{aligned} \tag{B.1.1}$$

Für eine Metrik dieser Koordinatenumgebung in konformer Eichung

$$g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} e^{\rho}$$

definiert sich der Hodge-Stern über

$$\begin{aligned}
*\omega &= -i\omega_z dz + i\omega_{\bar{z}} d\bar{z}, \\
*\phi &= -2ie^{-\rho} \phi_{z\bar{z}}.
\end{aligned} \tag{B.1.2}$$

Für die Menge der harmonischen 1-Formen läßt sich bezüglich einer Homologiebasis $\{a_1, .., a_g, b_1, .., b_g\}$ der kompakten Riemannfläche vom Genus g eine normierte Basis $\{\alpha_1, .., \alpha_g, \beta_1, .., \beta_g\}$ angeben mit

$$\begin{aligned}
\oint_{a_i} \alpha_j &= \oint_{b_i} \beta_j = \delta_{ij}, \\
\oint_{b_i} \alpha_j &= \oint_{a_i} \beta_j = 0.
\end{aligned} \tag{B.1.3}$$

Aus den harmonischen 1-Formen lassen sich die holomorphen bzw. antiholomorphen 1-Formen linear kombinieren.

$$\begin{gathered}
\omega_i = \alpha_i + \tau_{ij}\beta_j, \quad \bar{\omega}_i = \alpha_i + \bar{\tau}_{ij}\beta_j, \\
\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}, \quad \oint_{b_i} \omega_j = \tau_{ij}.
\end{gathered} \tag{B.1.4}$$

τ ist eine symmetrische komplexe $g \times g$-Matrix mit positiv definitem Imaginärteil. Damit läßt sich $\tau - \bar{\tau}$ invertieren.

$$\begin{aligned}
\beta_i &= (\tau - \bar{\tau})^{-1}_{ij} (\omega_j - \bar{\omega}_j), \\
\alpha_i &= (\bar{\tau}(\bar{\tau} - \tau)^{-1}\omega)_i + (\tau(\tau - \bar{\tau})^{-1}\bar{\omega})_i.
\end{aligned} \tag{B.1.5}$$

2. Volumenelemente und Volumenformen

Die Volumenelemente und -formen in reellen und holomorphen Koordinaten hängen durch

$$dz \wedge d\bar{z} = -id^2z = -2idx \wedge dy = -2id^2x \tag{B.2.1}$$

für $z = x + iy$ zusammen. Für die Greensche Funktion des Laplace-Operators und die Definition der δ-Funktion ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\int d^2x \delta^2(\vec{x}) = 1 &= \int d^2z \delta^2(z), \\
\delta^2(\vec{x}) &= 2\delta^2(z), \\
\partial_x^2 \partial_y^2 \ln(r) = 2\pi\delta^2(\vec{x}) &= 2\partial_z\partial_{\bar{z}} \ln(z\bar{z}) = 4\pi\delta^2(z).
\end{aligned} \tag{B.2.2}$$

Man erhält

$$\partial_{\bar{z}} 1/z = \partial_z 1/\bar{z} = 2\pi\delta^2(z). \tag{B.2.3}$$

Eine aus den holomorphen 1-Formen konstruierte, auf 1 normierte Volumenform ist

$$\frac{i}{2g}\omega_i(\mathrm{Im}\tau)^{-1}_{ij}\bar{\omega}_j, \tag{B.2.4}$$

da für geschlossene 1-Formen $\Theta, \tilde{\Theta}$ gilt

$$\int_{\mathcal{M}} \Theta \wedge \tilde{\Theta} = \sum_{k=1}^{g}[\oint_{a_k} \Theta \oint_{b_k} \tilde{\Theta} - \oint_{b_k} \Theta \oint_{a_k} \tilde{\Theta}]. \tag{B.2.5}$$

Anhang C:
Kovariante Ableitungen

Die Lorentz-$U(1)$-kovarianten Ableitungen sind folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_z^{n,q} &= \partial_z + n\omega_{zz}{}^z + iqA_z = \partial_z + n\omega_z\varepsilon^z{}_z + iqA_z \\ &= \partial_z - n\omega_z + iqA_z\,,\end{aligned} \tag{C.1}$$

entsprechend

$$\mathcal{D}_{\bar z}^{n,q} = \partial_{\bar z} - n\omega_{\bar z} + iqA_{\bar z}\,,$$

wobei ein Tensor mit einem oberem Index z das Gewicht $n=1$ besitzt, z.B. ξ^z. Die nur Lorentz-kovarianten Ableitungen seien mit $D^n = \mathcal{D}^{n,o}$ bezeichnet. Die Konnektion ω_z hat dabei in superkonformer Eichung für $\chi^{\pm}_{\bar z\downarrow}, \chi^{\pm}_{z\uparrow} = 0$ keinen Gravitinoanteil mehr, das heißt, es gelten Beziehungen wie

$$\partial_m(\sqrt{g}v^m) = \sqrt{g}D^1_m v^m\,, \Rightarrow \partial_z(\sqrt{g}v^z) = \sqrt{g}(\partial_z - \omega_z)v^z\,, \tag{C.2}$$

und $\overline{\omega_z} = -\omega_{\bar z}$. Die adjungierten Operatoren ergeben sich durch partielle Integration im Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\int d^2z\sqrt{g}[\bar\Psi^\lambda \mathcal{D}_z^{1-\lambda,q}\Psi^{1-\lambda}] &= \int d^2z\sqrt{g}[\bar\Psi^\lambda(\partial_z - (1-\lambda)\omega_z + iqA_z)\Psi^{1-\lambda}] \\ &= -\int d^2z\sqrt{g}[\overline{(\partial_{\bar z} + \lambda\omega_{\bar z} + iqA_{\bar z})\Psi^\lambda}\Psi^{1-\lambda}] \\ &= -\int d^2z\sqrt{g}[\overline{\mathcal{D}_{\bar z}^{-\lambda,q}\Psi^\lambda}\Psi^{1-\lambda}],\end{aligned} \tag{C.3}$$

also

$$(\mathcal{D}_z^{n,q})^\dagger = -\mathcal{D}_{\bar z}^{n-1,q}, \qquad (\mathcal{D}_{\bar z}^{n,q})^\dagger = -\mathcal{D}_z^{n-1,q}. \tag{C.4}$$

Das Indextheorem lautet für diese Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}\dim\ker\mathcal{D}_z^{n,q} - \dim\ker(\mathcal{D}_z^{n,q})^\dagger &= (2n-1)(g-1) + qc_1\,, \\ \dim\ker(\mathcal{D}^{\bar z}_{n,q})^\dagger - \dim\ker(\mathcal{D}_{\bar z}^{n,q}) &= (2n+1)(g-1) + qc_1\,.\end{aligned} \tag{C.5}$$

Die Ableitung $\mathcal{D}_{\bar z}^{n,q}$ tritt im Operator $\mathcal{P}$ für die Werte $(1,0); (\frac{1}{2}, \pm 1); (0,0)$ auf, so daß sich für $\dim\ker(\mathcal{D}_z^{n,q})^\dagger$, die Dimensionen des jeweiligen Moduliraumes, die Werte $3g-3, 2(g\pm c_1)-2, g$ ergeben.

Literatur

[1] W. Lerche, C. Vafa, N.P. Warner, Nucl. Phys. B324 (1989) 427.

[2] N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. B426 (1994) 19.

[3] M. Ademollo, L. Brink, A. D'Adda, R. D'Auria, E. Napolitano, S. Sciuto, E. Del Giudice, P. Di Vecchia, S. Ferrara, F. Gliozzi, R. Musto and R. Pettorino, Nucl. Phys. B111 (1976) 77.

[4] H. Ooguri, C. Vafa, Nucl. Phys. B361 (1991) 469.

[5] N. Berkovits, C. Vafa, Nucl. Phys. B433 (1995) 123.

[6] N. Berkovits, Phys. Lett. B350 (1995) 28.

[7] H. Ooguri, C. Vafa, Nucl. Phys. B451 (1995) 121.

[8] C. Vafa, Harvard-preprint, HUTP-96/A004, hep-th/9602022.

[9] E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin, Phys. Lett. B106 (1981) 63.

[10] L. Brink, J.H. Schwarz, Nucl. Phys. B121 (1977) 285.

[11] J. Bischoff, S.V. Ketov, O. Lechtenfeld, Nucl. Phys. B438 (1995) 373.

[12] V.A. Kostelecky, O. Lechtenfeld, W. Lerche, S. Samuel, S. Watamura, Nucl. Phys. B288 (1987) 173.

[13] W. Siegel, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1493.

[14] S.V. Ketov, O. Lechtenfeld, A. Parkes, Phys. Rev. D51 (1995) 2872.

[15] J.J. Atick, G. Moore, A. Sen, Nucl. Phys. B308 (1988) 1.

[16] H. Verlinde, *The Path-Integral Formulation of Supersymmetric String Theory*, Ph.D.-Thesis (1987).

[17] G. Thompson, *1992 Trieste Lectures on Topological Gauge Theory And Yang-Mills Theory*, hep-th/9305120.

[18] D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, Nucl. Phys. B271 (1986) 93.

[19] E. Verlinde, H. Verlinde, Nucl. Phys. B288 (1987) 357.

[20] E. Verlinde, H. Verlinde, Phys. Lett. B192 (1987) 95.

[21] E. D'Hoker, D.H. Phong, Rev. Mod. Phys. 60 (1988) 917.

[22] F. Ferrari, *On The Quantization Of Abelian Gauge Field Theories On Riemann Surfaces*, München preprint MPI-Ph/95-50 (1995).

[23] H. Lü, C.N. Pope, *BRST Quantization of the N=2 String*, Texas preprint CTP TAMU-62/94, hep-th/9411101 (1994).

[24] S.D. Mathur, S. Mukhi, Phys. Rev. D36 (1987) 465.

[25] S.D. Mathur, S. Mukhi, Nuc. Phys. B302 (1988) 130.

[26] N. Marcus, *A tour through N=2 strings*, Tel-Aviv preprint, TAUP-2002-92, November 1992, hep-th/9211059.

[27] L. Alvarez-Gaumé, G. Moore, C. Vafa, Commun. Math. Phys. 106 (1996) 40.

[28] S.V. Ketov, O. Lechtenfeld, Phys. Lett. B353 (1995) 463.

[29] O. Lechtenfeld, A. Parkes, Nucl. Phys. B332 (1990) 39.

[30] U. Carow-Watamura, Z.F. Ezawa, K. Harada, A. Tezuka, and S. Watamura, Phys. Lett. B227 (1989) 73.

[31] O. Lechtenfeld, *Integration Measure and Spectral Flow in the Critical $N = 2$ String* Hannover-preprint 1995, ITP-UH-30/95, hep-th 9512189.

[32] M. Bonini, E. Gava, R. Iengo, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 795.

[33] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, IOP, 1990.

[34] D. Lüst, S. Theisen, *Lectures in String Theory*, Lecture Notes in Physics, Springer, 1989.

[35] H.M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1991.

Literatur

Lebenslauf

25.4.1966	Geboren in Hannover.
1972-1976	Besuch der Grundschule in Burgdorf und Rethmar.
1976-1986	Besuch des Gymnasiums Lehrte.
5.6.1986	Abitur am Gymnasium Lehrte.
1986-1992	Studium der Physik an der Universität Hannover.
2.6.1992	Diplom in Theoretischer Physik an der Universität Hannover.
Seit 1991	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der Universität Hannover.
Seit 1.10.1992	Doktorand bei Prof. Dr. O. Lechtenfeld.

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem meinem Doktorvater Prof. Dr. O. Lechtenfeld für die Betreuung meiner Arbeit, die zahlreichen Diskussionen und, nicht zuletzt, die nette Arbeitsatmosphäre.

Des weiteren danke ich P. Adamietz, G. Akemann, Prof.Dr N. Dragon, Dr. S.V. Ketov, P. Kostädt und J. Plefka für die vielen hilfreichen Anregungen und Kommentare.

Mein ganz spezieller Dank gilt meiner lieben Beate für die nicht nur psychologische Unterstützung im Verlaufe dieser Arbeit.