# Spinning p-Branes

Vom Fachbereich Physik der Universität
Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

**Dipl.-Phys. Helge Dennhardt**
geboren am 19. April 1971 in
Buchholz i.d. Nordheide

2002

| | |
|---|---|
| Referent: | Prof. O. Lechtenfeld |
| Korreferent: | Prof. H. Schulz |

| | |
|---|---|
| Tag der Promotion: | 14.12.2001 |

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Spinning $p$-Branes untersucht, eine Erweiterung der String-Theorie auf höherdimensionale Objekte. Im Gegensatz zu der in der Literatur wohl etablierten Super-$p$-Brane, die Supersymmetrie im Targetraum besitzt, ist die Spinning $p$-Brane supersymmetrisch bezüglich des Weltvolumens der Brane.

Da die Konstruktion dieser Varianten in der Vergangenheit auf Schwierigkeiten stieß, wird in dieser Arbeit, nach einer Einführung in $N = 1$, $D = 3$ Supergravitation, zuerst die Problematik ausführlich vorgestellt und die bisher bekannten Spinning $p$-Brane-Modelle diskutiert.

Im Hauptteil der Arbeit werden dann weitere Möglichkeiten zur Konstruktion von Spinning Membrane-Modellen untersucht und schließlich ein Verfahren vorgestellt, das auf eine ganze Klasse gültiger Spinning Membranes führt. Die Karlhede-Lindström-Brane und die Lindström-Roček-Brane sind in dieser generischen Form ebenso enthalten wie bisher unbekannte Supersymmetrisierungen der Howe-Tucker-Wirkung, der Dolan-Tchrakian-Wirkung und der Dirac-Wirkung.



Schlagwörter: Spinning, Brane, Membrane



## Abstract

In this thesis we examine spinning-$p$-branes, an extension of string theory to higher dimensional objects. In contrast to the well-established super-$p$-brane, which is supersymmetric in its target space, the spinning-$p$-brane features supersymmetry with respect to the world volume of the brane.

Since constructing this kind of brane proved difficult in the past, we discuss first, after an introduction to $N = 1$, $D = 3$ supergravity, the problems which arise and give an overview over the known spinning-$p$-brane models.

In the main part of this thesis we then examine further possibilities to construct spinning-membranes and present a whole class of actions which are all valid spinning-membrane models. This generic form includes not only the known actions from Karlhede-Lindström and Lindström-Roček, but also supersymmetrisations to actions of Howe-Tucker, Dolan-Tchrakian and Dirac, which are completely new to literature.



Keywords: Spinning, Brane, Membrane

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel I

# Einleitung

Der Begriff „$p$-Brane“ ist eine Wortneuschöpfung der englischen Sprache und bedeutet ungefähr „$p$-dimensionale verallgemeinerte Membrane“. Obwohl beinahe alle aktuellen Entwicklungen auf diesem Gebiet auf der String-Theorie aufbauen, Techniken entlehnen und meist schon in ihrer Konstruktion eine Erweiterung der String-Theorie darstellen, existiert die Membrane mit ihren Schwingungsmoden als Modell für fundamentale Partikel schon ein wenig länger.

Dirac [1] schlug 1962 vor, einer sphärischen Membrane eine elektrische Ladung zu geben, deren nach außen gerichtete Selbstabstoßung gerade die nach innen wirkende Membran-Spannung balanciert. Das so entstehende stabile System besitzt Schwingungsmoden, die bei Quantisierung ein diskretes Anregungsspektrum liefern. Die Hoffnung, einige der niederenergetischen Anregungen mit existierenden Elementarteilchen zu identifizieren, ließ sich jedoch nicht bestätigen.

Die String-Theorie, die ursprünglich als Erklärungsversuch des hadronischen Anregunsspektrums Ende der 60er Jahre aufkam und später in dieser Funktion von der Quantenchromodynamik abgelöst wurde [2], erfuhr 1974 von Scherk und Schwarz [3] eine wesentliche Uminterpretation dahin gehend, daß die Strings, ausschließlich eindimensional ausgedehnte Objekte, nun als fundamental angesehen werden und ihr Anregungsspektrum Elementarteilchen und -kräfte liefert. Insbesondere die Existenz eines Spin-2-Teilchens im Spektrum ließ die Hoffung auf eine vereinheitlichte Theorie aller Naturkräfte einschließlich der Gravitation möglich erscheinen.

Ein wesentlicher Durchbruch („erste String-Revolution“) erfolgte 1984, als Green und Schwarz [4] die Anomaliefreiheit des offenen Superstrings und damit seine Konsistenz auf Quantenniveau nachwiesen. Die Einarbeitung von Supersymmetrie in die Theorie ermöglichte nun ebenso die Beschreibung von Bosonen wie von Fermionen und löste obendrein das Tachyon-Problem des klassischen Strings. Eine einheitliche Beschreibung aller Naturkräfte scheint seither in greifbare Nähe gerückt.

In Begleitung zur String-Theorie wurde auch versucht, die Konzepte auf höherdimensionale Objekte auszudehnen. Hughes, Liu und Polchinski [5] gelang 1986 die Konstruktion der Supermembrane, die sehr bald danach zur Super $p$-Brane verallgemeinert wurde. Diese Formulierung enthält sowohl den Superstring ($p$=1), als auch die Supermembrane ($p$=2) und besitzt globale Supersymmetrie im Targetraum.

Die Formulierung der Super $p$-Brane ist jedoch nicht in allen Dimensionen möglich. Der sogenannte „Brane-Scan“, eine Analyse, in welchen Dimensionen und für welche $p$ die für die Konstruktion der Super $p$-Brane essentielle Siegel-Symmetrie vorhanden ist, schränkt schon die Möglichkeiten der klassischen Formulierung drastisch ein [6]. Eine vollständige Quantisierung des Modells ist aufgrund hochgradiger Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen (außer für die Spezialfälle des Superpartikels und des Superstrings) bis heute nicht gelungen.

Der zweite wesentliche Durchbruch in der String-Theorie („zweite String-Revolution“) hatte ebenfalls große Auswirkungen auf die Theorie der Branes. 1995 erkannte Polchinski [7], daß die für nichtpertubative Betrachtungen (String-Dualitäten) notwendigen Ramond-Ramond-Quellen D-Branes sind, mehrdimensionale ausgedehnte Objekte, auf denen Strings enden können. Das in der Folgezeit einsetzende heftige Interesse an D-Branes kam dabei auch den allgemeinen Super $p$-Branes zugute.

Interesse an Super $p$-Branes kommt auch aus Richtung der Supergravitations- und Supereichtheorien. Einige solitonische Lösungen der Feldgleichungen zeigen eine Energiedichte, die um Bereiche lokalisiert ist, die die Form einer $p$-Brane haben. Die freien Parameter dieser Lösungen bewirken nur eine Bewegung dieser Bereiche, und die effektive Wirkung dieser Freiheitsgrade ist in der Tat die einer Super $p$-Brane. Tatsächlich wurde dieses Bild auch bei der ursprünglichen Ableitung der Supermembrane [5] verwendet.

Je nach Hintergrund und Interesse werden Super $p$-Branes also unterschiedlich gesehen:

- Als fundamentale Objekte, deren Anregungsspektrum ein Modell für Elementarteilchen liefert.

- Als sekundäre Objekte, die zu String-Theorien aus Konsistenzgründen bei nichtpertubativen Überlegungen hinzugenommen werden (D-Branes).

- Als effektive Objekte, die die Freiheitsgrade bestimmter solitonischer Lösungen der Feldgleichungen von Supergravitations- und Supereichtheorien abbilden.

Für den String existierte schon zu Beginn eine zweite supersymmetrische Formulierung, der Spinning String. Er besitzt statt der globalen Supersymmetrie im Targetraum lokale Supersymmetrie auf der Weltfläche und ist ebenso anomaliefrei und damit konsistent quantisierbar wie der Superstring. Eine Analyse der quantenmechanischen Anregungen zeigt (nach GSO-Projektion) sogar ein identisches Spektrum, weshalb der Superstring und der Spinning String landläufig als äquivalent angesehen werden.

Eine Verallgemeinerung des Spinning Strings zur Spinning Membrane oder sogar zur Spinning $p$-Brane stieß jedoch von Anfang an auf Schwierigkeiten. Howe und Tucker [8, 9, 10] präsentierten 1977 zwar einen Kandidaten für eine Spinning Membrane. Deren Wirkung ist jedoch nur dann lokal supersymmetrisch, wenn die Supergravitationsfelder ein paar zusätzliche Zwangsbedingungen erfüllen. Diese bewirken jedoch, daß die Hilfsfelder, insbesondere die Metrik, ihren Status als Hilfsfelder verlieren und die Wirkung nicht mehr klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung ist und somit keine Erweiterung der einfachen Membrane.

Eine andere Sichtweise des Problems, die für die weitere Entwicklung bestimmend ist, konzentriert sich auf die kosmologische Konstante in der Wirkung, die von Howe und Tucker als Ausgangspunkt ihres Programms zur Supersymmetrisierung verwendet wird. Diese Konstante, die beim String nicht auftaucht, läßt sich nur in einer lokal supersymmetrischen Wirkung unterbringen, wenn auch Terme proportional zum Krümmungstensor aufgenommen werden. Dies würde aber ebenfalls das Ende der Metrik als Hilfsfeld bedeuten, da sie dann nicht mehr algebraisch eliminiert werden kann.

Bergshoeff, Sezgin und Townsend [11] formulierten basierend auf dieser Sichtweise 1988 ein „no-go-Theorem", das nicht nur die Unmöglichkeit einer linearen Supersymmetrisierung der Wirkung von Howe und Tucker zeigt, sondern auch die Supersymmetrisierung einer beliebigen, dazu klassisch äquivalenten Wirkung ausschließt. Eine akzeptable Spinning $p$-Brane-Wirkung wäre somit unmöglich.

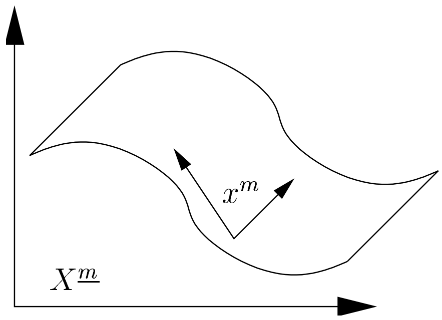
Lindström und Roček [12, 13] wiesen jedoch auf einen Fehler in der Beweisführung hin, und präsentierten die erste wirkliche Spinning $p$-Brane. Die Gegenargumentation gab den Autoren dahin gehend Recht, daß eine Supersymmetrisierung der Wirkung von Howe und Tucker ausgeschlossen ist. Die Verallgemeinerung auf alle hierzu klassisch äquivalenten Wirkungen sei jedoch nicht zulässig. Und in der Tat basiert die Spinning $p$-Brane von Lindström und Roček auf solch einer klassisch äquivalenten Wirkung.

In der Folgezeit zeigte sich, daß eine andere, klassisch äquivalente Wirkung ebenfalls eine Supersymmetrisierung zuläßt. Dolan und Tchrakian [14] schlugen eine ganze Klasse von klassisch äquivalenten Wirkungen vor, von denen eine 1993 von Castro [15] supersymmetrisiert wurde. Die Verwendung einer

Weyl-kovarianten Konstanten mit Feldcharakter, nach der jedoch nicht variiert werden darf, kann hier jedoch kritisiert werden. Die Castro-Brane verzeichnet Aktivitäten bis heute [16, 17]. Trotz der polynomialen Wirkung erscheint auch hier eine Quantisierung aufgrund der Nichtlinearität des Modells weiterhin wenig wahrscheinlich.

Zur Begriffserklärung sei hier noch einmal kurz der konzeptionelle Unterschied der Spinning $p$-Brane zur Super $p$-Brane dargestellt.

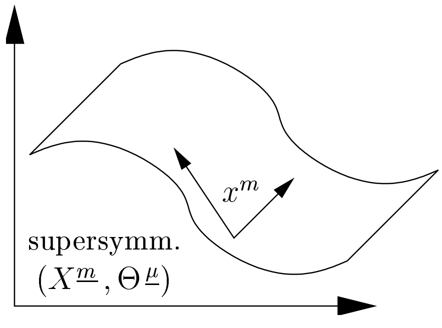
Setzt man alle Fermionen auf Null und entfernt somit jede Supersymmetrie, so beschreiben beide Modelle eine $(p+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die sich in einer flachen Minkowski-Raumzeit, dem Targetraum, bewegt. Diese Mannigfaltigkeit wird beschrieben durch eine Abbildung des $(p+1)$-dimensionalen Parameterraums der Mannigfaltigkeit (auch Weltvolumen genannt) in den Targetraum. Ihre Wirkung ist das Raumzeit-Volumen der Mannigfaltigkeit.




*Die* **bosonische $p$-Brane** *besitzt keinerlei Supersymmetrie und dient als Ausgangspunkt für die beiden anderen Modelle*

Targetraumindizes werden zur Unterscheidung von Weltindizes unterstrichen dargestellt, also z.B. $X^{\underline{m}}$. Eine vollständige Übersicht über alle Indextypen findet sich in Anhang A.

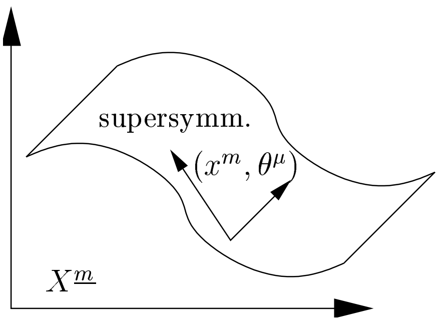
Die Super $p$-Brane besitzt Supersymmetrie im Targetraum. Sie wird beschrieben durch eine Abbildung des unverändert bosonischen Parameterraums in den nun auch fermionische Koordinaten enthaltenden Targetraum. Von der so erweiterten Wirkung wird verlangt, daß sie globale Supersymmetrie im Targetraum zeigt und bei Nullsetzen aller Fermionen wieder das ursprüngliche bosonische Modell ergibt.




*Die* **Super $p$-Brane** *besitzt Supersymmetrie im Targetraum, während der Parameterraum weiterhin bosonisch ist.*

Die Spinning $p$-Brane hingegen besitzt Supersymmetrie im Parameterraum. Sie wird beschrieben durch eine Abbildung des nun auch fermionische Koordinaten enthaltenden Parameterraums in den rein bosonischen Targetraum. Von der so erweiterten Wirkung wird verlangt, daß sie Supersymmetrie im Weltvolumen zeigt und bei Nullsetzen aller Fermionen ebenso das ursprüngliche bosonische Modell ergibt.

Da die $p$-Brane schon im rein bosonischen Modell lokale Reparametrisierungsinvarianz besitzt, ist hier auch eine *lokale* Supersymmetrie notwendig. Die Spinning $p$-Brane beinhaltet also zwingend Supergravitation im Weltvolumen.




*Die* **Spinning $p$-Brane** *besitzt lokale Supersymmetrie im Parameterraum (und damit Supergravitation), während der Targetraum weiterhin bosonisch ist.*

Aufgrund der Implementation von Supergravitation in das Modell ist es problematisch, eine Wirkung zu finden, die bei Nullsetzen aller Fermionen wieder die ursprüngliche, bosonische Wirkung ergibt. Dies liegt daran, daß Terme für gewöhnliche Gravitation zurückbleiben, die die Dynamik der Brane auf unerwünschte Weise verändern. Auf dieses Problem wird ausführlich in Kapitel 4.3 eingegangen.

Da Supergravitation wesentlich ist zur Beschreibung der lokalen Supersymmetrie der Spinning $p$-Brane, wird zuerst in Kapitel 2 eine kurze Einführung in Superdifferentialgeometrie gegeben, bevor dann in Kapitel 3 auf $N = 1$ $D = 3$ Poincaré-Supergravitation spezialisiert wird. Die benötigten Konzepte werden vorgestellt, später verwendete Relationen abgeleitet und Notation und Konventionen festgelegt.

Kapitel 4 stellt den historisch ersten Kandidaten einer Spinning $p$-Brane von Howe und Tucker vor, erläutert die Probleme, die dazu geführt haben, das Modell schließlich zu verwerfen, und erläutert das „no-go-Theorem“ von Bergshoeff, Sezgin und Townsend, sowie dessen Umgehung von Karlhede und Lindström. Es werden die bisher bekannten Spinning Membrane-Modelle von Karlhede, Lindström und Roček bzw. von Castro vorgestellt und diskutiert.

In Kapitel 5 wird eine Übersicht über bekannte, klassisch äquivalente Wirkungen gegeben, werden Verbindungen aufgezeigt und drei Verfahren vorgestellt, um systematisch sinvolle klassisch äquivalente Wirkungen zu erhalten. Eine hieraus erhaltene generische Klasse von Wirkungen wird für den Fall der

Membrane ($p = 2$) supersymmetrisiert und daraus ein meines Wissens in der Literatur bisher unbekanntes Verfahren zur Konstruktion von Spinning Membranes angegeben.

In Kapitel 6 wird diese Methode der generischen Spinning Membrane-Wirkung auf diverse Modelle angewendet und diskutiert. Obwohl schon in ihrer allgemeinen Form gültig, wird durch diese Konkretisierung noch einmal ihre Funktionsweise an Beispielen vorgeführt und ihr Nutzen deutlich.

Kapitel 7 schließlich faßt die Ergebnisse dieser Arbeit noch einmal zusammen.

# Kapitel II

# Superdifferentialgeometrie

Spinning $p$-Branes besitzen lokale Supersymmetrie im Weltvolumen, die sich am besten im Rahmen der Superdifferentialgeometrie beschreiben läßt.

Dieses Kapitel gibt zuerst eine Einführung in Superdifferentialgeometrie, bevor auf Poincaré-Supergravitation konkretisiert wird und schließlich in Kapitel 3 der für die Spinning Membrane wichtige Fall der $N$=1, $D$=3 Poincaré-Supergravitation genauer behandelt wird. Neben der Einführung werden Konventionen geklärt und Schreibweisen festgelegt, die in der ganzen Arbeit verwendet werden.

Eine gute Übersicht über Supersymmetrie und Supergraviation im Superraumformalismus sowie in Komponentenfeldern findet sich z.B. in [18] und in [19].

## 2.1 Weltbasis

Eine Supermannigfaltigkeit sei überdeckt mit Karten, die lokal eine Beschreibung mit Koordinaten ermöglichen. Die Koordinaten hierzu heißen Weltkoordinaten, ihre Numerierung geschieht mit Weltindizes, die aus der Mitte des Alphabets genommen werden.

Die Weltkoordinaten $Z^M$ teilen sich auf in zwei Sorten

$$Z^M := (X^m, \Theta^\mu) \quad .$$

Hiervon sind die ersten $D$ Koordinaten bosonisch (vertauschend)

$$X^m X^n = X^n X^m \quad , \quad m = 0, 1, 2, \ldots, D-1 \quad ,$$

und die übrigen $n_D$ Koordinaten fermionisch (antivertauschend)

$$\Theta^\mu \Theta^\nu = -\Theta^\nu \Theta^\mu \quad , \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, n_D \quad .$$

$D$ gibt die Dimension des bosonischen Unterrraumes an. Er sei ausgestattet mit einer Metrik $g_{mn}$ mit Minkowski-Signatur $(-,+,+,\ldots,+)$.

$n_D$ wird später die Spinorgröße in $D$ Dimensionen sein.

Die (Anti-) Vertauschungsrelationen der Koordinaten lassen sich mit Gradierung kompakt schreiben als

$$0 = \left[Z^M, Z^N\right\} := Z^M Z^N - (-1)^{|M||N|} Z^N Z^M \tag{2.1}$$

$$|m| := 0 \quad , \quad |\mu| := 1 \quad .$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen (anti-)vertauschen, die Weltbasis besitzt also per Definition keine Anholonomie

$$[\partial_M, \partial_N\} = 0 \quad . \tag{2.2}$$

Die Gradierungsstriche $|\,|$ werden von nun an weggelassen, alle Vorfaktoren $(-1)^{\cdots}$ sind so gemeint. Zusammen mit Einsteinscher Summenkonvention gilt also z.B. die abkürzende Schreibweise

$$(-1)^M A_M B^M := \sum_M (-1)^{|M|} A_M B^M \quad . \tag{2.3}$$

## 2.2 Der Tensorbegriff in Weltbasis

Ein Vektor $A^M$ transformiert unter unter allgemeinen Superkoordinatentransformationen

$$Z^M \quad \longrightarrow \quad Z'^M(Z)$$

gemäß der Regel

$$A'^M = A^N \left( \frac{d}{dZ^N} Z'^M \right) \quad , \tag{2.4}$$

ein Kovektor hingegen gemäß

$$A'_M = \left( \frac{d}{dZ'^M} Z^N \right) A_N \quad . \tag{2.5}$$

Somit transformiert ein kontrahiertes Produkt zweier Vektoren mit Indexstellung NW-SO als Skalar

$$A'^M B'_M = A^M \underbrace{\left( \frac{d}{dZ^M} Z'^N \right) \left( \frac{d}{dZ'^N} Z^P \right)}_{\delta_M{}^P} B_P = A^M B_M \quad ,$$

während hingegen dasselbe Produkt mit Indexstellung SW-NO nicht als Skalar transformiert

$$
\begin{aligned}
A'_M B'^M &= \left(\frac{d}{dZ'^M} Z^N\right) A_N B^P \left(\frac{d}{dZ^P} Z'^M\right) \\
&= (-1)^P \underbrace{(-1)^M \left(\frac{d}{dZ^P} Z'^M\right) \left(\frac{d}{dZ'^M} Z^N\right)}_{\neq \delta_P{}^N} A_N B^P \\
&\neq A_M B^M \quad .
\end{aligned}
$$

Dies wird erst mit einem zusätzlichen Minuszeichen repariert

$$
\begin{aligned}
(-1)^M A'_M B'^M &= (-1)^M \left(\frac{d}{dZ'^M} Z^N\right) A_N B^P \left(\frac{d}{dZ^P} Z'^M\right) \\
&= (-1)^P \underbrace{\left(\frac{d}{dZ^P} Z'^M\right) \left(\frac{d}{dZ'^M} Z^N\right)}_{\delta_P{}^N} A_N B^P \\
&= (-1)^M A_M B^M \quad .
\end{aligned}
$$

Kontraktionen in der Indexstellung SW-NO tragen daher natürlicherweise ein solches Minuszeichen. Meistens lassen sich solche Kontraktionen jedoch durch einfaches Umtauschen der Objekte vermeiden.

Ein allgemeiner Tensor beliebiger Stufe mit beliebiger Indexstellung transformiert wie ein Produkt von Vektoren in der entsprechenden Indexstellung. Also z.B.

$$
A'_M{}^N{}_P = (-1)^{R(Q+M)+P(M+N)} \left(\frac{d}{dZ'^P} Z^R\right) \left(\frac{d}{dZ'^M} Z^P\right) A_P{}^Q{}_R \left(\frac{d}{dZ^Q} Z'^N\right) .
$$

## 2.3 Tangentialbasis

In der bisher verwendeten Weltbasis lassen sich keine Spinoren definieren, da hier die Indizes (Buchstaben aus der Mitte des Alphabets) unter allgemeinen Superkoordinatentransformationen transformieren und diese keine endlich dimensionalen Spinordarstellungen zulassen.

Die Tangentialbasis löst das Problem. Sie ist gegeben durch ein Set von Basisvektoren $E_A{}^M$, genannt Supervielbein, zu dem auch das Inverse $E^A{}_M$ existieren soll

$$
E_M{}^A E_A{}^N = \delta_M{}^N \quad , \qquad E_A{}^M E_M{}^B = \delta_A{}^B \quad .
$$

Die Tangentialbasis sei per Definition eindeutig bis auf lokale Lorentz-Transformationen. Für den bosonischen Unterraum (wo eine Norm existiert) wählt man üblicherweise eine Orthonormalbasis, die Metrik erhält dort die flache Form $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, \ldots, +1)$.

Der Zählindex für die neuen Basisvektoren (Buchstaben vom Anfang des Alphabets) transformiert nun unter lokalen Lorentz-Transformationen. Da hierzu endlich dimensionale Spinordarstellungen existieren, lassen sich in dieser Basis Spinoren definieren.

Jeder beliebige Tensor läßt sich nun mittels des Supervielbeins und seines Inversen in die Tangentialbasis übersetzen

$$\begin{aligned} A^A &:= A^M E_M{}^A \quad , \qquad A^M = A^A E_A{}^M \\ A_A &:= E_A{}^M A_M \quad , \qquad A_M = E_M{}^A A_A \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$A^A B_A = A^M B_M \quad .$$

Ein höherstufiger Tensor verhält sich dabei wieder wie ein Produkt aus Vektoren

$$\begin{aligned} A_A{}^B{}_C &:= (-1)^{(C+P)(A+N)+C(N+B)} E_C{}^P E_A{}^M A_M{}^N{}_P E_N{}^B \\ A_M{}^N{}_P &:= (-1)^{(P+C)(M+B)+P(B+N)} E_P{}^C E_M{}^A A_A{}^B{}_C E_B{}^N \quad . \end{aligned} \tag{2.7}$$

## 2.4 Der Tensorbegriff in Tangentialbasis

Ein Tensor transformiert in der Tangentialbasis, wie gesagt, unter lokalen Lorentz-Transformationen. Wegen des Spin-Statistik-Theorems wird für die bosonischen Koordinaten eine Vektordarstellung gewählt und für die fermionischen Koordinaten eine Spinordarstellung. Die (ortsabhängigen) Transformationsmatrizen sind daher block-diagonal

$$A'_A = \Lambda_A{}^B A_B = \begin{pmatrix} \Lambda_a{}^b & 0 \\ 0 & \Lambda_\alpha{}^\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_b \\ A_\beta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$A'^A = A^B \Lambda^{-1}{}_B{}^A = \begin{pmatrix} A^b, & A^\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda^{-1}{}_b{}^a & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1}{}_\beta{}^\alpha \end{pmatrix} \quad . \tag{2.9}$$

## 2.5 Anholonomie

Die Ableitungen in der neuen Basis lauten

$$E_A := E_A{}^M \partial_M \quad . \tag{2.10}$$

In der Tangentialbasis vertauschen die Ableitungen nicht, sondern bilden eine geschlossene Superalgebra mit Strukturkonstanten, den Anholonomiekoeffizienten

$$\begin{aligned}[E_A, E_B\} &= \left[E_A{}^M \partial_M, E_B{}^N \partial_N\right\} \\ &= \left(E_A{}^M \left(\partial_M E_B{}^N\right) - (-1)^{AB} E_B{}^M \left(\partial_M E_A{}^N\right)\right) E_N{}^C E_C \\ &=: \mathcal{C}_{AB}{}^C E_C \quad . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Hierbei gilt natürlich

$$\mathcal{C}_{AB}{}^C = -(-1)^{AB} \mathcal{C}_{BA}{}^C \quad .$$

Außerdem folgt aus der gradierten Jacobi-Identität

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{A,B,C}^{\text{cycl.}} [E_A, [E_B, E_C\}\} \\ &:= [E_A, [E_B, E_C\}\} + (-1)^{C(A+B)} [E_C, [E_A, E_B\}\} + \\ &\quad + (-1)^{A(B+C)} [E_B, [E_C, E_A\}\} \end{aligned}$$

eine Bianchi-Identität für die Anholonomiekoeffizienten

$$\sum_{A,B,C}^{\text{cycl.}} \left(E_A \mathcal{C}_{BC}{}^D - \mathcal{C}_{AB}{}^E \mathcal{C}_{EC}{}^D\right) = 0 \quad . \tag{2.12}$$

## 2.6 Kovariante Ableitung

Damit auch abgeleitete Größen wie Tensoren transformieren, definiert man die kovariante Ableitung

$$\begin{aligned} \nabla_M A^N &:= \partial_M A^N + (-1)^P \, \Gamma_M{}^N{}_P A^P \\ \nabla_M A_N &:= \partial_M A_N + \Gamma_{MN}{}^P A_P \quad , \end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei die Konnektion $\Gamma$ inhomogen transformiert und damit die inhomogenen Transformationsanteile der Ableitung kompensiert

$$\begin{aligned} \Gamma'{}_{MN}{}^P =& (-1)^{(N+R)M} \left(\frac{d}{dZ'^N} Z^R\right) \left(\frac{d}{dZ'^M} Z^Q\right) \Gamma_{QR}{}^S \left(\frac{d}{dZ^S} Z'^P\right) + \\ & - \left(\frac{d}{dZ'^M} Z^Q\right) \partial_Q \left(\frac{d}{dZ'^N} Z^S\right) \left(\frac{d}{dZ^S} Z'^P\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma'{}_M{}^N{}_P =& (-1)^{(P+S)(M+R)+(R+N)P} \left(\frac{d}{dZ'^P} Z^S\right) \left(\frac{d}{dZ'^M} Z^Q\right) \Gamma_Q{}^R{}_S \left(\frac{d}{dZ^R} Z'^N\right) \\ & - (-1)^{K(P+N+K)} \left(\frac{d}{dZ'^M} Z^Q\right) \partial_Q \left(\frac{d}{dZ^K} Z'^N\right) \left(\frac{d}{dZ'^P} Z^K\right) \quad . \end{aligned}$$

In Tangentialbasis, wo der Tensorbegriff auf den lokalen Lorentz-Transformationen basiert, lautet das dann

$$\begin{aligned}\nabla_A A^B &:= E_A A^B + (-1)^C \Gamma_A{}^B{}_C A^C \\ \nabla_A A_B &:= E_A A_B + \Gamma_{AB}{}^C A_C \quad ,\end{aligned} \tag{2.14}$$

mit entsprechenden Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned}\Gamma'{}_{AB}{}^C =&(-1)^{(B+E)A} \Lambda_B{}^E \Lambda_A{}^D \Gamma_{DE}{}^F \Lambda^{-1}{}_F{}^C + \\ &- \Lambda_A{}^D \left( E_D \Lambda_B{}^F \right) \Lambda^{-1}{}_F{}^C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma'{}_A{}^B{}_C =&(-1)^{(C+F)(A+E)+(E+B)C} \Lambda_C{}^F \Lambda_A{}^D \Gamma_D{}^E{}_F \Lambda^{-1}{}_E{}^B \\ &- (-1)^{E(C+B+E)} \Lambda_A{}^D \left( E_D \Lambda^{-1}{}_E{}^B \right) \Lambda_C{}^E \quad .\end{aligned}$$

Aufgrund der block-diagonalen Lorentz-Transformationen (2.8, 2.9) ist die Konnektion im Tangentialraum $\Gamma_{AB}{}^C$ bzw. $\Gamma_A{}^B{}_C$ ebenfalls block-diagonal bezüglich der hinteren beiden Indizes.

Die kovariante Ableitung soll einer gradierten Leibniz-Regel genügen

$$\begin{aligned}\nabla_M \left( A_N B_P \right) &= \left( \nabla_M A_N \right) B_P + (-1)^{MN} A_N \left( \nabla_M B_P \right) \\ \nabla_A \left( A_B B_C \right) &= \left( \nabla_A A_B \right) B_C + (-1)^{AB} A_B \left( \nabla_A B_C \right) \quad .\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ein höherstufiger Tensor verhält sich dann wieder wie ein Produkt aus Vektoren

$$\begin{aligned}\nabla_M A_N{}^P{}_Q =&\partial_M A_N{}^P{}_Q + \Gamma_{MN}{}^R A_R{}^P{}_Q + (-1)^{R+N(P+R)} \Gamma_M{}^P{}_R A_N{}^R{}_Q + \\ &+ (-1)^{(Q+R)(N+P)} \Gamma_{MQ}{}^R A_N{}^P{}_R \\ \nabla_A A_B{}^C{}_D =&E_A A_B{}^C{}_D + \Gamma_{AB}{}^E A_E{}^C{}_D + (-1)^{E+B(C+E)} \Gamma_A{}^C{}_E A_B{}^E{}_D + \\ &+ (-1)^{(D+E)(B+C)} \Gamma_{AD}{}^E A_B{}^C{}_E \quad .\end{aligned}$$

Und auf einem Skalar ist die kovariante Ableitung gleich der gewöhnlichen

$$\nabla_M A = \partial_M A \quad , \qquad \nabla_A A = E_A A \quad .$$

## 2.7 Zusammenhang der Konnektionen

Bisher wurden vier verschiedene Konnektionen definiert

$$\Gamma_M{}^N{}_P \quad , \qquad \Gamma_{MN}{}^P \quad , \qquad \Gamma_A{}^B{}_C \quad , \qquad \Gamma_{AB}{}^C \quad .$$

Diese sind jedoch leicht miteinander in Beziehung zu bringen. Die Forderung, daß das Kronecker-Delta kovariant konstant sein soll, bringt schon jeweils zwei der $\Gamma$ in Beziehung zueinander

$$\begin{aligned} \nabla_M \delta_N{}^P = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \Gamma_{MN}{}^P = -(-1)^{NP} \Gamma_M{}^P{}_N \\ \nabla_A \delta_B{}^C = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \Gamma_{AB}{}^C = -(-1)^{BC} \Gamma_A{}^C{}_B \quad . \end{aligned}$$

Möchte man außerdem, daß es egal ist, ob man vor dem Differenzieren oder hinterher in die Tangentialbasis wechselt, müssen das Vielbein und sein Inverses ebenfalls kovariant konstant sein

$$0 = \nabla_M E_N{}^A = \nabla_M E^N{}_A = \nabla_A E_N{}^B = \nabla_A E^N{}_B \quad . \tag{2.16}$$

Dies ergibt einen Zusammenhang der Konnektion in Weltbasis mit der in Tangentialbasis

$$\Gamma_{MN}{}^P = (-1)^{M(N+B)} E_N{}^B E_M{}^A \Gamma_{AB}{}^C E_C{}^P - \left(\partial_M E_N{}^A\right) E_A{}^P \tag{2.17}$$

$$\Gamma_{AB}{}^C = (-1)^{A(B+N)} E_B{}^N E_A{}^M \Gamma_{MN}{}^P E_P{}^C - \left(E_A E_B{}^N\right) E_N{}^C \quad . \tag{2.18}$$

An den inhomogene Termen sieht man auch wieder deutlich, daß die Konnektion kein Tensor ist.

## 2.8 Symmetriegeneratoren

Bei Tensoren werden von nun an nur noch Tangentialindizes verwendet. Mit Hilfe der kovariant konstanten Vielbeine und (2.6), (2.7) läßt sich jeder Tensor und seine Ableitungen eindeutig in die Tangentialbasis übersetzen.

Der Vorteil liegt darin, daß alle Tensoren dann unter allgemeinen Superkoordinatentransformationen nur noch als Skalare transformieren und die Ableitung $E_A$ hier als Generator ausreicht. Auf die Tensorindizes wirken dann nur noch die lokalen Lorentz-Transformationen mit ihren Generatoren $M_{ab}$.

- Die Superkoordinatentransformationen lauten somit

$$\begin{aligned} \delta_k := k^A E_A \cdot \quad , \qquad &\text{mit } k^A = k^A(Z) \qquad \text{(infinitesimal)} \\ K(k) := \exp\left(k^A E_A\right) \qquad &\text{(endlich)} \quad . \end{aligned} \tag{2.19}$$

- Und die lokalen Lorentz-Transformationen lauten

$$\begin{aligned} \delta_\omega := \omega^{ab} M_{ab} \quad , \qquad &\text{mit } \omega^{ab} = \omega^{ab}(Z) \qquad \text{(infinitesimal)} \\ \Lambda(\omega) := \exp\left(\omega^{ab} M_{ab}\right) \qquad &\text{(endlich)} \quad . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Da die Lorentz-Transformationen in unserem Fall block-diagonal sind (2.9), sind es die Generatoren natürlich auch. Sie enthalten eine Vektordarstellung im bosonischen Teil und eine Spinordarstellung im fermionischen Teil

$$(M_{ab})_C{}^D = \begin{pmatrix} (M_{ab})_c{}^d & 0 \\ 0 & (M_{ab})_\gamma{}^\delta \end{pmatrix} \quad . \tag{2.21}$$

Die Konstruktion von Spinor-Darstellungen der Lorentz-Algebra in $D$ Dimensionen ist im Anhang B erläutert, die Vektordarstellung lautet

$$(M_{ab})_c{}^d = \eta_{ac}\delta_b{}^d - \eta_{bc}\delta_a{}^d \quad . \tag{2.22}$$

Als Symmetriegeneratoren liegen also bisher vor

$$E_A \quad , \qquad M_{ab} \quad .$$

Für die Symmetriealgebra erweist es sich als praktischer, die Ableitung $E_A$ durch die kovariante Ableitung $\nabla_A$ zu ersetzen.

Dies ist möglich, da mit den Tangentialindizes nun nur noch die Lorentz-Konnektion $\Gamma_{AB}{}^C$ auftritt. Diese ist entwickelbar über den Lorentz-Generatoren

$$\Gamma_{AB}{}^C = \Gamma_A{}^{de} \cdot (M_{de})_B{}^C \quad ,$$

weshalb die kovariante Ableitung nun eine Linearkombination aus der Ableitung $E_A$ und den Lorentz-Generatoren $M_{ab}$ ist

$$\nabla_A = E_A + \Gamma_A{}^{bc} M_{bc} \quad . \tag{2.23}$$

Der Wechsel von $E_A$ zur kovarianten Ableitung $\nabla_A$ stellt also nur einen Basiswechsel der Symmetriealgebra dar.

Als Symmetriegeneratoren liegen also nun vor

$$\nabla_A \quad , \qquad M_{ab} \quad . \tag{2.24}$$

Ihre Algebra lautet

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad} M_{bc} - \eta_{bd} M_{ac} - \eta_{ac} M_{bd} + \eta_{bc} M_{ad} \tag{2.25}$$

$$[M_{ab}, \nabla_C] = (M_{ab})_C{}^D \nabla_D \tag{2.26}$$

$$[\nabla_A, \nabla_B\} = T_{AB}{}^C \nabla_C + R_{AB}{}^{cd} M_{cd} \quad . \tag{2.27}$$

Die beiden neu auftretenden Strukturkonstanten $T_{AB}{}^C$ und $R_{AB}{}^{cd}$ heißen Torsion und Krümmung. Sie sind Tensoren und beschreiben die Geometrie der Supermannigfaltigkeit.

## 2.9 Torsion und Krümmung

Konkrete Ausdrücke für Torsion und Krümmung erhält man durch Auswertung der linken Seite von (2.27) mittels (2.23), (2.25), (2.26), der Definition (2.11) und einem anschließenden Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} T_{AB}{}^{C} &= \mathcal{C}_{AB}{}^{C} + \Gamma_{A}{}^{de}(M_{de})_{B}{}^{C} - (-1)^{AB}\Gamma_{B}{}^{de}(M_{de})_{A}{}^{C} \\ R_{AB}{}^{cd} &= -\,\mathcal{C}_{AB}{}^{E}\Gamma_{E}{}^{cd} + (E_{A}\Gamma_{B}{}^{cd}) - (-1)^{AB}(E_{B}\Gamma_{A}{}^{cd}) + \\ &\quad + 2\Gamma_{Ae}{}^{c}\Gamma_{B}{}^{de} - (-1)^{AB}2\Gamma_{Be}{}^{c}\Gamma_{A}{}^{de} \quad . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Sie besitzen folgende Symmetrien

$$T_{AB}{}^{C} = -(-1)^{AB}T_{BA}{}^{C} \tag{2.29}$$

$$R_{AB}{}^{cd} = -(-1)^{AB}R_{BA}{}^{cd} \quad , \qquad R_{AB}{}^{cd} = -R_{AB}{}^{dc} \quad . \tag{2.30}$$

Und aus der gradierten Jacobi-Identität der Ableitungen

$$0 = \sum_{A,B,C}^{\text{cycl.}} [\nabla_A, [\nabla_B, \nabla_C\}\} =: \triangle_{ABC}{}^{D}\nabla_D + \triangle_{ABC}{}^{de}M_{de}$$

folgt jeweils eine Bianchi-Identität für Torsion und Krümmung

$$0 = \triangle_{ABC}{}^{D} = \sum_{A,B,C}^{\text{cycl.}} \left(\nabla_A T_{BC}{}^{D} - T_{AB}{}^{E}T_{EC}{}^{D} - R_{AB}{}^{ef}(M_{ef})_{C}{}^{D}\right) \tag{2.31}$$

$$0 = \triangle_{ABC}{}^{de} = \sum_{A,B,C}^{\text{cycl.}} \left(\nabla_A R_{BC}{}^{de} - T_{AB}{}^{F}R_{FC}{}^{de}\right) \quad . \tag{2.32}$$

## 2.10 Flacher Superraum

Die Supermannigfaltigkeit soll speziell Supergravitation beschreiben, daher muß der Limes zum flachen Superraum möglich sein. In diesem Limes gehen die kovarianten Ableitungen $\nabla_A$ über in die flachen Ableitungen $\mathcal{D}_A$

$$\nabla_A \quad \longrightarrow \mathcal{D}_A := \hat{E}_{A}{}^{M}\partial_M \quad ,$$

mit

$$\hat{E}_{A}{}^{M} := \begin{pmatrix} \delta_{a}{}^{m} & 0 \\ -i\Theta^{\beta}\gamma^{m}{}_{\beta\alpha} & \delta_{\alpha}{}^{\mu} \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{E}_{M}{}^{A} := \begin{pmatrix} \delta_{m}{}^{a} & 0 \\ i\Theta^{\nu}\gamma^{a}{}_{\nu\mu} & \delta_{\mu}{}^{\alpha} \end{pmatrix} \quad . \tag{2.33}$$

Die Vielbeine sind hier so gewählt, daß im flachen Superraum eine Torsion übrigbleibt, die der gewünschten Supersymmetrie-Algebra entspricht

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] = 0 \quad &, \qquad [\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_b] = 0 \\ \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} &= -2i\gamma^{a}{}_{\alpha\beta}\mathcal{D}_a \quad . \end{aligned} \tag{2.34}$$

## 2.11 Supergravitations-Constraints

Speziell für Supergravitation werden üblicherweise einige zusätzliche Forderungen an die Supermannigfaltigkeit gestellt. Diese werden als Forderungen an Torsion und Krümmung formuliert:

Die Supersymmetrie-Algebra (2.34) des flachen Superraumes soll auch im gekrümmten Superraum imitiert werden

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = -2i\gamma^a{}_{\alpha\beta}\nabla_a \quad . \tag{2.35}$$

Somit lautet eine natürliche Forderung

$$T_{\alpha\beta}{}^c = -2i\gamma^c{}_{\alpha\beta} \quad , \qquad T_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0 \quad , \qquad R_{\alpha\beta}{}^{cd} = 0 \quad . \tag{2.36}$$

Die bisherigen Constraints legen eine Supergeometrie fest, die aufgrund ihrer algebraischen Eigenschaften konforme Supergravitation genannt wird. Eine zusätzliche Forderung definiert dann Poincaré-Supergravitation

$$T_{\alpha b}{}^c = 0 \quad . \tag{2.37}$$

Dieses Constraint bringt die Spinkonnektion in feste Beziehung zum Anholonomiekoeffizienten und damit zum Vielbein

$$\Gamma_\alpha{}^{bc} = -\frac{1}{2}\,\mathcal{C}_{\alpha d}{}^c\eta^{db} \quad . \tag{2.38}$$

Die Supergravitations-Constraints schränken zusammen mit den Bianchi-Identitäten (2.31) und (2.32) den Feldinhalt der Theorie erheblich ein. Eine Auswertung dieser Einschränkungen wird jedoch erst bei einer Konkretisierung auf eine bestimmte Anzahl an Supersymmetrien und Raumdimensionen möglich.

# Kapitel III

# $N$=1 $D$=3 Supergravitation

Für $D = 3$ gelten einige spezielle Relationen und sind besondere Notationen üblich, die für andere Dimensionen nicht existieren. Für eine Übersicht hierüber siehe Anhang C.

## 3.1 Lösen der Bianchi-Identitäten

Beschränkt man sich auf $D = 3$, sind die Bianchi-Identitäten (2.31) und (2.32) größtenteils lösbar:

Man erhält aus

$$0 = \triangle_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} \qquad \Longrightarrow T_{a\beta}{}^{\gamma} = \gamma_{a\beta}{}^{\delta} A_{\delta}{}^{\gamma} \quad , \tag{3.1}$$

mit einem beliebigen, reellen Tensorfeld $A_{\delta}{}^{\gamma}$. Dies wird weiter eingeschränkt durch

$$0 = \triangle_{\alpha\beta(c}{}^{d}\gamma_{e)}{}^{\alpha\beta} \qquad \Longrightarrow A_{\alpha}{}^{\beta} = W \cdot \delta_{\alpha}{}^{\beta} \qquad \Longrightarrow T_{a\beta}{}^{\gamma} = \gamma_{a\beta}{}^{\gamma} W \quad , \tag{3.2}$$

mit einem beliebigen, reellen Skalarfeld $W$. Entsprechend gilt für die Krümmung

$$0 = \triangle_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta\varepsilon} \qquad \Longrightarrow R_{a\beta}{}^{\gamma\delta} = i\gamma_{a\beta}{}^{\varepsilon} A_{\varepsilon}{}^{\gamma\delta} \quad , \tag{3.3}$$

mit einem beliebigen, reellen Tensorfeld $A_{\alpha\beta\gamma}$, das in den hinteren beiden Indizes symmetrisch ist, also $A_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha(\beta\gamma)}$ erfüllt. Dies wird ebenfalls weiter eingeschränkt durch

$$0 = \triangle_{\alpha\beta(c}{}^{\delta}\gamma_{e)}{}^{\alpha\beta} \qquad \Longrightarrow A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{2}{3} i C_{\alpha(\beta} \nabla_{\gamma)} W + G_{\alpha\beta\gamma} \tag{3.4}$$

$$\Longrightarrow R_{a\beta}{}^{\gamma\delta} = \gamma_{a\beta}{}^{\varepsilon} \left( -\frac{2}{3} \delta_{\varepsilon}{}^{(\gamma} \nabla^{\delta)} W + i G_{\varepsilon}{}^{\gamma\delta} \right) \quad , \tag{3.5}$$

mit einem beliebigen, reellen, total symmetrischen Tensorfeld $G_{\alpha\beta\gamma} = G_{(\alpha\beta\gamma)}$. Die übrigen Komponenten von Torsion und Krümmung liegen entweder fest durch die Constraints (2.36) und (2.37), oder lassen sich durch die beiden Felder $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ ausdrücken

$$0 = \triangle_{\alpha\beta[c}{}^{d}\gamma_{e]}{}^{\alpha\beta} \qquad \Longrightarrow T_{ab}{}^{c} = 2W \cdot \varepsilon_{ab}{}^{c} \tag{3.6}$$

$$0 = \triangle_{\alpha\beta[c}{}^{\delta}\gamma_{e]}{}^{\alpha\beta} \qquad \Longrightarrow T_{ab}{}^{\gamma} = \varepsilon_{abc}\gamma^{c\varepsilon\kappa}\left(-\frac{i}{3}\delta_{\kappa}{}^{\gamma}\nabla_{\varepsilon}W + \frac{1}{2}G_{\varepsilon\kappa}{}^{\gamma}\right) \tag{3.7}$$

$$0 = \triangle_{\alpha\beta[c}{}^{\delta\varepsilon}\gamma_{f]}{}^{\alpha\beta} \qquad \Longrightarrow R_{ab}{}^{\gamma\delta} = \varepsilon_{abc}\gamma^{c\kappa\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}\left(\frac{i}{3}\delta_{\kappa}{}^{(\gamma}\nabla^{\delta)}W + \frac{1}{2}G_{\kappa}{}^{\gamma\delta}\right). \tag{3.8}$$

Eine Möglichkeit, umgekehrt die Felder $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ z.B. durch die Torsion auszudrücken, ist

$$W = -\frac{1}{12}\varepsilon^{ab}{}_{c}T_{ab}{}^{c} \quad , \qquad G_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{a}{}^{bc}T_{bc(\alpha}\gamma^{a}{}_{\beta\gamma)} \quad . \tag{3.9}$$

Die übrigen Bianchi-Identitäten schränken die Felder $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ weiter ein und geben noch ein Constraint an sie

$$\nabla_{a}W = \frac{3}{4}\gamma_{a}{}^{\beta\gamma}\nabla^{\alpha}G_{\alpha\beta\gamma} \quad . \tag{3.10}$$

Damit sind alle Bianchi-Identitäten erfüllt. Von der Supergravitations-Algebra (2.27) bleibt nur noch übrig

$$\{\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}\} = -\,2i\gamma_{\alpha\beta}{}^{a}\nabla_{a} \tag{3.11}$$

$$[\nabla_{a}, \nabla_{\beta}] = W\gamma_{a\beta}{}^{\gamma}\nabla_{\gamma} + \gamma_{a\beta}{}^{\varepsilon}\left(-\frac{2}{3}\delta_{\varepsilon}{}^{(\kappa}\nabla^{\rho)}W + iG_{\varepsilon}{}^{\kappa\rho}\right)M_{\kappa\rho} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}[\nabla_{a}, \nabla_{b}] = {} & 2W\varepsilon_{ab}{}^{c}\nabla_{c} + \varepsilon_{abc}\gamma^{c\alpha\beta}\left(-\frac{i}{3}\delta_{\alpha}{}^{\gamma}\nabla_{\beta}W + \frac{1}{2}G_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\right)\nabla_{\gamma} \\ & + \varepsilon_{abc}\gamma^{c\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\left(\frac{i}{3}\delta_{\beta}{}^{(\gamma}\nabla^{\delta)}W + \frac{1}{2}G_{\beta}{}^{\gamma\delta}\right)M_{\gamma\delta} \quad .\end{aligned} \tag{3.13}$$

## 3.2 Komponentenfelder

Bisher sind alle Felder Superfelder. Setzt man jedoch die Koordinaten $\Theta^{\alpha}$ auf Null, geschrieben „|“, erhält man die niedrigsten Komponentenfelder. Für die nächsthöheren muß man vorher differenzieren. Für ein beliebiges Feld $A(x,\Theta)$ gilt dann folgende Schreibweise

$$A^{(0)} := A| \quad , \qquad A^{(1)}_{\mu} := \partial_{\mu}A| \quad , \qquad A^{(2)} := \partial^{\mu}\partial_{\mu}A| \quad . \tag{3.14}$$

Bei der kovarianten Ableitung $\nabla_a$ gilt zunächst per Definition

$$\nabla_a| =: e_a{}^m\partial_m + \chi_a{}^\mu\partial_\mu + \varphi_a{}^{\beta\gamma}M_{\beta\gamma} \quad , \tag{3.15}$$

mit dem Graviton $e_a{}^m$, dem Gravitino $\chi_a{}^\mu$ und der Konnektion $\varphi_a{}^{\beta\gamma}$.

Bei $\nabla_\alpha$ lassen sich einige Komponenten wegeichen. Faßt man die Gesamtheit aller Eichtransformationen in einem Operator $K$ zusammen,

$$K := k^M\partial_M + k^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} \quad , \tag{3.16}$$

und schaut, wie $\nabla_\alpha$ unter den $K^{(1)}$ transformiert ($K^{(0)} = K^{(2)} = 0$),

$$(\delta_K\nabla_\alpha)| = [K, \nabla_\alpha]| = -E_\alpha{}^\mu|k_\mu^{(1)M}\partial_M - E_\alpha{}^\mu|k_\mu^{(1)\beta\gamma}M_{\beta\gamma} \quad ,$$

dann sieht man, daß sich hiermit die Form

$$\nabla_\alpha| = \partial_\alpha \tag{3.17}$$

erreichen läßt.

Aus (3.15) und (3.17) kann man ablesen

$$\begin{aligned} &E_a{}^m| = e_a{}^m \quad , && E_a{}^\mu| = \chi_a{}^\mu \quad , && \Gamma_a{}^{\beta\gamma}| = \varphi_a{}^{\beta\gamma} \\ &E_\alpha{}^m| = 0 \quad , && E_\alpha{}^\mu| = \delta_\alpha{}^\mu \quad , && \Gamma_\alpha{}^{\beta\gamma}| = 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Und aus $\delta_A{}^B = E_A{}^M E_M{}^B$ folgen die entsprechenden Inversen

$$\begin{aligned} &E_m{}^a| = e_m{}^a \quad , && E_m{}^\alpha| = -e_m{}^b\chi_b{}^\alpha \\ &E_\mu{}^a| = 0 \quad , && E_\mu{}^\alpha| = \delta_\mu{}^\alpha \quad . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Bei zweifachen Ableitungen gilt

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta| = -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial_\mu + (\partial_\alpha E_\beta{}^N)|\partial_N + (\partial_\alpha\Gamma_\beta{}^{\gamma\delta})|M_{\gamma\delta} \quad . \tag{3.20}$$

Unter den $K^{(2)}$, also mit $K^{(0)} = 0$ und $K_\mu^{(1)} = 0$, transformiert die Kontraktion zweier kovarianter Ableitungen nach

$$(\delta_K\nabla^\alpha\nabla_\alpha)| = [K, \nabla^\alpha\nabla_\alpha]| = -k^{(2)M}\partial_M - k^{(2)\alpha\beta}M_{\alpha\beta} \quad ,$$

so daß man sie auf die einfache Form

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha| = \partial^\mu\partial_\mu \tag{3.21}$$

bringen kann. Für unkontrahierte Ableitungen bedeutet das

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta| = \nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}| + \nabla_{(\alpha}\nabla_{\beta)}| = -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}\,\partial^\mu\partial_\mu - i\gamma^c_{\alpha\beta}\nabla_c| \quad . \tag{3.22}$$

Die Aufteilung eines beliebigen Feldes $A(x,\Theta)$ in Komponenten, kovariant geschrieben,

$$A^{(0)} := A| \quad , \qquad A^{(1)}_\alpha := \nabla_\alpha A| \quad , \qquad A^{(2)} := \nabla^\alpha \nabla_\alpha A| \quad , \tag{3.23}$$

reduziert sich mit obiger Eichung auf (3.14).

Die verbleibenden Eichfreiheitsgrade $k^{(0)m}$ und $k^{(0)\alpha\beta}$ gehören zur gewöhnlichen Gravitation und werden nicht fixiert. Die Eichfreiheitsgrade $k^{(0)\mu}$ entsprechen den lokalen Supersymmetrietransformationen und werden ebenfalls nicht fixiert. Weitere Eichfreiheiten sind nicht vorhanden.

Die in (3.15) definierten Felder $e_a{}^m$, $\chi_a{}^\mu$ und $\varphi_a{}^{\alpha\beta}$ beschreiben die Supermannigfaltigkeit eindeutig. Alle höheren Komponentenfelder von $E_A{}^M$ und $\Gamma_A{}^{\alpha\beta}$ sowie von den Tensorfeldern $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ lassen sich durch sie ausdrücken.

Die Konnektion $\varphi_a{}^{\alpha\beta}$ läßt sich nicht vollständig mit der Konnektion der gewöhnlichen Gravitation identifizieren, da sie auch nach Nullsetzen aller Fermionen mittels (3.6) eine Torsion liefert. Dieser Anteil der Konnektion, der die Torsion bildet, spielt später die Rolle eines Hilfsfeldes und wird abgespalten

$$\varphi_a{}^{\alpha\beta} =: \tilde{\varphi}_a{}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} S \gamma_a{}^{\alpha\beta} \quad , \qquad S := W| \quad . \tag{3.24}$$

Die verbleibende Konnektion $\tilde{\varphi}_a{}^{\alpha\beta}$ liegt vollständig fest. Das Constraint (3.6) läßt sich nach $\tilde{\varphi}_a{}^{\alpha\beta}$ auflösen. Man erhält[1]

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_a{}^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{8} \varepsilon^{dbc} \gamma_c{}^{\alpha\beta} \Big( \mathcal{C}_{dba}| - \mathcal{C}_{bad}| - \mathcal{C}_{adb}| \Big) \\ \mathcal{C}_{abc}| &= e_a{}^m (\partial_m e_b{}^n) e_{nc} - e_b{}^m (\partial_m e_a{}^n) e_{nc} - 2i \chi_a{}^\mu \chi_b{}^\nu \gamma_{\mu\nu}{}^c \quad . \end{aligned} \tag{3.25}$$

Die gewöhnliche kovariante Ableitung lautet mit der neuen Konnektion

$$\mathscr{D}_a := e_a{}^m \partial_m + \tilde{\varphi}_a{}^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \quad . \tag{3.26}$$

Und ihre Torsion $[\mathscr{D}_a, \mathscr{D}_b] =: \tilde{T}_{ab}{}^c \mathscr{D}_c + \tilde{R}_{ab}{}^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$ ergibt mittels[1] (3.6)

$$\tilde{T}_{ab}{}^c = 2i \chi_a{}^\mu \chi_b{}^\nu \gamma_{\mu\nu}{}^c \quad . \tag{3.27}$$

Dies verschwindet bei Nullsetzen aller Fermionen, so daß sich die übliche, torsionsfreie Einstein-Gravitation ergibt.

Die bisherige kovariante Ableitung (3.15) schreibt sich nun als

$$\nabla_a| =: \mathscr{D}_a + \frac{1}{2} S \gamma_a{}^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} + \chi_a{}^\mu \partial_\mu \quad . \tag{3.28}$$

[1] Die Berechung von $\mathcal{C}_{abc}|$ und $\tilde{T}_{ab}{}^c$ erfordert Ergebnisse aus dem nächsten Abschnitt.

## 3.3 Das Supervielbein in Komponentenfeldern

Für viele Rechnungen in Komponentenfeldern werden die Komponenten des Supervielbeins benötigt. Die niedrigsten Komponentenfelder $E_A{}^M|$ und ihre Inversen $E_M{}^A|$ sind schon oben angegeben ((3.18) und (3.19)).

Ihre ersten Ableitungen erhält man durch Auswerten von $\nabla_\alpha \nabla_B|$ einmal direkt und dann mittels der Supergravitationsalgebra (2.27), mit anschließendem Koeffizientenvergleich. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{array}{ll} \partial_\alpha E_a{}^m| = -i\chi_a{}^\mu \gamma_{\mu\alpha}{}^b e_b{}^m & \partial_\alpha E_a{}^\mu| = \varphi_{a\alpha}{}^\mu - \gamma_{a\alpha}{}^\mu S - i\chi_a{}^\nu \gamma_{\nu\alpha}{}^b \chi_b{}^\mu \\ \partial_\alpha E_\beta{}^m| = -i\gamma_{\alpha\beta}{}^a e_a{}^m & \partial_\alpha E_\beta{}^\mu| = -i\gamma_{\alpha\beta}{}^a \chi_a{}^\mu \\ \partial_\alpha \Gamma_a{}^{\beta\gamma}| = -i\chi_a{}^\mu \gamma_{\mu\alpha}{}^b \varphi_b{}^{\beta\gamma} - R_{a\alpha}{}^{\beta\gamma}| & \partial_\alpha \Gamma_\beta{}^{\gamma\delta}| = -i\gamma_{\alpha\beta}{}^a \varphi_a{}^{\gamma\delta} \quad , \end{array} \tag{3.29}$$

und mittels der Ableitung von $\delta_A{}^B = E_A{}^M E_M{}^B$ wieder die entsprechenden Inversen

$$\begin{array}{ll} \partial_\alpha E_m{}^a| = 2ie_m{}^b \chi_b{}^\mu \gamma_{\mu\alpha}{}^a & \partial_\alpha E_m{}^\beta| = e_m{}^a \gamma_{a\alpha}{}^\beta S - e_m{}^a \varphi_{a\alpha}{}^\beta \\ \partial_\alpha E_\mu{}^a| = i\gamma_{\alpha\mu}{}^a & \partial_\alpha E_\mu|^\alpha = 0 \quad . \end{array} \tag{3.30}$$

Die zweiten Ableitungen erhält man ganz ähnlich durch Auswerten von $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \nabla_B|$ einmal direkt und dann mittels der Supergravitationsalgebra. Sie lauten

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu E_a{}^m| =& 2\chi_a{}^\alpha \gamma^b{}_\alpha{}^\beta \gamma^c{}_\beta{}^\gamma \chi_{b\gamma}\, e_c{}^m \\ \partial^\mu \partial_\mu E_a{}^\nu| =& \gamma_a{}^{\mu\nu} \nabla_\mu W| + 2i\chi_a{}^\nu S + 2\chi_a{}^\mu \gamma^b{}_\mu{}^\alpha \gamma^c{}_\alpha{}^\rho \chi_{b\rho} \chi_c{}^\nu \\ & - 2i\chi_a{}^\mu \gamma^b{}_\mu{}^\alpha \varphi_{b\alpha}{}^\nu - R_a{}^\alpha{}_\alpha{}^\nu| \\ \partial^\mu \partial_\mu E_\alpha{}^m| =& -2\chi_a{}^\mu \gamma^b{}_\mu{}^\beta \gamma^a{}_{\beta\alpha} e_b{}^m \\ \partial^\mu \partial_\mu E_\alpha{}^\nu| =& -4i\delta_\alpha{}^\nu S - 2\chi_a{}^\mu \gamma^b{}_\mu{}^\beta \gamma^a{}_{\beta\alpha} \chi_b{}^\nu + 2i\gamma^a{}_\alpha{}^\beta \varphi_{a\beta}{}^\nu \\ \partial^\mu \partial_\mu \Gamma_a{}^{\alpha\beta}| =& 2\chi_a{}^\mu \gamma^b{}_\mu{}^\gamma \gamma^c{}_\gamma{}^\nu \chi_{b\nu} \varphi_c{}^{\alpha\beta} + \frac{2}{3} i\chi_a{}^\mu \gamma^b{}_\mu{}^\gamma R_{b\gamma}{}^{\alpha\beta}| - \nabla^\gamma R_{a\gamma}{}^{\alpha\beta}| \\ \partial^\mu \partial_\mu \Gamma_\alpha{}^{\beta\gamma}| =& -\frac{4}{3} i\gamma^a{}_\alpha{}^\delta R_{a\delta}{}^{\beta\gamma}| - 2\chi_a{}^\mu \gamma^b{}_\mu{}^\delta \gamma^a{}_{\delta\alpha} \varphi_b{}^{\beta\gamma} \quad . \end{aligned} \tag{3.31}$$

## 3.4 Supersymmetrie in Komponentenfeldern

Wie schon erwähnt, entsprechen die noch verbliebenen Eichfreiheitsgrade $k^{(0)\mu}$ den lokalen Supersymmetrietransformationen. Eine solche Transformation würde aber, naiv angewandt, aus der bisher gewählten Eichung (3.17), (3.21) herausführen und muß daher mit ausgleichenden Transformationen höherer Ordnung zusammen angewendet werden.

Eine lokale Supersymmetrietransformation $\delta_\varepsilon$ wird daher zuerst definiert über die allgemeine Form

$$\delta_\varepsilon := \left[k^M \partial_M + k^{\gamma\delta} M_{\gamma\delta}, \quad \dots \quad \right] \quad , \tag{3.32}$$

wird dann genauer spezifiziert durch die Angabe der niedrigsten Komponenten

$$k^{(0)\mu} := \varepsilon^\mu \qquad , \quad k^{(0)m} := 0 \quad , \tag{3.33}$$

und schließlich eindeutig festgelegt durch die Forderung nach Beibehaltung der bisherigen Eichung

$$(\delta_\varepsilon \nabla_\alpha)| = 0 \qquad , \quad (\delta_\varepsilon \nabla^\alpha \nabla_\alpha)| = 0 \quad . \tag{3.34}$$

Daraus folgt für die höheren Komponenten von $k^M$ bzw. $k^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
0 =& (\delta_\varepsilon \nabla_\alpha)| \\
&\Longrightarrow \quad k_\alpha^{(1)m} = -i\varepsilon^\beta \gamma_{\beta\alpha}{}^a e_a{}^m \\
&\Longrightarrow \quad k_\alpha^{(1)\mu} = -i\varepsilon^\beta \gamma_{\beta\alpha}{}^a \chi_a{}^\mu \\
&\Longrightarrow \quad k_\alpha^{(1)\gamma\delta} = -i\varepsilon^\beta \gamma_{\alpha\beta}{}^a \varphi_a{}^{\gamma\delta} \qquad (3.35)\\
0 =& (\delta_\varepsilon \nabla^\alpha \nabla_\alpha)| \\
&\Longrightarrow \quad k^{(2)m} = 2\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \gamma^b{}_\beta{}^\mu \chi_{a\mu} e_b{}^m \\
&\Longrightarrow \quad k^{(2)\mu} = 2\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \gamma^b{}_\beta{}^\nu \chi_{a\nu} \chi_b{}^\mu - 2i\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \tilde{\varphi}_{a\beta}{}^\mu - iS\varepsilon^\mu \\
&\Longrightarrow \quad k^{(2)\gamma\delta} = 2\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \gamma^b{}_\beta{}^\mu \chi_{a\mu} \varphi_b{}^{\gamma\delta} + \frac{2}{3} i\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta R_{a\beta}{}^{\gamma\delta}| \quad . \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Statt der Definition als Operator (3.32) läßt sich eine Supersymmetrietransformation $\delta_\varepsilon$ auch mittels ihrer Wirkung auf Komponentenfelder angeben.

Für die Supergravitationsfelder erhält man die Transformation der Komponentenfelder aus

$$\begin{aligned}
(\delta_\varepsilon \nabla_a)| =& (\delta_\varepsilon e_a{}^m)\partial_m + (\delta_\varepsilon \chi_a{}^\mu)\partial_\mu + (\delta_\varepsilon \varphi_a{}^{\gamma\delta}) M_{\gamma\delta} \\
(\delta_\varepsilon W)| =& \delta_\varepsilon S \quad .
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Sie lauten

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon e_a{}^m =& -2i\varepsilon^\alpha \chi_a{}^\mu \gamma_{\alpha\mu}{}^b e_b{}^m \\
\delta_\varepsilon \chi_a{}^\mu =& -2i\varepsilon^\alpha \chi_a{}^\nu \gamma_{\alpha\nu}{}^b \chi_b{}^\mu + \varepsilon^\alpha \tilde{\varphi}_{a\alpha}{}^\mu - \frac{1}{2}\varepsilon^\alpha \gamma_{a\alpha}{}^\mu S - e_a{}^m(\partial_m \varepsilon^\mu) \\
\delta_\varepsilon S =& -i\varepsilon^\alpha \varepsilon^{abc} \gamma_{a\alpha}{}^\beta e_c{}^m (\mathscr{D}_b \chi_{m\beta}) + i\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\mu \chi_{a\mu} S \quad .
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Die Materiefelder der Spinning $p$-Branes bestehen ausschließlich aus skalaren Superfeldern $X$. Deren Komponentenfelder bilden jeweils folgendes Materiemultiplett

$$X| =: A \quad , \qquad \nabla_\alpha X| =: \Psi_\alpha \quad , \qquad \nabla^\alpha \nabla_\alpha X| =: F \quad . \tag{3.39}$$

Ihre Supersymmetrietransformationen berechnet man mittels

$$\delta A := (\delta_\varepsilon X)| \quad , \qquad \delta\Psi_\alpha := (\delta_\varepsilon \nabla_\alpha X)| \quad , \qquad \delta F := (\delta_\varepsilon \nabla^\alpha \nabla_\alpha X)| \quad . \tag{3.40}$$

Sie lauten

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon A =& \varepsilon^\alpha \Psi_\alpha \\
\delta_\varepsilon \Psi_\alpha =& -i\varepsilon^\beta \gamma_{\alpha\beta}{}^a e_a{}^m \partial_m A - i\varepsilon^\beta \gamma_{\alpha\beta}{}^a \chi_a{}^\mu \Psi_\mu - \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha F \\
\delta_\varepsilon F =& 2\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \gamma^b{}_\beta{}^\mu \chi_{a\mu} e_b{}^m \partial_m A - iS\varepsilon^\alpha \Psi_\alpha + 2\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \gamma^b{}_\beta{}^\mu \chi_{a\mu} \chi_b{}^\nu \Psi_\nu \\
& - 2i\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \mathscr{D}_a \Psi_\beta + i\varepsilon \gamma^a{}_\alpha{}^\mu \chi_{a\mu} F \quad .
\end{aligned} \tag{3.41}$$

## 3.5 Wirkungen in Komponentenfeldern

Um eine manifest supersymmetrische Wirkung der Form

$$\mathcal{S} = \int d^3x \, d^2\theta \, E^{-1} \cdot \mathcal{L} \tag{3.42}$$

in Komponenten darzustellen, sind die Superdeterminante des Vielbeins

$$E := \operatorname{sdet} E_A{}^M \quad . \tag{3.43}$$

und alle ihre Komponentenfelder nötig.

Das niedrigste Komponentenfeld der Superdeterminante $E$ läßt sich leicht berechnen, da $E_A{}^M|$ eine Dreiecksform hat

$$E| = \operatorname{sdet} \begin{pmatrix} E_a{}^m| & E_a{}^\mu| \\ E_\alpha{}^m| & E_\alpha{}^\mu| \end{pmatrix} = \operatorname{sdet} \begin{pmatrix} e_a{}^m & \chi_a{}^\mu \\ 0 & \delta_\alpha{}^\mu \end{pmatrix} = \frac{\det e_a{}^m}{\det \delta_\alpha{}^\mu} = e \quad . \tag{3.44}$$

Die höheren Komponentenfelder von $E$ lassen sich dann auf die vorigen Resultate zurückführen

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha E| =& E E_M{}^B \partial_\alpha E_B{}^M (-1)^B| \qquad (3.45)\\
\partial^\alpha \partial_\alpha E| =& E E_N{}^C (\partial^\alpha E_C{}^N) E_M{}^B (\partial_\alpha E_B{}^M)(-1)^{B+C}| + \\
& + E(\partial^\alpha E_M{}^B)(\partial_\alpha E_B{}^M)(-1)^B| + E E_M{}^B \partial^\alpha \partial_\alpha E_B{}^M (-1)^M| \quad .
\end{aligned}$$

Man erhält damit

$$\begin{aligned} \partial_\alpha E| &= -\, ie\chi_a{}^\mu\gamma^a{}_{\mu\alpha} \\ \partial^\alpha\partial_\alpha E| &= e(2\chi^{a\mu}\chi_{a\mu} - 4iS) \quad . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Mit diesen Ergebnissen ist es nun möglich, eine lokal supersymmetrische Wirkung in Komponenten auszuwerten

$$\mathcal{S} = \int d^3x\, d^2\theta\, E^{-1} \cdot \mathcal{L} = \int d^3x \;\cdot \nabla^\alpha\nabla_\alpha \left(E^{-1}\mathcal{L}\right)| \tag{3.47}$$

$$= \int d^3x\, e^{-1} \cdot \left(\nabla^\alpha\nabla_\alpha + 2i\chi_a{}^\mu\gamma^a{}_\mu{}^\nu\nabla_\nu + 2\varepsilon^{abc}\chi_a{}^\mu\gamma_{b\mu}{}^\nu\chi_{c\nu} + 4iS\right) \cdot \mathcal{L}| \quad .$$

Zu berechnen bleiben dann nur noch die Komponentenfelder der jeweiligen Lagrange-Funktion, also $\nabla^\alpha\nabla_\alpha\mathcal{L}|$, $\nabla_\alpha\mathcal{L}|$ und $\mathcal{L}|$.

Diese allgemeine Form der Wirkung ist invariant unter (3.38) zusammen mit (3.41), sofern die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$, die hier nicht näher angegeben ist, als Superskalar transformiert.

## 3.6 Konstruktion von Lagrange-Funktionen

Legt man Wert darauf, daß dieses Transformationsverhalten manifest ist, dann gibt es nur eine überschaubare Anzahl von Bausteinen, aus denen die Lagrange-Funktion bestehen kann.

Das Supervielbein ist als selbständiger Baustein $E_A{}^M$ ungeeignet, da der Weltindex $M$ nicht unter lokalen Lorentz-Transformationen transformiert. Trotzdem wird er natürlich implizit immer dazu verwendet werden, Weltindizes von anderen Tensoren in Tangentialindizes zu verwandeln. Ein Supertensor trägt daher im folgenden (wenn überhaupt) nur Tangentialindizes.

Supergravitation hält stattdessen Einzug mittels der Supertensorfelder $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ und natürlich durch die kovariante Ableitung $\nabla_A$.

Materie ist bei den Spinning $p$-Branes nur vertreten durch die Superskalarfelder $X$, die bei den Spinning $p$-Branes in Kollektionen $X^{\underline{m}}$ vorkommen, die mit einem Targetraumindex $\underline{m} = 0, \ldots, D-1$ durchgezählt werden.

Da die Generatoren der lokalen Lorentz-Transformationen block-diagonal sind (siehe (2.21)), mischen innerhalb eines Supervektors $V_A$ die Vektoranteile $V_a$ nicht mit den Spinoranteilen $V_\alpha$. Terme wie z.B.

$$(\nabla^a X)(\nabla_a X) \quad , \quad (\nabla^\alpha X)(\nabla_\alpha X) \quad , \quad (\nabla^\alpha X)(\nabla^\beta X)(\nabla^\gamma W)G_{\alpha\beta\gamma}$$

sind daher alles Superskalare.

Zur Konstruktion von Lagrange-Funktionen, die auf manifeste Weise Superskalare sind, stehen daher als Bausteine zur Verfügung

$$W \quad , \quad G_{\alpha\beta\gamma} \quad , \quad \nabla_a \quad , \quad \nabla_\alpha \quad \text{und} \quad X \quad . \tag{3.48}$$

## 3.7 $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ in Komponentenfeldern

Zum Abschluß dieses Kapitels sei noch eine vorbereitende Rechnung aufgeführt.

Die Felder $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ aus der Lösung der Bianchi-Identitäten (Abschnitt 3.1) sind Tensorfelder und spielen eine wichtige Rolle bei der Bildung von Lorentz-Invarianten. Sie lassen sich vollständig durch die Felder ${e_a}^m$, ${\chi_a}^\mu$, ${\tilde{\varphi}_a}{}^{\beta\gamma}$ und $S$ ausdrücken.

Die Komponentenfelder von $W$ lauten

$$\begin{aligned}
W| =& S \\
\nabla_\alpha W| =& -\frac{1}{2} i\varepsilon^{abc} {\gamma_{a\alpha}}^\beta T_{bc\beta}| \\
=& -i\varepsilon^{abc} {\gamma_{a\alpha}}^\beta {e_c}^n (\mathscr{D}_b \chi_{n\beta}) + i{\gamma^a}_\alpha{}^\mu \chi_{a\mu} S \\
\nabla^\alpha \nabla_\alpha W| =& \frac{1}{2} i\varepsilon^{abc} \gamma_{c\alpha\beta} {R_{ab}}^{\alpha\beta}| \\
=& -\frac{1}{2} i\tilde{R} - 3iS^2 - S\varepsilon^{abc} {\chi_a}^\mu {\chi_b}^\nu \gamma_{\mu\nu c} + i\varepsilon^{abc} {\chi_a}^\mu \gamma_{b\alpha\beta} {R_{c\mu}}^{\alpha\beta}| \quad .
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Hierbei ist $\tilde{R}$ das Krümmungsskalar der gewöhnlichen Gravitation, es enthält nur ${e_a}^m$ und ${\tilde{\varphi}_a}{}^{\alpha\beta}$.

$$\begin{aligned}
&\tilde{R} := {\tilde{R}_a}{}^a \quad , \qquad \tilde{R}_{ab} := {\tilde{R}_{ca}}{}^c{}_b \quad , \qquad {\tilde{R}_{abc}}{}^d := {\tilde{R}_{ab}}{}^{\alpha\beta} {(M_{\alpha\beta})_c}^d \\
&{\tilde{R}_{ab}}{}^{\alpha\beta} := -{\tilde{\mathcal{C}}_{ab}}{}^c {\tilde{\varphi}_c}{}^{\alpha\beta} + {e_a}^m (\partial_m {\tilde{\varphi}_b}{}^{\alpha\beta}) - {e_b}^m (\partial_m {\tilde{\varphi}_a}{}^{\alpha\beta}) + {\tilde{\varphi}_a}{}^{\alpha\gamma} {\tilde{\varphi}_{b\gamma}}{}^\beta - {\tilde{\varphi}_b}{}^{\alpha\gamma} {\tilde{\varphi}_{a\gamma}}{}^\beta \\
&{\tilde{\mathcal{C}}_{ab}}{}^c := \Big( {e_a}^m (\partial_m {e_b}^n) - {e_b}^m (\partial_m {e_a}^n) \Big) {e_n}^c \quad .
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Aufgrund des Tensorcharakters von $G_{\alpha\beta\gamma}$ läßt sich das mittlere Komponentenfeld $\nabla_\alpha G_{\beta\gamma\delta}$ noch in zwei Lorentz-invariante Teile zerlegen. Die vollständige

Liste der Komponentenfelder lautet dann

$$
\begin{aligned}
G_{\alpha\beta\gamma}| =& g_{(\alpha\beta\gamma)}, \quad g_{\alpha\beta\gamma} := \frac{1}{2}\gamma_{c\alpha\beta}\varepsilon^{cab}T_{ab\gamma}| \\
& g_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{c\alpha\beta}\varepsilon^{cab}\Big(-e_a{}^m(\partial_m e_b{}^n)e_n{}^d\chi_{d\gamma} + e_a{}^m(\partial_m\chi_{b\gamma}) + \\
& \qquad + \chi_a{}^\mu\varphi_{b\mu\gamma} - \chi_a{}^\mu\gamma_{b\mu\gamma}S\Big) \\
\nabla_{[\alpha}G_{\beta]\gamma\delta}| =& \frac{1}{3}C_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\delta}{}^a(e_a{}^m\partial_m S + \chi_a{}^\mu\nabla_\mu W|) \\
\nabla_{(\alpha}G_{\beta)\gamma\delta}| =& \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}R_{bc(\alpha\beta}\gamma_{\gamma\delta)a}| \\
=& -\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}{}^a\gamma_{\gamma\delta}{}^b\Big(\tilde{R}_{ab} - \frac{1}{3}\eta_{ab}\tilde{R} + \\
& - 2(\delta_a{}^e\delta_b{}^f - \frac{1}{3}\eta_{ab}\eta^{ef})\varepsilon_f{}^c{}_d(i\chi_e{}^\mu\chi_c{}^\nu\gamma_{\mu\nu}{}^dS - \chi_{[e}{}^\mu R_{c]\mu}{}^{\alpha\beta}|\gamma_{\alpha\beta}{}^d)\Big) \\
\nabla^\alpha\nabla_\alpha G_{\beta\gamma\delta}| =& -\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}{}^a\gamma_{\gamma\delta}{}^b\nabla^\alpha(R_{ab} - \frac{1}{3}\eta_{ab}R)| + \frac{1}{3}C_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\delta}{}^a\nabla^\alpha\nabla_a W| \quad . \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

Hierbei sind $R$ bzw. $R_{ab}$ (ohne die Tilde) das Krümmungsskalar bzw. der Ricci-Tensor des vollen Krümmungstensors

$$
R := R_a{}^a \quad , \qquad R_{ab} := R_{ca}{}^c{}_b \quad , \qquad R_{abc}{}^d := R_{ab}{}^{\alpha\beta}(M_{\alpha\beta})_c{}^d \quad . \qquad (3.52)
$$

Diese Felder spielen im no-go-Theorem von Bergshoeff, Sezgin und Townsend (Kapitel 4.3) eine zentrale Rolle.

# Kapitel IV

# Spinning $p$-Branes

In diesem Kapitel wird zuerst mittels einer Rückschau auf die bosonische $p$-Brane von Dirac der Begriff „Spinning $p$-Brane“ definiert und der historisch erste Kandidat für eine Spinning $p$-Brane von Howe und Tucker vorgestellt. Dieser besitzt einige Unzulänglichkeiten, die schließlich zur Formulierung eines no-go-Theorems von Bergshoeff, Sezgin und Townsend geführt haben, das im Anschluß hieran diskutiert wird. Dieses no-go-Theorem ist, wie Lindström und Roček bemerkten, zwar in großen Teilen korrekt, beinhaltet jedoch einen Fehlschluß, der schließlich doch die Formulierung von Spinning $p$-Brane-Modellen zuläßt. Die Spinning $p$-Brane von Karlhede, Lindström und Roček sowie die von Castro bilden den Abschluß des Kapitels.

## 4.1 Die Dirac-Brane

Dirac schlug 1962 [1] eine elektrisch geladene, sphärische Membrane als Modell für das Elektron vor. Als Elektronenmodell wurde es später verworfen, da es den Spin des Elektrons nicht reproduzieren konnte. Dennoch bildet es heute die Grundlage der meisten $p$-Brane-Modelle.

### 4.1.1 Die Dirac-Wirkung

Die Parametrisierung der von Dirac vorgeschlagenen Membrane erfolgt mittels dreier Weltkoordinaten $\sigma^m$

$$X^{\underline{m}}: \quad \sigma^m \longrightarrow X^{\underline{m}}(\sigma) \qquad m = 0,1,2 \quad , \quad \underline{m} = 0,1,2,3 \quad . \tag{4.1}$$

Das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes hingegen ist eine Funktion der Targetraumkoordinaten $X^{\underline{m}}$

$$A^{\underline{m}}: \quad X^{\underline{m}} \longrightarrow A^{\underline{m}}(X) \quad . \tag{4.2}$$

Die Wirkung der Dirac-Brane unterteilt sich in einen reinen Brane-Anteil und einen rein elektromagnetischen Anteil[1]

$$\mathcal{S}[x,A] := \mathcal{S}_{\text{brane}}[x] + \mathcal{S}_{\text{elektr.}}[A]$$

$$\mathcal{S}_{\text{brane}} := -T\int d^3\sigma\sqrt{-g} \quad , \qquad \mathcal{S}_{\text{elektr.}} := -\int\limits_{\text{außerh.}} d^4X\,\frac{1}{4}F_{\underline{m}\underline{n}}F^{\underline{m}\underline{n}}$$

$$g := \det g_{mn} \quad , \quad g_{mn} := \partial_m X^{\underline{m}}\partial_n X_{\underline{m}} \quad , \quad F_{\underline{m}\underline{n}} := \partial_{\underline{m}}A_{\underline{n}} - \partial_{\underline{n}}A_{\underline{m}} \quad . \tag{4.3}$$

Der Brane-Anteil ist in Analogie zum Punktteilchen und zum String einfach das dreidimensionale Weltvolumen der Membrane, multipliziert mit einer Naturkonstanten $T$, der Brane-Spannung.

Der elektromagnetische Anteil beschreibt das bekannte elektromagnetische Feld im Vakuum außerhalb der Brane. Die Kopplung an die Brane geschieht nur mittels der Randbedingung einer gleichmäßig geladenen Brane-Fläche.

Obwohl diese Beschreibung des Elektrons, im wesentlichen wegen des fehlenden Spins, nicht zum Erfolg führte, läßt sie sich ohne Elektromagnetismus leicht auf beliebig-dimensionale Objekte verallgemeinern und bildet so die Grundlage für alle späteren Brane-Betrachtungen. Die so verallgemeinerte Wirkung, hier im folgenden einfach Dirac-Wirkung genannt, lautet für beliebige Dimensionen

$$\mathcal{S}_{\text{Dirac}} := -T\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-g} \quad , \tag{4.4}$$

mit den Definitionen

$$g := \det g_{mn} \quad , \quad g_{mn} := \partial_m X^{\underline{m}}\partial_n X_{\underline{m}} \quad , \quad X^{\underline{m}} : \sigma^m \longrightarrow X^{\underline{m}}(\sigma)$$
$$m = 0,\ldots,p \quad , \quad \underline{m} = 0,\ldots,D-1 \quad .$$

### 4.1.2 Definition der Spinning $p$-Brane

Wie schon in der Einleitung beschrieben, sind Spinning $p$-Branes eine Erweiterung dieses bosonischen Modells von Dirac. Neben lokaler Supersymmetrie im Weltvolumen wird daher auch verlangt, daß der bosonische Anteil auf der Dirac-Brane basiert, oder präziser:

> **Spinning p-Branes** *sind* $(p+1)$*-dimensionale Mannigfaltigkeiten, eingebettet in einen D-dimensionalen, bosonischen Targetraum. Ihre Wirkung zeigt lokale Supersymmetrie im Parameterraum und ist bei Nullsetzen aller Fermionen klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung (4.4).*

[1] Die Ankopplung an das elektromagnetische Feld unterscheidet sich hier von der Ankopplung moderner Branes an „höhere Form-Felder“. Sie ist in dieser Form nur aus historischen Gründen angegeben.

Es wird sich zeigen, daß die Schwierigkeiten im zweiten Teil dieser Definition liegen, also daß naive Supersymmetrisierungen klassischer Branes nach Nullsetzen aller Fermionen im allgemeinen nicht mehr äquivalent zur Dirac-Wirkung sind.

## 4.2 Die Howe-Tucker-Brane

Der erste Kandidat für eine Spinning Membrane wurde 1977 von Howe und Tucker [8, 9, 10] veröffentlicht.

### 4.2.1 Die Howe-Tucker-Wirkung

Der Verlauf der Brane im Targetraum sei wieder mit Vektorfeldern beschrieben, die aber in Hinblick auf die gleich folgende Supersymmetrisierung statt $X^{\underline{m}}(\sigma)$ diesmal $A^{\underline{m}}(\sigma)$ genannt werden.

$$A^{\underline{m}}: \quad \sigma^m \longrightarrow A^{\underline{m}}(\sigma) \qquad m = 0, \ldots, p \quad , \quad \underline{m} = 0, \ldots, D-1 \quad . \tag{4.5}$$

Die Howe-Tucker-Brane basiert, wie schon in der Einleitung erläutert, auf der Forderung, daß ein Spinning $p$-Brane-Modell bei Nullsetzen aller Fermionen klassisch äquivalent zur Dirac-Brane sein soll.

Ausgangspunkt ist daher eine klassisch äquivalente Wirkung. In Analogie zur String-Theorie schlugen Howe und Tucker folgende Wirkung[2] vor :

$$\mathcal{S}_{\text{Howe-Tucker}}[A, g] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\sigma \, \sqrt{-g} \Big( g^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} - p + 1 \Big) \quad . \tag{4.6}$$

Hierbei ist $g_{mn}$ diesmal ein Hilfsfeld, das in dieser Beschreibung einer Metrik auf der Brane entspricht. Es wird als eigener Freiheitsgrad behandelt, ist also nicht identisch mit der induzierten Metrik $\partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}}$.

Wird nach dieser Metrik variiert, ergibt sich als Bewegungsgleichung

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\delta \mathcal{S}[A, g]}{\delta g^{mn}} = \frac{T}{4} g_{mn} (g^{pq} \partial_p A^{\underline{m}} \partial_q A_{\underline{m}} - p + 1) - \frac{T}{2} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} \quad . \tag{4.7}$$

Dies läßt sich algebraisch nach $g_{mn}$ auflösen[3]. Eine Kontraktion mit $g^{mn}$ ergibt

[2] Diese bosonische Wirkung, auf der das Modell basiert, ist in obigen Veröffentlichungen nur für den Fall der Membrane ($p = 2$) diskutiert. Hier wird sie gleich für beliebige $p$ angegeben. Erst für die Supersymmetrisierung später im Kapitel wird auf $p = 2$ konkretisiert.

[3] Für den String ($p = 1$) läßt sich diese Gleichung aufgrund von Weyl-Invarianz nur bis auf eine beliebige skalare Funktion $c(\sigma)$ zu $g_{mn} = c \cdot \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}}$ lösen. Mit Hilfe eben dieser Weyl-Invarianz läßt sich Lösung dann jedoch ebenfalls auf die Form (4.9) bringen, so daß hier keine Fallunterscheidung erforderlich ist.

$$g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} = p+1 \quad , \tag{4.8}$$

was wieder eingesetzt in die volle Gleichung (4.7) auf die gesuchte Lösung führt

$$g_{mn} = \partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} \quad . \tag{4.9}$$

Die Metrik $g_{mn}$ ist also in diesem Modell *on-shell* durchaus gleich der induzierten Metrik, während sie hingegen off-shell unabhängig von ihr ist.

Da (4.9) algebraisch aus einer Bewegungsgleichung erhalten wurde, also ohne eine Differentialgleichung zu lösen, kann man das Ergebnis direkt in die Wirkung (4.6) einsetzen und damit das Hilfsfeld $g_{mn}$ eliminieren.[4] Dies führt auf die Dirac-Wirkung (4.4)

$$\mathcal{S}_{\text{Dirac}}[A] = -T\int d^{p+1}\sigma\,\sqrt{-\det(\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}})} \quad . \tag{4.10}$$

Das Modell ist bisher also klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung, d.h. es führt auf dieselben Bewegungsgleichungen und somit auf dieselbe klassische Brane-Dynamik. Dies gilt nicht mehr notwendigerweise quantenmechanisch, da z.B. bei einer eventuellen Pfadintegralquantisierung hier zusätzlich auch über die Freiheitsgrade der Metrik $g_{mn}$ summiert werden muß, was ihre off-shell-Werte einschließt.

### 4.2.2 Supersymmetrisierung (On-Shell)

Um dieses bosonische Modell für $p = 2$ zu supersymmetrisieren, ersetzt man zuerst die Metrik durch das Vielbein $g_{mn} = e_m{}^a e_{an}$,

$$\mathcal{S}[A,e] = -\frac{T}{2}\int d^3\sigma\, e^{-1}\Big(e^{ma}e_a{}^n\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} - 1\Big) \quad , \tag{4.11}$$

und verwendet für das Vielbein Transformationsregeln für Supergravitation. Die Felder $A^{\underline{m}}$ sind vom Weltvolumen aus gesehen Skalarfelder mit einem reinen Zählindex $\underline{m}$. Sie transformieren als Materiefelder.

Howe und Tucker verwendeten hierfür die on-shell-

[4] Für eine nähere Begründung hierfür siehe Anhang D.

Supersymmetrietransformationen[5]

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon e_a{}^m =& - 2i\varepsilon^\alpha \chi_a{}^\mu \gamma_{\alpha\mu}{}^b e_b{}^m \\
\delta_\varepsilon \chi_a{}^\mu =& - 2i\varepsilon^\alpha \chi_a{}^\nu \gamma_{\alpha\nu}{}^b \chi_b{}^\mu + \varepsilon^\alpha \tilde{\varphi}_{a\alpha}{}^\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^\alpha \gamma_{a\alpha}{}^\mu - e_a{}^m(\partial_m \varepsilon^\mu) \\
\delta_\varepsilon A =& \varepsilon^\alpha \Psi_\alpha \\
\delta_\varepsilon \Psi_\alpha =& - i\varepsilon^\beta \gamma_{\alpha\beta}{}^a e_a{}^m \partial_m A - i\varepsilon^\beta \gamma_{\alpha\beta}{}^a \chi_a{}^\mu \Psi_\mu \quad ,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

zusammen mit einem Constraint an den Supergravitationshintergrund,

$$0 = - i\varepsilon^\alpha \varepsilon^{abc} \gamma_{a\alpha}{}^\beta e_c{}^m (\mathscr{D}_b \chi_{m\beta}) - i\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\mu \chi_{a\mu} \quad , \tag{4.13}$$

und einem in der Veröffentlichung nicht erwähnten Constraint an die Materiefelder,

$$\begin{aligned}
0 =& 2\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \gamma^b{}_\beta{}^\mu \chi_{a\mu} e_b{}^m \partial_m A + i\varepsilon^\alpha \Psi_\alpha + 2\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \gamma^b{}_\beta{}^\mu \chi_{a\mu} \chi_b{}^\nu \Psi_\nu \\
&- 2i\varepsilon^\alpha \gamma^a{}_\alpha{}^\beta \mathscr{D}_a \Psi_\beta \quad .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Man erhält die on-shell-Supersymmetrietransformationen (4.12) aus den off-shell-Supersymmetrietransformationen (3.38) bzw. (3.41) mit der Annahme, daß für die Hilfsfelder $S$ und $F$ on-shell gilt:

$$S = -1 \quad , \qquad F = 0 \quad . \tag{4.15}$$

Die beiden Constraints (4.13) bzw. (4.14) ergeben sich dann aus der Forderung, daß dies auch nach einer Supersymmetrietransformation noch gilt, also

$$\delta_\varepsilon S = 0 \quad , \qquad \delta_\varepsilon F = 0 \quad . \tag{4.16}$$

Mit Hilfe dieser on-shell-Supersymmetrietransformationen läßt sich nun, ausgehend von der bosonischen Wirkung (4.6), die Noether-Methode zur Bestimmung weiterer Terme anwenden.

Hierzu wende man die Supersymmetrietransformationen (4.12) auf die bisherige Wirkung (4.11) an und addiere dann Terme zur Wirkung hinzu, die diese Supersymmetrietransformationen kompensieren. Die hinzugefügten Terme benötigen i.a. weitere Terme zur Kompensation, usw. . Dieser Schritt muß so oft wiederholt werden, bis keine weiteren Kompensationen mehr nötig sind, die Wirkung also supersymmetrisch ist.

[5]Für eine Übersetzung dieser Arbeit in die Notationen von [8] ersetze man: $T \longrightarrow 1$, $\sigma^m \longrightarrow x^m$, $\chi_a{}^\mu \longrightarrow \frac{1}{2}\chi_a{}^\mu$, $A \longrightarrow \phi$, $e \longrightarrow e^{-1}$, $\Psi_\alpha \longrightarrow -i\Psi_\alpha$, $\gamma^1 \longrightarrow \gamma^2$, $\gamma^2 \longrightarrow \gamma^1$, $\varepsilon_{012} \longrightarrow -\varepsilon_{012}$, $\tilde{\varphi}_a{}^{\alpha\beta} \longrightarrow \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}{}_a \omega^a{}_m$, $\mathcal{C}_{abc}| \longrightarrow \Sigma_{cab}$, $\varepsilon_\alpha \longrightarrow -\alpha_\alpha$.
Außerdem werden Weltindizes statt mit $m, n, p, q, \ldots$ mit $\mu, \nu, \lambda, \rho, \ldots$ bezeichnet, Spinorindizes werden unterdrückt.

Man erhält auf diese Weise die Wirkung der Howe-Tucker-Brane

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}[A,\Psi,e,\chi] &= \mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2 = T\int d^3\sigma e^{-1}\mathcal{L}_1 + T\int d^3\sigma e^{-1}\mathcal{L}_2 \\
\mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2}g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} + \frac{1}{2}i\Psi^{\alpha\underline{m}}\gamma^a{}_\alpha{}^\beta\mathcal{D}_a\Psi_{\beta\underline{m}} - \chi_a{}^\alpha\gamma^b{}_\alpha{}^\beta\gamma^a{}_\beta{}^\gamma\partial_b A^{\underline{m}}\Psi_{\gamma\underline{m}}+ \\
&\quad + \frac{1}{4}\chi_a{}^\beta\gamma^b{}_\beta{}^\gamma\gamma^a{}_\gamma{}^\delta\chi_{b\delta}\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} - \frac{1}{4}i\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} \\
\mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}i\varepsilon^{abc}\chi_a{}^\mu\gamma_{b\mu}{}^\nu\chi_{c\nu} \quad . \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Diese Wirkung ist supersymmetrisch unter (4.12) unter Berücksichtigung der Constraints (4.13) und (4.14). Die beiden Anteile $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ sind jeweils schon für sich supersymmetrisch. $\mathcal{S}_1$ ist die Supersymmetrisierung des ersten Terms der bosonischen Wirkung, der die Materiefelder enthält, und $\mathcal{S}_2$ ist die Supersymmetrisierung der kosmologischen Konstanten.

Bis hierher erfüllt die Howe-Tucker-Brane alle Kriterien einer Spinning $p$-Brane. Sie ist lokal supersymmetrisch und reduziert sich bei Nullsetzen aller Fermionen auf eine Wirkung, die klassisch äquivalent zur Dirac-Brane ist. Der einzige Schönheitsfehler bisher ist, daß die Supergravitation von vorneherein on-shell ist, daß also die Gleichungen für $S$ und $F$ (4.15), (4.16) und damit die Constraints (4.13) und (4.14) nicht dynamisch als Bewegungsgleichungen entstehen, sondern gefordert werden müssen. Dies führt zu einem ernsten Problem, wie im folgenden gezeigt wird.

## 4.3 Ein no-go-Theorem

Als Reaktion auf den Vorschlag von Howe und Tucker veröffentlichten 1988 Bergshoeff, Sezgin und Townsend [11] eine umfassende Kritik, die nicht nur die Unzulänglichkeiten dieses Modells aufzeigte, sondern auch den Versuch unternahm, den Beweis der allgemeinen Unmöglichkeit einer Spinning Membrane zu erbringen (no-go-Theorem).

Dieser Beweis gliedert sich in zwei Abschnitte. Zum einen wird korrekt bewiesen, daß das Hinzufügen von reinen Supergravitationstermen die Probleme der Howe-Tucker-Wirkung nicht löst und somit nicht zur gewünschten Spinning Membrane führt. Zum anderen wird der Versuch unternommen, zu beweisen, daß alle anderen denkbaren Modelle in ihren für diesen Beweis wesentlichen Eigenschaften der Howe-Tucker-Brane äquivalent sind. Obwohl dieser zweite Teil, wie schon erwähnt, einen Fehler beinhaltet, trifft die Kritik für die Howe-Tucker-Brane zu. Der Beweis verläuft wie folgt:

### 4.3.1 Supersymmetrisierung (Off-Shell)

Ausgehend von der Howe-Tucker-Brane (4.17) wird nun versucht, die Wirkung derart zu erweitern, daß die Gleichungen für $S$ und $F$ dynamisch entstehen.

Wenn $S$ und $F$ nicht von vorneherein fixiert sein sollen, muß die Wirkung natürlich unter den etwas umfangreicheren off-shell-Supersymmetrietransformationen (3.38), (3.41) invariant sein. Dies erfordert einige Veränderungen. Die Wirkung lautet dann

$$\mathcal{S}[A,\Psi,F,e,\chi,S] = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = T\int d^3\sigma e^{-1}\mathcal{L}_1 + T\int d^3\sigma e^{-1}\mathcal{L}_2$$
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2}g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} + \frac{1}{2}i\Psi^{\alpha\underline{m}}\gamma^a{}_\alpha{}^\beta\mathcal{D}_a\Psi_{\beta\underline{m}} - \chi_a{}^\alpha\gamma^b{}_\alpha{}^\beta\gamma^a{}_\beta{}^\gamma\partial_b A^{\underline{m}}\Psi_{\gamma\underline{m}} + \\ &\quad + \frac{1}{4}\chi_a{}^\beta\gamma^b{}_\beta{}^\gamma\gamma^a{}_\gamma{}^\delta\chi_{b\delta}\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} + \frac{1}{4}iS\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} + \frac{1}{8}F^2 \\ \mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}i\varepsilon^{abc}\chi_a{}^\mu\gamma_{b\mu}{}^\nu\chi_{c\nu} \quad . \end{aligned} \tag{4.18}$$

An zwei Stellen ist ein $S$ aufgetaucht, und ein Term $F^2/8$ ist hinzugekommen. Daß dies supersymmetrisch ist, läßt sich am besten daran sehen, daß es sich um Komponentendarstellungen von manifest kovarianten Wirkungen im Superraum handelt

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= T\int d^3\sigma d^2\theta E^{-1}\,\frac{1}{8}(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}}) \\ \mathcal{S}_2 &= T\int d^3\sigma d^2\theta E^{-1}\,\frac{1}{8}i \quad .\end{aligned} \tag{4.19}$$

$\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ lassen sich mit (3.47) in Komponenten zerlegen, die $X^{\underline{m}}$ sind eine Kollektion von Superskalaren (3.39), der Targetraumindex $\underline{m}$ ist aus Sicht des Weltvolumens ein reiner Zählindex. Man erhält (4.18).

Die so erweiterte Wirkung (4.18) ist also supersymmetrisch und beinhaltet die Felder $S$ und $F$. Bei Variation nach diesen Feldern ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta F} &&\Longrightarrow \quad F = 0 \\ 0 &= \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta S} &&\Longrightarrow \quad i\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} = 2 \quad . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Die erste Gleichung entspricht der gewünschten Bewegungsgleichung für $F$ (4.15). Die zweite Gleichung, die zuerst wie eine Zwangsbedingung an die Materiefelder $\Psi_\alpha{}^{\underline{m}}$ aussieht, erweist sich jedoch als unerfüllbar, da die linke Seite aufgrund der Fermionen nilpotent ist, während hingegen die rechte Seite auch bei wiederholter Potenzierung niemals Null ergibt.

Die Wirkung (4.18) besitzt also in dieser Form überhaupt kein Extremum! Setzt man von Anfang an alle Fermionen auf Null (geschrieben als „||“), dann ist das Problem leichter zu sehen

$$\mathcal{S}[A,\Psi,F,e,\chi,S] = \frac{T}{8}\int d^3\sigma d^2\theta E^{-1}\Big((\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}}) + i\Big) \tag{4.21}$$

$$\mathcal{S}|| = T\int d^3\sigma e^{-1}\Big(-\frac{1}{2}g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} + \frac{1}{8}F^2 - \frac{1}{2}S\Big) \quad . \tag{4.22}$$

Der dritte Term, der von der Supersymmetrisierung der kosmologischen Konstanten herrührt, ist *linear* in $S$. Die einzige Schlußfolgerung hieraus ist, daß die verwendete Supersymmetrsisierung $\mathcal{S}_2$ der kosmologischen Konstanten ungeeignet ist, bzw. zusätzliche Terme hinzugefügt werden müssen (die z.B. $S^2$ enthalten).

### 4.3.2 Mögliche Erweiterungen

Welche weiteren Möglichkeiten gibt es, Terme hinzuzufügen, um die gewünschte kosmologische Konstante zu erzeugen? Zusätzliche Materie-Terme, also Terme, die Materie-Superfelder $X^{\underline{m}}$ enthalten, scheinen zunächst ungeeignet. Sie liefern immer auch zusätzliche Terme für $A^{\underline{m}}$ und ändern im allgemeinen dessen Dynamik.

Das Hinzufügen von Materie-Termen ist jedoch möglich und führt in Kapitel 6.4 dann doch zu einer Supersymmetrisierung der Howe-Tucker-Wirkung. Für die Supersymmetrisierung einer kosmologischen Konstanten sind hierbei jedoch immer Terme notwenig, die Materiefelder im Nenner beinhalten. Solche Wirkungen sind natürlich nicht mehr linear in den Materiefeldern.

Bergshoeff, Sezgin und Townsend betrachten daher nur reine Supergravitationsterme. Als Bausteine für die Konstruktion manifest supersymmetrischer Supergravitationsterme stehen das Superskalar $W$ und der total symmetrische Supertensor $G_{\alpha\beta\gamma}$ zur Verfügung.

Setzt man in ihren Komponentenfeldern (Kapitel 3.7) alle Fermionen auf Null, so sieht man besser, welche Kombinationen in Frage kommen

$$\begin{aligned}
G^{(0)}_{\alpha\beta\gamma}|| &= 0 & W^{(0)}|| &= S\\
G^{(1)}_{[\alpha\beta]\gamma\delta}|| &= \frac{1}{3}C_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\delta}{}^a e_a{}^m\partial_m S & W^{(1)}_\alpha|| &= 0\\
G^{(1)}_{(\alpha\beta)\gamma\delta}|| &= -\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}{}^a\gamma_{\gamma\delta}{}^b\Big(\tilde{R}_{ab} - \frac{1}{3}\eta_{ab}\tilde{R}\Big) & W^{(2)}|| &= -\frac{1}{2}i\tilde{R} - 3iS^2\\
G^{(2)}_{\beta\gamma\delta}|| &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Das Superfeld $W$ mit seinen Komponenten, in denen Terme proportional zu $S$ und $S^2$ vorkommen, scheint geeignet und wird im folgenden diskutiert werden.

Das Tensorfeld $G_{\alpha\beta\gamma}$ ist problematisch, da bei der Bildung von Lorentz-Skalaren leicht Terme proportional $(\partial S)^2$ auftreten. Dies würde die Bewegungsgleichung für $S$ jedoch zu einer Differentialgleichung machen, so daß es sich nicht mehr algebraisch eliminieren läßt und das Modell bei Nullsetzen aller Fermionen nicht mehr klassisch äquivalent zur Dirac-Brane ist.

Das gleiche Problem ergibt sich auch bei Verwendung von Ableitungen des Superskalars $W$. Hierbei treten typischerweise Terme mit $S\partial S$ auf, die ebenfalls das algebraische Lösen der Bewegungsgleichungen für $S$ verhindern.

Wie in [11] diskutiert, ist es jedoch möglich, aus Ableitungen von $G_{\alpha\beta\gamma}$ und $W$ einen weiteren Supertensor, den Cotton-Tensor zu konstruieren, der $S$-unabhängig ist. Lorentz-Invarianten aus dem Cotton-Tensor sind interessant, da bei der Bildung von invarianten Wirkungen durch die Superdeterminante des Vielbeins $E$ immer noch ein Term proportional zu $S$ entsteht (siehe (3.47)). Terme linear in $S$ können alleine zwar nicht die erwünschten Bewegungsgleichungen erzeugen, stellen aber eine erlaubte Abänderung der Wirkung dar.

Nichtsdestotrotz braucht der Cotton-Tensor im folgenden nicht betrachtet zu werden, da alle mit ihm gebildeten Lorentz-Invarianten proportional zu $\nabla\tilde{R}$ sind. Das im folgenden beschriebene Problem entsteht durch Terme, die ausschließlich $\tilde{R}$ und $S$ enthalten. Sie können hiervon nicht beeinflußt werden.

Bergshoeff, Sezgin und Townsend [11] weisen außerdem darauf hin, daß noch eine Invariante existiert, die sich nicht ausschließlich aus den Feldern $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ konstruieren läßt. Diese Invariante ist der Chern-Simons-Term für die dreidimensionale superkonforme Gruppe OSp(1|4). Er scheidet aber ebenfalls aus den Überlegungen aus, da er Ableitungen der Metrik $g_{mn}$ enthält. Solche Ableitungen würden dann analog zu obigem Fall mit $S$ diesmal die Bewegungsgleichung des Vielbeins ${e_a}^m$ zu einer Differentialgleichung machen und seine algebraische Elimination verhindern. Somit wäre das Modell nach Nullsetzen aller Fermionen wieder nicht äquivalent zur Dirac-Brane.

Auch wenn alle diese Überlegungen auf dem Tensorkalkül beruhen, also im wesentlichen nur Invarianten betrachten, deren Invarianz unter allgemeinen Superkoordinatentransformationen sowie lokalen Lorentz-Transformationen manifest ist, wird es heute als sehr sicher angesehen, daß weitere Terme nur aus dem Superfeld $W$ konstruiert werden können.

### 4.3.3 Das Problem

Die gewünschte kosmologische Konstante muß also, statt in der bisher verwendeten Wirkung (4.21) in der etwas allgemeineren Form

$$\mathcal{S}[A,\Psi,F,e,\chi,S] = \frac{T}{8}\int d^3\sigma d^2\theta E^{-1}\Big((\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}}) + if(W)\Big) \qquad (4.24)$$

gesucht werden. Hierbei ist $f(W)$ eine beliebige Funktion von $W$, die es noch zu bestimmen gilt.

Setzt man diesmal alle Fermionen auf Null, ergibt sich

$$\mathcal{S}|| = T \int d^3\sigma e^{-1} \Big( -\frac{1}{2} g^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} + \frac{1}{8} F^2 + \\ + \underbrace{f'(S) \cdot \Big( \frac{1}{16} \tilde{R} + \frac{3}{8} S^2 \Big) - \frac{1}{2} S f(S) \Big)}_{=:\mathcal{L}_2(\tilde{R},S)} \quad . \tag{4.25}$$

Das Problem ist nun schon sichtbar: Der zweite Teil der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}_2(\tilde{R}, S)$, der die kosmologische Konstante erzeugen soll, läuft Gefahr, ebenfalls einen Term mit dem Krümmungsskalar $\tilde{R}$ zu liefern. Dies ist jedoch unbedingt zu vermeiden, da dies wieder die Bewegungsgleichung des Vielbeins ${e_a}^m$ in eine Differentialgleichung verwandeln würde.

Die Bewegungsgleichung für $S$ lautet nun

$$0 = \frac{\delta \mathcal{S}||}{\delta S} \qquad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{L}_2(\tilde{R}, S)}{\partial S}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = f''(S) \Big( \frac{1}{16} \tilde{R} + \frac{3}{8} S^2 \Big) + \frac{1}{4} S f'(S) - \frac{1}{2} f(S) \quad . \tag{4.26}$$

Die Lösung dieser (für $S$ algebraischen) Bewegungsgleichung hängt natürlich stark von der Form von $f$ ab und wird eine Funktion von $\tilde{R}$ sein, im folgenden allgemein mit $S_0(\tilde{R})$ bezeichnet.

Setzt man diese algebraisch erhaltene Lösung wieder in die Wirkung ein, sollen alle Terme mit dem Krümmungsskalar $\tilde{R}$ verschwinden, d.h.

$$0 = \frac{d}{d\tilde{R}} \Big( \mathcal{L}_2(\tilde{R}, S_0(\tilde{R})) \Big) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}_2(\tilde{R}, S)}{\partial \tilde{R}} \right|_{S=S_0} + \underbrace{\left. \frac{\partial \mathcal{L}_2(\tilde{R}, S)}{\partial S} \right|_{S=S_0}}_{=0} \cdot \frac{\partial S_0(\tilde{R})}{\partial \tilde{R}}$$

$$\Rightarrow \quad f'(S_0) = 0 \quad . \tag{4.27}$$

Hieraus folgt, daß entweder $S_0$ gar nicht von $\tilde{R}$ abhängt oder die Funktion $f$ trivial ist ($f = const.$). Die zweite Möglichkeit entspricht aber genau der schon besprochenen Wirkung (4.21) und liefert nicht die gewünschte kosmologische Konstante. Betrachtet wird daher nur der Fall

$$S_0 = const. \quad . \tag{4.28}$$

In der Bewegungsgleichung (4.26) taucht aber explizit ein $\tilde{R}$ auf. Dies kann nur sein, wenn der entsprechende Koeffizient verschwindet

$$\Rightarrow \quad f''(S_0) = 0 \quad . \tag{4.29}$$

Mit (4.27) und (4.29) bleibt von der Bewegungsgleichung (4.26) noch übrig

$$f(S_0) = 0 \quad . \tag{4.30}$$

Das sind nun genug Informationen, um die algebraische Lösung $S_0$ in die Wirkung (4.25) einzusetzen und damit $S$ zu eliminieren. Mit (4.27) und (4.30) verschwindet dabei aber überraschend der komplette Term $\mathcal{L}_2$, so daß keine kosmologische Konstante übrig bleibt. Eine Funktion $f(W)$, die zum einen eine kosmologische Konstante erzeugt und gleichzeitig Terme mit $\tilde{R}$ vermeidet, ist demnach unmöglich.

Zusammenfassend läßt sich daher sagen, daß sich keine reinen Supergravitationsterme hinzufügen lassen, die nach Elimination der Hilfsfelder eine kosmologische Konstante liefern. Die bosonische Howe-Tucker-Wirkung (4.6) ist daher nicht auf diese Weise linear supersymmetrisierbar[6], die Howe-Tucker-Brane in ihrer Form (4.17) nach gängigem Verständnis keine Spinning Membrane.

### 4.3.4 Verallgemeinerung auf alle Wirkungen

Zusatzlich zu dem Beweis, daß keine lineare Supersymmetrisierung der bosonischen Howe-Tucker-Wirkung möglich ist, argumentierten Bergshoeff, Sezgin und Townsend [11], daß auch keine andere bosonische Wirkung eine solche Supersymmetrisierung zulasse.

Die Argumentation beginnt damit, daß jede Spinnung Membrane nach Elimination aller Hilfsfelder per Definition die Form

$$\mathcal{S}[A,\Psi] = \mathcal{S}_{\text{Dirac}}[A] + \mathcal{S}_{\text{Rest}}[A,\Psi] \tag{4.31}$$

annimmt, wobei $\mathcal{S}_{\text{Dirac}}$ die Dirac-Wirkung (4.10) ist und $\mathcal{S}_{\text{Rest}}$ nur Terme enthält, die mindestens quadratisch in den Fermionen sind.

Diese Wirkung kann jedoch immer in eine Spinning Membrane nach der Art von Howe und Tucker umgeformt werden. Man ersetze nur $\mathcal{S}_{\text{Dirac}}$ durch die bosonische Howe-Tucker-Wirkung (4.6)

$$\mathcal{S}[A,g,\Psi] = \mathcal{S}_{\text{Howe-Tucker}}[A,g] + \mathcal{S}_{\text{Rest}}[A,\Psi] \quad . \tag{4.32}$$

Es ist schnell einzusehen, daß man die neu hinzugekommene Hilfsmetrik $g_{mn}$ immer mit Transformationsregeln ausstatten kann derart, daß jede Symmetrie von (4.31) auch eine Symmetrie von (4.32) ist. Dies bedeutet insbesondere, daß wenn (4.31) supersymmetrisch ist, auch (4.32) Supersymmetrie aufweist.

[6]Dennoch wird in Kapitel 6.4 unter Umgehung des no-go-Theorems eine Supersymmetrisierung der Howe-Tucker-Wirkung erreicht.

Damit hätte man eine Supersymmetrisierung der Howe-Tucker-Wirkung vorliegen, die bei Nullsetzen aller Fermionen klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung ist. Im vorigen Abschnitt wurde aber gerade gezeigt, daß eine solche Supersymmetrisierung nicht existiert. Da man jede Spinning Membrane-Wirkung auf diese Form bringen kann, kann, so Bergshoeff, Sezgin und Townsend, keine Spinning Membrane-Wirkung existieren.

## 4.4 Die Karlhede-Lindström-Brane

Lindström und Roček wiesen 1989 jedoch darauf hin [13], daß nur eine *lineare* Supersymmetrisierung der Howe-Tucker-Wirkung ausgeschlossen wurde. Es sei daher durchaus möglich eine lineare Supersymmetrisierung einer anderen bosonische Wirkung zu finden, die bei ihrer Umformung zu (4.32) zu einer *nichtlinearen* Supersymmetrisierung der Howe-Tucker-Wirkung führt.

### 4.4.1 Die Karlhede-Lindström-Wirkung

Als Gegenbeispiel ([12] und [13]) konstruierten Karlhede, Lindström und Roček ein Spinning-$p$-Brane-Modell, basierend auf der bosonischen Wirkung[7]:

$$\mathcal{S}_{\text{Karlhede-Lindström}}[A,g] = -T\int d^{p+1}\sigma\,\sqrt{-g}\Big(\frac{1}{p+1}\cdot g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}}\Big)^{\frac{p+1}{2}} \quad . \tag{4.33}$$

Hierbei ist $g_{mn}$ wieder die Hilfsmetrik und $A^{\underline{m}}$ beschreibt die Ausdehnung der Brane im Targetraum.

Wird nach der Metrik variiert,

$$0 = \frac{\delta\mathcal{S}[A,g]}{\delta g^{mn}} \quad ,$$

ergibt sich als Bewegungsgleichung

$$g_{mn} = \Big(\frac{1}{p+1}\,g^{pq}\partial_p A^{\underline{m}}\partial_q A_{\underline{m}}\Big)^{-1}\cdot\partial_m A^{\underline{n}}\partial_n A_{\underline{n}} \quad . \tag{4.34}$$

Die allgemeine Lösung hiervon lautet

$$\Rightarrow \quad g_{mn} = c\cdot\partial_m A^{\underline{n}}\partial_n A_{\underline{n}} \quad . \tag{4.35}$$

[7] Die bosonische Wirkung wird hier wieder für allgemeine $p$ angegeben, obwohl sie in den genannten Veröffentlichungen nur für die Membrane ($p=2$) diskutiert wird. Erst für die Supersymmetrisierung später im Kapitel wird auf $p=2$ konkretisiert.

Mit einer beliebigen Funktion $c(\sigma)$.

Setzt man diese algebraisch erhaltene Lösung für $g_{mn}$ in die Wirkung (4.33) ein, so ergibt sich wieder die Dirac-Wirkung (4.4)

$$\mathcal{S}_{\text{Dirac}}[A] = -T \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det(\partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}})} \quad . \tag{4.36}$$

Das Modell ist also wieder klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung, d.h. es führt auf dieselben Bewegungsgleichungen und somit auf dieselbe klassische Brane-Dynamik.

Daß die Funktion $c$ bei der Elimination von $g_{mn}$ ebenfalls verschwindet, liegt an der Weyl-Invarianz der Karlhede-Lindström-Wirkung (4.33). Sie ist invariant unter Multiplikation der Metrik mit einer beliebigen skalaren Funktion

$$g_{mn}(\sigma) \quad \longrightarrow \quad f(\sigma) \cdot g_{mn}(\sigma) \quad . \tag{4.37}$$

Wählt man hierbei $f = c$, so kann man $c$ auch in (4.35) zum Verschwinden bringen, und die Metrik $g_{mn}$ ist dann on-shell wieder gleich der induzierten Metrik $\partial_m A^{\underline{n}} \partial_n A_{\underline{n}}$.

### 4.4.2 Supersymmetrisierung

Die bosonische Wirkung (4.33) läßt sich für $p = 2$ supersymmetrisieren. Karlhede und Lindström[8] schlugen hierfür eine manifest supersymmetrische Form vor [12]

$$\mathcal{S}[A, \Psi, F, e, \chi, S] = \frac{1}{12\sqrt{3}} T \int d^3\sigma d^2\theta E^{-1} (\nabla^\alpha X)(\nabla_\alpha X)\Big((\nabla^a X)(\nabla_a X)\Big)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{4.38}$$

Setzt man alle Fermionen auf Null, ergibt sich

$$\mathcal{S}|| = -T \int d^3\sigma \sqrt{-g} \left( \Big(\frac{1}{3} g^{mn} \partial_m A \partial_n A\Big)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12} \Big(\frac{1}{3} g^{mn} \partial_m A \partial_n A\Big)^{\frac{1}{2}} F^2 \right) \quad . \tag{4.39}$$

Die Bewegungsgleichung für $F$ ist trivial

$$0 = \frac{\delta \mathcal{S}||}{\delta F} \qquad \Rightarrow F = 0 \quad . \tag{4.40}$$

[8] Für eine Übersetzung dieser Arbeit in die Notationen von [12] ersetze man:
$\gamma^a{}_\alpha{}^\beta \to -\gamma^a{}_\alpha{}^\beta$, $M_{\alpha\beta} \to -M_{\alpha\beta}$, $W \to -iR$, $S \to -iS$, $\Psi_\alpha \to \chi_\alpha$, $\chi_a{}^\mu \to \Psi_a{}^\mu$, $F \to 2F$, $\varepsilon^\alpha \to -\varepsilon^\alpha$.
Außerdem erhält jede Symmetrisierung einen zusätzlichen Faktor 2, also z.B. $A_{(\alpha}B_{\beta)} \to 2A_{(\alpha}B_{\beta)}$.

Wieder eingesetzt in (4.39) ergibt sich die ursprüngliche bosonische Wirkung

$$\mathcal{S}_{\text{Karlhede-Lindström}}[A,e] = -T\int d^3\sigma\,\sqrt{-g}\Big(\frac{1}{3}\,g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}}\Big)^{\frac{3}{2}} \quad . \qquad (4.41)$$

Dieses Spinning Membrane-Modell von Karlhede und Lindström ist somit nicht nur manifest supersymmetrisch, sondern reduziert sich bei Nullsetzen aller Fermionen auch auf eine bosonische Wirkung, die der Dirac-Wirkung klassisch äquivalent ist. Es ist das erste Modell, daß alle diese Anforderungen erfüllt.

### 4.4.3 Die Lindström-Roček-Brane

In einer späteren Veröffentlichung von Lindström und Roček [13] wird das Modell noch um einen weiteren Term ergänzt (mit $\nabla_{\alpha\beta} := \gamma_{\alpha\beta}{}^a\nabla_a$)

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{Lindström-Roček}}&[A,\Psi,F,e,\chi,S] = \\ &\frac{1}{4\sqrt{3}}T\int d^3\sigma d^2\theta E^{-1}\Big((\nabla^\alpha X)(\nabla_\alpha X)\Big((\nabla^a X)(\nabla_a X)\Big)^{\frac{1}{2}} + \\ &\qquad + \frac{2}{3}(\nabla^\alpha X\nabla_\alpha{}^\beta X)(\nabla^\gamma X\nabla_{\gamma\beta}X)\Big((\nabla_{\delta\varepsilon}X)(\nabla^{\delta\varepsilon}X)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big) \quad . \qquad (4.42)\end{aligned}$$

Dieser zweite Term wird hinzugefügt, damit die Wirkung invariant ist unter der supersymmetrischen Verallgemeinerung der Weyl-Transformationen (4.37), den sogenannten Super-Weyl-Transformationen

$$\begin{aligned}&E_\alpha{}^M \to \Lambda E_\alpha{}^M && X \to X \\ &E_a{}^M \to \Lambda^2 E_a{}^M - \frac{1}{4}i\gamma_a{}^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha\Lambda^2)E_\beta{}^M \quad . && (4.43)\end{aligned}$$

Dabei ist $\Lambda(\sigma,\theta)$ der Transformationsparameter, ein Superskalar. Die infinitesimalen Transformationen erhält man daraus leicht mittels $\Lambda := 1+\lambda$ und $\lambda \ll 1$

$$\begin{aligned}&\delta_\lambda E_\alpha{}^M = \lambda E_\alpha{}^M && \delta_\lambda X = 0 \\ &\delta_\lambda E_a{}^M = 2\lambda E_a{}^M - \frac{1}{2}i\gamma_a{}^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha\lambda)E_\beta{}^M \quad . && (4.44)\end{aligned}$$

Analog zu den einfachen Weyl-Transformationen transformiert die Materie $X$ nicht. Wo vorher das Vielbein $e_a{}^m$ in ein Vielfaches von sich selbst überging, wird hier nun die Super-Weyl-Transformation so definiert, daß ein Teil des Supervielbeins, $E_\alpha{}^M$, ebenfalls in eine Vielfaches seiner selbst übergeht.

Die Transformation des übrigen Supervielbeins, $E_a{}^M$, liegt dann jedoch fest wegen

$$\nabla_a = -\frac{1}{4}i\gamma_a{}^{\alpha\beta}\{\nabla_\alpha,\nabla_\beta\} \longrightarrow -\frac{1}{4}i\gamma_a{}^{\alpha\beta}\{\Lambda\nabla_\alpha,\Lambda\nabla_\beta\} \quad . \qquad (4.45)$$

Da der Transformationsparameter $\Lambda$ ortsabhängig ist, ergibt der Antikommutator auch einen Term, der eine Ableitung von $\Lambda$ enthält. Dies ist der Ursprung der Inhomogenität in der Super-Weyl-Transformation (4.44).

Für die Transformation der Komponentenfelder ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\delta_\lambda e_a{}^m = 2\lambda^{(0)} e_a{}^m && \delta_\lambda A = 0 \\
&\delta_\lambda \chi_a{}^\mu = 2\lambda^{(0)}\chi_a{}^\mu - \frac{1}{2} i\gamma_a{}^{\alpha\mu}\lambda_\alpha^{(1)} && \delta_\lambda \Psi_\alpha = \lambda^{(0)}\Psi_\alpha \\
&\delta_\lambda S = 2\lambda S - \frac{1}{2} i\lambda^{(2)} && \delta_\lambda F = 2\lambda^{(0)} F + \lambda^{(1)\alpha}\Psi_\alpha \quad .
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Die beiden Terme der Wirkung (4.42) sind jeweils für sich invariant unter dem homogenen Anteil der Super-Weyl-Transformationen. Die inhomogenen Anteile heben sich zwischen beiden Termen gerade gegenseitig weg, so daß die gesamte Wirkung nun super-Weyl-invariant ist.

Die Spinning Membrane (4.38) von Karlhede und Lindström ist also die erste wirkliche Spinning Membrane. Ihre erweiterte Form (4.42) von Lindström und Roček ist zusätzlich invariant unter den Super-Weyl-Transformationen (4.46).

Eine Quantisierung der Karlhede-Lindström-Brane, bzw. der Lindström-Roček-Brane erscheint jedoch aufgrund der hochgradigen Nichtlinearität des Modells bezüglich der Materiefelder (die Wurzel in der Lagrange-Funktion) wenig vielversprechend.

Wie Lindström und Roček in [13] zeigen, liefert die generische Form der Wirkung (4.38) ebenfalls super-Weyl-invariante Spinning $p$-Brane-Modelle für $p = 3$ und $p = 5$, auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll.

## 4.5 Die Castro-Brane

Eine weiteres Spinning Membrane-Modell wurde 1993 von Castro vorgestellt ([15], [16] und [17]). Es geht von einer bosonischen Wirkung aus, die polynomial in den Materiefeldern $A$ ist und Zeitableitungen höchstens quadratisch enthält.

### 4.5.1 Die Dolan-Tchrakian-Wirkung

Die Castro-Brane basiert auf einer bosonischen Wirkung, die Dolan und Tchrakian 1988 in einer Diskussion über $\sigma$-Modelle vorgestellt haben [14]. Sie lautet unterschiedlich für gerade und ungerade $p$

$$\mathcal{S}_{\text{Dolan-Tchrakian}}[A,g] = \begin{cases} -T\int d^{p+1}\sigma\, \mathcal{L}_{p+1} & \text{für } p \text{ ungerade} \\ \\ -T\int d^{p+1}\sigma\, \frac{1}{1+a}\Big(\mathcal{L}_{p+2} + a\cdot\mathcal{L}_p\Big) & \text{für } p \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{2n} := \binom{p+1}{n}^{-1} \cdot \sqrt{-g}\, \cdot\, g^{m_1 n_1}\dots g^{m_n n_n} \cdot$$
$$\cdot\ \partial_{[m_1} A^{\underline{p_1}} \dots \partial_{m_n]} A^{\underline{p_n}}\ \partial_{[n_1} A^{\underline{q_1}} \dots \partial_{n_n]} A^{\underline{q_n}}\ \eta_{\underline{p_1}\,\underline{q_1}} \dots \eta_{\underline{p_n}\,\underline{q_n}} \quad . \tag{4.47}$$

Hierbei ist $g_{pq}$ wieder die Hilfsmetrik und $A^{\underline{m}}$ beschreibt die Ausdehnung der Brane im Targetraum. $a$ ist eine Konstante, die noch angepaßt werden muß. Es wird sich herausstellen, daß $a = 1$ die beste Wahl ist.

### Diskussion für ungerade $p$

Untenstehend wird zuerst ausschließlich der grundlegendere Fall ungerader $p$ besprochen. Die Diskussion für gerade $p$, wozu auch die Membrane gehört, folgt im Anschluß daran.

Für die folgenden Betrachtungen empfiehlt sich als Abkürzung die $(2n \times 2n)$-Matrix

$$B_q{}^r := \partial_q A^{\underline{s}}\, \partial_m A^{\underline{t}}\, \eta_{\underline{s}\,\underline{t}}\, g^{mr} \quad , \tag{4.48}$$

mit der sich die Lagrange-Dichte schon wesentlich kürzer schreiben läßt

$$\mathcal{L}_{2n} = \binom{2n}{n}^{-1} \cdot \sqrt{-g}\, \cdot\, B_{[m_1}{}^{[m_1} \dots B_{m_n]}{}^{m_n]} \quad . \tag{4.49}$$

Eine der beiden Antisymmetrisierungen kann natürlich weggelassen werden.

Variiert man diese Wirkung nach der Hilfsmetrik $g_{qr}$, so ergibt sich eine Bewegungsgleichung, die sich vollständig durch die Matrix $B$ ausdrücken läßt

$$0 = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{qr}} \tag{4.50}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2}\delta_q{}^r B_{[m_1}{}^{m_1} \dots B_{m_n]}{}^{m_n} + n\cdot B_{[m_1}{}^{m_1} \dots B_{m_{n-1}}{}^{m_{n-1}} B_{q]}{}^r \quad . \tag{4.51}$$

Dies ist ein Polynom $n$-ten Grades in $B$. Um das Polynom deutlicher zu sehen, ist es günstig, eine Serie von Skalaren[9] $c_j$ zu definieren[10]

$$c_j := B_{[m_1}{}^{m_1} \dots B_{m_j]}{}^{m_j} \quad , \qquad c_0 := 1 \quad . \tag{4.52}$$

Drückt man sämtliche zu Skalaren kontrahierte Matrizen $B$ in (4.51) durch die $c_j$ aus und sortiert dann nach Potenzen der übriggebliebenen Matrizen $B$, dann ergibt sich

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \, c_j \cdot B^{n-j} + \frac{1}{2}(-1)^n c_n \cdot \mathbb{1} \quad . \tag{4.53}$$

Matrixindizes sind hier zur besseren Lesbarkeit unterdrückt.

Dieses Matrixpolynom läßt sich nicht allgemein für beliebige $n$ lösen, aber es lassen sich einige qualitative Aussagen machen:

Die Bewegungsgleichung (4.53) ist invariant unter den Transformationen

$$B \longrightarrow S^{-1} B \, S \quad \text{und} \qquad B \longrightarrow w \cdot B \quad , \tag{4.54}$$

mit einer beliebigen, invertierbaren Matrix $S$ und einem beliebigen Skalar $w$.

Mit den Transformationen $S$ läßt sich die Matrix $B$ auf ihre Jordan-Normalform bringen, die nur noch $2n$ kontinuierliche Parameter enthält. Mit den $w$ läßt sich dann noch ein weiterer Parameter wegtransformieren.

Die so erhaltene Matrix $\bar{B}$

$$B = w \cdot S^{-1} \bar{B} \, S \tag{4.55}$$

erhält also nur noch $2n-1$ kontinuierliche Parameter, erfüllt aber immer noch direkt die Bewegungsgleichung (4.53).

Die Diagonale von (4.53) liefert dann $2n$ Gleichungen. Zumindest eine von ihnen ist linear abhängig von den anderen, da die Spur von (4.53) verschwindet (besser zu sehen an (4.51)).

Ob die verbleibenden $2n - 1$ Gleichungen alle voneinander linear unabhängig sind, bleibt im Einzelfall (für konkretes $n$) zu prüfen. Im Normalfall liegen nun jedoch $2n - 1$ Gleichungen für ebensoviele Unbekannte vor, was zu einer diskreten Schar von $n$ Lösungen für $\bar{B}$ führt

$$\bar{B} \in \left\{ \bar{B}_{(1)}, \dots \bar{B}_{(n)} \right\} \quad . \tag{4.56}$$

[9]Dolan und Tchrakian [14] verwenden $b_j := c_{2n-j}$.

[10]Wie in [14] erwähnt, kann man die $c_j$ auch erhalten als Koeffizienten der Entwicklung

$$\det(B - \lambda \cdot \mathbf{1}) = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \, c_j \, \lambda^{2n-j} \cdot \mathbf{1} \quad .$$

Diese Lösungen sind konstante Matrizen, die nicht mehr von den Materiefeldern $A$ abhängen.

Die Ergebnisse (4.48), (4.55) und (4.56) erlauben es, nach der Hilfsmetrik $g_{qr}$ aufzulösen

$$g_{qr} = \frac{1}{w}(S^{-1})_q{}^m(\bar{B}^{-1})_m{}^s\, S_s{}^t\, \partial_t A^{\underline{u}}\, \partial_r A_{\underline{u}} \quad , \quad \bar{B} \in \left\{\bar{B}_{(1)}, \ldots \bar{B}_{(n)}\right\} \quad . \tag{4.57}$$

Diese allgemeine Lösung für die Hilfsmetrik wurde algebraisch erhalten und kann daher wieder in die Wirkung (4.47) eingesetzt werden. Alternativ setze man (4.55) ein in (4.49). Hiermit wird die Hilfsmetrik $g_{qr}$ eliminiert und man erhält

$$\mathcal{S}[A] = -T \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det(\partial_q A^{\underline{m}} \partial_r A_{\underline{m}})} \cdot \left( \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{\bar{B}_{[m_1}{}^{[m_1} \ldots \bar{B}_{m_n]}{}^{m_n]}}{\sqrt{\det \bar{B}}} \right) \quad . \tag{4.58}$$

Die kontinuierlichen Parameter $S$ und $w$ sind herausgefallen, und die Wirkung gleicht nun bis auf den geklammerten Faktor der Dirac-Wirkung (4.10). Dolan und Tchrakian [14] bemerkten als erste, daß dieser Faktor, da er nur die Matrizen $\bar{B}$ enthält, konstant ist, er also insbesondere nicht von den Materiefeldern $A$ abhängt. Er kann daher als reiner Proportionalitätsfaktor vor das Integral gezogen werden.

Die Wirkung ist demnach für jedes $\bar{B}$ klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung. Trotzdem lohnt es sich, die möglichen Werte für $\bar{B}$ noch ein wenig genauer zu untersuchen.

Die Lösungsmenge für $B$ zerfällt in $n$ Lösungsklassen, die mittels der Transformationen $S$ und $w$ aus den $n$ Repräsentanten $\bar{B}$ erzeugt werden können. Bei der Variation der Wirkung (4.50) wird jedoch immer eine infinitesimale Variation der Hilfsmetrik $g_{pq}$ durchgeführt, die nicht aus einer Lösungsklasse hinaus in eine andere führen kann.

Schon bei der Variation der Wirkung muß daher ein „Sektor", eine mögliche Lösungsklasse, ausgewählt werden. Aus den zur Verfügung stehenden Lösungsklassen wählt man am besten die mit dem Repräsentanten

$$\bar{B} = \mathbb{1} \quad . \tag{4.59}$$

Diese Lösungsklasse ist für alle $n$ vorhanden, denn eingesetzt in (4.53) ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{p} + \frac{1}{2}(-1)^n \binom{2n}{n} \\
=& \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{p} + \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} + \frac{1}{2}(-1)^n \binom{2n}{n} \\
=& \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} = \frac{1}{2}(1-1)^{2n} = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Dies ist erfüllt für alle $n$.

Setzt man die Wahl (4.59) in (4.57) ein, so erhält man

$$g_{qr} = \frac{1}{w} \, \partial_q A^{\underline{m}} \, \partial_r A_{\underline{m}} \quad . \tag{4.61}$$

Die Hilfsmetrik ist beinahe gleich der induzierten Metrik. Um die Gleichheit komplett zu machen, genügt die Beobachtung, daß die Dolan-Tchrakian-Wirkung (4.47) für ungerade $p$ Weyl-invariant ist, ebenso wie die Karlhede-Lindström-Wirkung (4.33). Sie ist also invariant unter den Transformationen

$$g_{qr} \longrightarrow f \cdot g_{qr} \quad , \tag{4.62}$$

für eine beliebige, skalare Funktion $f$. Diese Funktion $f$ wird nun so gewählt, daß sie den Faktor $1/w$ in (4.61) gerade kompensiert, und nun on-shell gilt

$$g_{qr} = \partial_q A^{\underline{m}} \partial_r A_{\underline{m}} \quad . \tag{4.63}$$

In dieser Lösungsklasse kann also erreicht werden, daß die Hilfsmetrik on-shell gleich der induzierten Metrik ist – eine Tatsache, die die Lösung $\bar{B} = 1$ vor allen anderen auszeichnet.

Für ungerade $p$ ist also die Wirkung (4.47) von Dolan und Tchrakian klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung. Die Lösungsmenge der Bewegungsgleichung der Hilfsmetrik zerfällt in mehrere Lösungsklassen, die topologisch nicht verbunden sind. Zur Variation der Wirkung muß eine Lösungsklasse ausgewählt werden. Eine der Lösungsklassen ist vor allen anderen ausgezeichnet, da sie für alle $n$ vorhanden ist und nach Ausnutzen von Weyl-Invarinz darauf führt, daß on-shell die Hilfsmetrik gleich der induzierten Metrik ist. Setzt man dies wieder in die Wirkung ein, so ergibt sich die Dirac-Wirkung.

Für ungerade $p$ ist die Dolan-Tchrakian-Wirkung Weyl-invariant.

### Diskussion für gerade $p$

Was ändert sich nun für gerade $p$? Die Lagrange-Dichte der Wirkung (4.47) setzt sich hier aus zwei Teilen zusammen

$$\frac{1}{1+a}\Big(\mathcal{L}_{2n+2} + a \cdot \mathcal{L}_{2n}\Big) \quad , \qquad \text{mit} \quad p = 2n \quad . \tag{4.64}$$

Dementsprechend erhält man bei Variation nach der Hilfsmetrik $g_{pq}$ in der Bewegungsgleichung zwei Anteile von der Struktur aus (4.51)

$$\begin{aligned} 0 = &-\frac{1}{2}\delta_p{}^q B_{[m_1}{}^{m_1} \dots B_{m_{n+1}]}{}^{m_{n+1}} + (n+1)\cdot B_{[m_1}{}^{m_1} \dots B_{m_n}{}^{m_n} B_{p]}{}^q + \\ &- a\frac{1}{2}\delta_p{}^q B_{[m_1}{}^{m_1} \dots B_{m_n]}{}^{m_n} + a \cdot n \cdot B_{[m_1}{}^{m_1} \dots B_{m_{n-1}}{}^{m_{n-1}} B_{p]}{}^q \quad . \end{aligned} \tag{4.65}$$

Dies ist nun nicht mehr spurfrei. Spurbildung von (4.65) ergibt stattdessen[11]

$$c_{n+1} = a \cdot c_n \quad . \tag{4.66}$$

Verwendet man dies beim Sortieren nach Potenzen von $B$ à la (4.53), so erhält man

$$0 = B^{n+1} + \sum_{p=1}^{n+1} (-1)^p (c_p - a \cdot c_{p-1}) B^{n+1-p} \quad . \tag{4.67}$$

Es ergibt sich also diesmal ein Polynom $(n+1)$-ten Grades in $B$.

Dieses Matrixpolynom ist wieder invariant unter den Transformationen $S$,

$$B \longrightarrow S^{-1} B\, S \quad , \tag{4.68}$$

aber nicht unter den Transformationen $w$ aus (4.54).

Trotz dieser reduzierten Symmetrie ist es immer noch möglich, die Matrizen $B$ auf Jordan-Normalform zu bringen,

$$B = S^{-1} \bar{B} S \quad , \tag{4.69}$$

mit nun $2n+1$ kontinuierlichen Parametern in der Diagonalen von $\bar{B}$.

Die Diagonale der Bewegungsgleichung (4.67) liefert dazu $2n+1$ Gleichungen, von denen noch im Einzelfall (für konkretes $n$) geprüft werden muß, ob sie linear unabhängig sind.

Im Normalfall liegen jedoch wieder ebensoviele Gleichungen wie Unbekannte vor, so daß auch diesmal die Bewegungsgleichung eine diskrete Schar von Lösungen für $\bar{B}$ liefert

$$\bar{B} \in \left\{ \bar{B}_{(1)}, \dots \bar{B}_{(n+1)} \right\} \tag{4.70}$$

[11] Es ist zu beachten, daß die Gleichung nicht als Rekursionsgleichung zu lesen ist, da $n$ über $p+1 = 2n+1$ festliegt.

und die Diskussion der Lösungsklassen analog verläuft.

Die erwünschte Lösung

$$\bar{B} = \mathbb{1} \tag{4.71}$$

ist diesmal nur für alle $n$ vorhanden, wenn $a = 1$ ist. Sie dadurch ausgezeichnet, daß sich mit ihr

$$g_{pq} = \partial_p A^{\underline{m}} \partial_q A_{\underline{m}} \tag{4.72}$$

ergibt, also daß die Hilfsmetrik on-shell wieder gleich der induzierten Metrik ist. Diesmal ist dies aber, anders als für (4.63), ohne Weyl-Symmetrie erreicht worden, die für gerade $p$ auch nicht vorhanden ist.

Für gerade $p$ ist also die Wirkung (4.47) von Dolan und Tchrakian ebenfalls klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung. Die Lösungsmenge der Bewegungsgleichung der Hilfsmetrik zerfällt genauso in Lösungsklassen, die topologisch nicht verbunden sind. Die besondere Lösungsklasse, für die die Hilfsmetrik on-shell gleich der induzierten Metrik ist, ist für $a = 1$ ebenfalls immer vorhanden. Setzt man dies wieder in die Wirkung ein, so ergibt sich die Dirac-Wirkung.

Für gerade $p$ ist die Dolan-Tchrakian-Wirkung nicht Weyl-invariant. Die Weyl-Invarianz wurde in der Konstruktion von (4.47) sogar bewußt gebrochen, um eine Bewegungsgleichung mehr zu erhalten und trotz eines zusätzlichen kontinuierlichen Parameters in $\bar{B}$ wieder eine diskrete Lösungsschar zu erhalten.

### 4.5.2 Weyl-Kovariantisierung

Für das Supersymmetrisierungsverfahren, das Castro in [15], [16] und [17] verwendet, ist Weyl-Symmetrie jedoch unbedingt notwendig. Man führt daher Weyl-Symmetrie per Hand ein, indem man jeden Term Weyl-kovariant schreibt.

Bei Castro wirkt die Weyl-Transformation $\delta_\lambda$ nicht nur auf das Vielbein,

$$\delta_\lambda e_a^m = 2\lambda \cdot e_a{}^m \quad , \tag{4.73}$$

sondern auch auf die Materiefelder

$$\delta_\lambda A^{\underline{m}} = \lambda \cdot A^{\underline{m}} \quad . \tag{4.74}$$

Dieser Unterschied zu (4.46) macht nun Weyl-kovariante Ableitungen auf den Materiefeldern notwendig.

In der Dolan-Tchrakian-Wirkung (4.47) wird daher zuerst jede partielle Ableitung durch eine Weyl-kovariante Ableitung ersetzt,

$$\mathscr{D}_m^{\text{Weyl}} := \partial_m + b_m \cdot w \quad , \tag{4.75}$$

mit der Weyl-Konnektion $b_m$ und dem Weyl-Generator $w$.

Die Terme $\mathcal{L}_{2n}$ transformieren dann gemäß

$$\delta_\lambda \mathcal{L}_{2n} = (6n - 2(p+1))\lambda \cdot \mathcal{L}_{2n} \quad . \tag{4.76}$$

Außerdem ersetze man die Konstante $a$ vor dem zweiten Term der Wirkung für gerade $p$ durch die Weyl-kovariante Konstante $A_0$.

$$\begin{array}{rccc} & a & \text{mit} & (\partial_m a) = 0 \\ \text{wird ersetzt durch} & A_0 & \text{mit} & (\mathscr{D}_m^{\text{Weyl}} A_0) = 0 \quad . \end{array} \tag{4.77}$$

Diese Weyl-kovariante Konstante transformiert unter Weyl-Transformationen gemäß

$$\delta_\lambda A_0 = 6\lambda \cdot A_0 \quad , \tag{4.78}$$

damit nun beide Terme der Dolan-Tchrakian-Wirkung für gerade $p$ dasselbe Transformationsverhalten aufweisen

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_{p+2} &= (p+4)\lambda \cdot \mathcal{L}_{p+2} \\ \delta_\lambda (A_0 \cdot \mathcal{L}_p) &= (6 + (p-2))\lambda \cdot A_0 \cdot \mathcal{L}_p \quad . \end{aligned} \tag{4.79}$$

Zusätzlich muß die Brane-Spannung $T$ die restlichen Veränderungen unter Weyl-Transformationen aufnehmen

$$\delta_\lambda T = -(p+4)\lambda \cdot T \quad , \tag{4.80}$$

so daß die Wirkung Weyl-invariant ist

$$\delta_\lambda \mathcal{S} = 0 \tag{4.81}$$

Die Dolan-Tchrakian-Wirkung (4.47) besitzt nun die Form

$$\mathcal{S}[A,g] = \begin{cases} -T \int d^{p+1}\sigma \, \mathcal{L}_{p+1} & \text{für } p \text{ ungerade} \\[2ex] -T \int d^{p+1}\sigma \, \frac{1}{1+a} \Big( \mathcal{L}_{p+2} + A_0 \cdot \mathcal{L}_p \Big) & \text{für } p \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2n} := & \binom{p+1}{n}^{-1} \cdot \sqrt{-g} \, \cdot \, g^{m_1 n_1} \ldots g^{m_n n_n} \cdot \\ & \cdot \, (\mathscr{D}^{\text{Weyl}}_{[m_1} A^{\underline{p_1}}) \ldots (\mathscr{D}^{\text{Weyl}}_{m_n]} A^{\underline{p_n}}) \, (\mathscr{D}^{\text{Weyl}}_{[n_1} A^{\underline{q_1}}) \ldots (\mathscr{D}^{\text{Weyl}}_{n_n]} A^{\underline{q_n}}) \, \eta_{\underline{p_1}\,\underline{q_1}} \ldots \eta_{\underline{p_n}\,\underline{q_n}} \end{aligned} \tag{4.82}$$

und ist manifest invariant unter obigen Weyl-Transformationen.

Der neu hinzugekommene Kopplungsparameter $A_0$ ist mehr als ungewöhnlich. Er ist kein Feld im herkömlichen Sinne. Wie Castro besonders in [17] betont, ist $A_0$ zwar ortsabhängig und transformiert als Skalar mit Weyl-Gewicht, die Wirkung wird aber nicht nach ihm variiert! Er ist somit weder ein normaler Feldfreiheitsgrad, noch handelt es sich um ein Hilfsfeld.

Eliminiert wird er laut Castro durch die Forderung(!) nach Weyl-Invarianz der Wirkung. Hiermit würde umgekehrt die Weyl-Kovarianz (4.77) des Kopplungsparameters folgen

$$\mathscr{D}_m^{\mathrm{Weyl}} A_0 = 0 \quad . \tag{4.83}$$

Und diese Gleichung legt wiederum eine konkrete Form der Weyl-Konnektion $b_m$ fest

$$\Rightarrow \quad b_m = -\frac{1}{6}\partial_m(\ln A_0) \quad . \tag{4.84}$$

Da der Kopplungsparameter sich unter Weyl-Transformationen ändert,

$$\delta_\lambda A_0 = 6\lambda \cdot A_0 \quad , \tag{4.85}$$

kann er, so Castro, auf beliebige Werte ungleich Null gebracht werden.

Fixiert man nun die Weyl-Symmetrie mit der Forderung

$$A_0 = a \quad , \tag{4.86}$$

so folgt aus (4.84) das Verschwinden der Weyl-Konnektion

$$b_m = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathscr{D}_m^{\mathrm{Weyl}} = \partial_m \quad , \tag{4.87}$$

und die Wirkung nimmt wieder die ursprüngliche Form (4.47) an.

Mit diesem etwas ungewöhnlichen Verfahren liegt laut Castro also nun eine Weyl-symmetrische Wirkung (4.82) vor, die nach Eichfixierung der Weyl-Symmetrie in die Dolan-Tchrakian-Wirkung (4.47) mündet.

Die Weyl-Kovariantisierung des Kopplungsparameters $a$ zu einem Feld $A_0$ kann jedoch kritisiert werden, da es in der Wirkung nicht als eigener Freiheitsgrad behandelt wird und sich seine Weyl-Konstanz erst aus der *Forderung* nach Weyl-Symmetrie der Wirkung ergibt.

### 4.5.3 Q-Supersymmetrisierung

Die Weyl-Symmetrie ist notwenig für das Supersymmetrisierungsverfahren, das Castro gewählt hat. Er verwendet zur Supersymmetrisierung der Membrane

($p = 2$) nicht die Poincaré-Supersymmetrie, die in Kapitel 2 vorgestellt wurde, sondern die allgemeinere superkonforme Symmetrie, die Weyl-Symmetrie beinhaltet.

Eine Diskussion der superkonformen Symmetrie würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, insbesondere, da sie für den Fortlauf der Betrachtungen in den folgenden Kapiteln nicht benötigt wird. Ich beschränke mich daher auf eine Skizzierung der Konstruktion in [15].

Superkonforme Symmetrie beinhaltet Poincaré Supersymmetrie, weswegen die Multipletts ähnlich aussehen. Das Materiemultiplett für die Einbettungskoordinaten $A^{\underline{m}}$ lautet

$$(A^{\underline{m}}, \Psi_\alpha{}^{\underline{m}}, F'^{\underline{m}}) \quad , \tag{4.88}$$

wobei der höchste Anteil $F'$ nicht identisch ist mit dem $F$ aus „normaler" Poincaré-Supersymmetrie.

Die Kopplungskonstante $A_0$ muß nun ebenfalls in ein Multiplett eingebettet werden

$$(A_0, \Psi_{0\alpha}, F_0') \quad . \tag{4.89}$$

Das superkonforme Eichmultiplett beinhaltet nicht nur die Gravitationsterme $e_a{}^m$ und $\chi_a{}^\mu$, sondern auch die konforme Konnektion $b_a$

$$(e_a{}^m, \chi_a{}^\mu, b_a) \quad . \tag{4.90}$$

Die superkonforme Symmetrie besitzt als fermionische Untersymmetrien $Q$-Supersymmetrie, $S$-Supersymmetrie und superkonforme Boosts. Gewöhnlicher Poincaré-Supersymmetrie entspricht hierbei einer Kombination aus $Q$- und $S$-Supersymmetrie (sogenannte „$Q$+$S$ Summenregel").

Castro verwendet nun verschiedene $Q$-supersymmetrische Terme zur Supersymmetrisierung von (4.82), die so kombiniert werden, daß keine Krümmungsterme der Hilfsmetrik entstehen, die ja eine Äquivalenz der bosonischen Wirkung mit der ursprünglichen Dirac-Wirkung verhindern würden.

Hierbei ist jedoch nur eine Kombination möglich, die die $S$-Supersymmetrie und die Symmetrie unter superkonformen Boosts explizit bricht.

Die Spinning Membrane von Castro ist also nur $Q$-supersymmetrisch. Sie ist insbesondere nicht Poincaré-supersymmetrisch, da hierfür zusätzlich $S$-Supersymmetrie benötigt wird.

Auf diese Weise umgeht die Castro-Brane von vorneherein das no-go-Theorem von Bergshoeff, Sezgin und Townsend (Kapitel 4.3), das ausschließlich den Tensor-Kalkül der Poincaré-Supersymmetrie verwendet.

Die Castro-Brane ist also eine $Q$-Supersymmetrisierung der hierfür Weylkovariantisierten Dolan-Tchrakian-Wirkung, und als solche neben der

Karlhede-Lindström-Roček-Brane (Kapitel 4.4) das zweite bekannte Spinning Membrane-Modell.

Allerdings beinhaltet die Castro-Brane einige ungewöhnliche Techniken (Weyl-Kovariantisierung und $Q$-Supersymmetrie statt Poincaré-Supersymmetrie), von denen insbesondere die Weyl-Kovariantisierung des Kopplungsparameters $A_0$ kritisierbar ist.

Die Dolan-Tchrakian-Wirkung, von der hier ausgegangen wird, besitzt allerdings zwei hervorstechende Eigenschaften:

- Die Wirkung ist polynomial in den Materiefeldern. Der höchste Term, $\mathcal{L}_4$, der Membrane ($p = 2$) ist quartisch.
- Zeitableitungen kommen aufgrund der Antisymmetrisierung in $\mathcal{L}_4$ trotzdem nur quadratisch vor.

Dies sind offensichtliche Vorteile für eine eventuelle Quantisierung des Modells. Solche Bemühungen waren jedoch aufgrund der Nichtlinearität bisher nicht erfolgreich.

Die Dolan-Tchrakian-Wirkung ist aber auch im Rahmen des Tensor-Kalkül der Poincaré-Supersymmetrie supersymmetrisierbar. Diese Möglichkeit ist meines Wissens in der Literatur bisher nicht bekannt. In Kapitel 6.3 wird diese neue Spinning Membrane vorgestellt.

# Kapitel V

# Alternative Wirkungen

In diesem Kapitel wird zuerst rückblickend eine Übersicht gegeben über bisher bekannte bosonische $p$-Brane-Wirkungen, die im vorigen Kapitel als Ausgangspunkt für Supersymmetrisierungsprogramme dienten.

Auf der Suche nach neuen Wirkungen (mit neuen Eigenschaften), die ebenfalls zu Spinning $p$-Branes führen können, werden insgesamt drei Methoden vorgestellt, neue Wirkungen zu erhalten.

Die erste Methode, anhand gewünschter Eigenschaften die zugehörigen Wirkungen herzuleiten, bedient sich der Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren. Einige in der Literatur bekannte Wirkungen können hiermit gezielt erhalten werden, was im Einzelnen vorgeführt wird.

Die zweite Methode geht einen Umweg über den Hamilton-Formalismus, um die vorhandenen Symmetrien zu identifizieren. Sie führt auf eine Wirkung, die jedoch wegen ihrer nicht manifest kovarianten Schreibweise und einer reduzierten Gravitation schwer zu supersymmetrisieren ist. Ihre Verwandschaft zur Howe-Tucker-Wirkung läßt obendrein vermuten, daß ein ähnliches Problem mit der kosmologischen Konstanten eine Supersymmetrisierung erschweren wird.

Die dritte Methode, die die Idee der Dolan-Tchrakian-Wirkung verallgemeinert und das wesentliche Resultat dieser Arbeit darstellt, führt auf eine generische Wirkung, die fast alle bisher bekannten Modelle enthält. Sie ist in ihrer allgemeinen Form (!) supersymmetrisierbar und stellt somit ein allgemeines Verfahren dar, gültige Spinning Membrane-Modelle zu erhalten.

Die Karlhede-Lindström-Brane ist in dieser generischen Form ebenso enthalten, wie eine meines Wissens bisher unbekannte Supersymmetrisierung der Dolan-Tchrakian-Wirkung. Auch die Howe-Tucker-Wirkung und die Dirac-Wirkung selbst lassen sich hiermit unter Umgehung des no-go-Theorems aus Kapitel 4.3 supersymmetrisieren.

## 5.1 Bekannte Wirkungen

Zuerst seien noch einmal kurz alle bisher verwendeten, bosonischen $p$-Brane-Wirkungen aufgelistet und ihre Eigenschaften aufgeführt, sofern sie für die folgenden Betrachtungen von Relevanz sind.

Die Felder $A^{\underline{m}}$ beschreiben bei allen Branes wieder die Einbettung der Branes in den Targetraum

$$A^{\underline{m}} : \quad \sigma^m \longrightarrow A^{\underline{m}}(\sigma) \qquad m = 0, \ldots, p \quad , \quad \underline{m} = 0, \ldots, D-1 \quad .$$

Die Liste beginnt mit der **Dirac-Wirkung**. Sie wurde in Kapitel 4.1.1 vorgestellt und lautet

$$\mathcal{S}_{\text{Dirac}}[A] = -T \int d^{p+1}\sigma \, \sqrt{-\det(\partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}})} \quad . \tag{5.1}$$

Sie beschreibt das Volumen der $p$-Brane im Targetraum und dient als Basis für alle anderen Modelle.

In Kapitel 4.2.1 bildete die **Howe-Tucker-Wirkung** die Basis für den ersten Versuch eines Spinning $p$-Brane-Modells

$$\mathcal{S}_{\text{Howe-Tucker}}[A, g] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\sigma \, \sqrt{-g} \Big( g^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} - p + 1 \Big). \tag{5.2}$$

Bei Variation nach der Hilfsmetrik $g_{mn}$ zeigt sich, daß die Hilfsmetrik on-shell gleich der induzierten Metrik ist. Setzt man dies wieder in die Wirkung ein, erhält man die Dirac-Wirkung (5.1).

Die Howe-Tucker-Wirkung wurde wegen der kosmologischen Konstanten für $p \neq 1$ bisher nicht supersymmetrisiert.

In Kapitel 4.4.1 lieferte die **Karlhede-Lindström-Wirkung** das erste wirkliche Spinning $p$-Brane-Modell

$$\mathcal{S}_{\text{Karlhede-Lindström}}[A, g] = -T \int d^{p+1}\sigma \, \sqrt{-g} \Big( \frac{1}{p+1} \cdot g^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} \Big)^{\frac{p+1}{2}} \quad . \tag{5.3}$$

Bei Variation nach der Hilfsmetrik $g_{mn}$ zeigt sich, daß die Hilfsmetrik bis auf einen Faktor, der die vorhandene Weyl-Symmetrie ausdrückt, on-shell gleich der induzierten Metrik ist. Setzt man dies wieder in die Wirkung ein, so erhält man die Dirac-Wirkung (5.1).

In Kapitel 4.5.1 wurde die **Dolan-Tchrakian-Wirkung** diskutiert ($a = 1$)

$$\mathcal{S}_{\text{Dolan-Tchrakian}}[A, g] = \begin{cases} -T \int d^{p+1}\sigma\, \mathcal{L}_{p+1} & \text{für } p \text{ ungerade} \\ \\ -T \int d^{p+1}\sigma\, \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}_{p+2} + \cdot\mathcal{L}_p\Big) & \text{für } p \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{2n} := \binom{p+1}{n}^{-1} \cdot \sqrt{-g}\; \cdot\; B_{[m_1}{}^{[m_1} \ldots B_{m_n]}{}^{m_n]} \quad , \quad B_q{}^r := \partial_q A^{\underline{s}}\, \partial_m A^{\underline{t}}\, \eta_{\underline{s}\,\underline{t}}\, g^{mr} \quad . \tag{5.4}$$

Ihre $Q$-Supersymmetrisierung ist die Castro-Brane. Bei Variation nach der Hilfsmetrik $g_{mn}$ ergibt sich ein Polynom in den Matrizen $B$, das als Lösungsmenge mehrere Lösungsklassen liefert. Beschränkt man sich auf die Lösungsklasse, die $B = \mathbb{1}$ enthält, so läßt sich mit Ausnutzen der vorhandenen Symmetrien die Hilfsmetrik auf die induzierte Metrik bringen. Setzt man dies wieder in die Wirkung ein, so ergibt sich die Dirac-Wirkung (5.1).

Alle diese Wirkungen erscheinen in ihrer Konstruktion sehr unterschiedlich. In der Literatur werden sie meist postuliert und anschließend ihre Äquivalenz zur Dirac-Wirkung (5.1) bewiesen. Obwohl nicht schwierig, ist es meines Wissens nicht allgemein bekannt, daß man diese Wirkungen auch gezielt erhalten kann.

Dies soll im folgenden vorgeführt werden.

## 5.2 Lagrange-Multiplikatoren

Die erste Methode, Wirkungen zu erhalten, die klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung sind, basiert auf der Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren. Die Howe-Tucker-Wirkung und die Karlhede-Lindström-Wirkung können mit dieser Methode konstruiert werden. Für die Dolan-Tchrakian-Wirkung ist sie jedoch nicht geeignet.

Erst vor kurzem wurdem wurde von Nieto [20] noch einmal auf diese Methode hingewiesen.

### 5.2.1 Herleitung der Howe-Tucker-Wirkung

Die Howe-Tucker-Wirkung (5.2) ergibt sich gezielt, wenn man die Dirac-Wirkung (5.1) um eine Hilfsmetrik $g_{mn}$ erweitern will, die on-shell gleich der induzierten Metrik ist

$$g_{mn} = \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} \quad . \tag{5.5}$$

Diese gewünschte Bewegungsgleichung wird nun mit einem Lagrange-Multiplikator $c^{mn}$ der Dirac-Wirkung hinzugefügt. Er stellt sicher, daß sich die Bewegungsgleichung (5.5) bei Variation nach $c^{mn}$ dynamisch aus der Wirkung ergibt

$$\mathcal{S}[A,g,c] = -T\int d^{p+1}\sigma\left(\sqrt{-\det(\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}})} + c^{pq}\cdot(g_{pq} - \partial_p A^{\underline{n}}\partial_q A_{\underline{n}})\right) \quad . \tag{5.6}$$

Nun läßt sich an allen übrigen Stellen der Wirkung die induzierte Metrik durch die Hilfsmetrik $g_{mn}$ ersetzen, da sie on-shell ja identisch sind

$$\mathcal{S}[A,g,c] = -T\int d^{p+1}\sigma\left(\sqrt{-g} + c^{mn}\cdot(g_{mn} - \partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}})\right) \quad . \tag{5.7}$$

Eliminiert man nun den Lagrange-Multiplikator $c^{mn}$ mit der Bewegungsgleichung für $g_{mn}$,

$$0 = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g_{mn}} \qquad \Rightarrow \qquad c^{mn} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{mn} \quad , \tag{5.8}$$

so ergibt sich die Howe-Tucker-Wirkung (5.2)

$$\mathcal{S}[A,g] = -\frac{T}{2}\int d^{p+1}\sigma\,\sqrt{-g}\Big(g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} - p + 1\Big). \tag{5.9}$$

Sie ist nach Konstruktion klassisch äquivalent zur Dirac-Brane (5.1).

Die Howe-Tucker-Wirkung läßt sich somit aus der Dirac-Wirkung mit dem einfachen Wunsch nach einer Hilfsmetrik herleiten, die on-shell gleich der induzierten Metrik ist.

Man beachte, daß der Spezialfall des Strings hierin enthalten ist. Die Polyakov-Wirkung (entspricht der Howe-Tucker-Wirkung für $p=1$) läßt sich also gezielt aus der Nambu-Goto-Wirkung (entspricht der Dirac-Wirkung für $p=1$) herleiten.

### 5.2.2 Herleitung der Karlhede-Lindström-Wirkung

Ebenso wie die Howe-Tucker-Wirkung läßt sich auch die Karlhede-Lindström-Wirkung (5.3) aus der Dirac-Wirkung (5.1) gezielt erhalten. Diesmal ist jedoch zusätzlich Weyl-Symmetrie erwünscht.

Das bedeutet, daß die gewünschte Bewegungsgleichung die Hilfsmetrik $g_{mn}$ nur bis auf eine skalare Funktion $f$ auf die induzierte Metrik festlegen darf. Den Rest erledigt dann eine Weyl-Transformation. Die gewünschte Bewegungsgleichung lautet daher

$$g_{mn} = f\cdot\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} \quad . \tag{5.10}$$

Fügt man, ebenso wie im vorigen Abschnitt, diese Bewegungsgleichung mit einem Lagrange-Multiplikator der Dirac-Wirkung (5.1) hinzu,

$$\mathcal{S}[A,g,f,c] = -T\int d^{p+1}\sigma\,\left(\sqrt{-\det(\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}})} + c^{pq}\cdot(g_{pq} - f\cdot\partial_p A^{\underline{n}}\partial_q A_{\underline{n}})\right)\,, \tag{5.11}$$

ersetzt in den übrigen Teilen der Wirkung die induzierte Metrik mit Hilfe der Bewegungsgleichung (5.10),

$$\mathcal{S}[A,g,f,c] = -T\int d^{p+1}\sigma\,\left(\sqrt{-g}\cdot f^{-\frac{p+1}{2}} + c^{pq}\cdot(g_{pq} - f\cdot\partial_p A^{\underline{n}}\partial_q A_{\underline{n}})\right)\,,\quad , \tag{5.12}$$

und eliminiert den Lagrange-Multiplikator $c^{mn}$ wieder mittels der Bewegungsgleichung für $g_{mn}$,

$$0 = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g_{mn}} \qquad \Rightarrow \qquad c^{mn} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,f^{-\frac{p+1}{2}}\cdot g^{mn} \quad , \tag{5.13}$$

so ergibt sich die Wirkung

$$\mathcal{S}[A,g,f] = -\frac{T}{2}\int d^3\sigma\,\sqrt{-g}\,f^{-\frac{p+1}{2}}\cdot\left(f\cdot g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} - p + 1\right) \quad . \tag{5.14}$$

Hier stört nur noch die Funktion $f$. Ihre eigene Bewegungsgleichung läßt sich algebraisch nach $f$ auflösen

$$0 = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta f} \qquad \Rightarrow \quad f = \left(\frac{1}{p+1}g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}}\right)^{-1} \quad . \tag{5.15}$$

Setzt man dies wieder in die Wirkung ein, um $f$ zu eliminieren, so ergibt sich die Karlhede-Lindström-Wirkung (5.3)

$$\mathcal{S}[A,g] = -T\int d^{p+1}\sigma\,\sqrt{-g}\left(\frac{1}{p+1}\cdot g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}}\right)^{\frac{p+1}{2}} \quad . \tag{5.16}$$

Sie ist nach Konstruktion Weyl-invariant und klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung (5.1).

Wie man sieht, kann man mit dieser Methode Wirkungen mit den gewünschten Eigenschaften gezielt erhalten. Der Wunsch nach einer Hilfsmetrik, die on-shell gleich der induzierten Metrik ist, führte auf die Howe-Tucker-Wirkung, der Wunsch nach zusätzlicher Weyl-Symmetrie auf die Karlhede-Lindström-Wirkung.

Eine gewünschte Eigenschaft, die auf die Dolan-Tchrakian-Wirkung (5.4) führt, ist mir jedoch nicht bekannt.

## 5.3 Hamilton-Formalismus

Eine weitere Methode, eine Wirkung zu erhalten, die klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung ist, geht den Umweg über den Hamilton-Formalismus. Auch dieses Verfahren scheint nicht allgemein bekannt zu sein, weshalb vor kurzem von Lindström und Svendsen [21] noch einmal darauf hingewiesen wurde.

Der Weg hierzu sei kurz in folgendem Diagramm skizziert

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\text{Legendre-}", "\text{Transformation}"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\substack{\text{Hinzufügen der Constraints}\\ \text{mit Lagrange-Multiplikatoren}}"] \\ \mathcal{S}_T & \mathcal{H}_T \arrow[l, "\text{Legendre-}"', "\text{Transformation}"] \end{tikzcd}$$

Zuerst wird mit der üblichen Legendre-Transformation der Übergang in den Hamilton-Formalismus getätigt. Hierbei zeigen sich vorhandene Symmetrien besonders deutlich durch das Auftreten von Constraints. Die Kombination Hamilton-Funktional $\mathcal{H}$ plus Constraints enthält die gesamte Dynamik des Systems.

Als zweiter Schritt werden die Constraints mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren dem Hamilton-Funktional hinzugefügt, damit sie sich im folgenden dynamisch ergeben. Das so erhaltene „totale Hamilton-Funktional" $\mathcal{H}_T$ dient bei Systemen mit Eichfreiheitsgraden oft als Ausgangspunkt zur Quantisierung.

Stattdessen wird nun jedoch der etwas unübliche Schritt zurück zur „totalen Wirkung" $\mathcal{S}_T$ durchgeführt. Diese beinhaltet noch immer die Lagrange-Multiplikatoren, die nun die Rolle von Hilfsfeldern übernommen haben.

$\mathcal{S}_T$ ist nach Konstruktion klassisch äquivalent zu $\mathcal{S}$ und beinhaltet Hilfsfelder, die ihren Ursprung in den vorhandenen Symmetrien des Systems haben. Es ist daher ein vielversprechender Kandidat für eine $p$-Brane-Wirkung.

### 5.3.1 Die spannungslose Brane

Wendet man diese Methode auf $p$-Branes an, dann ist der Ausgangspunkt die Dirac-Wirkung (5.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[A] &= \int d^{p+1}\sigma\, \mathcal{L} \quad , \qquad \mathcal{L} := -T\sqrt{-g} \\ g &:= \det(g_{mn}) \quad , \qquad g_{mn} := \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} \quad . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Man beachte, daß $g_{mn}$ im ganzen Rest dieses Abschnittes keine Hilfsmetrik ist, sondern nur eine abkürzende Schreibweise und somit identisch mit der induzierten Metrik. Die Dirac-Wirkung ist ein Funktional nur von den Feldern $A$, die die Einbettung der Brane beschreiben.

Die kanonischen Impulse $P_{\underline{m}}$ zu den Koordinaten $A^{\underline{m}}$ erhält man wie üblich aus

$$P_{\underline{m}} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^{\underline{m}})} = -T\sqrt{-g}\, g^{0m}\partial_m A_{\underline{m}} \quad . \tag{5.18}$$

Diese Beziehung zwischen den Impulsen $P_{\underline{m}}$ und den Geschwindigkeiten $\partial_0 A_{\underline{m}}$ ist nicht invertierbar wegen der Constraints

$$P^{\underline{m}}P_{\underline{m}} + T^2 g g^{00} = 0 \tag{5.19}$$

$$P^{\underline{m}}\partial_i A_{\underline{m}} = 0 \qquad , \quad i = 1, \ldots p \quad . \tag{5.20}$$

(5.20) enthält keine Geschwindigkeiten, da der Index $i$ die Null ausläßt. Die Gleichung (5.19) enthält keine Geschwindigkeiten, da gilt

$$\frac{\partial(gg^{00})}{\partial(\partial_0 A^{\underline{m}})} = 0 \quad . \tag{5.21}$$

Bei dem Übergang vom Wirkungsfunktional (beschrieben mit Geschwindigkeiten) zum Hamilton-Funktional (beschrieben mit Impulsen) geht wegen der Nichtinvertierbarkeit von (5.18) Information verloren. Nimmt man die Constraints (5.19) und (5.20) jedoch zu den Bewegungsgleichungen hinzu, ist die Äquivalenz wieder hergestellt.

In unserem Fall beschreiben die Constraints das System sogar vollständig, da das Hamilton-Funktional identisch verschwindet

$$\mathcal{H}[A,P] = \int d^p\sigma H \quad , \qquad H := P^{\underline{m}}\partial_0 A_{\underline{m}} - \mathcal{L} = 0 \quad . \tag{5.22}$$

Dies ist eine grundlegende Eigenschaft aller Systeme, die wie die $p$-Brane eine Reparametrisierungsinvarianz bezüglich der Zeit besitzen.

Um die Constraints auch im Hamilton-Formalismus dynamisch zu erhalten, werden sie mit Lagrange-Multiplikatoren zu dem (hier verschwindenden) Hamilton-Funktional hinzuaddiert. Auf diese Weise ergibt sich das totale Hamilton-Funktional

$$\mathcal{H}_T[A,P,c] = \int d^p\sigma H_T$$

$$H_T := u^0(P^{\underline{m}}P_{\underline{m}} + T^2 g g^{00}) + u^i P^{\underline{m}}\partial_i A_{\underline{m}} \qquad , \quad i = 1, \ldots p \quad . \tag{5.23}$$

Die Quantisierung eines solchen Systems mit Eichsymmetrien, die ein totales Hamilton-Funktional nötig machen, wird z.B. ausführlich in [22] beschrieben. Hier jedoch folgt als nächstes der Schritt zurück zur totalen Wirkung.

Hierzu werden zuerst wie üblich aus $\mathcal{H}_T$ die Geschwindigkeiten mit Hilfe der Poisson-Klammen bestimmt

$$\begin{aligned}\partial_0 A_{\underline{m}} = \{\mathcal{H}_T, A_{\underline{m}}\}_{\text{P.B.}} &:= \int d^p\bar{\sigma}\left(\frac{\delta\mathcal{H}_T}{\delta P^{\underline{n}}(\bar{\sigma})}\frac{\delta A_{\underline{m}}}{\delta A_{\underline{n}}(\bar{\sigma})} - \frac{\delta\mathcal{H}_T}{\delta A^{\underline{n}}(\bar{\sigma})}\frac{\delta A_{\underline{m}}}{\delta P_{\underline{n}}(\bar{\sigma})}\right)\\ &= \frac{\partial H_T}{\partial P^{\underline{m}}} = 2u^0 P_{\underline{m}} + u^i\partial_i A_{\underline{m}} \qquad , \quad i = 1, \ldots p \quad .\end{aligned} \tag{5.24}$$

Dies schreibt sich etwas angenehmer, wenn man die Parameter $u^m$ ersetzt durch Parameter $b^m$

$$b^0 := \frac{1}{2u^0} \qquad , \quad b^i := -\frac{u^i}{2u^0} \qquad , \quad i = 1, \ldots p \tag{5.25}$$

Die Beziehung der $u^m$ zu den $b^m$ ist invertierbar, es geht also keine Information verloren. Gleichung (5.24) schreibt sich damit „viel kovarianter“

$$P_{\underline{m}} = b^m \partial_m A_{\underline{m}} \quad . \tag{5.26}$$

Diesmal ist die Relation zwischen den Geschwindigkeiten und den Impulsen (5.26) invertierbar. Das totale Wirkungsfunktional ergibt sich daher direkt mit einer Legendre-Transformation

$$\mathcal{S}_T[A, b] = \int d^{p+1}\sigma \mathcal{L}_T$$

$$\mathcal{L}_T := P^{\underline{m}}\partial_0 A_{\underline{m}} - H_T = \frac{1}{2}\left(\frac{b^m b^n}{b^0}\cdot g_{mn} - \frac{1}{b^0}\cdot T^2 g g^{00}\right) \quad . \tag{5.27}$$

Dies ist nun die gesuchte Wirkung. Sie ist ein Funktional von den Materiefeldern $A$ und den Hilfsfeldern $b^m$, den früheren Lagrange-Multiplikatoren. Sie ist per Konstruktion klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung (5.1), denn eine Variation nach den Hilfsfeldern $b^m$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta\mathcal{S}_T}{\delta b^i} &&\Longrightarrow b^m g_{mi} = 0 \qquad , \quad i = 1, \ldots p\\ 0 &= \frac{\delta\mathcal{S}_T}{\delta b^0} &&\Longrightarrow b^m b^n g_{mn} = -T^2 g g^{00} \quad .\end{aligned} \tag{5.28}$$

Dies läßt sich nach den Hilfsfeldern auflösen (mit der Wahl eines Vorzeichens)

$$b^m = -T\sqrt{-g}\, g^{0m} \quad , \tag{5.29}$$

und ergibt wieder eingesetzt in (5.27) die Dirac-Wirkung (5.17).

Die Wirkung (5.27) ist ideal für Untersuchungen der spannungslosen $p$-Brane[1] (siehe z.B. [23]). Im Gegensatz zur Dirac-Wirkung läßt sich hier der Limes $T \to 0$ problemlos durchführen. Sämtliche Nichtlinearitäten verschwinden in diesem Limes, weshalb die spannungslose $p$-Brane häufig als vereinfachtes Modell für die Quantisierung verwendet wird.

Zur Supersymmetrisierung ist (5.27) jedoch kaum geeignet, da das Hilfsfeld $b^m$ weder als Vektor noch als Vektordichte transformiert, wie man an (5.29) leicht sehen kann. Es ist daher nur schwer in ein Multiplett einzuordnen.

### 5.3.2 Eine neue Wirkung

Dies kann jedoch behoben werden. Man definiere das Hilfsfeld statt wie in (5.25) alternativ gemäß

$$b^0 := \frac{1}{2u^0 T\sqrt{\gamma}} \qquad , \quad b^i := -\frac{u^i}{2u^0 T\sqrt{\gamma}} \qquad , \quad i = 1, \ldots p \quad . \tag{5.30}$$

Hierbei ist $\gamma$ die Determinante der um eine Zeile und eine Spalte verkleinerten induzierten Metrik $g_{mn}$ (man beachte den Laufbereich der Indizes)

$$\gamma := \det \gamma_{ij} \qquad , \quad \gamma_{ij} := g_{ij} \qquad , \quad i, j = 1, \ldots, p \quad . \tag{5.31}$$

Damit wird die Wirkung zu

$$\mathcal{S}[A, b] = \frac{T}{2} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{\gamma} \cdot \frac{1}{b^0} \Big( b^m b^n g_{mn} - 1 \Big) \quad . \tag{5.32}$$

Auch diese Wirkung ist klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung. Eine Variation nach den $b^m$ führt diesmal auf[2]

$$b^m = -\frac{g^{0m}}{\sqrt{-g^{00}}} \quad . \tag{5.33}$$

Und wieder eingesetzt in (5.32) ergibt sich wieder die Dirac-Wirkung (5.1).

Obwohl in (5.33) nicht manifest zu sehen, transformieren die $b^m$ nun unter Lorentz-Transformationen als Vektor

$$\delta_\omega b^m = -\omega^{ab} (M_{ab})_n{}^m b^n \quad . \tag{5.34}$$

[1] Eine andere bosonische Wirkung für die spannungslose $p$-Brane, die obendrein Weyl-invariant ist, wird in [20] vorgestellt.

[2] Man beachte, daß gilt: $g \cdot g^{00} = \gamma$ .

Die Wirkung (5.32) ist meines Wissens in der Literatur nicht bekannt. Obwohl hier der Limes $T \to 0$ nicht durchgeführt werden kann, ist die Verwandschaft zur spannungslosen Brane (5.27) offensichtlich.

Eine Supersymmetrisierung von (5.32) scheint zunächst nicht aussichtslos, da die Felder $b^m$ nun in ein Vektormultiplett eingeordnet werden können.

Dennoch ist es sehr schwierig, die Wirkung (5.32) zu supersymmetrisieren. Man beachte, daß in diesem Modell keine Hilfsmetrik eingeführt wurde, $g_{mn}$ ist nur eine abkürzende Schreibweise für $\partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}}$.

Es ist daher nicht möglich, einfach Gravitation durch Supergravitation zu ersetzen. Stattdessen hat man es mit einer reduzierten Form lokaler Supersymmetrie zu tun, die nicht mit dem Supergravitationsmultiplett $(e, \chi, S)$ beschrieben wird, sondern durch die $b^m$ und deren Vektormultiplett.

Hinzu kommt, daß eine starke Verwandtschaft von (5.32) zur Howe-Tucker-Wirkung besteht, wie im folgenden gezeigt wird. Die Vermutung liegt daher nahe, daß hier ein ähnliches Problem mit einer kosmologischen Konstanten die Supersymmetrisierung erschweren wird.

### 5.3.3 Verwandtschaft zur Howe-Tucker-Brane

Die Wirkung (5.32) ist verwandt mit der Howe-Tucker-Wirkung (5.2). Dies ist schnell zu sehen mit einer neue Matrix $h$

$$h^{mn} := -b^m b^n + g^{mn} - \frac{g^{0m} g^{0n}}{g^{00}} \quad . \tag{5.35}$$

Hiermit bekommt die Wirkung (5.32) eine völlig neue Gestalt

$$\mathcal{S}[A, b] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-h} \Big( h^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} - p + 1 \Big) \quad . \tag{5.36}$$

Dies ist aber genau die Form der Howe-Tucker-Wirkung, sieht man einmal davon ab, daß (5.36) immer noch ein Funktional der Hilfsfelder $b$ ist.

An (5.35) sieht man auch sehr schön, daß nur ein Teil der Matrix $h$ von den Hilfsfeldern $b$ bestimmt wird, während die übrigen Freiheitsgrade durch die induzierte Metrik $g_{mn} := \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}}$ festliegen.

Nur ein Teil der Matrix $h$ spielt daher die Rolle der Gravitation, der Rest besteht aus Materiefeldern $A$, die bei einer Supersymmetrisierung anders ersetzt werden müßten. Die Schwierigkeiten hierbei sind offensichtlich.

Man kann die Matrix $h$ aber auch auf eine volle Hilfsmetrik erweitern. Hierfür werden zuerst die Hilfsfelder $b^m$ ersetzt durch die Komponenten $h^{0m}$. Zwischen ihnen besteht aufgrund von (5.35) eine invertierbare Beziehung

$$h^{0m} = -b^0 b^m \quad \longleftrightarrow \quad b^m = -\frac{h^{0m}}{\sqrt{-h^{00}}} \quad . \tag{5.37}$$

Die Wirkung lautet nun

$$\mathcal{S}[A, h^{0m}] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-h} \Big( h^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} - p + 1 \Big) \quad . \tag{5.38}$$

Man beachte, daß nun im Gegensatz zu (5.36) nach den $h^{0m}$ variiert wird.

Will man nun auch nach den übrigen Komponenten von $h$ variieren können, muß dafür gesorgt werden, daß on-shell (5.35) erfüllt ist. Dies kann wieder mit Lagrange-Multiplikatoren bewerkstelligt werden

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[A, h, c] = \int d^{p+1}\sigma \ \Bigg[ & -\frac{T}{2}\sqrt{-h} \Big( h^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} - p + 1 \Big) + \\ & + c_{ij} \left( h^{ij} + b^i b^j - g^{ij} + \frac{g^{0i} g^{0j}}{g^{00}} \right) \Bigg] \\ \text{mit} \quad i, j = 1, \ldots, p \quad . \end{aligned} \tag{5.39}$$

Diese Wirkung ist nun endlich ein Funktional der ganzen Hilfsmetrik $h$. Der Lagrange-Multiplikator $c$ läßt sich mittels der Bewegungsgleichung für $c_{ij}$ und der für $h^{ij}$ eliminieren

$$0 = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta c_{ij}} \quad , \quad 0 = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta h^{ij}} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = 0 \quad . \tag{5.40}$$

Setzt man dies wieder in die Wirkung (5.39) ein, so fällt nur der Term mit dem Lagrange-Multiplikator weg. Damit ist die Wirkung nun identisch gleich der Howe-Tucker-Wirkung (5.2)

$$\mathcal{S}[A, h] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-h} \Big( h^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} - p + 1 \Big) \quad . \tag{5.41}$$

## 5.4 Generisches Modell

Eine ganz neue Methode, Wirkungen zu erhalten, die äquivalent zur Dirac-Wirkung sind, wird im folgenden Abschnitt vorgestellt. Sie basiert auf der Konstruktion der Dolan-Tchrakian-Wirkung und verallgemeinert diese derart, daß alle in Kapitel 5.1 vorgestellten Wirkungen darin enthalten sind.

Die Supersymmetrisierung dieser Klasse von Wirkungen kann für den Fall der Membrane ganz allgemein durchgeführt werden. Sogar Wirkungen mit kosmologischen Konstanten lassen sich unter Umgehung des no-go-Theorems aus

Kapitel 4.3 supersymmetrisieren. Häufig läßt sich sogar auf mehrere Arten manifeste Supersymmetrie im Weltvolumen erreichen.

Somit wird hier ein allgemeines Verfahren vorgestellt, Spinning Membrane-Modelle zu konstruieren, die alle Eigenschaften der Definition aus Kapitel 4.1.2 erfüllen.

Auch eine Darstellung dieser Wirkungen in Komponentenfeldern kann allgemein durchgeführt werden. Sie schließt dieses Kapitel ab.

### 5.4.1 Verallgemeinerung der Idee von Dolan und Tchrakian

Die Idee in der Konstruktion der Dolan-Tchrakian-Wirkung aus Kapitel 4.5.1 kann verallgemeinert werden. Die Klasse von Wirkungen, die im folgenden diskutiert wird, sei definiert durch

$$\mathcal{S}[A,g] := -T \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-g} \cdot f(B) \qquad , \quad B_m{}^n := \partial_m A^{\underline{m}} \partial_q A_{\underline{m}}\, g^{qn} \quad . \tag{5.42}$$

Hierbei ist $g_{mn}$ wieder die Hilfsmetrik und $g$ ihre Determinante. Die bisher nicht näher spezifizierte Funktion $f$ bildet Matrizen in Lorentz-invarianter Weise auf Skalare ab

$$f: \quad \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R} \quad . \tag{5.43}$$

Etwas genauer betrachtet, ist die Lorentz-invariante Kontraktion eines hoch- mit einem tiefgestellten Index, wie er bei den Matrizen $B$ auftritt, nur möglich mit dem Lorentz-invarianten Kronecker-Delta $\delta_m{}^n$, was einer Spurbildung entspricht. Die Funktion $f$ ist daher aus Spuren von beliebigen Produkten der Matrizen $B$ zusammengesetzt

$$f(B) = \tilde{f}\Big(\mathrm{tr}(B),\, \mathrm{tr}(B^2),\, \mathrm{tr}(B^3),\, \ldots\Big) \quad , \tag{5.44}$$

mit einer beliebigen Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$.

Variiert man (5.42) nach der Hilfsmetrik, ergibt sich als Bewegungsgleichung

$$0 = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{mn}} \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2} f(B) \cdot \mathbb{1} + \frac{\partial f(B)}{\partial B} \cdot B \quad . \tag{5.45}$$

Dies ist eine algebraische Gleichung für $B$ und damit für die Hilfsmetrik $g_{mn}$. Ihre Lösungsmenge zerfällt im allgemeinen in mehrere Lösungsklassen, die miteinander topologisch nicht verbunden sind.

Innerhalb einer einzelnen Lösungsklasse lassen sich alle Lösungen mit Symmetrietransformationen kontinuierlich ineinander überführen. Die zugehörigen

Symmetrien sind Symmetrien der Bewegungsgleichung (5.45) und damit der Wirkung (5.42).

Neben der Lorentz-Symmetrie, die für jede Wirkung gefordert wird, tritt z.B. bei der Dolan-Tchrakian-Wirkung in Kapitel 4.5.1 für ungerade $p$ Weyl-Symmetrie auf, aber auch andere Symmetrien sind natürlich denkbar.

Die Lösungsmenge der Bewegungsgleichung (5.45) läßt sich damit immer auf eine diskrete Menge von Repräsentanten $\bar{B}$ zurückführen, die mit den vorhandenen Symmetrietransformationen die gesamte Lösungsmenge erzeugen

$$B = \text{Symmetrietransformation}(\bar{B}) \qquad , \quad \bar{B} \in \left\{\bar{B}_{(1)}, \bar{B}_{(2)}, \bar{B}_{(3)}, \ldots\right\} \quad . \tag{5.46}$$

Setzt man diese algebraisch erhaltene Lösung der Bewegungsgleichung wieder in die Wirkung (5.42) ein, so fallen die Symmetrietransformationen weg, da es sich ja, wie schon erwähnt, um Symmetrien der Wirkung handelt. Übrig bleibt nur der Repräsentant der jeweiligen Lösungsklasse, so daß sich ergibt

$$\mathcal{S}[A] := -T \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det(\partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}})} \cdot \frac{f(\bar{B})}{\sqrt{\bar{B}}} \quad . \tag{5.47}$$

Unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $\bar{B}$ ist der rechte Faktor konstant und kann vor das Integral gezogen werden. Somit ergibt sich, bis auf den konstanten Vorfaktor, wieder die Dirac-Wirkung (5.1).

Die Wirkung (5.42) ist demnach auf jeden Fall klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung, sogar unabhängig von der Wahl der Funktion $f$ oder des Repräsentanten $\bar{B}$.

Wie schon von Dolan und Tchrakian (Kapitel 4.5.1) bemerkt, muß man sich eigentlich schon vor der Variation der Wirkung nach der Hilfsmetrik auf eine der Lösungsklassen festlegen, da eine infinitesimale Variation nicht von einer Lösungsklasse in die andere führen kann.

Aus physikalischen Gründen ist natürlich gewünscht, daß on-shell die Hilfsmetrik gleich der induzierten Metrik ist. Dies entspricht der Existenz einer Lösungsklasse mit dem Repräsentanten $\bar{B} = \mathbb{1}$, auf die man sich dann bei der Variation beschränkt.

Die Einheitsmatrix sollte daher eine mögliche Lösung der Bewegungsgleichung (5.45) sein. Dies bedeutet eine Einschränkung an die Funktion $f$

$$0 = -\frac{1}{2} f(\mathbb{1}) \cdot \mathbb{1} + \left.\frac{\partial f(B)}{\partial B}\right|_{B=1} \quad . \tag{5.48}$$

Da man sich nun auf eine Lösungsklasse festgelegt hat, kann man die Wirkung und damit die Funktion $f$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit noch so normieren, daß der Faktor in (5.47) nach Einsetzen des Repräsentanten $\bar{B} = \mathbb{1}$ komplett verschwindet und sich exakt die Dirac-Wirkung ergibt. Die Normierung hierfür lautet

$$f(\mathbb{1}) = 1 \quad . \tag{5.49}$$

Die Einschränkung (5.48) an die Funktion $f$ lautet damit etwas kürzer

$$\left.\frac{\partial f(B)}{\partial B}\right|_{B=1} = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1} \quad . \tag{5.50}$$

Dies sind alle Einschränkungen, die in dieser Diskussion an die Wirkung gemacht werden. Für die Supersymmetrisierung im folgenden Abschnitt werden also alle Wirkungen betrachtet mit der Form

$$\mathcal{S}[A,g] := -T \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-g} \cdot f(B) \qquad , \quad B_m{}^n := \partial_m A^{\underline{m}} \partial_q A_{\underline{m}}\, g^{qn}$$
$$\text{mit} \quad f(\mathbb{1}) = 1 \qquad \text{und} \quad \left.\frac{\partial f(B)}{\partial B}\right|_{B=1} = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1} \quad . \tag{5.51}$$

Zu dieser allgemeinen Klasse von Wirkungen gehören alle in Kapitel 5.1 besprochenen Modelle:

| Wirkung | $f(B)$ |
|---|---|
| Dirac | $f(B) = \sqrt{\det B} = \sqrt{B_{[m_1}{}^{[m_1} \dots B_{m_{p+1}]}{}^{m_{p+1}]}}$ |
| Howe-Tucker | $f(B) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(B) - p + 1)$ |
| Karlhede-Lindström | $f(B) = \left(\frac{1}{p+1}\,\mathrm{tr}(B)\right)^{\frac{p+1}{2}}$ |
| Dolan-Tchrakian | $f(B) = \begin{cases} \mathcal{L}_{p+1} & \text{für } p \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}_{p+2} + \mathcal{L}_p\Big) & \text{für } p \text{ gerade} \end{cases}$ |
| | $\mathcal{L}_{2n} := \binom{p+1}{n}^{-1} \cdot B_{[m_1}{}^{[m_1} \dots B_{m_n]}{}^{m_n]}$ |

Dies kann für Membranes allgemein supersymmetrisiert werden, unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion $f$.

### 5.4.2 Supersymmetrisierung

Vorweg sei bemerkt, daß, obwohl dieses Überlegungen zur Supersymmetrisierung recht allgemein sind, weder alle denkbaren bosonischen Wirkungen in die Form (5.51) gebracht werden können, noch alle möglichen Supersymmetrisierungen in dem nun folgenden Schema enthalten sind. Trotzdem liefert dieses Verfahren für alle bosonischen Wirkungen der Form (5.51) immer eine Vielzahl von möglichen Supersymmetrisierungen, die sämtlich gültige Spinning Membranes sind im Sinne der Definition des Abschnittes 4.1.2.

Die Überlegungen zur Supersymmetrisierung verwenden Besonderheiten der $N = 1$, $D = 3$ Supergravitation, die im Kapitel 3 vorgestellt wurde. Es wird daher von nun an auf den Fall der Membrane ($p = 2$) konkretisiert.

Will man die Wirkung (5.51) so erweitern, daß sie manifest supersymmetrisch ist, ist es am einfachsten, das Integral und das Volumenelement durch ihre jeweils manifest supersymmetrische Entsprechung zu ersetzen

$$\int d^3\sigma \sqrt{-g} \cdot \ldots \quad \longrightarrow \quad \int d^3\sigma d^2\Theta E^{-1} \cdot \ldots \quad . \tag{5.52}$$

Die Felder $A^{\underline{m}}$ werden dann eingebettet in die zugehörigen Superfelder $X^{\underline{m}}$ und durch sie ersetzt

$$A^{\underline{m}} \quad \longrightarrow \quad X^{\underline{m}} \quad . \tag{5.53}$$

Für die partiellen Ableitungen in (5.51) ist dies jedoch nicht so einfach, da nun auch Spinorindizes zur Verfügung stehen. Es liegen daher zwei Bausteine vor, die sehr unterschiedlich kombiniert werden können

$$e_a{}^m \partial_m A^{\underline{m}} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \nabla_a X^{\underline{m}} & \text{und} \\ \nabla_\alpha X^{\underline{m}} & \end{cases} \quad . \tag{5.54}$$

Auf eine Lorentz-invariante Indexstruktur muß dabei natürlich geachtet werden. Außer den Feldbausteinen (5.54) können für Kontraktionen auch noch konstante, Lorentz-invariante Tensoren verwendet werden

$$\gamma^a{}_\alpha{}^\beta \quad , \quad \varepsilon^{abc}, \quad \varepsilon^{\underline{m}_1 \cdots \underline{m}_D} \quad . \tag{5.55}$$

Kronecker-Deltas und die jeweilige Metrik zum Hoch- und Runterziehen der Indizes sind in der Diskussion immer implizit enthalten und werden nicht gesondert erwähnt.

In einigen speziellen Dimensionen $D$ existieren auch noch andere konstante, Lorentz-invariante Tensoren, die jedoch aus Gründen der Einfachheit nicht in dieses Schema aufgenommen werden. Sie mögen zu weiteren Möglichkeiten der Supersymmetrisierung führen, die hieraus nicht erhalten werden können.

Ebenfalls vermieden werden im folgenden die Tensorfelder der Supergravitation

$$W \quad , \quad G_{\alpha\beta\gamma} \quad . \tag{5.56}$$

Ihre Verwendung beinhaltet immer die Gefahr, zusätzlich Krümmungsterme in die Wirkung mit aufzunehmen, die verhindern würden, daß sich die Hilfsmetrik algebraisch eliminieren läßt. Trotzdem sind sie nicht völlig ausgeschlossen. Auch mit ihrer Hilfe mag es möglich sein, eine gültige Supersymmetrisierung zu erreichen. Hier werden sie jedoch nicht betrachtet.

Auch die Möglichkeit, weitere Felder einzuführen, besteht natürlich. Zum Beispiel können zusätzliche Lagrange-Multiplikatoren als Hilfsfelder in ein Supermultiplett eingebettet werden. Da dies die Situation weiter verkomplizieren würde, wird im folgenden davon abgesehen.

Mit diesen grundsätzlichen Überlegungen hat die Wirkung bisher die allgemeine Form

$$\mathcal{S}[A,\Psi,F,e,\chi,S] = -T\int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1}\cdot\mathcal{L}\Big(\nabla_\alpha X^{\underline{m}},\, \nabla_a X^{\underline{n}}\Big) \quad . \tag{5.57}$$

Dies muß natürlich weiter eingeschränkt werden, damit es die Definition einer Spinning Membrane (Abschnitt 4.1.2) erfüllt und um einen Zusammenhang zur bosonischen Wirkung (5.51) herzustellen.

Bei Nullsetzen aller Fermionen wird (5.57) mit Hilfe von (3.47) zu

$$\mathcal{S}|| = -T\int d^3x\, e^{-1}\cdot\Big((\nabla^\alpha\nabla_\alpha\mathcal{L})|| + 4iS\cdot\mathcal{L}||\Big) \quad . \tag{5.58}$$

Wenn, so wie oben vorgeschlagen, keine Supergravitationstensoren $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ verwendet wurden, dann tritt das Gravitationshilfsfeld $S$ nun nur noch an der einen, in (5.58) direkt sichtbaren Stelle auf.

In den kovarianten Ableitungen $\nabla_a X^{\underline{m}}$ und $\nabla_\alpha X^{\underline{m}}$ ist es nicht vorhanden, da bei den Skalarfeldern $X^{\underline{m}}$ keine Konnektion erscheint. Auch die kovarianten Ableitungen $\nabla^\alpha\nabla_\alpha$ enthalten nach der Projektion „$||$“ kein solches $S$ mehr.

Eine anschließende Variation nach $S$ ergibt daher eine Bewegungsgleichung, in der $S$ überhaupt nicht mehr vorkommt

$$0 = \frac{\delta\mathcal{S}||}{\delta S} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}|| = 0 \quad . \tag{5.59}$$

Diese Zwangsbedingung kann die klassische Äquivalenz zur Dirac-Wirkung zerstören, wenn sie deren Dynamik weiter einschränkt, also unabhängig ist von den Bewegungsgleichungen der Dirac-Wirkung.

Diese Zwangsbedingung kann auch unerfüllbar sein. Bei einer in $\mathcal{L}$ enthaltenen kosmologischen Konstanten ergibt sich zum Beispiel (je nach Vorfaktor) $1 = 0$.

Dies würde sich ändern, wenn z.B. Supergravitationsterme mit $W$ und $G_{\alpha\beta\gamma}$ hinzugefügt würden, die $S$ quadratisch oder in einer noch höheren Potenz enthielten. Die Bewegungsgleichung für $S$ ließe sich dann zum Eliminieren von $S$ verwenden, anstatt eine solche Zwangsbedingung zu liefern.

Reine Supergravitationsterme sind für diesen Zweck jedoch ausgeschlossen, wie das no-go-Theorem von Bergshoeff, Sezgin und Townsend (Abschnitt 4.3) beweist. Sie bringen immer Krümmungsterme mit hinein, die die algebraische Elimination der Hilfsmetrik verhindern.

Gemischte Terme Supergravitation/Materie sind von dem no-go-Theorem zwar nicht explizit ausgeschlossen, aber aus denselben Gründen äußerst schwierig zu integrieren. Im folgenden wird daher komplett auf sie verzichtet.

Die einfachste Möglichkeit, die unangenehmen Konsequenzen einer Zwangsbedingung (5.59) zu vermeiden, besteht darin, dafür zu sorgen, daß sie aufgrund der Konstruktion der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ automatisch erfüllt ist.

$$\mathcal{L}|| = 0 \quad . \tag{5.60}$$

Diese Möglichkeit wird im folgenden gewählt. Sie ist äußerst leicht und für jede zu supersymmetrisierende, bosonische Wirkung zu erreichen.

Hierfür muß die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ nur mindestens linear in Fermionen sein, bzw. quadratisch, da sie selbst ja bosonisch ist. Verzichtet man, wie oben diskutiert auf $G_{\alpha\beta\gamma}$ und auf zusätzliche Felder, dann kommen für diesen Zweck nur die $\nabla_\alpha X^{\underline{m}}$ in Frage. $\mathcal{L}$ besitzt dann die allgemeine Form

$$\mathcal{L} := (\nabla_\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\beta X^{\underline{n}}) \cdot \mathrm{h}^{\alpha\beta}_{\underline{m}\,\underline{n}}\Big(\nabla_\gamma X^{\underline{p}},\, \nabla_a X^{\underline{q}}\Big) \quad . \tag{5.61}$$

Hierbei ist die Funktion $\mathrm{h}$ aufgrund der Symmetrien des Vorfaktors o.B.d.A antisymmetrisch unter gleichzeitiger Vertauschung der Indizes $\alpha \leftrightarrow \beta$ und $\underline{m} \leftrightarrow \underline{n}$.

Auch für bosonische Wirkungen, die weniger als quadratisch in den Materiefeldern sind, kann eine solche Aufspaltung erreicht werden, indem man Brüche mit Materiefeldern im Nenner einführt. Wirkungen mit kosmologischen Konstanten können auf diese Weise unter Umgehung des no-go-Theorems supersymmetrisiert werden, wie in Abschnitt 6.4 explizit am Beispiel der Howe-Tucker-Wirkung gezeigt wird.

Nachdem nun sichergestellt ist, daß nach Nullsetzen aller Fermionen die Bewegungsgleichung für $S$ keine Zwangsbedingung ergibt, bleibt die Frage, ob vielleicht eine Variation nach $S$ *vor* dem Nullsetzen aller Fermionen eine Zwangsbedingung bewirkt, die dann nur Fermionen enthält.

Solche Zwangsbedingungen würden nicht die klassische Äquivalenz zur Dirac-Wirkung stören und sollen hier auch nicht ausgeschlossen werden.Bei den meisten Wirkungen der Form (5.61) tritt das Problem jedoch nicht auf, da schon ein einziger Term der Form $(\nabla^a X_{\underline{m}})(\nabla_a X^{\underline{n}})$ bewirkt, daß nach der Integration $\int d^2\Theta$ mittels

$$(\nabla^\alpha \nabla^a X_{\underline{m}})(\nabla_\alpha \nabla_a X^{\underline{n}})| = \frac{3}{4} S^2\, \Psi^\mu{}_{\underline{m}} \Psi_\mu{}^{\underline{n}} + \dots \tag{5.62}$$

das Hilfsfeld $S$ bereits quadratisch vorkommt und damit das Entstehen einer Zwangsbedingung verhindert wird.

Mit der Form (5.61) wird die Wirkung nach Nullsetzen aller Fermionen nun zu

$$\mathcal{S}|| = 2T \int d^3\sigma \sqrt{-g}\, (\nabla^\alpha \nabla_\beta X^{\underline{m}})||(\nabla_\alpha \nabla_\gamma X^{\underline{n}})|| \cdot \mathrm{h}^{\beta\gamma}_{\underline{m}\,\underline{n}}\Big(0\,,\, e_a{}^m \partial_m A^{\underline{p}}\Big) \quad . \tag{5.63}$$

Die beiden kovarianten Ableitungen aus der Integration $\int d^2\Theta$ können nur auf die ersten beiden Terme wirken, da sonst Fermionen übrigbleiben, die bei der Projektion „||" die ganze Wirkung zu Null machen. Das bedeutet aber auch, daß alle übrigen Terme mit fermionischen Ableitungen $\nabla_\alpha X^{\underline{m}}$ in $\mathrm{h}$ bei der Projektion verschwinden.

Solche Terme in $\mathrm{h}$ sind daher zwar nicht ausgeschlossen, sie haben jedoch keine Auswirkungen auf den bosonischen Anteil der Wirkung und werden daher aus dieser Diskussion herausgenommen. Dennoch kann ihre Addition sinnvoll sein, um z.B. gewisse Symmetrien der Gesamtwirkung sicherzustellen.

Sammelt man solche Zusatzterme der Wirkung, die dann mindestens quartisch in den Fermionen sind, in dem Funktional $\mathcal{Z}_1$

$$\mathcal{Z}_1 := -T \int d^3\sigma d^2\theta\, E^{-1} (\nabla_\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\beta X^{\underline{n}})(\nabla_\gamma X^{\underline{p}})(\nabla_\delta X^{\underline{q}}) \cdot \mathrm{h}^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\underline{m}\,\underline{n}\,\underline{p}\,\underline{q}}\Big(\nabla_\varepsilon X^{\underline{r}},\, \nabla_a X^{\underline{s}}\Big)\,, \tag{5.64}$$

dann kann man sich in der folgenden Diskussion auf Wirkungen quadratisch in den Fermionen beschränken

$$\mathcal{S} := \mathcal{Z}_1 - T \int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1} \mathcal{L} \quad , \quad \mathcal{L} := (\nabla_\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\beta X^{\underline{n}}) \cdot \mathrm{h}^{\alpha\beta}_{\underline{m}\,\underline{n}}\Big(\nabla_a X^{\underline{p}}\Big) \quad . \tag{5.65}$$

Der Anteil von $\mathrm{h}$, der symmetrisch in $\alpha \leftrightarrow \beta$ ist, wird sich qualitativ von dem antisymmetrischen Anteil unterscheiden. Es wird daher aufgeteilt

$$\mathcal{L} = (\nabla_\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\beta X^{\underline{n}}) \cdot \mathrm{h}^{[\alpha\beta]}_{(\underline{m}\,\underline{n})} + (\nabla_\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\beta X^{\underline{n}}) \cdot \mathrm{h}^{(\alpha\beta)}_{[\underline{m}\,\underline{n}]} \quad . \tag{5.66}$$

Da sich in drei Dimensionen jeder symmetrische Bispinor nach den Gamma-Matrizen entwickeln läßt und jeder antisymmetrische ein Vielfaches der Charge-Conjugation-Matrix ist, reduziert sich dies zu

$$\mathcal{L} = (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}}) \cdot \mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})} + (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})\gamma_{a\alpha}{}^{\beta}(\nabla_\beta X^{\underline{n}}) \cdot \mathrm{h}^{a}_{[\underline{m}\,\underline{n}]} \quad , \tag{5.67}$$

mit

$$\mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})} := -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta} \cdot \mathrm{h}^{[\alpha\beta]}_{(\underline{m}\,\underline{n})} \quad , \quad \mathrm{h}^{a}_{[\underline{m}\,\underline{n}]} := \frac{1}{2}\gamma^{a}{}_{\alpha\beta} \cdot \mathrm{h}^{(\alpha\beta)}_{[\underline{m}\,\underline{n}]} \quad . \tag{5.68}$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß wegen unserer bisherigen Beschränkungen des Modells die beiden notwendigen Fermionen $\nabla_\alpha X^{\underline{m}}$ nur auf die beiden in (5.67) angegebenen Arten kombiniert werden können, einmal direkt und einmal mit einer Gamma-Matrix dazwischen.

Weitere Arten, alle Spinor-Indizes abzusättigen, beinhalten höchstens mehr Gamma-Matrizen und können in drei Dimensionen mit Identitäten der Gamma-Matrizen immer auf eine Kombination dieser beiden Terme reduziert werden.

Aus demselben Grund lassen sich auch die neu definierten Funktionen $\mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})}$ und $\mathrm{h}^{a}_{[\underline{m}\,\underline{n}]}$ immer so umschreiben, daß in ihnen überhaupt keine Spinor-Indizes mehr vorkommen. Sie können, bei den bisherigen Beschränkungen des Modells, nur noch Spuren über beliebige Potenzen von Gamma-Matrizen enthalten, die sich in drei Dimensionen mit Identitäten der Gamma-Matrizen vollständig berechnen lassen.

Bei Nullsetzen aller Fermionen wird die Wirkung nun zu

$$\begin{aligned} \mathcal{S}|| = -T \int d^3\sigma \sqrt{-g}\, \Big( & \Big(-4g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A^{\underline{n}} - F^{\underline{m}}F^{\underline{n}}\Big) \cdot \mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})}(e_a{}^{p}\partial_p A^{\underline{p}}) + \\ & + \Big(-4e_a{}^{m}\varepsilon_m{}^{np}\partial_n A^{\underline{m}}\partial_p A^{\underline{n}} - 4ie_a{}^{m}\partial_m A^{[\underline{m}}F^{\underline{n}]}\Big) \cdot \mathrm{h}^{a}_{[\underline{m}\,\underline{n}]}(e_a{}^{q}\partial_q A^{\underline{p}})\Big) \end{aligned} \tag{5.69}$$

Deutlich zu sehen ist hier, daß das Hilfsfeld $F$ im ersten Term quadratisch auftritt, während es im zweiten Term linear vorhanden ist. Eine Wirkung, die nur aus dem zweiten Term besteht, würde also wieder eine Zwangsbedingung liefern, die die klassische Äquivalenz zur Dirac-Wirkung gefährden könnte.

Sobald der erste, quadratische Term jedoch vorhanden ist ergibt sich, auch in Kombination mit dem linearen Term, bei einer Variation nach $F$ immer eine Bewegungsgleichung, mit der sich das Hilfsfeld $F$ anschließend eliminieren läßt.

Aus Gründen der Einfachheit beschränke ich mich hier auf eine Bewegungsgleichung, die $F$ on-shell auf Null setzt. Dies ist in keiner Weise zwingend. Auch Wirkungen, die für das Hilfsfeld eine nichtverschwindende Lösung ermöglichen, mögen zu gültigen Spinning Membranes führen. Die bosonische Wirkung, die sich nach der Elimination eines nichtverschwindenen $F$ ergäbe, ist jedoch sehr schwer allgemein zu behandeln, weshalb im folgenden davon abgesehen wird.

Um eine Bewegungsgleichung $F = 0$ zu bekommen, muß der Term linear in $F$ vermieden werden. Die einfachste Möglichkeit, dies zu erreichen, ohne den ganzen zweiten Term aufzugeben, ist die Wahl

$$\mathrm{h}^{a}_{[\underline{m}\,\underline{n}]} := \varepsilon^{abc}(\nabla_b X_{\underline{m}})(\nabla_c X_{\underline{n}}) \cdot \mathrm{h}(\nabla_d X^{\underline{p}}) \quad . \tag{5.70}$$

Der Term linear in $F$ fällt dann aufgrund von Symmetrie-Antisymmetrie-Überlegungen weg.

Hiermit wird aus (5.69)

$$\begin{aligned}\mathcal{S}|| = -T \int d^3\sigma \sqrt{-g}\, \Big( \Big( & -4g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A^{\underline{n}} - F^{\underline{m}}F^{\underline{n}}\Big) \cdot \mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})}(e_a{}^m\partial_m A^{\underline{p}}) + \\ & + 8 \cdot \partial_{[m}A^{\underline{m}}\partial_{p]}A^{\underline{n}} \cdot g^{mn}g^{pq} \cdot \partial_n A_{\underline{m}}\partial_q A_{\underline{n}} \cdot \mathrm{h}(e_a{}^m\partial_m A^{\underline{p}})\Big) \quad .\end{aligned} \tag{5.71}$$

Mit dieser einfachsten Wahl ergibt sich als Bewegungsgleichung für $F$

$$0 = \frac{\delta S||}{\delta F^{\underline{m}}} \quad \Rightarrow \quad F^{\underline{n}} \cdot \mathrm{h}_{(\underline{n}\,\underline{m})}\Big(e_a{}^m\partial_m A^{\underline{p}}\Big) = 0 \quad . \tag{5.72}$$

Dies ist eine algebraische Bewegungsgleichung für $F$. Sie besitzt mindestens die Lösung $F = 0$. Sollte die Matrix $\mathrm{h}_{(\underline{n}\,\underline{m})}$ nicht invertierbar sein (im allgemeinen befinden sich Projektoren darin), dann ist die Lösungsmenge mehrdimensional und kann mit Parametern geschrieben werden.

In beiden Fällen wird, setzt man das Ergebnis für $F$ wieder in die Wirkung (5.71) ein, der Term quadratisch in den $F$ eliminiert, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{S}|| = -T \int d^3\sigma \sqrt{-g}\, \Big( & -4g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A^{\underline{n}} \cdot \mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})}(e_a{}^m\partial_m A^{\underline{p}}) + \\ & + 8 \cdot \partial_{[m}A^{\underline{m}}\partial_{p]}A^{\underline{n}} \cdot g^{mn}g^{pq} \cdot \partial_n A_{\underline{m}}\partial_q A_{\underline{n}} \cdot \mathrm{h}(e_a{}^m\partial_m A^{\underline{p}})\Big).\end{aligned} \tag{5.73}$$

Dies ist eine rein bosonische Wirkung, erhalten aus der manifest supersymmetrischen Form

$$\begin{aligned}\mathcal{S}[A,\Psi,F,e,\chi,S] = \mathcal{Z}_1 - T \int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1} \Big( & (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}}) \cdot \mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})}(\nabla_a X^{\underline{p}}) + \\ & + (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})\gamma_{a\alpha}{}^{\beta}(\nabla_\beta X^{\underline{n}})\varepsilon^{abc}(\nabla_b X_{\underline{m}})(\nabla_c X_{\underline{n}}) \cdot \mathrm{h}(\nabla_d X^{\underline{p}})\Big) \quad .\end{aligned} \tag{5.74}$$

In der erhaltenen bosonischen Wirkung (5.73) lassen sich die Terme $e_a{}^m\partial A^{\underline{m}}$ immer in Paaren zu den Matrizen $B$ aus (5.51) kombinieren. Mit der Definition

$$
\begin{aligned}
f(B) := &-4g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A^{\underline{n}} \cdot \mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})}(e_a{}^p\partial_p A^{\underline{p}}) + \\
&+ 8 \cdot \partial_{[m} A^{\underline{m}}\partial_{p]} A^{\underline{n}} \cdot g^{mn} g^{pq} \cdot \partial_n A_{\underline{m}}\partial_q A_{\underline{n}} \cdot \mathrm{h}(e_a{}^m\partial_m A^{\underline{p}})
\end{aligned}
\tag{5.75}
$$

ist daher die Form (5.51) erreicht. Erfüllt $f$ nun auch noch die beiden Bedingungen aus (5.51),

$$
f(\mathbb{1}) = 1 \qquad , \qquad \left.\frac{\partial f(B)}{\partial B}\right|_{B=1} = \frac{1}{2}\cdot \mathbb{1} \quad ,
\tag{5.76}
$$

dann ist on-shell die Hilfsmetrik gleich der induzierten Metrik und es ergibt sich nach Elimination der Hilfsmetrik die Dirac-Wirkung in richtiger Normierung. Es sei nochmal daran erinnert, daß auch wenn diese beiden Bedingungen nicht erfüllt sind, die Wirkung klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung ist.

Die Wirkung (5.74) ist somit eine gültige Spinning Membrane-Wirkung nach der Definition aus Abschnitt 4.1.2.

Beim näheren Betrachten von (5.73) fällt auf, daß sich $\mathrm{h}$ mittels einer Redefinition von $\mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})}$ zum Verschwinden bringen läßt

$$
\mathrm{h}_{(\underline{m}\,\underline{n})}(e_a{}^m\partial_m A^{\underline{m}}) \to -\frac{1}{4}H_{\underline{m}\,\underline{n}} + \Big(\eta_{\underline{m}\,\underline{n}} g^{mn}\partial_m A^{\underline{p}}\partial_n A_{\underline{p}} - g^{mn}\partial_m A_{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{n}}\Big)\cdot \mathrm{h} \quad ,
\tag{5.77}
$$

mit einem Faktor $-1/4$ für spätere Einfachheit der Formeln.

Natürlich verschwindet $\mathrm{h}$ damit nicht aus (5.74). Alle Terme, die nach dieser Ersetzung proportional zu $\mathrm{h}$ sind, seien im folgenden in einem Funktional $Z_2$ gesammelt

$$
\begin{aligned}
Z_2 := -T\int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1}\Big(&(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}})(\nabla^a X^{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{n}}) + \\
&- (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}})(\nabla^a X_{\underline{m}})(\nabla_a X_{\underline{n}}) + \\
&+ (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})\gamma_{a\alpha}{}^\beta(\nabla_\beta X^{\underline{n}})\varepsilon^{abc}(\nabla_b X_{\underline{m}})(\nabla_c X_{\underline{n}})\Big)\cdot \mathrm{h}(\nabla_d X^{\underline{p}}) \quad .
\end{aligned}
\tag{5.78}
$$

Die letzten beiden Terme lassen sich (mit $\nabla_{\alpha\beta} := \gamma_{\alpha\beta}{}^a\nabla_a$) noch zusammenfassen

$$
\begin{aligned}
Z_2 := -T\int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1}\Big(&(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}})(\nabla^a X_{\underline{m}})(\nabla_a X_{\underline{n}}) + \\
&+ (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha{}^\beta X_{\underline{m}})(\nabla^\gamma X^{\underline{n}})(\nabla_{\beta\gamma} X_{\underline{n}})\Big)\cdot \mathrm{h}(\nabla_a X^{\underline{p}}) \quad .
\end{aligned}
\tag{5.79}
$$

Das Verschwinden von $\mathfrak{h}$ in (5.73) bedeutet aber nun, daß $\mathcal{Z}_2$, ebenso wie schon $\mathcal{Z}_1$, (diesmal allerdings erst nach Elimination der Hilfsfelder $F$) nicht zur bosonischen Wirkung beiträgt

$$(\mathcal{Z}_2||)\Big|_{F=0} = 0 \quad . \tag{5.80}$$

Trotzdem kann die Addition von $\mathcal{Z}_2$ sinnvoll sein, um z.B. eine gewünschte Symmetrie zu erhalten. Dies wird getan bei der Konstruktion der Lindström-Roček-Brane (6.2).

Die Wirkung (5.74) lautet nach dieser Redefinition

$$\begin{aligned}\mathcal{S}[A, \Psi, F, e, \chi, S] = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \frac{T}{4} \int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1} \cdot \\ \cdot (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}}) \cdot H_{\underline{m}\,\underline{n}}(\nabla_a X^{\underline{p}}) \quad .\end{aligned} \tag{5.81}$$

Und für die Funktion $f$ ergibt sich nach der Redefinition

$$f(B) := g^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A^{\underline{n}} \cdot H_{\underline{m}\,\underline{n}}(e_a{}^p \partial_p A^{\underline{p}}) \quad . \tag{5.82}$$

Auch eine kosmologische Konstante in $f$ läßt sich erreichen, wenn $H_{\underline{m}\,\underline{n}}(\nabla_a X^{\underline{m}})$ Materie-Terme im Nenner enthält, die sich nach Nullsetzen aller Fermionen mit den Vorfaktoren in (5.82) wegkürzen. In der supersymmetrischen Form (5.81) kürzen sich diese Terme nicht weg, da die Vorfaktoren Spinorableitungen besitzen, während die Materie-Terme im Nenner nur Vektorableitungen enthalten.

Es gibt zu jeder Funktion $f$ eine Vielzahl von Möglichkeiten, die Funktion $H_{\underline{m}\,\underline{n}}$ zu wählen und dann mittels (5.81) eine Supersymmetrisierung der generischen Wirkung (5.51) zu erhalten. Zusätzlich können die freien Funktionen in $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ beliebig gewählt werden, z.B. um besondere Symmetrien der Wirkung zu erreichen.

Alle so erhaltenen Modelle erfüllen die Definition der Spinning Membrane aus Abschnitt 4.1.2.

### 5.4.3 Komponentenfelder

Für die gleich folgenden Anwendungen dieses Verfahrens wird nun die generische Spinning Membrane-Wirkung (5.81) allgemein in Komponentenfelder zerlegt. Zur Konkretisierung auf eines der Modelle muß dann die Funktion $H_{\underline{m}\,\underline{n}}$ und ihre Ableitungen angegeben werden.

Hierfür sind einige abkürzende Schreibweisen nützlich:

$$
\begin{aligned}
Y_{a\underline{m}} :=& (\nabla_a X_{\underline{m}})| = e_a{}^m \partial_m A_{\underline{m}} + \chi_a{}^\mu \Psi_{\mu\underline{m}} \\
Y_{\alpha a\underline{m}} :=& (\nabla_\alpha \nabla_a X_{\underline{m}})| \\
=& - i\chi_a{}^\mu \gamma_{\mu\alpha}{}^b Y_{b\underline{m}} + (\tilde{\varphi}_{a\alpha}{}^\mu - \frac{1}{2} S \gamma_{a\alpha}{}^\mu) \Psi_{\mu\underline{m}} + e_a{}^m \partial_m \Psi_{\alpha\underline{m}} - \frac{1}{2}\chi_{a\alpha} F_{\underline{m}} \\
Z_{a\underline{m}} :=& (\nabla^\alpha \nabla_\alpha \nabla_a X_{\underline{m}})| = -2i\chi_a{}^\beta \gamma^b{}_\beta{}^\gamma Y_{\gamma b\underline{m}} + e_a{}^m \partial_m F_{\underline{m}} + \\
&+ \Big( -5i\chi_a{}^\mu S - i\varepsilon_{abc}\gamma^{c\mu\kappa}\chi^c{}_\kappa S - i\varepsilon^{bcd}\gamma_a{}^{\mu\nu}\gamma_{b\nu}{}^\alpha e_d{}^m (\mathscr{D}_c \chi_{m\alpha}) - R_a{}^\alpha{}_\alpha{}^\mu| \Big) \Psi_{\mu\underline{m}} .
\end{aligned}
\tag{5.83}
$$

Die betrachtete Wirkung lautet (ohne die Funktionale $\mathscr{Z}_1$ und $\mathscr{Z}_2$)

$$
\mathcal{S} = \frac{T}{4} \int d^3\sigma d^2\Theta \, E^{-1} \, (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}}) \cdot H_{\underline{m}\,\underline{n}}(\nabla_a X^{\underline{p}}) \quad . \tag{5.84}
$$

Mit Hilfe von (3.47) ergibt sich dann mit einiger Arbeit

$$
\mathcal{S} = \int d^3x \, e^{-1} \cdot \Big( \mathcal{L}^{(2)} + 2i\chi_a{}^\mu \gamma^a{}_\mu{}^\nu \cdot \mathcal{L}^{(1)}_\nu + \big( 2\varepsilon^{abc}\chi_a{}^\mu \gamma_{b\mu}{}^\nu \chi_{c\nu} + 4iS \big) \cdot \mathcal{L}^{(0)} \Big) \quad . \tag{5.85}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0)} :=& \mathcal{L}| = \frac{T}{4} \Psi^\alpha{}_{\underline{m}} \Psi_\alpha{}^{\underline{n}} \cdot H_{\underline{n}}{}^{\underline{m}}(Y_a{}^{\underline{p}}) \\
\mathcal{L}^{(1)}_\alpha :=& \nabla_\alpha \mathcal{L}| = -\frac{T}{4} \left( 2i\gamma^a{}_\alpha{}^\beta \Psi_{\beta\underline{m}} Y_a{}^{\underline{n}} + \Psi_{\alpha\underline{m}} F^{\underline{n}} \right) \cdot H_{\underline{n}}{}^{\underline{m}}(Y_b{}^{\underline{p}}) + \\
&+ \frac{T}{2} \Psi^\beta{}_{\underline{m}} \Psi_\beta{}^{\underline{n}} \cdot \frac{\partial H_{\underline{n}}{}^{\underline{m}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}}(Y_b{}^{\underline{r}}) \cdot Y^a{}_{\underline{p}} Y_{\alpha a}{}^{\underline{q}} \\
\mathcal{L}^{(2)} :=& \nabla^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{L}| \\
&= T \left( -Y^a{}_{\underline{m}} Y_a{}^{\underline{n}} - \frac{1}{4} F_{\underline{m}} F^{\underline{n}} + i\Psi^\alpha{}_{\underline{m}} \gamma^a{}_\alpha{}^\beta Y_{\beta a}{}^{\underline{n}} + iS\Psi_{\underline{m}}{}^\alpha \Psi_\alpha{}^{\underline{n}} \right) \cdot \\
&\quad \cdot H_{\underline{n}}{}^{\underline{m}}(Y_b{}^{\underline{p}}) + \\
&- T \left( 2i\gamma^{a\alpha\beta} \Psi_{\beta\,\underline{m}} Y_a{}^{\underline{n}} + \Psi^\alpha{}_{\underline{m}} F^{\underline{n}} \right) \cdot \frac{\partial H_{\underline{n}}{}^{\underline{m}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}}(Y_b{}^{\underline{r}}) \cdot Y^c{}_{\underline{p}} Y_{\alpha c}{}^{\underline{q}} + \\
&+ \frac{T}{2} \Psi^\alpha{}_{\underline{m}} \Psi_\alpha{}^{\underline{n}} \cdot \frac{\partial H_{\underline{n}}{}^{\underline{m}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}}(Y_b{}^{\underline{r}}) \cdot \left( Y^c{}_{\underline{p}} Z_c{}^{\underline{q}} + Y^{\beta c}{}_{\underline{p}} Y_{\beta c}{}^{\underline{q}} \right) + \\
&+ T\Psi^\alpha{}_{\underline{m}} \Psi_\alpha{}^{\underline{n}} \cdot \frac{\partial^2 H_{\underline{n}}{}^{\underline{m}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}} \partial C_{\underline{r}}{}^{\underline{s}}}(Y_b{}^{\underline{s}}) \cdot Y^c{}_{\underline{p}} Y_c{}^{\underline{q}} Y^d{}_{\underline{r}} Y_d{}^{\underline{s}} \quad .
\end{aligned}
\tag{5.86}
$$

# Kapitel VI

# Anwendungen

In diesem Kapitel wird die Methode der generischen Spinning Membrane-Wirkung aus dem vorigen Kapitel auf diverse Modelle angewendet. Dies soll sowohl ihre Funktionsweise verdeutlichen, als auch durch die Konkretisierung auf die in der Literatur diskutierten Modelle ihren Nutzen deutlich machen.

Einige Überlegungen zur gezielten Konstruktion möglichst einfacher Spinning Membranes schließen das Kapitel ab.

## 6.1 Die Karlhede-Lindström-Brane

Das Spinning Membrane-Modell von Karlhede und Lindström (Kapitel 4.4) ist in der generischen Spinning Membrane enthalten.

Ihre bosonische Wirkung (4.33) läßt sich in der allgemeinen Form (5.51) schreiben (mit $p = 2$):

$$\mathcal{S}[A,g] := -T \int d^3\sigma\, \sqrt{-g}\, \cdot f(B) \qquad , \quad B_m{}^n := \partial_m A^{\underline{m}} \partial_q A_{\underline{m}}\, g^{qn}$$
$$f(B) := \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(B)\right)^{\frac{3}{2}} \tag{6.1}$$

Es gibt nun viele Möglichkeiten, eine Funktion $H_{\underline{m}\,\underline{n}}$ zu definieren, so daß $f$ die Form (5.82) annimmt, z.B.

$$H := \frac{C^{\,k}}{\mathrm{tr}(C^{k+1})} \cdot \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(C)\right)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad C_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} := g^{mn} \partial_m A_{\underline{m}}\, \partial_n A^{\underline{n}}$$
$$k \in \mathbb{N}_0 \quad . \tag{6.2}$$

Hierbei sind die Targetraum-Indizes unterdrückt.

Auch Linearkombinationen sind möglich, z.B.

$$H := \sum_i a_i \cdot \frac{C^{k_i}}{\mathrm{tr}(C^{k_i+1})} \cdot \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(C)\right)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad k_i \in \mathbb{N}_0 \quad , \quad \sum_i a_i = 1 \quad , \tag{6.3}$$

mit beliebigen Koeffizienten $a_i$, deren Summe nur aufgrund der Normierung $f(\mathbb{1}) = 1$ festliegt.

Jede dieser Möglichkeiten führt auf eine unterschiedliche Spinning Membrane. Die einfachste Wahl ist jedoch (6.2) mit $k = 0$, da sich in diesem Fall der Nenner wegkürzt, was das Modell wesentlich vereinfacht. Im folgenden wird daher zuerst dieser einfachste Fall untersucht. Er führt mit

$$H_{\underline{m}\,\underline{n}} := \frac{1}{3}\,\eta_{\underline{m}\,\underline{n}} \cdot \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(C)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.4}$$

und der allgemeinen Form (5.81) auf die Spinning Membrane-Wirkung von Karlhede und Lindström (4.38)

$$\mathcal{S}[A,\Psi,F,e,\chi,S] = \frac{T}{12\sqrt{3}} \int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1}\,(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}}) \cdot \Big((\nabla^a X^{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{n}})\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.5}$$

Setzt man alle Fermionen auf Null, ergibt sich

$$\mathcal{S}|| = -\frac{T}{3\sqrt{3}} \int d^3\sigma\,\sqrt{-g}\,\cdot\Big(g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}} + \frac{1}{4}F^{\underline{m}}F_{\underline{m}}\Big)\cdot\Big(g^{pq}\partial_p A^{\underline{n}}\partial_q A_{\underline{n}}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.6}$$

Die Bewegungsgleichung für $F$ ergibt $F^{\underline{m}} = 0$, was wieder eingesetzt auf die ursprüngliche bosonische Wirkung (6.1) führt.

Eine Variation nach der Hilfsmetrik $g_{mn}$ liefert dann die Bewegungsgleichung

$$B - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(B)\cdot\mathbb{1} = 0 \quad . \tag{6.7}$$

Diese Bewegungsgleichung ist, genau wie die Wirkung (6.1) invariant unter Weyl-Transformationen und unter allgemeinen Koordinatentransformationen. Jede Lösung von (6.7) erzeugt daher mit eben diesen Symmetrietransformationen eine ganze Lösungsklasse.

$$B = w \cdot S^{-1}\bar{B}\,S \quad . \tag{6.8}$$

Eine nähere Untersuchung zeigt, daß (6.7) nur eine Lösungsklasse besitzt. Sie enthält den Repräsentanten $\bar{B} = \mathbb{1}$, der bewirkt, daß die Hilfsmetrik gleich der induzierten Metrik ist. Da $S$ mit $\mathbb{1}$ kommutiert, fällt es in (6.8) weg, und die Lösungsklasse ist eindimensional.

$$B = w \cdot \mathbb{1} \quad . \tag{6.9}$$

Setzt man dies wieder in die Wirkung (6.1) ein , dann fällt aufgrund von Weyl-Symmetrie auch noch die Symmetrietransformation $w$ weg, und es ergibt sich die Dirac-Wirkung.

Für eine Darstellung in Komponentenfeldern werden zwei Ableitungen der Funktion $H$ benötig

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}} &= \frac{1}{18}\delta_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}\delta_{\underline{q}}{}^{\underline{p}} \cdot \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(C)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial^2 H_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}\,\partial C_{\underline{r}}{}^{\underline{s}}} &= -\frac{1}{108}\delta_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}\delta_{\underline{q}}{}^{\underline{p}}\delta_{\underline{s}}{}^{\underline{r}} \cdot \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(C)\right)^{-\frac{3}{2}} \quad .\end{aligned} \tag{6.10}$$

Mit Hilfe der Formeln und Abkürzungen aus Abschnitt 5.4.3 lautet die Karlhede-Lindström-Brane dann in Komponenten

$$\mathcal{S} = \int d^3x\, e^{-1} \cdot \left(\mathcal{L}^{(2)} + 2i\chi_a{}^{\mu}\gamma^a{}_{\mu}{}^{\nu} \cdot \mathcal{L}^{(1)}_{\nu} + \left(2\varepsilon^{abc}\chi_a{}^{\mu}\gamma_{b\mu}{}^{\nu}\chi_{c\nu} + 4iS\right) \cdot \mathcal{L}^{(0)}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0)} :=& \frac{T}{12}\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} \cdot \left(\frac{1}{3}Y^{a\underline{n}}Y_{a\underline{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \mathcal{L}^{(1)}_{\alpha} :=& -\frac{T}{12}\left(2i\gamma^a{}_{\alpha}{}^{\beta}\Psi_{\beta}{}^{\underline{m}}Y_{a\underline{m}} + \Psi_{\alpha}{}^{\underline{m}}F_{\underline{m}}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}Y^{b\underline{n}}Y_{b\underline{n}}\right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{T}{36}\Psi^{\beta\underline{m}}\Psi_{\beta\underline{m}} \cdot \left(\frac{1}{3}Y^{a\underline{n}}Y_{a\underline{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot Y^{b\underline{p}}\,Y_{\alpha b\underline{p}} \\ \mathcal{L}^{(2)} :=& \frac{T}{3}\left(-Y^{a\underline{m}}Y_{a\underline{m}} - \frac{1}{4}F^{\underline{m}}F_{\underline{m}} + i\Psi^{\alpha\underline{m}}\gamma^a{}_{\alpha}{}^{\beta}Y_{\beta a\underline{m}} + iS\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}}\right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{1}{3}Y^{b\underline{n}}Y_{b\underline{n}}\right)^{\frac{1}{2}} + \\ &- \frac{T}{18}\left(2i\gamma^{a\alpha\beta}\Psi_{\beta}{}^{\underline{m}}Y_{a\,\underline{m}} + \Psi^{\alpha\underline{m}}F_{\underline{m}}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}Y^{b\underline{n}}Y_{b\underline{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot Y^{c\underline{p}}\,Y_{\alpha c\underline{p}} + \\ &+ \frac{T}{36}\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} \cdot \left(\frac{1}{3}Y^{a\underline{n}}Y_{a\underline{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(Y^{c\underline{p}}Z_{c\underline{p}} + Y^{\beta c}{}_{\underline{p}}Y_{\beta c}{}^{\underline{q}}\right) + \\ &- \frac{T}{108}\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} \cdot \left(\frac{1}{3}Y^{a\underline{n}}Y_{a\underline{n}}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot Y^{c\underline{p}}Y_{c\underline{p}}Y^{d\underline{q}}Y_{d\underline{q}} \quad .\end{aligned} \tag{6.11}$$

## 6.2 Die Lindström-Roček-Brane

Auch die Super-Weyl-invariante Lindström-Roček-Brane (4.42) läßt sich hiermit erhalten. Für sie lautet die Funktion $H$ ebenso

$$H_{\underline{m}\,\underline{n}} := \frac{1}{3}\,\eta_{\underline{mn}} \cdot \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(C)\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad C_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} := g^{mn}\partial_m A_{\underline{m}}\,\partial_n A^{\underline{n}} \quad . \tag{6.12}$$

Um jedoch Super-Weyl-Symmetrie zu erreichen, wird das Funktional $\mathcal{Z}_2$ aus (5.79) mit der Wahl

$$\mathrm{h} := -\frac{2}{12\sqrt{3}} \cdot \mathrm{tr}(C)^{-\frac{1}{2}} \tag{6.13}$$

hinzugefügt.

Damit ergibt sich die manifest supersymmetrische Wirkung

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}[A,\Psi,F,e,\chi,S] = \\ &= \frac{T}{4\sqrt{3}} \int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1} \left( (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}}) \cdot \left((\nabla^a X^{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{n}})\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{2}{3}(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha{}^\beta X_{\underline{m}})(\nabla^\gamma X^{\underline{n}})(\nabla_{\beta\gamma} X_{\underline{n}}) \cdot \left((\nabla^a X^{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{n}})\right)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad . \end{aligned} \tag{6.14}$$

Dies ist die Lindström-Roček-Wirkung (4.42).

Da das Funktional $\mathcal{Z}_2$ nicht zur bosonischen Wirkung beiträgt, besitzt diese nach Nullsetzen aller Fermionen und Elimination der Hilfsfelder $F^{\underline{m}}$ dieselbe Form (6.1) wie die Karlhede-Lindström-Wirkung und ist ebenso klassisch äquivalent zur Dirac-Wirkung.

## 6.3 Supersymmetrisierung der Dolan-Tchrakian-Wirkung

Die Dolan-Tchrakian-Wirkung ist ebenfalls in der generischen Wirkung (5.51) enthalten. Sie kann mit dem angegebenen Verfahren im Rahmen der Poincaré-Supersymmetrie zu einer gültigen Spinning Membrane supersymmetrisiert werden. Dies steht im Gegensatz zur Castro-Brane (Kapitel 4.5), die hierfür Weyl-Kovariantisierung und Q-Supersymmetrie verwendet.

Es ergibt sich also mit dem generischen Verfahren ein neues, meines Wissens bisher unbekanntes Spinning Membrane-Modell, das im folgenden vorgeführt wird.

Die Dolan-Tchrakian-Wirkung lautet, in die allgemeinen Form (5.51) gebracht, (mit $p = 2$):

$$\mathcal{S}[A, g] := -T \int d^3\sigma \sqrt{-g} \cdot f(B) \quad , \quad B_m{}^n := \partial_m A^{\underline{m}} \partial_q A_{\underline{m}}\, g^{qn}$$

$$f(B) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}_4 + \cdot \mathcal{L}_2\Big) \quad , \quad \mathcal{L}_{2n} := \begin{pmatrix} 3 \\ n \end{pmatrix}^{-1} \cdot B_{[m_1}{}^{[m_1} \dots B_{m_n]}{}^{m_n]} \tag{6.15}$$

oder ausgeschrieben

$$\Rightarrow f(B) = \frac{1}{12}\Big(\mathrm{tr}(B)^2 - \mathrm{tr}(B^2)\Big) + \frac{1}{6}\,\mathrm{tr}(B) \quad . \tag{6.16}$$

Für die Funktion $H_{\underline{m}\,\underline{n}}$ gibt es nun wieder viele Möglichkeiten, z.B.

$$H := \frac{C^i}{\mathrm{tr}(C^{i+1})} \cdot \frac{1}{12}\,\mathrm{tr}(C)^2 - \frac{C^j}{\mathrm{tr}(C^{j+1})} \cdot \frac{1}{12}\,\mathrm{tr}(C^2) + \frac{C^k}{\mathrm{tr}(C^{k+1})} \cdot \frac{1}{6}\,\mathrm{tr}(C)$$

$$C_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} := g^{mn} \partial_m A_{\underline{m}}\, \partial_n A^{\underline{n}} \quad , \quad i, j, k \in \mathbb{N}_0 \tag{6.17}$$

Für jeden einzelnen Summanden sind natürlich auch wieder Linearkombinationen möglich, wie in (6.3).

Alle diese Möglichkeiten führen auf unterschiedliche Spinning Membrane-Modelle. Die einfachste Wahl ist hier $i = 0, j = 1, k = 0$, da sich in diesem Fall alle Nenner wegkürzen. Im folgenden wird daher nur dieser einfachste Fall untersucht. Er führt mit

$$H_{\underline{m}\,\underline{n}} := \frac{1}{12}\Big(\eta_{\underline{m}\,\underline{n}} \cdot \mathrm{tr}(C) - C_{\underline{m}\,\underline{n}}\Big) + \frac{1}{6}\eta_{\underline{m}\,\underline{n}} \tag{6.18}$$

auf die Spinning Membrane-Wirkung

$$\begin{aligned}\mathcal{S}[A, \Psi, F, e, \chi, S] = \frac{T}{24} \int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1} \cdot \Bigg(&\frac{1}{2}(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}})(\nabla^a X^{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{n}}) + \\ &-\frac{1}{2}(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}})(\nabla^a X_{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{m}}) + (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}})\Bigg) \quad .\end{aligned} \tag{6.19}$$

Setzt man alle Fermionen auf Null, ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{S}|| = -\frac{T}{6} \int d^3\sigma \sqrt{-g} \cdot \Bigg(&\Big(g^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} + \frac{1}{4} F^{\underline{m}} F_{\underline{m}}\Big) \cdot \Big(\frac{1}{2} g^{pq} \partial_p A^{\underline{n}} \partial_q A_{\underline{n}} + 1\Big) + \\ &-\frac{1}{2}\Big(g^{mn} \partial_m A_{\underline{m}} \partial_n A^{\underline{n}} + \frac{1}{4} F_{\underline{m}} F^{\underline{n}}\Big) \cdot g^{pq} \partial_p A_{\underline{n}} \partial_q A^{\underline{m}}\Bigg) \quad .\end{aligned} \tag{6.20}$$

Die Bewegungsgleichung für $F$ lautet

$$F^{\underline{m}} \cdot \Big(\frac{1}{2} g^{pq} \partial_p A^{\underline{n}} \partial_q A_{\underline{n}} + 1\Big) - \frac{1}{2} F^{\underline{n}} \underbrace{g^{pq} \partial_p A_{\underline{n}} \partial_q A^{\underline{m}}}_{=:P} = 0 \quad . \tag{6.21}$$

Die geklammerte Matrix $P$ ist nicht invertierbar, da es sich (bis auf Normierung) um einen Projektor handelt, der Anteile parallel zur Brane herausprojiziert

$$F_{\underline{m}} = F^{\|}{}_{\underline{m}} + F^{\perp}{}_{\underline{m}} \quad , \quad P_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} \cdot F^{\|}{}_{\underline{n}} = \text{const.} \cdot F^{\|}{}_{\underline{m}} \quad , \quad P_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} \cdot F^{\perp}{}_{\underline{n}} = 0 \quad . \tag{6.22}$$

Die Bewegungsgleichung (6.21) lautet daher unterschiedlich für die Anteile senkrecht und parallel zur Brane

$$\begin{aligned} F^{\|}{}_{\underline{m}} \cdot \Big(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(P) + 1 - \frac{1}{2}\,\text{const.}\Big) &= 0 \\ F^{\perp}{}_{\underline{m}} \cdot \Big(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(P) + 1\Big) &= 0 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Im allgemeinen folgt daraus $F^{\underline{m}} = 0$ und die entsprechenden Terme in der Wirkung (6.20) verschwinden. Sollte einer der Spezialfälle eintreten, in denen eine andere Lösung möglich ist, dann fallen beim Wiedereinsetzen in die Wirkung aufgrund von (6.21) dieselben Terme ebenso weg.

Die Wirkung erhält damit wieder die Form (6.15),(6.16) der Dolan-Tchrakian-Wirkung. Eine Variation nach der Hilfsmetrik $g_{mn}$ führt bei ihr auf

$$B^2 - \Big(1 + \mathrm{tr}(B)\Big) \cdot B + \Big(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(B) + \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(B)^2 - \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(B^2)\Big) \cdot \mathbb{1} = 0 \quad . \tag{6.24}$$

Diese Bewegungsgleichung ist, genau wie die Wirkung (6.15), invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen. Jede Lösung von (6.24) erzeugt daher eine ganze Lösungsklasse

$$B = S^{-1} \bar{B}\, S \quad . \tag{6.25}$$

Diesmal existieren zwei Lösungsklassen mit den Repräsentanten

$$\bar{B} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad . \tag{6.26}$$

Die gewünschte Lösungsklasse mit dem Repräsentanten $\bar{B} = \mathbb{1}$ ist darin enthalten. Sie ist im Gegensatz zu der anderen Lösungsklasse nulldimensional, da $S$ mit $\mathbb{1}$ kommutiert.

Beschränkt man sich bei der Variation der Wirkung auf diese Lösungsklasse, dann ist die Hilfsmetrik gleich der induzierten Metrik und es ergibt sich nach Einsetzen in (6.15) wieder die Dirac-Wirkung.

Für eine Darstellung der Wirkung in Komponentenfeldern werden zwei Ableitungen der Funktion $H$ aus (6.18) benötig

$$\frac{\partial H_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}} = \frac{1}{6}\delta_{[\underline{m}}{}^{\underline{n}}\delta_{\underline{q}]}{}^{\underline{p}} \qquad , \qquad \frac{\partial^2 H_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}\partial C_{\underline{r}}{}^{\underline{s}}} = 0 \quad . \tag{6.27}$$

Die zweite Ableitung ist in diesem einfachen Modell identisch Null, was die Komponentendarstellung wesentlich vereinfacht. Mit Hilfe der Formeln und Abkürzungen in Abschnitt 5.4.3 ergibt sich dann für sie

$$\mathcal{S} = \int d^3x\, e^{-1} \cdot \left(\mathcal{L}^{(2)} + 2i\chi_a{}^\mu\gamma^a{}_\mu{}^\nu \cdot \mathcal{L}^{(1)}_\nu + \left(2\varepsilon^{abc}\chi_a{}^\mu\gamma_{b\mu}{}^\nu\chi_{c\nu} + 4iS\right)\cdot\mathcal{L}^{(0)}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0)} :=& \frac{T}{24}\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\,[\underline{m}}Y^a{}_{\underline{n}]}Y_a{}^{\underline{n}} + \frac{T}{24}\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}}\\
\mathcal{L}^{(1)}_\alpha :=& \frac{T}{24}\left(-2i\gamma^a{}_\alpha{}^\beta Y_a{}^{\underline{m}}\Psi_{\beta\,[\underline{m}} - F^{\underline{m}}\Psi_{\alpha\,[\underline{m}}\right)\cdot Y^b{}_{\underline{n}]}Y_b{}^{\underline{n}} +\\
&+ \frac{T}{24}\left(-2i\gamma^a{}_\alpha{}^\beta Y_a{}^{\underline{m}}\Psi_{\beta\underline{m}} - F^{\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}}\right) + \frac{T}{12}\Psi^{\beta\underline{m}}\Psi_{\beta\,[\underline{m}}Y^a{}_{\underline{n}]}Y_{\alpha a}{}^{\underline{n}}\\
\mathcal{L}^{(2)} :=& \frac{T}{6}\left(-Y^{a\underline{m}}Y_{a\,[\underline{m}} - \frac{1}{4}F^{\underline{m}}F_{[\underline{m}} - iY^{\beta a\underline{m}}\gamma_{a\beta}{}^\alpha\Psi_{\alpha\,[\underline{m}} + iS\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\,[\underline{m}}\right)\cdot\\
&\cdot Y^b{}_{\underline{n}]}Y_b{}^{\underline{n}} + \frac{T}{6}\left(-Y^{a\underline{m}}Y_{a\underline{m}} - \frac{1}{4}F^{\underline{m}}F_{\underline{m}} - iY^{\beta a\underline{m}}\gamma_{a\beta}{}^\alpha\Psi_{\alpha\underline{m}} + iS\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}}\right)\\
&- \frac{T}{6}\left(2i\gamma^{a\alpha\beta}\Psi_\beta{}^{\underline{m}}Y_{a\,[\underline{m}} + \Psi^{\alpha\,\underline{m}}F_{[\underline{m}]}\right)Y^c{}_{\underline{n}]}Y_{\alpha c}{}^{\underline{n}} +\\
&+ \frac{T}{12}\Psi_\alpha{}^{\underline{m}}\Psi^\alpha{}_{[\underline{m}}\cdot\left(Y^c{}_{\underline{n}]}Z_c{}^{\underline{n}} + Y^{\beta c}{}_{\underline{n}]}Y_{\beta c}{}^{\underline{n}}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{6.28}$$

## 6.4 Supersymmetrisierung der Howe-Tucker-Wirkung

Auch die Howe-Tucker-Wirkung (5.2) läßt sich mit dem generischen Verfahren supersymmetrisieren. Ihre kosmologische Konstante bewirkt nur, daß sich nun Materie-Terme im Nenner nicht vermeiden lassen. Nichtsdestotrotz handelt es sich um ein gültiges Spinning Membrane-Modell nach der Definition des Abschnittes 4.1.2.

Die bosonische Wirkung der Howe-Tucker-Wirkung (5.2), in die allgemeine Form (5.51) gebracht, lautet (mit $p=2$):

$$\mathcal{S}[A,g] := -T\int d^3\sigma\,\sqrt{-g}\,\cdot f(B) \qquad , \qquad B_m{}^n := \partial_m A^{\underline{m}}\partial_q A_{\underline{m}}\, g^{qn}$$
$$f(B) := \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(B) - \frac{1}{2} \tag{6.29}$$

Für die Funktion $H_{\underline{m}\,\underline{n}}$ gibt es nun wieder viele Möglichkeiten, z.B.

$$H := \frac{C^i}{\mathrm{tr}(C^{i+1})}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(C) - \frac{C^j}{\mathrm{tr}(C^{j+1})}\cdot\frac{1}{2}$$

$$C_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} := g^{mn}\partial_m A_{\underline{m}}\,\partial_n A^{\underline{n}} \quad , \quad i,j\in\mathbb{N}_0 \quad , \tag{6.30}$$

zuzüglich Linearkombinationen.

Jede dieser Möglichkeiten führt auf ein unterschiedliches Spinning Membrane-Modell. Für $i=0$ kürzt sich beim ersten Term der Nenner weg. Für den zweiten Term, der aus der kosmologischen Konstanten entstand, ist ein Nenner nicht zu vermeiden. Die einfachste Form erhält er dennoch mit $j=0$.

Dieses einfachste Modell wird im folgenden betrachtet. Es führt auf

$$H_{\underline{n}\,\underline{m}} := \frac{1}{2}\eta_{\underline{m}\,\underline{n}}\cdot\Big(1-\mathrm{tr}(C)^{-1}\Big) \quad , \tag{6.31}$$

und besitzt die Spinning Membrane-Wirkung

$$\mathcal{S}[A,\Psi,F,e,\chi,S] = \frac{T}{8}\int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1}\,(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}})\cdot\Big(1-\big((\nabla^a X^{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{n}})\big)^{-1}\Big) \quad . \tag{6.32}$$

Setzt man alle Fermionen auf Null, ergibt sich

$$\mathcal{S}|| = -\frac{T}{2}\int d^3\sigma\,\sqrt{-g}\cdot\Big(g^{mn}\partial_m A^{\underline{m}}\partial_n A_{\underline{m}}+\frac{1}{4}F^{\underline{m}}F_{\underline{m}}\Big)\cdot\bigg(1-\Big(g^{pq}\partial_p A^{\underline{n}}\partial_q A_{\underline{n}}\Big)^{-1}\bigg) . \tag{6.33}$$

Die Bewegungsgleichung für das Hilfsfeld $F$ führt anschließend auf $F=0$. Wird hiermit $F$ in (6.33) eliminiert, ergibt sich wieder die ursprüngliche bosonische Wirkung (6.29).

Eine Variation nach der Hilfsmetrik $g_{mn}$ liefert dann die Bewegungsgleichung

$$B+\frac{1}{2}\cdot\mathbb{1}-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(B)\cdot\mathbb{1} = 0 \quad . \tag{6.34}$$

Diese Bewegungsgleichung ist, genau wie die Wirkung (6.29), invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen. Jede Lösung von (6.34) erzeugt daher mit eben diesen Symmetrietransformationen eine ganze Lösungsklasse.

$$B = S^{-1}\bar{B}\,S \quad . \tag{6.35}$$

Eine nähere Betrachtung der Bewegungsgleichung (6.34) zeigt jedoch, daß nur eine Lösungsklasse existiert, mit dem Repräsentanten $\bar{B} = \mathbb{1}$. Dieser ist auch das einzige Element der Lösungsklasse, da $S$ mit $\mathbb{1}$ kommutiert. Die Hilfsmetrik ist daher on-shell wieder gleich der induzierten Metrik.

Eliminiert man hiermit die Hilfsmetrik in der Wirkung (6.29), dann ergibt sich die Dirac-Wirkung.

Für eine Darstellung in Komponentenfeldern werden zwei Ableitungen der Funktion $H$ benötig

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}} &= \frac{1}{2}\delta_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}\,\delta_{\underline{p}}{}^{\underline{q}} \cdot \mathrm{tr}(C)^{-2} \\ \frac{\partial^2 H_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}}{\partial C_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}\,\partial C_{\underline{r}}{}^{\underline{s}}} &= -\delta_{\underline{m}}{}^{\underline{n}}\,\delta_{\underline{p}}{}^{\underline{q}}\,\delta_{\underline{r}}{}^{\underline{s}} \cdot \mathrm{tr}(C)^{-3} \quad . \end{aligned} \tag{6.36}$$

Mit Hilfe der Formeln und Abkürzungen aus Abschnitt 5.4.3 lautet diese mögliche Supersymmetrisierung (6.32) der Howe-Tucker-Wirkung dann in Komponenten

$$\mathcal{S} = \int d^3x\, e^{-1} \cdot \Big(\mathcal{L}^{(2)} + 2i\chi_a{}^{\mu}\gamma^a{}_{\mu}{}^{\nu} \cdot \mathcal{L}^{(1)}_{\nu} + \big(2\varepsilon^{abc}\chi_a{}^{\mu}\gamma_{b\mu}{}^{\nu}\chi_{c\nu} + 4iS\big) \cdot \mathcal{L}^{(0)}\Big)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} :=& \frac{T}{8}\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} \cdot \big(1 - (Y^{a\underline{n}}Y_{a\underline{n}})^{-1}\big) \\ \mathcal{L}^{(1)}_{\alpha} :=& -\frac{T}{8}\big(2i\gamma^a{}_{\alpha}{}^{\beta}\Psi_{\beta}{}^{\underline{m}}Y_{a\underline{m}} + \Psi_{\alpha}{}^{\underline{m}}F_{\underline{m}}\big) \cdot \big(1 - (Y^{b\underline{n}}Y_{b\underline{n}})^{-1}\big) + \\ & + \frac{T}{4}\Psi^{\beta\underline{m}}\Psi_{\beta\underline{m}} \cdot Y^{a\underline{n}}Y_{\alpha a\underline{n}} \cdot (Y^{b\underline{p}}Y_{b\underline{p}})^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} :=& \frac{T}{2}\left(-Y^{a\underline{m}}Y_{a\underline{m}} - \frac{1}{4}F^{\underline{m}}F_{\underline{m}} + i\Psi^{\alpha\underline{m}}\gamma^a{}_{\alpha}{}^{\beta}Y_{\beta a\underline{m}} + iS\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}}\right) \cdot \\ & \cdot \big(1 - (Y^{b\underline{n}}Y_{b\underline{n}})^{-1}\big) + \\ & - \frac{T}{2}\big(2i\gamma^{a\alpha\beta}\Psi_{\beta}{}^{\underline{m}}Y_{a\,\underline{m}} + \Psi^{\alpha\,\underline{m}}F_{\underline{m}}\big) \cdot Y^{b\underline{n}}Y_{\alpha b\underline{n}} \cdot (Y^{c\underline{p}}Y_{c\underline{p}})^{-2} + \\ & + \frac{T}{4}\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} \cdot \big(Y^{b\underline{n}}Z_{b\underline{n}} + Y^{\beta b\underline{n}}Y_{\beta b\underline{n}}\big) \cdot (Y^{c\underline{p}}Y_{c\underline{p}})^{-2} + \\ & - T\Psi^{\alpha\underline{m}}\Psi_{\alpha\underline{m}} \cdot (Y^{b\underline{n}}Y_{b\underline{n}})^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{6.37}$$

## 6.5 Supersymmetrisierung der Dirac-Wirkung

Sogar die Dirac-Wirkung selbst (5.1) ist im Rahmen des generischen Modells supersymmetrisierbar. Sie besitzt dann allerdings sowohl eine Wurzel als auch Materie-Terme im Nenner.

Die Dirac-Wirkung (5.1), in die allgemeine Form (5.51) gebracht, lautet (mit $p = 2$):

$$\mathcal{S}[A,g] := -T \int d^3\sigma \sqrt{-g} \cdot f(B) \qquad , \quad B_m{}^n := \partial_m A^{\underline{m}} \partial_q A_{\underline{m}}\, g^{qn}$$
$$f(B) := \sqrt{\det(B)} = \left(B_{[m}{}^m B_n{}^n B_{p]}{}^p\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{6.38}$$

Für die Funktion $H_{\underline{m}\,\underline{n}}$ aus (5.82) gibt es wieder viele Möglichkeiten, so z.B.

$$H_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} = \delta_{[\underline{m}}{}^{\underline{n}} C_{\underline{p}}{}^{\underline{p}} C_{\underline{q}]}{}^{\underline{q}} \cdot \left(C_{[\underline{r}}{}^{\underline{r}} C_{\underline{s}}{}^{\underline{s}} C_{\underline{t}]}{}^{\underline{t}}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad C_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} := g^{mn} \partial_m A_{\underline{m}}\, \partial_n A^{\underline{n}} \quad , \tag{6.39}$$

oder

$$H := \frac{C^k}{\mathrm{tr}(C^{k+1})} \cdot \left(C_{[\underline{m}}{}^{\underline{m}} C_{\underline{n}}{}^{\underline{n}} C_{\underline{p}]}{}^{\underline{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad , \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad . \tag{6.40}$$

Jede dieser Möglichkeiten führt auf ein unterschiedliches Spinning Membrane-Modell. Die untere Variante mit $k = 0$ scheint mir die einfachste zu sein. Sie wird im folgenden betrachtet

$$H_{\underline{m}\,\underline{n}} := \eta_{\underline{m}\,\underline{n}} \cdot \mathrm{tr}(C)^{-1} \cdot \left(C_{[\underline{m}}{}^{\underline{m}} C_{\underline{n}}{}^{\underline{n}} C_{\underline{p}]}{}^{\underline{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{6.41}$$

Diese Wahl führt schließlich auf die Spinning Membrane-Wirkung

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}[A,\Psi,F,e,\chi,S] = \\ &\quad \frac{T}{4} \int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1} (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}}) \cdot \left((\nabla^a X^{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{n}})\right)^{-1} \cdot \\ &\qquad \cdot \left((\nabla^b X_{[\underline{p}})(\nabla^c X_{\underline{q}})(\nabla^d X_{\underline{r}]})(\nabla_b X^{\underline{p}})(\nabla_c X^{\underline{q}})(\nabla_d X^{\underline{r}})\right)^{\frac{1}{2}} \quad .\end{aligned} \tag{6.42}$$

Setzt man hierin alle Fermionen auf Null, ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{S}|| = -T \int d^3\sigma \sqrt{-g} \cdot \left(g^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} + \frac{1}{4} F^{\underline{m}} F_{\underline{m}}\right) \cdot \left(g^{pq} \partial_p A^{\underline{n}} \partial_q A_{\underline{n}}\right)^{-1} \cdot \\ \cdot \left(\partial_{[r} A^{\underline{p}} \partial_s A^{\underline{q}}) \partial_{t]} A^{\underline{r}} \cdot g^{ru} g^{sv} g^{tw} \cdot \partial_u A_{\underline{p}} \partial_v A_{\underline{q}} \partial_q A_{\underline{r}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad .\end{aligned} \tag{6.43}$$

Der letzte Faktor ist das Produkt zweier Determinanten

$$\mathcal{S}|| = -T \int d^3\sigma \, \sqrt{-g} \cdot \Big( g^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} + \frac{1}{4} F^{\underline{m}} F_{\underline{m}} \Big) \cdot \Big( g^{pq} \partial_p A^{\underline{n}} \partial_q A_{\underline{n}} \Big)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \Big( -\det\Big( \partial_r A^{\underline{p}} \partial_s A_{\underline{p}} \Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big( -\det\Big( g^{tu} \Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{6.44}$$

Die beiden Determinanten der Hilfsmetrik kürzen sich weg, und es ergibt sich

$$\mathcal{S}|| = -T \int d^3\sigma \, \Big( g^{mn} \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} + \frac{1}{4} F^{\underline{m}} F_{\underline{m}} \Big) \cdot \Big( g^{pq} \partial_p A^{\underline{n}} \partial_q A_{\underline{n}} \Big)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \sqrt{-\det\Big( \partial_r A^{\underline{p}} \partial_s A_{\underline{p}} \Big)} \quad . \tag{6.45}$$

Die Bewegungsgleichung für das Hilfsfeld $F$ führt wieder auf $F = 0$. Wird hiermit $F$ eliminiert, ergibt sich die ursprüngliche Dirac-Wirkung (5.1)

$$\mathcal{S} = -T \int d^3\sigma \, \sqrt{-\det\Big( \partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}} \Big)} \quad . \tag{6.46}$$

Man beachte, daß die Hilfsmetrik $g^{mn}$ völlig herausgefallen ist und keine Rolle mehr spielt. Sie muß nicht erst eliminiert werden, um die Dirac-Wirkung zu erhalten.

## 6.6 Polynomiale Wirkungen

Zum Abschluß wird noch kurz untersucht, welches die einfachsten, polynomialen Wirkungen sind, die sich im Rahmen des besprochenen Schemas supersymmetrisieren lassen. Es wird sich dabei eine einparametrige Schar von Wirkungen ergeben, in der die Supersymmetrisierung der Dolan-Tchrakian-Wirkung (Abschnitt 6.3) enthalten ist.

Wie die Diskussion bei der Supersymmetrisierung der Howe-Tucker-Wirkung (Abschnitt 6.4) gezeigt hat, führt eine kosmologische Konstante zwangsläufig zu Materietermen im Nenner, und die Wirkung wird nichtpolynomial. Das einfachste Polynom beginnt daher linear

$$f(B) := a \cdot \mathrm{tr}(B) \quad , \tag{6.47}$$

mit einem noch zu bestimmenden Koeffizienten $a$. Die Bedingungen (5.51)

$$f(\mathbb{1}) = 1 \quad , \qquad \frac{\partial f(B)}{\partial B}\bigg|_{B=1} = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1} \tag{6.48}$$

an die Funktion $f$ führen auf

$$\Longrightarrow \quad a=\frac{1}{2} \quad , \quad p=1 \quad . \tag{6.49}$$

Wie man an der Einschränkung für $p$ sieht, handelt sich nur um eine Möglichkeit für den String, und zwar um die Polyakov-Wirkung. Für eine Membrane-Wirkung muß man daher Polynome betrachten, die mindestens quadratisch in den Matrizen $B$ sind

$$f(B) := a \cdot \mathrm{tr}(B) + b \cdot \mathrm{tr}(B^2) + c \cdot \mathrm{tr}(B)^2 \quad , \tag{6.50}$$

mit Koeffizienten $a$,$b$ und $c$. Hier führen die Bedingungen an $f$ auf eine einparametrige Lösungsschar

$$\Longrightarrow \quad a=\frac{3-p}{2(p+1)} \quad , \quad b=\frac{p-1}{2(p+1)}-(p+1)\cdot c \tag{6.51}$$

und auf die bosonische Wirkung

$$f(B) := \frac{3-p}{2(p+1)} \cdot \mathrm{tr}(B) + \frac{p-1}{2(p+1)} \cdot \mathrm{tr}(B^2) + \Big(\mathrm{tr}(B^2) - (p+1)\cdot \mathrm{tr}(B)^2\Big) \cdot c \quad . \tag{6.52}$$

Für die Membrane (p=2) ergibt sich

$$f(B) := \frac{1}{6} \cdot \mathrm{tr}(B) + \frac{1}{6} \cdot \mathrm{tr}(B^2) + \Big(\mathrm{tr}(B)^2 - 3 \cdot \mathrm{tr}(B^2)\Big) \cdot c \quad . \tag{6.53}$$

Drei Spezialfälle geben der Wirkung eine besonders einfache Form: Für $c=0$ ist kein Term proportional zu $\mathrm{tr}(B)^2$ vorhanden, für $c=1/18$ kein Term proportional zu $\mathrm{tr}(B^2)$ und für $c=1/12$ sind sie gleich gewichtet.

Die jeweils einfachste Möglichkeit, diese Spezialfälle zu supersymmetrisieren führt auf die Spinning Membrane-Wirkungen

$$\begin{aligned}
c=0: \quad & \mathcal{S} = \frac{T}{24}\int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1}\Big((\nabla^\alpha X^{\underline{m}} \nabla_\alpha X_{\underline{m}}) + (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}})(\nabla^a X_{\underline{m}})(\nabla_a X_{\underline{n}})\Big)\\
c=\frac{1}{18}: \quad & \mathcal{S} = \frac{T}{24}\int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1}\,(\nabla^\alpha X^{\underline{m}} \nabla_\alpha X_{\underline{m}}) \cdot \left(1+\frac{1}{3}(\nabla^a X^{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{n}})\right)\\
c=\frac{1}{12}: \quad & \mathcal{S} = \frac{T}{24}\int d^3\sigma d^2\Theta\, E^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}})(\nabla^a X^{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{n}}) + \right.\\
& \left. -\frac{1}{2}(\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}})(\nabla^a X_{\underline{n}})(\nabla_a X_{\underline{m}}) + (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X_{\underline{m}})\right) \quad .
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Die letzte ist die Supersymmetrisierung der Dolan-Tchrakian-Wirkung (Abschnitt 6.3), die anderen beiden Wirkungen sind meines Wissens trotz ihrer Einfachheit in der Literatur bisher nicht bekannt.

# Kapitel VII

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Spinning Membranes in ihren unterschiedlichsten Formen untersucht. Hierfür werden sowohl bekannte Modelle diskutiert, als auch neue, in der Literatur bisher nicht bekannte Spinning Membranes vorgestellt.

Die Definition der Spinning $p$-Brane geht aus von der rein bosonischen Dirac-Brane, einem frühen Modell für das Elektron. Die Wirkung besteht aus dem $p+1$-dimensionalen Weltvolumen der Brane. Von allen Spinning $p$-Brane-Modellen wird verlangt, daß sie nach Nullsetzen aller Fermionen und Elimination der Hilfsfelder die Dirac-Wirkung reproduzieren.

Der historisch erste Kandidat für eine Spinning Membrane von Howe und Tucker ist invariant unter on-shell-Supersymmetrietransformationen, d.h. es werden hierfür Zwangsbedingungen benötigt, die nicht dynamisch aus der Wirkung entstehen. Wie jedoch Bergshoeff, Sezgin und Townsend in ihrem no-go-Theorem gezeigt haben, ist es unmöglich, dies durch Addition reiner Supergravitationsterme zu erreichen. Das Modell wurde daher verworfen.

Die erste wirkliche Spinning Membrane von Karlhede und Lindström basiert auf einer hierzu klassisch äquivalenten Wirkung. Sie kommt ohne kosmologische Konstante aus, die bei der Howe-Tucker-Wirkung die Ursache für die Schwierigkeiten ist, und umgeht auf diese Weise das no-go-Theorem. Wie Lindström und Roček zeigten, ist es obendrein möglich, mit einer anderen Supersymmetrisierung derselben bosonische Wirkung zusätzlich Super-Weyl-Symmetrie zu erreichen.

Ein Vorschlag von Castro für ein Spinning Membrane-Modell basiert auf der bosonischen Dolan-Tchrakian-Wirkung. Es verwendet Weyl-Kovariantisierung und Q-Supersymmetrie. Die Einführung eines Weyl-kovarianten Parameters mit Feldcharakter, nach dem aber nicht varriert werden darf, kann jedoch kritisiert werden.

Da die Karlhede-Lindström-Brane und die Lindström-Roček-Brane beide aus einer klassisch äquivalenten, bosonischen Wirkung erhalten wurden, wird anschließend untersucht, welche Möglichkeiten sich bieten, weitere klassisch äquivalente Wirkungen zu konstruieren, die als Ausgangspunkt für eine Supersymmetrisierung dienen können. Hierfür werden drei Verfahren diskutiert, klassisch äquivalente Wirkungen zu erhalten:

Das erste Verfahren verwendet Lagrange-Multiplikatoren, um gewünschte Eigenschaften in die Wirkung zu integrieren. Die Howe-Tucker-Wirkung und die Karlhede-Lindström-Wirkung lassen sich auf diese Weise gezielt ableiten. Eine neue Wirkung wurde hiermit jedoch nicht gefunden.

Das zweite Vefahren geht einen Umweg über den Hamilton-Formalismus, um Symmetrien zu identifizieren und den Symmetrien entsprechende Hilfsfelder einzuführen. Es wird hiermit eine Wirkung erhalten, die in der Literatur für den Grenzübergang zur spannunglosen Brane verwendet wird. Eine neue bosonische Wirkung, deren Hilfsfelder zu einem Lorentz-Vektor zusammengefaßt sind, wird präsentiert, ihre Supersymmetrisierung ist jedoch schwierig, da nur eine reduzierte Gravitation vorhanden ist.

Das dritte Verfahren liefert jedoch eine Fülle neuer, klassisch äquivalenter Wirkungen, die für eine Supersymmetrisierung geeignet sind. Es verallgemeinert eine Idee von Dolan und Tchrakian und enthält in der Wirkung eine allgemeine Funktion $f$. Diese Funktion wird nur durch eine Normierungsbedingung und eine Bedingung eingeschränkt, die die Hilfsmetrik on-shell der induzierten Metrik gleichsetzen soll. Die meisten in der Literatur diskutierten Modelle sind in dieser generischen Wirkung enthalten.

Es wird gezeigt, daß sich diese allgemeine Klasse von Wirkungen für jedes $f$ supersymmetrisieren läßt. Hierzu wird ein Verfahren entwickelt, das aus Gründen der Einfachheit Einschränkungen an die spätere supersymmetrische Wirkung macht, nicht jedoch an die Funktion $f$. Somit können zwar nicht alle Spinning Membranes mit diesem Verfahren erhalten werden, es läßt sich damit jedoch aus jeder bosonischen Wirkung der generischen Form eine Vielzahl von möglichen Spinning Membrane-Modellen konstruieren.

In einigen Anwendungsbeispielen wird die Funktionstüchtigkeit des Verfahrens gezeigt. Mit seiner Hilfe lassen sich zunächst die bekannten Spinning $p$-Brane-Modelle von Karlhede, Lindström und Roček reproduzieren. Aber auch neue, bisher unbekante Spinning Membranes werden vorgeführt und in Komponentenfelder zerlegt. Die Supersymmetrisierung der Howe-Tucker-Wirkung umgeht hierbei das no-go-Theorem, indem es Materiefelder im Nenner aufnimmt. Die Supersymmetrisierung der Dolan-Tchrakian-Wirkung ist besonders interessant, da sie die Materiefelder nur polynomial enthält. Auch eine direkte Supersymmetrisierung der Dirac-Wirkung ist mit diesem Verfahren möglich.

# Anhang A

# Indextypen

In dieser Arbeit werden viele unterschiedliche Indextypen verwendet, die hier noch einmal kurz zusammengefaßt werden.

Indizes im Targetraum werden im Gegensatz zu Indizes im Weltvolumen unterstrichen.

$$\begin{array}{ccc} \text{Targetraum} & \longleftrightarrow & \text{Weltvolumen} \\ X^{\underline{m}} & & x^m \end{array}$$

Indizes in Tangentialbasis werden vom Anfang des Alphabets genommen, während Indizes in Weltbasis aus der Mitte des Alphabets stammen.

$$\begin{array}{ccc} \text{Tangentialbasis} & \longleftrightarrow & \text{Weltbasis} \\ X^a, X^\alpha & & X^m, X^\mu \end{array}$$

Superindizes werden mit Großbuchstaben geschrieben, Vektorindizes mit lateinischen Lettern und Spinorindizes mit griechischen Lettern.

$$\begin{array}{c} \text{Superindizes} \\ X^M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Vektorindizes} & \longleftrightarrow & \text{Spinorindizes} \\ X^m & & X^\mu \end{array}$$

In einer Tabelle zusammengefaßt ergibt sich damit folgendes Bild:

| | Weltvolumen | | Targetraum | |
|---|---|---|---|---|
| | Tangentialb. | Weltbasis | Tangentialb. | Weltbasis |
| Superindex | $A, B, C, \ldots$ | $M, N, P, \ldots$ | $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \ldots$ | $\underline{M}, \underline{N}, \underline{P}, \ldots$ |
| Vektorindex | $a, b, c, \ldots$ | $m, n, p, \ldots$ | $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \ldots$ | $\underline{m}, \underline{n}, \underline{p}, \ldots$ |
| Spinorindex | $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ | $\mu, \nu, \kappa, \ldots$ | $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}, \ldots$ | $\underline{\mu}, \underline{\nu}, \underline{\kappa}, \ldots$ |

# Anhang B

# Spinoren in $D$ Dimensionen

In dieser Arbeit werden an vielen Stellen Spinoren unterschiedlichsten Typs verwendet, die sich dazu in Räumen beliebiger Dimension $D$ befinden. Da in dieser Arbeit ausschließlich Räume mit Minkowski-Signatur vorkommen, wird sich die gesamte Analyse auf solche Räume beschränken.

Dieses Kapitel zeigt nach einer Klärung des Spinor-Begriffs zuerst den Zusammenhang der Lorentz-Algebra zur Clifford-Algebra, bevor deren Darstellungen in $D$ Dimensionen konstruiert werden. Aus den so erhaltenen Informationen werden dann Rückschlüsse gezogen auf die Existenz und Eigenschaften diverser Spinortypen in $D$ Dimensionen.

## B.1 Der Spinor-Begriff

Der Spinor-Begriff ist mit der Lorentz-Algebra verbunden. Sie lautet unabhängig von der Dimension der Raumzeit

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad} M_{bc} - \eta_{bd} M_{ac} - \eta_{ac} M_{bd} + \eta_{bc} M_{ad} \quad . \tag{B.1}$$

mit einem Index-Laufbereich $a, b, c, d = 0, \ldots, D-1$ und Minkowski-Signatur $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, \ldots, 1)$ .

Ihre Generatoren sind antisymmetrisch

$$M_{ab} = -M_{ba} \quad . \tag{B.2}$$

In dieser Notation sind Boosts hermitesch und Rotationen antihermitesch

$$(M_{0i})^\dagger = M_{0i} \quad , \qquad (M_{ij})^\dagger = -M_{ij} \quad \text{mit } i, j = 1, 2, \ldots, D-1 \quad . \tag{B.3}$$

Endlichdimensionale Darstellungen dieser Symmetrie-Algebra lassen sich in Form von Matrizen schreiben. Die $n$-Tupel, auf denen diese Symmetriegeneratoren dann per Matrixmultiplikation wirken, bilden den sogenannten Trägerraum der Darstellung

$$\Psi_\alpha \xrightarrow{M_{ab}} (M_{ab})_\alpha{}^\beta \Psi_\beta \quad .$$

Unterschiedliche Darstellungen werden mit Hilfe der Eigenwerte von Casimir-Operatoren klassifiziert. In einem gewöhnlichen dreidimensionalen Raum reicht hierzu der Spinoperator aus, und man kann definieren:

> *Spinoren sind Elemente des Trägerraums von Darstellungen der Lorentz-Algebra zum Spin 1/2.*

Da jedoch in höheren Dimensionen mehrere Casimir-Operatoren auftreten, und sich der Spinoperator nicht mehr so leicht definieren läßt, verwendet man hier einen anderen Zugang.

Die Alternative basiert auf der Beobachtung, daß sich aus einer Darstellung der Clifford-Algebra

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab} \tag{B.4}$$

unabhängig von der Zahl der Raumzeit-Dimensionen immer ein Darstellung der Lorentz-Algebra konstruieren läßt

$$M_{ab} := \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b] \quad . \tag{B.5}$$

Diese Darstellung hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie bei einer Projektion auf einen beliebigen dreidimensionalen Unterraum dort immer eine Darstellung zum Spin 1/2 ergibt. Sie ermöglicht daher eine vernünftige Erweiterung des Spinor-Begriffs auf beliebig viele Dimensionen:

> *Spinoren sind Elemente des Trägerraums von Darstellungen der Clifford-Algebra.*

Auch in zwei Dimensionen, wo die Lorentz-Algebra degeneriert, erhält man auf diese Weise eine Spinordefinition.

## B.2 Darstellungen der Clifford-Algebra

Für die Darstellungen der Clifford-Algebra in einer beliebigen Zahl von Dimensionen existiert ein rekursives Konstruktionsverfahren. Dieses und alle folgenden Betrachtungen sind hier auf Räume mit Minkowski-Signatur beschränkt, da nur solche in dieser Arbeit verwendet werden.

- Für $D = 1$ degeneriert sowohl die Lorentz-Algebra als auch die Clifford-Algebra. Eine Spinor-Definition macht wenig Sinn.
- Für $D = 2$ lautet eine mögliche Darstellung

$$\gamma_0 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \gamma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{B.6}$$

- Für $D$ gerade erhält man eine mögliche Darstellung aus der vorhergehenden geraden Darstellung durch Bildung des Tensorproduktes mit $2 \times 2$ Matrizen

$$\begin{aligned} \gamma_a &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \alpha_a \quad , \qquad && \text{für } a = 0, \ldots, D-3 \\ & && \text{und mit } \{\alpha_a, \alpha_b\} = 2\eta_{ab} \\ \gamma_{D-2} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} \\ \gamma_{D-1} &:= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} \quad . \end{aligned} \tag{B.7}$$

- Für $D$ ungerade erhält man eine mögliche Darstellung aus der vorhergehenden geraden Darstellung durch Hinzufügen einer weiteren Matrix

$$\begin{aligned} \gamma_a &:= \alpha_a \quad , \qquad && \text{für } a = 0, \ldots, D-2 \\ & && \text{und mit } \{\alpha_a, \alpha_b\} = 2\eta_{ab} \\ \gamma_{D-1} &:= \pm i^{\frac{D+1}{2}} \cdot \prod_{a=0}^{D-2} \alpha_a \end{aligned} \tag{B.8}$$

Auf diese Weise läßt sich für jede Dimension $D$ eine Darstellung der Clifford-Algebra konstruieren. Die so gewonnene Darstellung besteht aus Matrizen der Größe[1] $2^{[\frac{D}{2}]} \times 2^{[\frac{D}{2}]}$. Sie ist irreduzibel und in geraden Dimensionen eindeutig [24] bis auf Ähnlickeitstransformationen

$$\gamma'_a = A \cdot \gamma_a \cdot A^{-1} \tag{B.9}$$

mit beliebigen Matrizen $A$, die einem einfachen Basiswechsel entsprechen.

In ungeraden Dimensionen liefert das frei wählbare Vorzeichen in (B.8) zwei inäquivalente Darstellungen der Clifford-Algebra, die jedoch mittels (B.5) auf dieselbe Darstellung der Lorentz-Algebra führen[2].

## B.3 Eigenschaften der Gamma-Matrizen

Die Darstellung, die man mit der angegebenen Konstruktionsvorschrift erhält, ist unitär

$$\gamma_a^\dagger \gamma_a = \mathbb{1} \quad , \tag{B.10}$$

[1] Die Notation $[x]$ bezeichnet den ganzzahligen Anteil einer Zahl, also z.B. $[5/2] = 2$ .

[2] Die Ähnlichkeitstransformation hierzu lautet $(M_{ab})' = A \cdot M_{ab} \cdot A^{-1}$ mit $A := \gamma_{D-1}$ .

so daß gilt

$$\gamma_0^\dagger = -\gamma_0 \quad , \qquad \gamma_i^\dagger = \gamma_i \quad , \qquad \text{mit } i = 1, \ldots D-1 \tag{B.11}$$

bzw.

$$\gamma_a^\dagger = \gamma_0 \gamma_a \gamma_0 \quad . \tag{B.12}$$

Das komplex Konjugierte $\gamma_a^*$ und das negative Transponierte $-\gamma_a^t$ der Gamma-Matrizen erfüllen jeweils wieder die Clifford-Algebra. Da die irreduziblen Darstellungen der Clifford-Algebra aber in geraden Dimensionen bis auf Ähnlickeit eindeutig sind, müssen hier Matrizen $B$ und $C$ existieren, so daß gilt

$$\gamma_a^* = B \cdot \gamma_a \cdot B^{-1} \tag{B.13}$$
$$-\gamma_a^t = C \cdot \gamma_a \cdot C^{-1} \tag{B.14}$$

Wegen (B.8) gilt in ungeraden Dimensionen für die hinzugefügte Gamma-Matrix die abgewandelte Relation

$$\gamma_{D-1}^* = (-1)^{\frac{D+1}{2}} \cdot B \cdot \gamma_{D-1} \cdot B^{-1} \tag{B.15}$$
$$-\gamma_{D-1}^t = (-1)^{\frac{D+1}{2}} \cdot C \cdot \gamma_{D-1} \cdot C^{-1} \tag{B.16}$$

Die Matrizen $B$ und $C$ können so gewählt werden [24], daß sie die folgenden Eigenschaften besitzen

$$\begin{aligned} B^\dagger B &= \mathbb{1} \quad , \qquad & B^* B &= \epsilon \mathbb{1}, \qquad & B^t &= \epsilon B \\ C^\dagger C &= \mathbb{1} \quad , \qquad & C^* C &= -\epsilon \mathbb{1}, \qquad & C^t &= -\epsilon C \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$C = -B^t \gamma_0 \quad . \tag{B.18}$$

Die Matrix $C$ heißt Charge-Conjugation Matrix. Der Vorfaktor $\epsilon$ gibt ein dimensionsabhängiges Vorzeichen

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{für } D = 2, 3, 4, 5 \bmod 8 \\ -1 & \text{für } D = 0, 1, 6, 7 \bmod 8 \end{cases} \quad . \tag{B.19}$$

## B.4 Spinortypen

Mit obigem Wissen über die Existenz und Eigenschaften der Darstellungen der Clifford-Algebra in $D$ Dimensionen lassen sich nun verschiedene Spinortypen definieren.

### B.4.1 Dirac-Spinoren

Der Dirac-Spinor ist der grundlegende Spinortyp. Alle anderen Spinortypen sind von ihm abgeleitet.

> Ein **Dirac-Spinor** ist ein Element des Trägerraumes einer nichttrivialen, irreduziblen Darstellung der Clifford-Algebra.

Da sich in allen Dimensionen $D$ mindestens eine solche Darstellung der Clifford-Algebra finden läßt, existiert der Dirac-Spinor in allen Dimensionen. In geraden Dimensionen, wo es nur eine nichttriviale, irreduzible Darstellung der Clifford-Algebra gibt, ist er sogar eindeutig bis auf Basiswechsel.

Der Dirac-Spinor besitzt somit $2^{[\frac{D}{2}]}$ komplexe Komponenten. Zur Unterscheidung von den anderen Spinortypen wird er hier mit einem Index $D$ geschrieben

$$\Psi_D \quad .$$

### B.4.2 Majorana-Spinoren

Für manche Dimensionen $D$ ist es möglich, eine **rein reelle Darstellung** der Clifford-Algebra zu finden.

Wenn $\epsilon = +1$ ist, läßt sich die Matrix $B$ durch Basiswechsel auf $\mathbb{1}$ bringen

$$\epsilon = +1 \quad \Longrightarrow \qquad B = \mathbb{1} \quad , \qquad C = \gamma^0 \quad . \tag{B.20}$$

Dies ist der Fall für $D = 2, 3, 4, 5 \mod 8$. In geraden Dimensionen sind die Gamma-Matrizen dann wegen (B.13) alle reell, in ungeraden Dimensionen nur, wenn das zusätzliche Vorzeichen in (B.15) verschwindet, also in $D = 3 \mod 8$.

Eine rein reelle Darstellung der Clifford-Algebra ist daher nur möglich in $D = 2, 3, 4 \mod 8$. In diesem Fall sind die Lorentz-Generatoren (B.5) ebenfalls rein reell und vertauschen mit dem $*$-Operator (der alles rechts von sich komplex konjugiert)

$$[*, M_{ab}] = 0 \quad . \tag{B.21}$$

Der $*$-Operator besitzt wegen $(*)^2 = 1$ Eigenwerte +1 und -1, so daß der Raum der Dirac-Spinoren zerfällt in zwei Unterräume, die unter Lorentz-Transformationen nicht miteinander mischen

$$\Psi_D = \Psi_M^+ + \Psi_M^- \qquad , \quad \text{mit} \quad \begin{array}{rcl} *\Psi_M^+ & = & \Psi_M^+ \\ *\Psi_M^- & = & -\Psi_M^- \end{array} \quad . \tag{B.22}$$

In der Literatur bezeichnet man manchmal beide Unterräume als Majorana-Spinoren, meist aber nur den ersten Unterraum, mit reellem $\Psi_M$.

Majorana-Spinoren existieren also in $D = 2, 3, 4 \bmod 8$. Sie besitzen $2^{\frac{D}{2}}$ reelle Komponenten.

### B.4.3 Weyl-Spinoren

Für gerade Dimensionen $D$ ist die aus der Darstellung der Clifford-Algebra folgende Darstellung der Lorentz-Algebra (B.5) reduzibel. Es läßt sich die Matrix $\gamma_D$ konstruieren

$$\gamma_D := i^{\frac{D+2}{2}} \cdot \prod_{a=0}^{D-1} \gamma_a \quad , \tag{B.23}$$

die mit allen Lorentz-Generatoren vertauscht

$$[\gamma_D, M_{ab}] \quad . \tag{B.24}$$

Die Matrix $\gamma_D$ besitzt wegen $(\gamma_D)^2 = 1$ Eigenwerte +1 und -1, so daß der Raum der Dirac-Spinoren in zwei bezüglich der Lorentz-Transformationen invariante Unterräume zerfällt, den Weyl-Spinoren

$$\Psi_D = \Psi_W^+ + \Psi_W^- \qquad , \quad \text{mit} \quad \begin{array}{rcl} \gamma_D \cdot \Psi_W^+ & = & \Psi_W^+ \\ \gamma_D \cdot \Psi_W^- & = & -\Psi_W^- \end{array} \quad . \tag{B.25}$$

Durch Basiswechsel läßt sich die Darstellung der Matrix $\gamma_D$ diagonalisieren und die Eigenwerte +1 und -1 in zwei gleich großen Blöcken anordnen. In dieser Darstellung sind jeweils die Hälfte der Komponenten von $\Psi_W^+$ und $\Psi_W^-$ Null, und es läßt sich schreiben

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \Psi_W^+ \\ \Psi_W^- \end{pmatrix} \quad . \tag{B.26}$$

Weyl-Spinoren haben also $2^{\frac{D}{2}-1}$ komplexe Komponenten.

### B.4.4 Majorana-Weyl-Spinoren

In seltenen Fällen sind auch Kombinationen Weyl-Majorana möglich. Wie oben gezeigt, muß für Weyl-Spinoren $D = 2, 3, 4 \bmod 8$ sein und für Majorana-Spinoren ist es notwendig, daß $D$ gerade ist. Für die Kombination kommt daher nur $D = 2, 4 \bmod 8$ in Frage.

Außerdem müssen $\gamma_D$ und der $*$-Operator vertauschen, damit die Weyl-Bedingung und die Majorana-Bedingung separat gestellt werden können

$$[\gamma_D, *] = 0 \quad . \tag{B.27}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $\gamma_D$ reell ist. Aus der Definition (B.23) läßt sich ablesen, daß damit der Fall $D = 4 \bmod 8$ ausscheidet.

Weyl-Majorana-Spinoren existieren daher nur für $D = 2 \bmod 8$. Sie haben $2^{\frac{D}{2}-1}$ reelle Komponenten.

### B.4.5 Übersicht

| Dimension ($D \bmod 8$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Majorana | | | M | M | M | | | |
| Weyl | W | | W | | W | | W | |
| Weyl-Majorana | | | MW | | | | | |

## B.5 Duale Spinoren

Das duale $\overline{\Phi}$ eines Spinors $\Phi$ wird so gewählt, daß das Produkt mit einem anderen Spinor $\Psi$ immer ein Lorentz-Skalar ist

$$\delta_\omega(\overline{\Phi}\Psi) = 0 \quad , \tag{B.28}$$

und beide Operationen vertauschen

$$\delta_\omega \overline{\Phi} = \overline{(\delta_\omega \Phi)} \quad . \tag{B.29}$$

Eine Wahl, die beides erfüllt, ist

$$\overline{\Phi} := \Phi^\dagger \gamma^0 = \Phi^\dagger B^* C \quad . \tag{B.30}$$

Der Übergang zur Indexschreibweise erfolgt dann mittels

$$\overline{\Psi} \leftrightarrow (\Psi^*)^\alpha \quad , \qquad \Psi \leftrightarrow \Psi_\alpha \quad . \tag{B.31}$$

Für Majorana-Spinoren ist der Zusammenhang zwischen einem Spinor und seinem Dualen wegen (B.20) und (B.22) sogar linear

$$\overline{\Phi} := \Phi^t C = -(C\Phi)^t \quad . \tag{B.32}$$

Wie man hieraus entnehmen kann, vermittelt die Charge-Conjugation-Matrix dann zwischen beiden Indexsorten und bekommt daher zwei gleichgestellte Indizes

$$C \leftrightarrow C^{\alpha\beta} \quad , \qquad C^{-1} \leftrightarrow C_{\alpha\beta} \quad . \tag{B.33}$$

Somit können bei Majorana-Spinoren die Indizes wie folgt hoch- und runtergezogen werden

$$\Phi^\alpha = \Phi_\beta C^{\beta\alpha} \quad , \qquad \Phi_\alpha = \Phi^\beta C_{\beta\alpha} \quad , \qquad \Phi^\alpha \Psi_\alpha = -\Phi_\alpha \Psi^\alpha \quad . \tag{B.34}$$

Die „Metrik" $C_{\alpha\beta}$ ist Lorentz-invariant und in Dimensionen, in denen Majorana -Spinoren möglich sind, antisymmetrisch.

$$\delta_\omega C = 0 \quad , \qquad C^T = -C \quad . \tag{B.35}$$

Und in diesem Fall sind die Gamma-Matrizen mit zwei unten stehenden bzw. zwei oben stehenden Spinor-Indizes symmetrisch[3]

$$\begin{aligned} \gamma^a{}_{\alpha\beta} &:= \gamma^a{}_\alpha{}^\gamma C_{\gamma\beta} = \gamma^a{}_{\beta\alpha} \\ \gamma^{a\alpha\beta} &:= (C^T)^{\alpha\gamma}\gamma^a{}_\gamma{}^\beta = \gamma^{a\beta\alpha} \quad . \end{aligned} \tag{B.36}$$

[3]Da bei den Gamma-Matrizen der Vektorindex immer eindeutig von den beiden Spinorindizes unterscheidbar ist, ist die Reihenfolge, in der sie geschrieben werden nicht wichtig. In dieser Arbeit wird daher z.B. nicht zwischen $\gamma^a{}_{\alpha\beta}$ und $\gamma_{\alpha\beta}{}^a$ unterschieden. Beide Schreibweisen werden verwendet, damit jeweils kontrahierte Indizes näher beieinander stehen.

# Anhang C

# Besonderheiten in $D = 3$

Der Fall $D = 3$ spielt für die Spinning Membranes eine besondere Rolle und birgt einige Besonderheiten, die im folgenden kurz erläutert werden.

Die Generatoren $M_{ab}$ der Lorentz-Algebra

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad}M_{bc} - \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{ac}M_{bd} + \eta_{bc}M_{ad} \quad , \tag{C.1}$$

lassen sich speziell in $D = 3$ schreiben als

$$M_{ab} = \varepsilon_{abc}M^c \quad , \qquad M^c := -\frac{1}{2}\varepsilon^{cde}M_{de}$$
$$[M_a, M_b] = \epsilon_{abc}M^c \quad . \tag{C.2}$$

Hierbei ist

$$\varepsilon^{012} = 1 \quad , \qquad \varepsilon_{012} = -1 \quad .$$

Eine mögliche Vektordarstellung ist

$$\begin{aligned} M_{ab}A_c &= (M_{ab})_c{}^d A_d \quad &&, \text{ mit } \quad (M_{ab})_c{}^d := \eta_{ac}\delta_b{}^d - \eta_{bc}\delta_a{}^d \quad \text{und} \\ M_a A_b &= (M_a)_b{}^c A_c \quad &&, \text{ mit } \quad (M_a)_b{}^c := -\epsilon_{ab}{}^c \quad . \end{aligned} \tag{C.3}$$

Die Spinordarstellung erhält man wie in Anhang B beschrieben. In $D = 3$ sind Majorana-Spinoren mit 2 reellen Komponenten möglich, die Gamma-Matrizen können rein reell gewählt werden, und das noch frei bleibende Vorzeichen aus (B.8) wird so gewählt, daß gilt

$$\gamma_0\gamma_1 = \gamma_2 \quad ,$$

und somit

$$[\gamma_a, \gamma_b] = -2\varepsilon_{abc}\gamma^c \quad . \tag{C.4}$$

Die Spinordarstellung der Lorentz-Algebra ist damit

$$\begin{aligned} M_{ab}\Psi_\alpha &= (M_{ab})_\alpha{}^\beta \Psi_\beta \quad &&, \text{ mit } \quad (M_{ab})_\alpha{}^\beta := \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]_\alpha{}^\beta \quad \text{bzw.} \\ M_a\Psi_\alpha &= (M_a)_\alpha{}^\beta \Psi_\beta \quad &&, \text{ mit } \quad (M_a)_\alpha{}^\beta := -\frac{1}{2}\gamma_{a\alpha}{}^\beta \quad . \end{aligned} \tag{C.5}$$

Eine konkrete Wahl der Gamma-Matrizen, die alle oben genannten Bedingungen erfüllt, ist

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{C.6}$$

Die Charge-Conjugation Matrix hat hiermit die Form

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{\alpha\beta} \quad , \qquad C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon^{\alpha\beta} \quad . \tag{C.7}$$

In $D = 3$ sind die Gamma-Matrizen mit beiden Indizes auf gleicher Höhe symmetrisch

$$\gamma^a{}_{\alpha\beta} := \gamma^a{}_\alpha{}^\gamma C_{\gamma\beta} = \gamma^a{}_{\beta\alpha} \quad . \tag{C.8}$$

Eine nützliche Relation der Gamma-Matrizen lautet

$$\gamma^a{}_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}{}_b = -2\delta^a{}_b \quad . \tag{C.9}$$

Ihre Umkehrung

$$\gamma_{\alpha\beta}{}^a\gamma_a{}^{\gamma\delta} = -\left(\delta_\alpha{}^\gamma\delta_\beta{}^\delta + \delta_\alpha{}^\delta\delta_\beta{}^\gamma\right) \tag{C.10}$$

gilt nur in $D = 3$, da hier $C_{\alpha\beta}$ und die $\gamma^a{}_{\alpha\beta}$ eine vollständige Basis aller reeller $2 \times 2$-Matrizen bilden und sich demnach alle symmetrischen Matrizen nach den Gamma-Matrizen entwickeln lassen, insbesondere die Gamma-Matrizen selbst.

Mit diesen Relationen läßt sich ein Vektor immer in einen symmetrischen Bispinor umwandeln und umgekehrt

$$A_{\alpha\beta} := \gamma_{\alpha\beta}{}^a A_a \quad , \qquad A_a = -\frac{1}{2}\gamma_a{}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} \quad . \tag{C.11}$$

Dies läßt sich natürlich auch auf die Lorentz-Generatoren anwenden

$$M_{\alpha\beta} := \gamma_{\alpha\beta}{}^c M_c$$

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = \frac{1}{2}(C_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} + C_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} + C_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} + C_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma}) \quad . \tag{C.12}$$

Hierbei wurde eine weitere nützliche Relation der Gamma-Matrizen verwendet

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}{}^a\gamma_{\gamma\delta}{}^b\gamma_{\varepsilon\kappa}{}^c\varepsilon_{abc} = \frac{1}{2}\Big( & C_{\alpha\gamma}C_{\beta\varepsilon}C_{\delta\kappa} + C_{\beta\gamma}C_{\alpha\epsilon}C_{\delta\kappa} + C_{\alpha\delta}C_{\beta\varepsilon}C_{\gamma\kappa} + \\ & + C_{\beta\delta}C_{\alpha\varepsilon}C_{\gamma\kappa} + C_{\alpha\gamma}C_{\beta\kappa}C_{\delta\varepsilon} + C_{\beta\gamma}C_{\alpha\kappa}C_{\delta\varepsilon} + \\ & + C_{\alpha\delta}C_{\beta\kappa}C_{\gamma\varepsilon} + C_{\beta\delta}C_{\alpha\kappa}C_{\gamma\varepsilon}\Big) \quad , \end{aligned} \tag{C.13}$$

woraus auch folgt

$$\mathrm{tr}\left(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\right) = -2\varepsilon^{abc} \quad . \tag{C.14}$$

Die Vektordarstellung der Lorentz-Algebra lautet damit nun

$$(M_{\alpha\beta})_c{}^d = -\gamma_{\alpha\beta}{}^e \varepsilon_{ec}{}^d \quad , \tag{C.15}$$

und die Spinordarstellung[1]

$$(M_{\alpha\beta})_\gamma{}^\delta = \delta_{(\alpha}{}^\delta C_{\beta)\gamma} \quad . \tag{C.16}$$

Alle diese Schreibweisen für die Lorentz-Generatoren ($M_{ab}$, $M_a$, $M_{\alpha\beta}$) lassen sich natürlich auf den Krümmungstensor übertragen

$$R_{ABC}{}^D = R_{AB}{}^{ef}(M_{ef})_C{}^D = R_{AB}{}^e(M_e)_C{}^D = R_{AB}{}^{\alpha\beta}(M_{\alpha\beta})_C{}^D \quad .$$

Für $D = 3$ wird in dieser Arbeit nur die letzte Variante verwendet

$$\begin{aligned} R_{AB}{}^{\alpha\beta} = &- \mathcal{C}_{AB}{}^C \Gamma_C{}^{\alpha\beta} + (E_A \Gamma_B{}^{\alpha\beta}) - (-1)^{AB}(E_B \Gamma_A{}^{\alpha\beta}) + \\ &+ \Gamma_A{}^{\alpha\gamma}\Gamma_{B\gamma}{}^\beta - (-1)^{AB}\Gamma_B{}^{\alpha\gamma}\Gamma_{A\gamma}{}^\beta \quad . \end{aligned} \tag{C.17}$$

[1] Symmetrisierung und Antisymmetrisierung enthalten in dieser Arbeit immer einen kombinatorischen Vorfaktor

$$A_{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) \quad \text{und} \qquad A_{[\alpha\beta]} := \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}) \quad .$$

Bei $n$ Indizes steht dort entsprechend ein $1/n!$.

# Anhang D

# Eliminieren von Hilfsfeldern

In dieser Arbeit werden Hilfsfelder, d.h. Felder mit algebraisch lösbaren Bewegungsgleichungen, des öfteren durch Einsetzen eben dieser Lösungen in die jeweilige Wirkung eliminiert. Daß dieses direkte Einsetzen erlaubt ist, also zu denselben Bewegungsgleichungen führt, sei hier kurz bewiesen.

Ausgangspunkt ist eine generische Wirkung der Form

$$\mathcal{S}[X,Y] = \int d^d\sigma \, \mathcal{L}(X, \partial X, Y) \quad . \tag{D.1}$$

Hierbei ist $X(\sigma)$ ein „normales" Feld, d.h. ein Freiheitsgrad, der sowohl einfach als auch mit Ableitung in der Lagrange-Funktion vorkommt. Das Hilfsfeld $Y$ ist im Gegensatz hierzu nur einfach vorhanden.

Die Bewegungsgleichung für $X$ ist eine Differentialgleichung

$$0 = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta X} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} - \partial_m \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m X)} \right) \quad . \tag{D.2}$$

Die Bewegungsgleichung für $Y$ hingegen ist eine algebraische Gleichung

$$0 = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta Y} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} \quad . \tag{D.3}$$

Angenommen, sie läßt sich algebraisch lösen

$$\Rightarrow \quad Y = Y(X) \quad , \tag{D.4}$$

dann kann man die Lösung selbstverständlich in die andere Bewegungsgleichung einsetzen, so daß man schließlich erhält

$$0 = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}\right|_{Y=Y(X)} - \partial_m \left.\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m X)} \right)\right|_{Y=Y(X)} \quad . \tag{D.5}$$

Die Behauptung ist nun, daß man dieselbe Bewegungsgleichung für $X$ auch erhält, wenn man die algebraische Lösung für $Y$ stattdessen in die Wirkung (D.1) einsetzt und nochmals variiert.

Die Lösung (D.4) in die Wirkung (D.1) eingesetzt ergibt

$$\mathcal{S}[X] = \int d^d\sigma\, \mathcal{L}(X, \partial X, Y(X)) \quad . \tag{D.6}$$

Das Hilfsfeld $Y$ ist nun eliminiert. In der Bewegungsgleichung für $X$ erhält man damit einen zusätzlichen Term

$$0 = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}\right|_{Y=Y(X)} - \partial_m \left.\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m X)}\right)\right|_{Y=Y(X)} + \underbrace{\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y}\right|_{Y=Y(X)}}_{=0} \cdot \frac{\partial Y(X)}{\partial X} \quad . \tag{D.7}$$

Dieser Term verschwindet aber, da die Lösung $Y(X)$ ja gerade so erhalten wurde, daß der geklammerte Ausdruck verschwindet.

Man erhält als Bewegungsgleichung für $X$ also wieder (D.5). Die Elimination des Hilfsfeldes direkt in der Wirkung führt zu denselben Bewegungsgleichungen und verändert das System nicht.

Man kann leicht sehen, daß dies nicht mehr funktioniert, wenn das Feld $Y$ eine Differentialgleichung als Bewegungsgleichung besitzt. Die dann notwendigen partiellen Integrationen zerstören obigen Beweis.

# Anhang E

# Dimensionsanalyse

In dieser Arbeit werden Wirkungen diskutiert, die Größen enthalten, die Einheiten tragen (Felder, Ableitungen, etc.). Wirkungen sollten jedoch dimensionslos sein, eine kurze Dimensionsanalyse ist daher sinnvoll.

Zwischen Einheiten im Targetraum und Einheiten im Weltvolumen der Brane muß unterschieden werden. Im folgenden werden Längendimensionen betrachtet.

Die Koordinaten besitzen dann einfache, die Ableitungen inverse Längendimension

$$\begin{array}{llll} \text{Targetraum:} & [\sigma^m] = 0 & [\partial_m] = 0 & [A^{\underline{m}}] = 1 \\ \text{Weltvolumen:} & [\sigma^m] = 1 & [\partial_m] = -1 & [A^{\underline{m}}] = 0 \quad . \end{array} \tag{E.1}$$

Die Hilfsmetrik soll die gleichen Einheiten tragen wie die induzierte Metrik

$$\begin{array}{lll} \text{Targetraum:} & [g_{mn}] = [\partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}}] = 2 & [e_m{}^a] = 1 \\ \text{Weltvolumen:} & [g_{mn}] = [\partial_m A^{\underline{m}} \partial_n A_{\underline{m}}] = -2 & [e_m{}^a] = -1 \quad . \end{array} \tag{E.2}$$

Die Dimension des Inversen der Hilfsmetrik und die ihrer Determinanten liegen damit fest

$$\begin{array}{lllll} \text{Targetraum:} & [g^{mn}] = -2 & [g] = 2(p+1) & [e_a{}^m] = -1 & [e] = -(p+1) \\ \text{Weltvolumen:} & [g^{mn}] = 2 & [g] = -2(p+1) & [e_a{}^m] = 1 & [e] = p+1 \quad . \end{array} \tag{E.3}$$

Das invariante Volumenelement für bosonische Wirkungen besitzt daher die Längendimension

$$\begin{array}{ll} \text{Targetraum:} & [d^{p+1}\sigma\sqrt{-g}] = p+1 \\ \text{Weltvolumen:} & [d^{p+1}\sigma\sqrt{-g}] = 0 \quad . \end{array} \tag{E.4}$$

Besonders hingewiesen sei darauf, daß die oft verwendeten Matrizen $B$ und $C$

$$B_m{}^n := \partial_m A^{\underline{m}} \partial_r A_{\underline{m}}\, g^{rn} \quad , \quad C_{\underline{m}}{}^{\underline{n}} := g^{mn} \partial_m A_{\underline{m}} \partial_n A^{\underline{n}} \tag{E.5}$$

dimensionslos sind

$$\begin{array}{lll} \text{Targetraum:} & [B] = 0 & [C] = 0 \\ \text{Weltvolumen:} & [B] = 0 & [C] = 0 \quad , \end{array} \tag{E.6}$$

und daher ohne dimensionsbehaftete Koeffizienten in beliebigen Potenzen vorkommen können.

Die in dieser Arbeit diskutierten bosonischen Wirkungen liegen zumeist in der Form (5.51) vor

$$\mathcal{S}[A, g] := -T \int d^{p+1}\sigma \, \sqrt{-g} \cdot f(B) \quad . \tag{E.7}$$

Daher gilt für die Brane-Spannung

$$\begin{array}{ll} \text{Targetraum:} & [T] = -(p+1) \\ \text{Weltvolumen:} & [T] = 0 \qquad\qquad , \end{array} \tag{E.8}$$

damit die Wirkung keine Einheiten trägt.

Wie üblich bekommen die fermionischen Koordinaten halbzahlige Längendimension

$$\begin{array}{llll} \text{Targetraum:} & [\,\Theta^\mu] = 0 & [\,\partial_\mu] = 0 & [d^2\Theta] = 0 \\ \text{Weltvolumen:} & [\,\Theta^\mu] = \frac{1}{2} & [\,\partial_\mu] = -\frac{1}{2} & [d^2\Theta] = -1 \quad . \end{array} \tag{E.9}$$

Da fermionische Integrationen äquivalent zu Differentiationen sind, erhalten beide das gleiche Vorzeichen.

Die Längendimension der kovarianten Ableitung läßt sich über einen ihrer Summanden ermitteln

$$\begin{array}{ll} \text{Targetraum:} & [\nabla_a] = [e_a{}^m \partial_m] = -1 \\ \text{Weltvolumen:} & [\nabla_a] = [e_a{}^m \partial_m] = 0 \qquad . \end{array} \tag{E.10}$$

Dies legt auch die übrigen Felder des Supergravitationsmultipletts fest

$$\begin{array}{lll} \text{Targetraum:} & [\chi_a{}^\mu] = -1 & [\varphi_a{}^{\alpha\beta}] = [S] = -1 \\ \text{Weltvolumen:} & [\chi_a{}^\mu] = \frac{1}{2} & [\varphi_a{}^{\alpha\beta}] = [S] = 0 \qquad . \end{array} \tag{E.11}$$

Aufgrund der Supersymmetrie-Algebra (2.35) besitzen kovariante Ableitungen mit Spinorindizes die Längendimension

$$\begin{array}{ll} \text{Targetraum:} & [\nabla_\alpha] = -\frac{1}{2} \\ \text{Weltvolumen:} & [\nabla_\alpha] = 0 \end{array} \quad . \tag{E.12}$$

Dies erlaubt die Festlegung der Längendimensionen der restlichen Felder des Materiemultipletts

$$\begin{array}{lll} \text{Targetraum:} & [\Psi_\alpha{}^{\underline{m}}] = \frac{1}{2} & [F^{\underline{m}}] = 0 \\ \text{Weltvolumen:} & [\Psi_\alpha{}^{\underline{m}}] = 0 & [F^{\underline{m}}] = 0 \end{array} \quad . \tag{E.13}$$

Besonders hervorzuheben ist, daß die Kombination

$$\begin{array}{ll} \text{Targetraum:} & [\nabla_a X^{\underline{m}}] = 0 \\ \text{Weltvolumen:} & [\nabla_a X^{\underline{m}}] = 0 \end{array} \tag{E.14}$$

dimensionslos ist. Sie kann daher in beliebiger Potenz und ohne dimensionsbehaftete Koeffizienten in der Funktion $H_{\underline{m}\,\underline{n}}$ vorkommen. $H_{\underline{m}\,\underline{n}}$ selbst ist ebenfalls dimensionslos

$$\begin{array}{ll} \text{Targetraum:} & [H_{\underline{m}\,\underline{n}}] = 0 \\ \text{Weltvolumen:} & [H_{\underline{m}\,\underline{n}}] = 0 \end{array} \quad . \tag{E.15}$$

Aus den kovarianten Ableitungen läßt sich die Längendimension des Supervielbeins ablesen und damit auf dessen Superdeterminante schließen

$$\begin{array}{llll} \text{Targetraum:} & [E_a{}^m] = -1 & [E_\alpha{}^\mu] = -\frac{1}{2} & [E] = -3 + 1 = -2 \\ \text{Weltvolumen:} & [E_a{}^m] = 1 & [E_\alpha{}^\mu] = \frac{1}{2} & [E] = \phantom{-}3 - 1 = 2 \end{array} \quad . \tag{E.16}$$

Hiermit ist nun jede supersymmetrische Wirkung der Form (5.81)

$$\mathcal{S} = \frac{T}{4} \int d^3\sigma d^2\Theta \, E^{-1} \, (\nabla^\alpha X^{\underline{m}})(\nabla_\alpha X^{\underline{n}}) \cdot H_{\underline{m}\,\underline{n}}(\nabla_a X^{\underline{p}}) \tag{E.17}$$

dimensionslos.

# Literaturverzeichnis

[1] P. A. M. Dirac, *An extensible model of the electron*, Proc. Roy. Soc. **A268** (1962) 57.

[2] Y. Nambu, *QCD and the string model*, Phys. Lett. **B80** (1978) 372.

[3] J. Scherk und J. H. Schwarz, *Dual models and the geometry of spacetime*, Phys. Lett. **B52** (1974) 347.

[4] M. B. Green und J. H. Schwarz, *Anomaly cancellation in supersymmetric $D = 10$ gauge theory and superstring theory*, Phys. Lett. **B149** (1984) 117.

[5] J. Hughes, J. Liu und J. Polchinski, *Supermembranes*, Phys. Lett. **B180** (1986) 370.

[6] A. Achucarro, J. Evans, P. Townsend und D. Wiltshire, *Super p-branes*, Phys. Lett. **B198** (1987) 441.

[7] J. Polchinski, *Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges* Phys. Rev. Lett. **Vol. 75** (1995) 4724.

[8] P. S. Howe und R. W. Tucker, *A locally supersymmetric and reparametrisation invariant action for a spinning membrane*, J. Phys. **A10** (1977), L155.

[9] P. S. Howe und R. W. Tucker, *Local supersymmetry in (2+1) dimensions. I. Supergravity and differential forms*, J. Math. Phys. **19**(4) (1978) 869.

[10] P. S. Howe und R. W. Tucker, *Local supersymmetry in (2+1) dimension. II. An action for a spinning membrane*, J. Math. Phys. **19**(5) (1978) 981.

[11] E. Bersghoeff, E. Sezgin und P. K. Townsend, *On „spinning“ membrane models*, Phys. Lett. **B209** (1988) 451.

[12] A. Karlhede und U. Lindström, *Super-Weyl-invariant spinning p-branes*, Phys. Lett. **B209** 441.

[13] U. Lindström und M. Roček, *A super-Weyl-invariant spinning membrane*, Phys. Lett. **B218** (1989) 207.

[14] B. P. Dolan und D. H. Tchrakian, *New Lagrangians for bosonic m-branes with vanishing cosmological constant*, Phys. Lett. **B202** 211.

[15] C. Castro, *A new spinning membrane Lagrangian*, hep-th/9305157.

[16] C. Castro, *The spinning membrane and Skyrmions revisited*, hep-th/9707023.

[17] C. Castro, *A new spinning membrane Lagrangian*, hep-th/0007031.

[18] S. Gates Jr., M. Grisaru, M. Roček, W. Siegel, *Superspace*, Benjamin/Cummings Publishing Company Inc., ISBN 0-8053-3160-3.

[19] I. Buchbinder, S. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, ISBN 0-75030-258-5.

[20] J. Nieto, *Remarks on Weyl-invariant p-Branes and Dp-Branes*, hep-th/0110227.

[21] U. Lindström und H. G. Svendsen, *A pedestrian approach to high energy limits of branes and other gravitational systems*, hep-th/0007101.

[22] M. Henneaux und C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, ISBN 0-691-03769-8.

[23] S. Hassani, U. Lindström und R. von Unge, *Classically equivalent actions for tensionless p-branes*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) L79.

[24] P. C. West, *Supergravity, brane dynamics and string duality*, hep-th/9811101.

# Wissenschaftlicher Werdegang

Helge Dennhardt

| | | |
|---|---|---|
| 1971 | geboren | in Buchholz i.d. Nordheide |
| 1990 | Abitur | am Scharnhorstgymnasium Hildesheim |
| | Studium | am Fachbereich Physik der Universität Hannover |
| 1997 | Diplom | Titel der Arbeit: „Stabilitätsuntersuchungen an Schwarzen Löchern mit Skalarfeldern“ |
| | Stipendium | des Graduiertenkollegs „Quantenfeldtheoretische Methoden in der Teilchenphysik, Gravitation und Statistischen Physik“ am Institut für Theoretische Physik der Universität Hannover |
| 2001 | Promotion | Titel der Arbeit: „Spinning $p$-Branes“ |

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Lechtenfeld ganz herzlich für die Betreuung der Arbeit danken und für die Möglichkeit, an der Universität Hannover als Mitglied des Graduiertenkollegs „Quantenfeldtheoretische Methoden in der Teilchenphysik, Gravitation und Statistischen Physik“ an vielfältigen fachlichen Aktivitäten teilzunehmen und in diesem Rahmen das Promotionsprojekt erfolgreich durchzuführen.