Symmetrien des N=2 Strings

Dem Fachbereich Physik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
vorgelegte Dissertation
von

Dipl.-Phys. Klaus Jünemann
geboren am 12. Oktober 1968 in Alfeld

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Symmetriestruktur des $N=2$ Strings. Wichtigstes technisches Werkzeug hierfür ist die BRST-Kohomologie. Nach einer Einleitung zur Erläuterung der Fragestellung dieser Arbeit wird in Kapitel II ein Überblick über die $N=2$ Stringtheorie gegeben mit Betonung einiger Aspekte der BRST-Quantisierung und konformen Feldtheorie, die im weiteren Verlauf der Arbeit wichtig sein werden.

In Kapitel III wird die BRST-Kohomologie für nichtverschwindenden Impuls, also das Spektrum der Theorie, bestimmt. Hier wird besonderer Wert auf das Bildwechsel-Phänomen gelegt und gezeigt, daß die Kohomologie bildunabhängig ist, obwohl sich die Bildwechseloperatoren nicht auf die aus der $N=1$ Theorie bekannten Weise invertieren lassen.

In Kapitel IV wird die BRST-Kohomologie für Impuls $k=0$ untersucht und gezeigt, daß sie bildabhängig ist. Für die Geistzahlen null und eins wird jeweils eine Schar inäquivalenter Repräsentanten explizit angegeben. Höhere Geistzahlen werden nur kurz diskutiert.

In Kapitel V geht es um die Symmetrien der Theorie, die zuerst im Rahmen der effektiven Feldtheorie des $N=2$ Strings untersucht werden. Danach wird beschrieben, wie sich ungebrochene Targetraumsymmetrien im allgemeinen in der Stringtheorie bemerkbar machen. Die wesentlichen mathematischen Strukturen, die hierbei auftreten, sind die Absteigegleichung und die Gerstenhaber-Algebra. Aufbauend auf den Ergebnissen über die BRST-Kohomologie wird dann mit diesem Formalismus ein unendlicher Satz von Ladungen konstruiert. Die daraus abgeleiteten Transformationen der physikalischen Zustände der Theorie stimmen mit den linearisierten Symmetrien der effektiven Feldtheorie überein. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden dann noch die entsprechenden Ward-Identitäten abgeleitet, und es wird gezeigt, daß aus ihnen das Verschwinden aller Amplituden mit mehr als drei äußeren Beinen in niedrigster Ordnung der Störungstheorie folgt.

Kapitel VI enthält schließlich noch eine Zusammenfassung der Ergebnisse und einige abschließende Bemerkungen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I:

Einleitung

Die Stringtheorie entstand vor etwa 30 Jahren und wurde seitdem von vielen Physikern und Mathematikern intensiv untersucht. Ihre Verfechter behaupten, sie sei *der* Kandidat für eine vereinheitlichende Theorie aller grundlegenden Naturphänomene. Einerseits bietet sie die Möglichkeit, auf elegante Art das Standardmodell der Elementarteilchenphysik zu reproduzieren, während andererseits auch die Gravitation in natürlicher Weise auftaucht.
Verglichen mit der Quantenfeldtheorie, die sie ja erweitern soll, steckt die Stringtheorie aber noch in den Kinderschuhen. Obwohl die Quantenfeldtheorie Punktteilchen beschreibt, sind die zentralen Objekte der Theorie nicht die Koordinaten der Teilchen, sondern Quantenfelder, in denen die Koordinaten nur als Argumente auftreten. In diesem Formalismus wurden fundamentale Symmetrieprinzipien – die Eichsymmetrien – entdeckt, die glänzend durch Experimente bestätigt wurden und zudem ein einfaches, geometrisch zu verstehendes Grundkonzept liefern.
Die Stringtheorie ist von einer solchen Eleganz weit entfernt. In ihrer gängigen Formulierung stehen nach wie vor Koordinaten im Mittelpunkt, die die Ausbreitung des Strings in einer vorgegebenen Raumzeitgeometrie beschreiben. Außerdem werden die Korrelationsfunktionen nach dem heutigen Stand der Kunst als Summe von Feynman-Diagrammen *definiert*. Das steht in starkem Kontrast zur Feldtheorie, in der es eine klare, auf dem Wirkungsprinzip beruhende Definition der Theorie gibt und Störungstheorie nur eine mögliche Methode zur Berechnung von Korrelationsfunktionen ist. Die Nachteile dieser erstquantisierten Beschreibung des Strings sind gravierend: Erstens hängen fast alle phänomenologischen Konsequenzen von der Wahl der Targetraumgeometrie ab, so daß die Stringtheorie bis zum heutigen Tage nur wenig Vorhersagekraft hat. Zweitens ist klar, daß eine Theorie, in der ein Raumzeithintergrund vorgegeben werden muß, kaum der richtige Rahmen ist, um die konzeptionellen Probleme der Quantengravitation zu lösen. Es ist also unbedingt erforderlich, eine brauchbare, nicht auf Störungstheorie beruhende Definition der Theorie zu finden, in der sich die Raumzeitgeometrie als Vakuumzustand aus Grundprinzipien berechnen läßt. Dies hat sich allerdings als außerordentlich schwieriges Problem erwiesen. Sicherlich ist der Fortschritt, der in den vergangenen Jahren in dieser Richtung gemacht wurde, enorm ('die zweite Superstringrevolution'). Dennoch „ist es wahrscheinlich, daß einige Grundkonzepte

noch unverstanden sind "([44], Abschnitt 8).
Um in dieser Frage weiterzukommen, ist es plausibel, nicht nur das phänomenologisch interessante, aber sehr komplexe Stringmodell mit $N=1$ Supersymmetrie auf der Weltfläche zu untersuchen, sondern auch andere Theorien, die für physikalische Anwendungen vielleicht uninteressant aber unter Umständen weniger kompliziert sind. Eine Möglichkeit ist, Theorien mit $N=2$ Supersymmetrie auf der Weltfläche zu betrachten. Eine solche Theorie ist radikal einfacher als der $N=1$ String, denn der einzige Freiheitsgrad ist die Schwerpunktsbewegung des Strings. Der $N=2$ String scheint auf den ersten Blick also ein ideales 'toy-model' zu sein. Es stellt sich jedoch heraus, daß er einen Targetraum mit zwei komplexen Dimensionen besitzt, was der Theorie einen etwas bizarren Anstrich gibt. In [37] wurde dennoch gezeigt, daß sich der Freiheitsgrad des geschlossenen $N=2$ Strings in sinnvoller und bemerkenswert konsistenter Weise als Fluktuation einer Kählermetrik interpretieren läßt.
Kählermetriken in zwei komplexen Dimensionen wurden in der Mathematik gründlich untersucht. Eine elegante Beschreibung, die besonders eng mit dem $N=2$ String zusammenhängt, wurde von Plebanski gefunden [40]. Ein interessanter Aspekt der Plebanski-Gleichung ist, daß sie eine unendlichdimensionale Algebra nichtlokaler Symmetrien besitzt. In gewissem Sinne ist sie also ein integrables Modell. Der Hauptaspekt dieser Arbeit ist, analoge Symmetrien in der $N=2$ Stringtheorie zumindest ansatzweise sichtbar zu machen, in der Hoffnung, daß dies als ein erster Schritt zu einem genauen Verständnis der Symmetriestruktur dieser relativ einfachen Theorie dienen könnte. Vielleicht lassen sich daraus irgendwann Ideen für eine tieferes Verständnis auch der $N=1$ Stringtheorie ableiten.
Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel II wird zuerst eine allgemeine Einführung in den $N=2$ String gegeben. Im dritten Kapitel wird dann die BRST-Kohomologie für generischen Impuls, also das Spektrum der Theorie, bestimmt. Dies ist ein Problem, das aufgrund des sogenannten Bildwechsel-Phänomens keineswegs trivial ist. In Kapitel IV wird dann die Kohomologie bei Impuls $k=0$ berechnet. Für das Spektrum ist dieser Fall irrelevant, er dient aber als wichtige Vorarbeit zur Untersuchung der Symmetrien. Insbesondere werden wir sehen, daß sich die Kohomologie bei $k=0$ deutlich anders verhält als bei nichtverschwindendem Impuls. In Kapitel V werden die Symmetrien der Theorie behandelt. Dazu wird zunächst die Plebanski-Gleichung untersucht um zu sehen, welche Transformationen wir auf der Seite der Stringtheorie erwarten sollten. Danach wird ein allgemeiner Überblick über Symmetrien in der Stringtheorie gegeben und darauf aufbauend ein unendlicher Satz erhaltener Ladungen angegeben. Die daraus abgeleiteten Transformationsgesetze passen mit denen der Plebanski-Gleichung gut zusammen. Außerdem werden noch Ward-Identitäten abgeleitet und damit die Auswirkungen der Symmetrien auf die Korrelationsfunktionen untersucht. Das letzte Kapitel enhält schließlich eine Zusammenfassung und einige Bemerkungen zur Interpretation der Ergebnisse.

Kapitel II:

Grundlagen

1. Der N=2 String

In direkter Verallgemeinerung des N=1 Strings wird der N=2 String durch N=2 Supergravitation auf der zweidimensionalen Weltfläche beschrieben. Neben den Stringkoordinaten $X^\mu(\tau,\sigma)$ mit Superpartnern $\psi^\mu(\tau,\sigma)$ enthält die Weltflächentheorie die zweidimensionale Metrik g_{mn}, ein komplexes Gravitino χ und ein zur internen $U(1)$-Symmetrie gehörendes Vektorfeld A_m. Es wird sich herausstellen, daß die kritische Dimension vier ist[1]. Allerdings erzwingt die N=2 Supersymmetrie, die Stringkoordinaten zu den komplexen Koordinaten Z^a und Ψ^{+a}, $a=1,2$ zusammenzufassen:

$$\begin{aligned} Z^0 &= X^0 + iX^2, & \Psi^{+0} &= \psi^0 + i\psi^2, \\ Z^1 &= X^1 + iX^3, & \Psi^{+1} &= \psi^1 + i\psi^3. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Die komplex konjugierten Größen werden mit $\bar{Z}^{\bar{a}}$ und $\Psi^{-\bar{a}}$ bezeichnet. Die Wirkung hat dann folgende Gestalt:

$$S = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{M}_g} d\sigma d\tau \sqrt{g}\mathcal{L}, \tag{2.1.2}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \eta_{a\bar{b}}\big[&\tfrac{1}{2}g^{mn}\partial_m \bar{Z}^{\bar{b}}\partial_n Z^a + \frac{i}{2}\Psi^{-\bar{b}}\gamma^m \overleftrightarrow{D}_m \Psi^{+a} \\ &+ A_m \Psi^{-\bar{b}}\gamma^m \Psi^{+a} + (\partial_m \bar{Z}^{\bar{b}} + \Psi^{-\bar{b}}\chi_m)\bar{\chi}_n \gamma^m \gamma^n \Psi^{+a} \\ &+ (\partial_m Z^a + \bar{\chi}_m \Psi^{+a})\Psi^{-\bar{b}}\gamma^n\gamma^m \chi_n\big]. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Die Indizes m,n nehmen hier die Werte τ, und σ an und D steht für die Lorentzkovariante Ableitung, enthält also nicht das Eichfeld A_m (eine ausführliche Diskussion dieser Wirkung findet man in [8])[2]. Die Metrik, das Gravitino und das

[1] Für einen Beweis siehe den nächsten Abschnitt.

[2] Zur Notation: $\eta_{a\bar{b}} = \mathrm{diag}(-,+)$ ist die flache Metrik des zwei-komplex-dimensionalen Targetraumes. Die Wahl der Signatur wird später erklärt. Das entsprechende Skalarprodukt wird wie üblich mit einem Punkt abgekürzt. Zum Beispiel ist $Z\cdot\bar{Z} \equiv \eta_{a\bar{b}}Z^a\bar{Z}^{\bar{b}} = -Z^0\bar{Z}^{\bar{0}} + Z^1\bar{Z}^{\bar{1}}$.

Eichfeld tauchen in der Wirkung ohne kinetische Terme auf. Ihre Bewegungsgleichungen ergeben, daß der Energie-Impuls-Tensor T , die Supersymmetrieströme G und der $U(1)$-Strom J, definiert durch

$$T_{mn} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\mathcal{L}}{\partial g^{mn}}, \qquad J_m = \frac{i}{4}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^m},$$
$$G^+_m = -\frac{1}{4}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\chi}^m}, \qquad G^-_m = -\frac{1}{4}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi^m}, \tag{2.1.4}$$

verschwinden. Für die String-Störungsrechnung ist es notwendig, die Theorie auf einer beliebigen Riemannfläche $\mathcal{M}_g$ mit Genus g zu studieren. In dieser Arbeit beschränken wir uns aber auf $g = 0$, also die komplexe Ebene, bei der die Punkte im Unendlichen identifiziert werden. Die lokalen Symmetrien reichen dann aus, in die konforme Eichung überzugehen[3],

$$g_{mn} = \eta_{mn}, \qquad \chi_m = A_m = 0. \tag{2.1.5}$$

Dadurch sind die Symmetrien allerdings noch nicht vollständig beseitigt. Die Theorie ist immer noch invariant unter N=2 superkonformen Transformationen, die von den Symmetrieströmen (2.1.4) erzeugt werden. Es ist üblich, komplexe Koordinaten $z = \tau + i\sigma$ auf der Weltfläche einzuführen. Die Bewegungsgleichungen der verbleibenden Felder lauten in der konformen Eichung

$$\partial\bar{\partial}Z^a = \partial\bar{\partial}\bar{Z}^{\bar{a}} = 0, \qquad \bar{\partial}\psi^{+a} = \bar{\partial}\psi^{-\bar{a}} = \partial\tilde{\psi}^{+a} = \partial\tilde{\psi}^{-\bar{a}} = 0. \tag{2.1.6}$$

$\tilde{\psi}$ und ψ sind hierbei die beiden Spinorkomponenten von Ψ, also $\Psi^{+a} = (\tilde{\psi}^{+a}, \psi^{+a})$. Die Felder spalten in einen holomorphen (= linkslaufenden) und einen antiholomorphen (= rechtslaufenden) Anteil auf. In dieser Arbeit wird angenommen, daß die Felder Neveu-Schwarz-Randbedingungen annehmen. Die bosonischen Stringkoordinaten Z^a sind also periodisch und die Fermionen antiperiodisch auf einer den Ursprung einschließenden geschlossenen Kurve. Die Felder lassen sich dann folgendermaßen in Laurent-Reihen entwickeln:

$$i\partial Z^a(z) = \sum_n \alpha^a_n z^{-1-n}, \qquad i\partial\bar{Z}^{\bar{a}}(z) = \sum_n \bar{\alpha}^{\bar{a}}_n z^{-1-n},$$
$$i\bar{\partial}Z^a(\bar{z}) = \sum_n \tilde{\alpha}^a_n \bar{z}^{-1-n}, \qquad i\bar{\partial}\bar{Z}^{\bar{a}}(\bar{z}) = \sum_n \bar{\tilde{\alpha}}^{\bar{a}}_n \bar{z}^{-1-n},$$
$$i\psi^{+a}(z) = \sum_r d^{+a}_r z^{-1/2-r}, \qquad i\psi^{-\bar{a}}(z) = \sum_r d^{-\bar{a}}_r z^{-1/2-r},$$
$$i\tilde{\psi}^{+a}(\bar{z}) = \sum_r \tilde{d}^{+a}_r \bar{z}^{-1/2-r}, \qquad i\tilde{\psi}^{-\bar{a}}(\bar{z}) = \sum_r \tilde{d}^{-\bar{a}}_r \bar{z}^{-1/2-r}. \tag{2.1.7}$$

[3]Das Eichfeld kann selbst auf der Sphäre in einem nichttrivialen Bündel leben. Dann ist die konforme Eichung nicht möglich. Dieser Fall wird ausführlich in [8] beschrieben. Hier beschränken wir uns auf den Fall eines trivialen Bündels.

Die α- und d-Oszillatoren beschreiben die Eigenschwingungen des Strings. Kanonische Quantisierung der Wirkung (2.1.3) macht die Laurent-Moden zu Operatoren und führt zu den Vertauschungsrelationen

$$[\alpha_m^a, \bar{\alpha}_n^{\bar{b}}] = 2m\delta_{m+n}\eta^{a\bar{b}}, \qquad \{d_r^{+a}, d_s^{-\bar{b}}\} = 2\delta_{r+s}\eta^{a\bar{b}},$$
$$[\tilde{\alpha}_m^a, \bar{\tilde{\alpha}}_n^{\bar{b}}] = 2m\delta_{m+n}\eta^{a\bar{b}}, \qquad \{\tilde{d}_r^{+a}, \tilde{d}_s^{-\bar{b}}\} = 2\delta_{r+s}\eta^{a\bar{b}}. \tag{2.1.8}$$

Alle anderen Kommutatoren verschwinden; insbesondere kommutieren Links- und Rechtsläufer. Mit diesen Vertauschungsregeln lassen sich die Operatorprodukt-Entwicklungen (OPE) der Stringkoordinaten berechnen:

$$\begin{aligned} Z^a(z,\bar{z})\bar{Z}^{\bar{b}}(w,\bar{w}) &\sim -2\eta^{a\bar{b}}\big(\ln(z-w)+\ln(\bar{z}-\bar{w})\big), \\ \psi^{+a}(z)\psi^{-\bar{b}}(w) &\sim -2\frac{\eta^{a\bar{b}}}{z-w}, \\ \tilde{\psi}^{+a}(\bar{z})\tilde{\psi}^{-\bar{b}}(\bar{w}) &\sim -2\frac{\eta^{a\bar{b}}}{\bar{z}-\bar{w}}. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Um auch noch die Schwerpunktbewegung des Strings zu berücksichtigen, definieren wir für jeden Targetraum-Impuls k einen Zustand $|k\rangle$ und unterteilen die Oszillatoren in Erzeuger und Vernichter:

$$\begin{aligned} \alpha_m^a\,|k\rangle = d_r^{+a}\,|k\rangle = \tilde{\alpha}_m^a\,|k\rangle = \tilde{d}_r^{+a}\,|k\rangle &= 0, \qquad \text{falls} \qquad m,r>0 \\ \alpha_m^a\,|k\rangle\,,\ d_r^{+a}\,|k\rangle\,,\ \tilde{\alpha}_m^a\,|k\rangle\,,\ \tilde{d}_r^{+a}\,|k\rangle &\neq 0, \qquad \text{falls} \qquad m,r<0 \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Hermitesche Konjugation der Fouriermoden ergibt

$$\left(\alpha_m^a\right)^\dagger = \bar{\alpha}_{-m}^{\bar{a}}, \qquad \left(d_r^{+a}\right)^\dagger = d_{-r}^{-\bar{a}}, \tag{2.1.11}$$

(Rechtsläufer analog). Die Nullmode der Stringkoordinate übernimmt eine besondere Rolle und mißt den Schwerpunkt-Impuls des Strings[4]:

$$\alpha_0^a\,|k\rangle = \tilde{\alpha}_0^a\,|k\rangle = k^a\,|k\rangle\,. \tag{2.1.12}$$

Auf jedem Zustand $|k\rangle$ läßt sich aus den Oszillatoren mit negativem Modenindex ein Fockraum $\mathcal{F}_{cl}^{mat}(k)$ aufbauen. Da links- und rechtslaufende Moden unabhängig voneinander sind, faktorisiert der Fockraum

$$\mathcal{F}_{cl}^{mat}(k) = \mathcal{F}_L^{mat}(k) \otimes \mathcal{F}_R^{mat}(k). \tag{2.1.13}$$

Die Elemente von $\mathcal{F}_L^{mat}(k)$ beziehungsweise $\mathcal{F}_R^{mat}(k)$ sind Polynome aus den negativ gemodeten α- und d-Oszillatoren beziehungsweise den $\tilde{\alpha}$- und $\tilde{d}$-Oszillatoren.

[4] Das kann man sehr einfach nachprüfen, indem man Translationsinvarianz der Wirkung (2.1.3) im Targetraum ausnutzt. Dieser Punkt wird aber später noch ausführlich diskutiert.

Bei vielen Problemen ist es einfacher, zunächst nur eine der beiden Hälften zu studieren – der entsprechende Fockraum heißt chiraler Fockraum $\mathcal{F}^{mat}(k)$. In dieser Sprechweise sind der links- und rechtslaufende Anteil in (2.1.13) beide isomorph zur chiralen Theorie.

In der konformen Eichung vereinfachen sich auch die Symmetrieströme. Insbesondere sind die einzelnen Komponenten entweder holomorph oder antihomolorph. Die holomorphen Komponenten sind

$$\begin{aligned} T_{zz} &= -\tfrac{1}{2}\partial\bar{Z}\cdot\partial Z - \tfrac{1}{4}\partial\psi^-\cdot\psi^+ - \tfrac{1}{4}\partial\psi^+\cdot\psi^-, \\ G_z^+ &= \partial\bar{Z}\cdot\psi^+, \qquad G_z^- = \partial Z\cdot\psi^-, \\ J_z &= \tfrac{1}{2}\psi^-\cdot\psi^+. \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Die Indizes an den Symmetrieströmen werden in Zukunft ebenfalls unterdrückt. Die Laurent-Entwicklung der Symmetrieströme ist

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \qquad L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \\ G^\pm(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} G_r^\pm z^{-r-\frac{3}{2}}, \qquad G_r^\pm = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r+\frac{1}{2}} G^\pm(z), \\ J(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}, \qquad J_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n J(z). \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Die Moden der Ströme lassen sich dann durch die Laurent-Koeffizienten der Felder ausdrücken

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\sum_m :\bar{\alpha}_{n-m}\cdot\alpha_m: -\frac{1}{4}\sum_r r:(d_r^-\cdot d_{n-r}^+ + d_r^+\cdot d_{n-r}^-): \\ G_r^+ &= -\sum_m \bar{\alpha}_m\cdot d_{r-m}^+, \qquad G_r^- = -\sum_m \alpha_m\cdot d_{r-m}^- \\ J_n &= -\frac{1}{2}\sum_r :d_{n-r}^-\cdot d_r^+: . \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Die Normalordnung ist wie üblich durch die Vorschrift definiert, daß Erzeuger links von Vernichtern stehen. Hermitesches Konjugieren liefert

$$L_n^\dagger = L_{-n}, \qquad J_n^\dagger = J_{-n}, \qquad \left(G_r^\pm\right)^\dagger = G_{-r}^\mp. \tag{2.1.17}$$

Die Generatoren erfüllen die N=2 superkonforme Algebra

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n}\,,\\
[L_m, G^\pm_r] &= (\frac{1}{2}m - r)G^\pm_{m+r}\,,\\
[L_m, J_n] &= -nJ_{m+n}\,,\\
\{G^+_r, G^-_s\} &= \frac{2c}{3}(r^2-\frac{1}{4})\delta_{r+s} - 2(r-s)J_{r+s} + 4L_{r+s}\,,\\
[J_m, G^\pm_r] &= \pm G^\pm_{m+r}\,,\\
[J_m, J_n] &= \frac{c}{3}m\delta_{m+n}
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

mit $c = 6$. Neben den Symmetrieströmen in (2.1.14) gibt es auch noch analoge antiholomorphe Ströme $\tilde{T}(\bar{z})$, $\tilde{G}^\pm(\bar{z})$ und $\tilde{J}(\bar{z})$. Fourierentwicklung wie oben führt auf eine weitere, aus rechtslaufenden Oszillatoren bestehende N=2 Algebra, die mit den Generatoren (2.1.16) vertauscht.
Die Bewegungsgleichungen der weggeeichten Felder bedeuten, daß die Symmetrieströme verschwinden müssen. Die Generatoren der N=2 superkonformen Algebra dienen als Zwangsbedingungen und bestimmen im wesentlichen das Spektrum (siehe Abschnitt zwei). Wir haben uns hier scheinbar willkürlich auf NS-Randbedingungen beschränkt. Vom N=1 String ist aber bekannt, daß zum Beispiel auch Ramond-Randbedingungen, bei denen die Fermionen periodisch in der komplexen Ebene sind, eine wichtige Rolle spielen. Welche Randbedingungen möglich sind, wird aus der Forderung bestimmt, daß bei der Variation der Wirkung eventuell auftretende Randterme verschwinden. Beim N=2 String stellt sich heraus, daß ein ganzes Kontinuum von Randbedingungen für die Fermionen möglich sind. Eine Laurent-Entwicklung der Felder wie oben für NS-Randbedingungen führt dann aber auf Symmetrie-Algebren, die zur NS-Algebra isomorph sind. Der Operator, der diesen Isomorphismus implementiert (der sogenannte Spektralflußoperator), interpoliert also kontinuierlich zwischen verschiedenen Randbedingungen und sorgt dafür, daß die verschiedenen Randbedingungen für die Fermionen zu äquivalenten Theorien führen. In [46] wurde gezeigt, daß es genau eine N=2 superkonforme Algebra gibt, die nicht durch Spektralfluß aus der NS-Algebra hervorgeht. Diese sogenannte getwistete Algebra tritt auf, wenn man für eine der zwei komplexen Stringkoordinaten antiperiodische Randbedingungen annimmt. Dies entspricht einem Targetraum, in dem zwei Dimensionen als eine $\mathbb{Z}_2$-Orbifold kompaktifiziert sind. In [26] hat sich aber herausgestellt, daß diese Theorie keine Wechselwirkungen beschreibt und daher uninteressant ist. Es ist also keine Einschränkung, sich auf den NS-Sektor zu konzentrieren, sondern lediglich eine Wahl, die die ganze Theorie wesentlich vereinfacht.
Die Generatoren der N=2 superkonformen Algebra sind quadratisch in den Oszillatoren. Da die Indizes der komplexen Targetraum-Koordinaten nur zwei Werte

annehmen, liegt es nahe, auch Kombinationen der Felder, die mit dem ϵ-Tensor gebildet werden, zu betrachten. Diese Ströme werden in den folgenden Kapiteln auftauchen und werden hier zur späteren Referenz angegeben:

$$\begin{aligned} J^{++} &= \frac{1}{4}\epsilon_{ab}\psi^{+a}\psi^{+b}, & J^{--} &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\bar{a}\bar{b}}\psi^{-\bar{a}}\psi^{-\bar{b}}, \\ \check{G}^{+} &= \epsilon_{ab}\partial Z^{a}\psi^{+b}, & \check{G}^{-} &= -\epsilon_{\bar{a}\bar{b}}\partial\bar{Z}^{\bar{a}}\psi^{-\bar{b}}. \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Alle Ströme zusammen bilden die N=4 superkonforme Algebra. Es ist aber wichtig, im Gedächtnis zu behalten, daß nur der N=2 Anteil (2.1.14) aufgrund der Bewegungsgleichungen der nichtdynamischen Felder in der Wirkung (2.1.3) verschwinden muß, das heißt, nur die Moden dieser Ströme werden im BRST-Operator auftauchen (siehe nächster Abschnitt).

2. BRST-Quantisierung

In der konformen Eichung fallen die Metrik, das Gravitino und das $U(1)$ Eichfeld völlig aus der Wirkung heraus. Es ist dennoch wichtig, ihre Bewegungsgleichungen, die ja gerade das Verschwinden der Symmetrieströme (2.1.4) bedeuten, nicht zu vergessen. Die Situation ist analog zur Maxwell-Theorie, bei der die Bewegungsgleichung des Feldes A^0 das Gaußsche Gesetz $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ liefert. Für elektromagnetische Wellen im Vakuum folgt daraus, daß das $\vec{E}$- Feld immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht, beziehungsweise daß Photonen transversal polarisiert sind. Das Gaußsche Gesetz bestimmt also das Spektrum der Theorie, das sich natürlich nicht ändert, wenn man zur Coulomb-Eichung $A^0 = 0$ übergeht, obwohl man es dann nicht mehr als Bewegungsgleichung aus der eichfixierten Wirkung erhalten kann. $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ muß als Zwangsbedingung in die Theorie eingebaut werden.

Die Generatoren der N=2 superkonformen Algebra spielen eine dem Gaußschen Gesetz analoge Rolle und bestimmen das Spektrum der N=2 Stringtheorie. Ein mathematisches Verfahren, diese Zwangsbedingungen zu berücksichtigen, ist die BRST-Quantisierung, die darin besteht, jedem Generator der Symmetriealgebra eine Geist- und eine Antigeistmode zuzuordnen. Heuristisch betrachtet sind die Geist- und Antigeistfelder 'negative' Freiheitsgrade, die longitudinal und zeitartig polarisierte Zustände kompensieren. Mit den Geistfeldern läßt sich der nilpotente BRST-Operator Q konstruieren. Die Erfahrung zeigt, daß sich die Kohomologie dieses Operators auf dem geisterweiterten Hilbertraum sinnvoll als Raum der physikalischen Zustände der Theorie benutzen läßt. Ist der physikalische Hilbertraum erst einmal auf diese Weise identifiziert, lassen sich wichtige Eigenschaften wie Unitarität der S-Matrix und Ward-Identitäten zwischen verschiedenen Streuamplituden sehr effizient nachweisen.

Allgemeiner Formalismus

Um die Grundprinzipien der BRST-Konstruktion zu erläutern, betrachten wir zunächst eine beliebige Super-Lie-Algebra mit bosonischen und fermionischen Basiselementen T_a und F_α. Die Vertauschungsrelationen lauten:

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= f_{ab}{}^c T_c, \\ [T_a, F_\beta] &= f_{a\beta}{}^\gamma F_\gamma, \\ \{F_\alpha, F_\beta\} &= f_{\alpha\beta}{}^c T_c. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Jedem Basiselement wird ein Geist c^a beziehungsweise γ^α und ein Antigeist b_a beziehungsweise β_α zugeordnet. Die Geistmoden haben eine den zugehörenden Generatoren entgegengesetzte Statistik und erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\{b_a, c^b\} = \delta_a^b, \qquad [\beta_\alpha, \gamma^\beta] = \delta_\alpha^\beta. \tag{2.2.2}$$

Der BRST-Operator Q ist dann definiert als

$$Q = c^a T_a + \gamma^\alpha F_\alpha - \frac{1}{2} f_{ab}{}^c c^a c^b b_c - f_{a\beta}{}^\gamma c^a \gamma^\beta \beta_\gamma - \frac{1}{2} f_{\alpha\beta}{}^c \gamma^\alpha \gamma^\beta b_c \tag{2.2.3}$$

Die Nilpotenz von Q läßt sich mit Hilfe der Jacobi-Identität der zugrundeliegenden Lie-Algebra nachweisen. Der Kommutator von Q mit den Antigeistern liefert geisterweiterte Lie-Algebra Elemente $\hat{T}$ und $\hat{F}$:

$$\begin{aligned} \hat{T}_a &:= \{Q, b_a\} = T_a + T_a^{gh}, & T_a^{gh} &= -f_{ab}{}^c c^b b_c - f_{a\beta}{}^\gamma \gamma^\beta \beta_\gamma, \\ \hat{F}_\alpha &:= \{Q, \beta_\alpha\} = F_\alpha + F_\alpha^{gh}, & F_\alpha^{gh} &= -f_{b\alpha}{}^\gamma c^b \beta_\gamma - f_{\beta\alpha}{}^c \gamma^\beta b_c. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Mit Hilfe der Vertauschungsrelationen läßt sich nachprüfen, daß die Geistanteile T_a^{gh} und F_α^{gh} wieder die ursprüngliche Algebra (2.2.1) erfüllen.
Im unendlichdimensionalen Fall kann es vorkommen, daß aufgrund von Normalordnungsproblemen sowohl in der ursprüglichen Algebra der T_a und F_α als auch in der Algebra der Geistanteile zentrale Ladungen auftreten (wie etwa in (2.1.18)). Diese zentralen Terme müssen sich gegeneinander kürzen; die geisterweiterten Generatoren $\hat{T}_a$ und $\hat{F}_\alpha$ müssen also eine Lie-Algebra ohne zentrale Ladung erfüllen. Nur dann kann man die Nilpotenz des BRST-Operators zeigen, die grundlegend für den ganzen Formalismus ist.
Es ist instruktiv, sich die mathematische Bedeutung der BRST-Konstruktion klarzumachen. Dazu beschränken wir uns auf den Fall einer rein bosonischen Lie-Algebra, die man als den Raum der linksinvarianten Vektorfelder auf der Gruppenmannigfaltigkeit beschreiben kann. Die Geistmoden c^a lassen sich dann als die dazu dualen linksinvarianten 1-Formen auffassen. Sie bilden also die Lie-Algebra-Elemente in die reellen Zahlen ab: $c^a(T_b) = \delta_b^a$. Die BRST-Transformation

$$\{Q, c^c\} = -\frac{1}{2} f_{ab}{}^c c^a c^b \tag{2.2.5}$$

ist die Maurer-Cartan-Gleichung, das heißt der BRST Operator ist der äußere Differentialoperator auf der Gruppenmannigfaltigkeit. Der Zusatzterm $c^a T_a$ bedeutet, daß Q die Lie-Algebra-Kohomologie – also die de-Rahm Kohomologie der linksinvarianten 1-Formen – mit Koeffizienten in der Darstellung der Lie-Algebra berechnet. Im uns interessierenden Fall einer Stringtheorie ist dieser Darstellungsraum ein Fockraum. Diese Sichtweise wird in Kapitel III eine Rolle spielen.

BRST-Quantisierung des N=2 Strings

Für die BRST-Quantisierung des N=2 Strings muß dieser Formalismus auf die direkte Summe aus links- und rechtslaufender N=2 super Virasoro Algebra angewandt werden. Dazu werden die zu den L_n gehörenden Reparametrisierungsgeister c^n, b_n, die zu den J_n gehörenden $U(1)$-Geister c'^n, b'_n und die Supersymmetriegeister $\gamma^{\pm r}, \beta_r^{\mp}$, sowie ein analoger Satz rechtslaufender Geistmoden benötigt. Der resultierende BRST-Operator ist die Summe aus identischen links- und rechtslaufenden Anteilen,

$$Q = Q_L + Q_R. \tag{2.2.6}$$

Wir diskutieren daher zunächst nur einen der beiden Sektoren, also die chirale Theorie.
In der Stringtheorie ist es üblich, die Notation auf folgende Weise zu wechseln,

$$c^n, c'^n \to c_{-n}, c'_{-n}, \qquad \gamma^{\pm r} \to \gamma^{\pm}_{-r}, \qquad \beta_r^{\pm} \to -\beta_r^{\pm}, \tag{2.2.7}$$

was auf die Vertauschungsrelationen

$$\{c_n, b_m\} = \delta_{n+m}, \qquad \{c'_n, b'_m\} = \delta_{n+m}, \qquad [\gamma_r^{\pm}, \beta_s^{\mp}] = \delta_{r+s} \tag{2.2.8}$$

führt. Um einen Fockraum zu erhalten, der die Geistanregungen des Strings beschreibt, ist es notwendig, einen Grundzustand zu wählen, der die Geistmoden in Erzeuger und Vernichter einteilt.
Im Fall der fermonischen Geister ist diese Wahl irrelevant. Sei zum Beispiel $|p\rangle$ der Zustand, der von allen c_n mit $n > p{+}1$ vernichtet wird. Aufgrund der fermionischen Natur der c_n gibt es eine einfache Relation zwischen $|p\rangle$ und $|p+1\rangle$:

$$|p\rangle = c_{p+2}\,|p+1\rangle\,, \qquad |p+1\rangle = b_{-p-2}\,|p\rangle \tag{2.2.9}$$

Die auf $|p\rangle$ und $|p+1\rangle$ aufgebauten Fockräume sind also identisch. Es stellt sich als bequem heraus, als Grundzustand den Zustand $|0\rangle_f$ mit

$$\begin{aligned} c_n\,|0\rangle_f &= 0 \text{ für } n > 1, \qquad & b_n\,|0\rangle_f &= 0 \text{ für } n > -2, \\ c'_n\,|0\rangle_f &= 0 \text{ für } n > 0, \qquad & b'_n\,|0\rangle_f &= 0 \text{ für } n > -1 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

zu benutzen.
Bei den bosonischen Geistern ist die Situation komplizierter. Mögliche Grundzustände lassen sich durch zwei Bildladungen $\pi^\pm \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ charakterisieren,

$$\begin{aligned} \gamma_r^\mp \left|\pi^+, \pi^-\right\rangle_b &= 0 \;\text{ für } r \geq \pi^\pm + \frac{3}{2}, \\ \beta_r^\pm \left|\pi^+, \pi^-\right\rangle_b &= 0 \;\text{ für } r \geq -\pi^\pm - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Da es sich hier um bosonische Geistmoden handelt, führt jede Wahl des Grundzustandes auf verschiedene Räume. Der auf $|0\rangle_f \otimes |\pi^+, \pi^-\rangle_b$ aufgebaute chirale Fockraum aller Geistmoden wird mit $\mathcal{F}^{gh}_{\pi^+,\pi^-}$ bezeichnet. Der komplette chirale Fockraum des Strings ist das Tensorprodukt aus Materiesektor und Geistsektor:

$$\mathcal{F}_{\pi^+,\pi^-}(k) = \mathcal{F}^{mat}(k) \otimes \mathcal{F}^{gh}_{\pi^+,\pi^-}. \tag{2.2.12}$$

Es gibt also eine unendliche Zahl äquivalenter Fockräume, von denen zunächst keiner besonders ausgezeichnet scheint. Der entsprchende Grundzustand wird mit

$$\left|\pi^+, \pi^-, k\right\rangle := |k\rangle \otimes |0\rangle_f \otimes \left|\pi^+, \pi^-\right\rangle_b \tag{2.2.13}$$

bezeichnet. Aus den Strukturkonstanten der N=2 superkonformen Algebra lassen sich die Geistanteile der Generatoren konstruieren:

$$\begin{aligned} L_n^{gh} &= \sum_m (m-n) : c_{-m} b_{m+n} : + \sum_m m : c'_{-m} b'_{m+n} : \\ &\quad + \sum_s (\frac{1}{2}n - s) : (\gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s} + \gamma^+_{-s}\beta^-_{n+s}) :, \\ J_n^{gh} &= \sum_m n c_{-m} b'_{m+n} + \sum_s : (\gamma^+_{-s}\beta^-_{n+s} - \gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s}) :, \\ G_s^{gh,\pm} &= -4\sum_r \gamma^\pm_{-r} b_{r+s} \pm 2\sum_r (r-s)\gamma^\pm_{-r} b'_{r+s} \\ &\quad + \sum_m (\frac{1}{2}m - s) c_{-m}\beta^\pm_{m+s} \pm \sum_m c'_{-m}\beta^\pm_{m+s}. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Die Doppelpunkte bezeichnen eine Normalordnung, die dafür notwendig ist, daß diese Operatoren auf dem Fockraum vernünftig definiert sind. Damit die Geistgeneratoren wieder die N=2 Algebra erfüllen, muß die Normalordnung korrekt gewählt werden. Die richtige Vorschrift ist Normalordnung bezüglich des Grundzustandes $|0\rangle_f$ für die fermionischen Geister und bezüglich $|\pi^+ = \pi^- = 0\rangle_b$ für die bosonischen Geister. Dann erfüllen die Generatoren in (2.2.14) die N=2 Algebra mit zentraler Ladung $c = -6$. In der kritischen Dimension wird diese zentrale

Ladung genau durch die Materiegeneratoren kompensiert, das heißt, die geisterweiteten Generatoren

$$\hat{L}_n = L_n + L_n^{gh}, \qquad \hat{J}_n = J_n + J_n^{gh}, \qquad \hat{G}_r^{\pm} = G_r^{\pm} + G_r^{gh,\pm}, \quad (2.2.15)$$

erfüllen die N=2 superkonforme Algebra ohne zentrale Ladung – wie bereits erwähnt eine notwendige Voraussetzung für die Nilpotenz des BRST-Operators. Der vollständige BRST-Operator $Q = Q^{mat} + Q^{gh}$ lautet

$$\begin{aligned}
Q^{mat} &= \sum_m (c_{-m}L_m + c'_{-m}J_m) + \sum_r (\gamma^+_{-r}G^-_r + \gamma^-_{-r}G^+_r),\\
Q^{gh} &= -\frac{1}{2}\sum (m-n) : c_{-m}c_{-n}b_{m+n} : - \sum m : c'_{-m}c_{-n}b'_{m+n} :,\\
&+ \frac{1}{2}\sum (n-2s)c_{-n} : (\gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s} + \gamma^+_{-s}\beta^-_{n+s}) :\\
&- \sum c'_{-n} : (\gamma^+_{-s}\beta^-_{n+s} - \gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s}) :\\
&- 4\sum \gamma^-_{-s}\gamma^+_{-r}b_{r+s} - 2\sum (s-r)\gamma^-_{-s}\gamma^+_{-r}b'_{r+s}. \qquad (2.2.16)
\end{aligned}$$

Aus (2.1.17) und der Forderung, daß der BRST-Operator hermitesch ist, läßt sich das Verhalten der Geistmoden unter hermitescher Konjugation bestimmen

$$c_n^\dagger = c_{-n}, \qquad {c'}_n^\dagger = c'_{-n}, \qquad (\gamma_r^{\pm})^\dagger = \gamma^{\mp}_{-r}. \qquad (2.2.17)$$

Für die Antigeister folgt dann aus den Vertauschungsrelationen (2.2.8)

$$b_n^\dagger = b_{-n}, \qquad {b'}_n^\dagger = b'_{-n}, \qquad (\beta_r^{\pm})^\dagger = -\beta^{\mp}_{-r}. \qquad (2.2.18)$$

Eine nützliche Charakterisierung eines Zustandes ist seine Geistzahl, d.h. sein Eigenwert bezüglich des Operators

$$N^g = N^g_{bc} + N^g_{b'c'} + N^g_{\beta\gamma}. \qquad (2.2.19)$$

Hierbei sind

$$N^g_{bc} = -\sum_n : b_{-n}c_n :, \qquad N^g_{b'c'} = -\sum_n : b'_{-n}c'_n : . \qquad (2.2.20)$$

Aufgrund der Normalordnungsvorschrift sind diese beiden Operatoren nicht hermitesch, sondern

$$\left(N^g_{bc}\right)^\dagger = -N^g_{bc} - 3, \qquad \left(N^g_{b'c'}\right)^\dagger = -N^g_{b'c'} - 1. \qquad (2.2.21)$$

Das Skalarprodukt zweier Zustände ist also nur dann von Null verschieden, wenn die Summe ihrer bc-Geistzahlen 3 und die ihrer $b'c'$-Geistzahlen 1 beträgt. Das fundamentale Skalarprodukt des fermionischen Geistsektors ist also

$${}_f\langle 0|c_1c_0c_{-1}c'_0|0\rangle_f = i. \qquad (2.2.22)$$

Den $\gamma\beta$-Anteil der Geistzahl definieren wir als

$$[N^g_{\beta\gamma}, \gamma_r] = \gamma_r\,, \qquad [N^g_{\beta\gamma}, \beta_r] = -\beta_r\,, \qquad N^g_{\beta\gamma}\left|\pi^+, \pi^-\right\rangle_b = 0. \quad (2.2.23)$$

$N^g_{\beta\gamma}$ läßt sich nicht durch die Moden der bosonischen Geister ausdrücken[5]. Ein expliziter Ausdruck wird allerdings im Rahmen der Bosonisierung im nächsten Abschnitt angegeben. Man kann allerdings auch Aussagen über das Skalarprodukt im $\gamma\beta$-Sektor machen, indem man die Nullmoden der bosonischen Symmetrieströme betrachtet,

$$\begin{aligned}
\hat{L}_0 &= \frac{1}{2}\sum_m :\bar{\alpha}_{-m}\cdot\alpha_m: -\frac{1}{4}\sum_r r:(d^-_r\cdot d^+_{-r} + d^+_r\cdot d^-_{-r}): \\
&\quad + \sum_m m:c_{-m}b_m: + \sum_m m:c'_{-m}b'_m: - \sum_s s:(\gamma^-_{-s}\beta^+_s + \gamma^+_{-s}\beta^-_s):, \\
\hat{J}_0 &= -\frac{1}{2}\sum_r :d^-_r\cdot d^+_{-r}: - \sum_s :(\gamma^+_{-s}\beta^-_s - \gamma^-_{-s}\beta^+_s):. \qquad (2.2.24)
\end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken ist es notwendig, auf die Normalordnung zu achten. Auf dem Grundzustand $|\,\pi^+, \pi^-, k\rangle$ wirken $\hat{L}_0$ und $\hat{J}_0$ als

$$\begin{aligned}
\hat{L}_0|\,\pi^+, \pi^-, k\rangle &= \Big[\pi^+\Big(\frac{\pi^+}{2}+1\Big) + \pi^-\Big(\frac{\pi^-}{2}+1\Big)\Big]|\,\pi^+, \pi^-, k\rangle, \\
\hat{J}_0|\,\pi^+, \pi^-, k\rangle &= \big(\pi^- - \pi^+\big)|\,\pi^+, \pi^-, k\rangle. \qquad (2.2.25)
\end{aligned}$$

Da $\hat{L}_0$ und $\hat{J}_0$ hermitesch sind, können nur Zustände mit gleichen Eigenwert ein nichtverschwindendes Skalarprodukt haben, d.h. ${}_b\langle\hat{\pi}^+, \hat{\pi}^-\,|\,\pi^+, \pi^-\rangle_b \neq 0$ nur falls $\hat{\pi}^\pm = \pi^\pm$ oder $\hat{\pi}^\pm = -\pi^\mp - 2$. Die erste Möglichkeit scheidet allerdings aus, wie man mit Hilfe der $\gamma\beta$-Vertauschungsrelation mit geeignetem Modenindex sieht. Zum Beispiel gilt im $(\pi^+, \pi^-) = (0, 0)$ Bild:

$${}_b\langle 0, 0|0, 0\rangle_b = {}_b\langle 0, 0|[\gamma^+_{1/2}, \beta^-_{-1/2}]|0, 0\rangle_b = 0, \qquad (2.2.26)$$

denn wegen $\beta^\pm_{\pm 1/2}|0, 0\rangle_b = 0$ vernichtet die β-Mode den Zustand auf beiden Seiten. Insgesamt erhalten wir das Skalarprodukt

$${}_b\langle -\pi^- - 2, -\pi^+ - 2|\pi^+, \pi^-\rangle_b = 1. \qquad (2.2.27)$$

[5] In der Literatur wird oft der Operator

$$N^g_{\beta\gamma} = -\sum_r :\beta_{-r}\gamma_r:$$

benutzt. Diese Definition gibt aber den Zuständen $\left|\pi^+, \pi^-\right\rangle_b$ unterschiedliche, bildabhängige Geistzahlen und wird daher in dieser Arbeit nicht benutzt.

Diese Relation zeigt, daß es nicht ausreicht, sich auf ein einziges Bild zu beschränken.

BRST-Kohomologie

Physikalische Zustände $|\text{phys}\rangle$ sind in diesem Formalismus dadurch gekennzeichnet, daß sie BRST-invariant sind, aber nicht im Bild von Q liegen.

$$Q\,|\text{phys}\rangle = 0, \qquad |\text{phys}\rangle \neq Q\,|A\rangle\,. \tag{2.2.28}$$

Der Raum der physikalischen Zustände – die BRST-Kohomologie – kann für jedes Bild und jeden Impuls getrennt betrachtet werden:

$$H_{\pi^+,\pi^-}(k) = \left\{\, |A\rangle \in \mathcal{F}_{\pi^+,\pi^-}(k) \;\middle|\; Q\,|A\rangle = 0,\, |A\rangle \neq Q\,|B\rangle \,\right\}. \tag{2.2.29}$$

Jeder Zustand läßt sich in Anteile definierter Geistzahl zerlegen. Damit erhält der Fockraum eine Gradierung

$$\mathcal{F}_{\pi^+,\pi^-}(k) = \sum_g \mathcal{F}^g_{\pi^+,\pi^-}(k) \tag{2.2.30}$$

in offensichtlicher Notation. Da der BRST-Operator homogen in der Geistzahl ist, überträgt sich diese Gradierung auf die Kohomologie:

$$H_{\pi^+,\pi^-}(k) = \sum_g H^g_{\pi^+,\pi^-}(k). \tag{2.2.31}$$

Bisher haben wir nur die chirale Theorie betrachtet. Der geschlossene String besitzt aber eine links- und eine rechtslaufene Hälfte, die beide isomorph zur chiralen Theorie sind. Da es zunächst nicht ausgeschlossen ist, holomorphe und antiholomorphe Bildzahlen (π^+, π^-) und $(\tilde{\pi}^+, \tilde{\pi}^-)$ verschieden zu wählen, faktorisiert der Fockraum des geschlossenen Strings als

$$\mathcal{F}_{cl,\pi^\pm,\tilde{\pi}^\pm}(k) = \mathcal{F}_{\pi^\pm,L}(k) \otimes \mathcal{F}_{\tilde{\pi}^\pm,R}(k). \tag{2.2.32}$$

Bei der Berechnung der BRST-Kohomologie ist es möglich, das Künneth-Theorem [22] anzuwenden, da der BRST-Operator die Summe aus links- und rechtslaufendem Anteil ist. Die BRST-Kohomologie H^{cl} des geschlossenen Strings faktorisiert also auch:

$$H^{cl}_{\pi^\pm,\tilde{\pi}^\pm}(k) = H_{\pi^\pm,L}(k) \otimes H_{\tilde{\pi}^\pm,R}(k). \tag{2.2.33}$$

Die Hauptarbeit bei der Berechnung der BRST-Kohomologie liegt also in der Bestimmung der chiralen Kohomologie, die im nächsten Kapitel genau untersucht wird. Hier werden nur die Ergebnisse angegeben, die in den nächsten Abschnitten gebraucht werden:

1. In keinem Bild und für keine Geistzahl existieren Kohomologieklassen für $k^2 \neq 0$. Das erklärt auch die Signatur $(2,2)$ des Targetraumes, denn die Alternative $(4,0)$ würde für $k^2 = 0$ keine nichttriviale Dynamik erlauben.

2. Für $k^2 = 0$ und $k \neq 0$ existiert in jedem Bild genau eine Kohomologieklasse, deren Repräsentanten $|V,k\rangle_{\pi\pm}$ zusätzlich die Bedingungen
$$b_0 \, |V,k\rangle_{\pi\pm} = b'_0 \, |V,k\rangle_{\pi\pm} = 0 \tag{2.2.34}$$
erfüllen (die Bedeutung dieser Bedingungen wird in den folgenden Kapiteln erklärt). $|V,k\rangle_{\pi\pm}$ hat Geistzahl eins. Zusätzlich gibt es auf höheren Geistzahlen Kohomologieklassen, die nicht die Bedingungen (2.2.34) erfüllen. Diese Zustände können systematisch aus (2.2.34) durch Anwenden von Geist-Nullmoden gewonnen werden und sollten nicht als von den $|V,k\rangle_{\pi\pm}$ unabhängige Freiheitsgrade interpretiert werden. Sie sind notwendig für ein nichtverschwindendes Skalarprodukt auf der BRST-Kohomologie (siehe (2.2.22)).

3. Für $k = 0$ ist die Kohomologie bildabhängig. Dieser Sektor ist irrelevant für das Spektum der Theorie, aber wichtig für ihre Symmetriestruktur (siehe Kapitel V).

Das $(-1,-1)$ Bild ist in gewisser Hinsicht das natürlichste. Hier sind alle bosonischen Geistmoden mit positivem (negativem) Index Vernichter (Erzeuger). Außerdem ist dies der einzige Sektor, der ein nichtverschwindendes Skalarprodukt hat, ${}_b\langle -1,-1 \, | -1,-1\rangle_b = 1$. Es ist daher nicht erstaunlich, daß das Kohomologieproblem in diesem Bild am einfachsten ist. Ein Repräsentant der Kohomologie ist
$$|V,k\rangle_{-1,-1} = c_1 \, |-1,-1,k\rangle \, . \tag{2.2.35}$$
Dieser Zustand enthält keine Materieoszillatoren und verdeutlicht, daß beim $N{=}2$ String nur die Schwerpunktsbewegung physikalisch ist.

3. Konforme Feldtheorie

Aus den Geistmoden, die im letzten Abschnitt eingeführt wurden, lassen sich wie in (2.1.7) Quantenfelder in der komplexen Ebene konstruieren,
$$\begin{aligned}
c(z) &= \sum_n c_n \, z^{1-n} , & b(z) &= \sum_n b_n \, z^{-2-n} , \\
c'(z) &= \sum_n c'_n \, z^{-n} , & b'(z) &= \sum_n b'_n \, z^{-1-n} , \\
\gamma^{\pm}(z) &= \sum_r \gamma^{\pm}_r \, z^{1/2-r} , & \beta^{\pm}(z) &= \sum_r \beta^{\pm}_r \, z^{-3/2-r} .
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (2.2.8) lassen sich die Operatorprodukt-Entwicklungen ableiten:

$$c(z)b(w) \sim \frac{1}{z-w}, \qquad c'(z)b'(w) \sim \frac{1}{z-w},$$
$$\gamma^+(z)\beta^-(w) \sim \frac{1}{z-w}, \qquad \gamma^-(z)\beta^+(w) \sim \frac{1}{z-w}. \tag{2.3.2}$$

Die aus den Geistanteilen konstruierten superkonformen Ströme lauten

$$\begin{aligned} T^{gh}(z) &= 2\partial cb + c\partial b + \partial c'b' - \tfrac{3}{2}(\partial\gamma^-\beta^+ + \partial\gamma^+\beta^-) - \tfrac{1}{2}(\gamma^-\partial\beta^+ + \gamma^+\partial\beta^-), \\ G^{gh\pm}(z) &= -4\gamma^\pm b \pm 4\partial\gamma^\pm b' \pm 2\gamma^\pm\partial b' + \tfrac{3}{2}\partial c\beta^\pm + c\partial\beta^\pm \pm c'\beta^\pm, \\ J^{gh}(z) &= -\partial(cb') + (\gamma^+\beta^- - \gamma^-\beta^+). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Mit dem Wickschen Theorem lassen sich beliebige OPE's berechnen. Insbesondere ist es auf diese Weise einfach nachzuprüfen, daß das N=2 Geistsystem einen Beitrag von -6 zur zentralen Ladung leistet. Außerdem findet man, daß alle Geistfelder Primärfelder sind, das heißt, sie transformieren wie Tensoren unter konformen Transformationen. Der Übersicht halber sind die konformen Gewichte der beim N=2 String auftauchenden Felder sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

Feld	∂Z	ψ	$G^\pm$	J	c	b	$\gamma^\pm$	$\beta^\pm$	c'	b'
konf. Gew.	1	1/2	3/2	1	-1	2	-1/2	3/2	0	1

Der BRST-Operator läßt sich ebenfalls als Nullmode eines konformen Feldes mit Gewicht eins schreiben:

$$\begin{aligned} Q &= \oint \frac{dz}{2\pi i} j_B(z) \\ j_B(z) &= cT + \gamma^+G^- + \gamma^-G^+ + c'J \\ &\quad + \frac{1}{2}cT^{gh} + \frac{1}{2}\gamma^+G^{gh-} + \frac{1}{2}\gamma^-G^{+gh} + \frac{1}{2}c'J^{gh}. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Aus den rechtslaufenden Moden lassen sich völlig analog antiholomorphe Felder bilden. Da die Operator-Produkte holomorpher und antiholomorpher Felder keine Singularitäten enthalten, lassen sich auch im Rahmen der konformen Feldtheorie beide Sektoren getrennt betrachten. Operatoren, die auf der Weltfläche des geschlossenen Strings leben, lassen sich einfach in holomorphe und antiholomorphe Anteile aufspalten.

$$A(z,\bar{z}) = A(z)\tilde{A}(\bar{z}). \tag{2.3.5}$$

Diese Relation ist das Pendant zur Faktorisierung des Fockraumes in (2.2.32).

Gerstenhaber-Algebra

Eine der grundlegenden Eigenschaften der konformen Feldtheorie besteht darin, daß es eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen Operatoren und Zuständen gibt (für ausführlichere Diskussionen siehe zum Beispiel [20] oder [43]). Mit einem Operator $A(z)$ assoziiert man den Zustand

$$A(z) \to |A\rangle := \lim_{z\to 0} A(z)\,|0\rangle\,. \tag{2.3.6}$$

Dieser Zusammenhang kann folgendermaßen verstanden werden: Die Weltfläche des Strings wird über die konforme Abbildung $z = e^{\tau+i\sigma}$ in die komplexe Ebene abgebildet. Insbesondere entspricht der Ursprung $z = 0$ dem Zeitpunkt $\tau = -\infty$. Ein Operator A am Ursprung beschreibt also einen aus weiter Entfernung einlaufenden Zustand $|A\rangle$ des Fockraumes der freien Theorie. Die negativen Potenzen in z in der Fourierentwicklung von A, die zu divergierenden Termen bei $z = 0$ führen würden, werden mit den Vernichtern multipliziert. Deswegen ist $|A\rangle$ auf diese Weise wohldefiniert. Zum Beispiel erzeugt man den Zustand $|k\rangle$ durch

$$|k\rangle = e^{\frac{i}{2}(\bar{k}\cdot Z + k\cdot\bar{Z})}(0)\,|0\rangle\,. \tag{2.3.7}$$

Durch diese Korrespondenz läßt sich die BRST-Kohomologie für Zustände,

$$Q\,|A\rangle = 0, \qquad |A\rangle \neq Q\,|B\rangle\,, \tag{2.3.8}$$

in ein Kohomologieproblem für Operatoren übersetzen:

$$\big[Q, A(z)\big] = 0 \qquad A(z) \neq \big[Q, B(z)\big] \tag{2.3.9}$$

Eine wichtige Eigenschaft dieser Beschreibung durch Operatoren ist, daß im Gegensatz zum Fockraum der Zustände der Raum der Operatoren mit einem Produkt

$$\big(A\cdot B\big)(w) := \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{z-w}A(z)B(w) \tag{2.3.10}$$

ausgestattet ist. Dieses Produkt ist einfach der reguläre Anteil bei $z \to w$ im OPE der beiden Operatoren A und B. Der BRST-Operator erfüllt eine gradierte Leibnitz-Regel:

$$\big[Q, A\cdot B\big] = \big[Q, A\big]\cdot B + (-1)^{|A|}A\cdot\big[Q, B\big]. \tag{2.3.11}$$

Wie üblich hat das Symbol $|A|$ den Wert 0 beziehungsweise 1, falls A ein bosonischer bzw. fermionischer Operator ist. Insbesondere induziert (2.3.10) auch ein Produkt auf der BRST-Kohomologie, denn aus (2.3.11) folgt, daß das Produkt der Repräsentanten V_1 und V_2 zweier Kohomologieklassen wieder BRST-invariant und unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. Mit diesem Produkt bildet die BRST-Kohomologie also einen Ring. Da die Geistzahl additiv bei der Multiplikation ist, bilden die Elemente mit Geistzahl 0 einen Unterring – den Grundring – hinter dem sich die Symmetriestruktur der Theorie verbirgt ([54], dieser Punkt wird ausführlicher in Kapitel V diskutiert). Auf der Kohomologie ist das Produkt assoziativ und gradiert kommutativ[6]:

$$V_1 \cdot (V_2 \cdot V_3) = (V_1 \cdot V_2) \cdot V_3, \qquad V_1 \cdot V_2 = (-)^{|V_1||V_2|} V_2 \cdot V_1. \quad (2.3.12)$$

Diese Relationen gelten nur für BRST-invariante Operatoren und auch für diese nur bis auf BRST-Kommutatoren.
Um Symmetrien in der Stringtheorie zu untersuchen, ist eine weitere Operation nützlich – die Gerstenhaber-Klammer [29]. Sie ist definiert durch

$$\{A, B\}_G(w) := \oint_w \frac{dz}{2\pi i} A^{(1)}(z) B(w) \quad (2.3.13)$$

mit

$$A^{(1)}(w) := \oint_w \frac{dz}{2\pi i} b(z) A(w) \quad (2.3.14)$$

und trägt Geistzahl -1. Auf der BRST-Kohomologie ist die Gerstenhaber-Klammer gradiert kommutativ,

$$\{V_1, V_2\}_G = (-1)^{(|V_1|-1)(|V_2|-1)+1} \{V_2, V_1\}_G \quad (2.3.15)$$

obwohl V_1 und V_2 unterschiedlich in die Definition (2.3.13) eingehen. Außerdem erfüllt sie die (gradierte) Jacobi-Identität und paßt sehr schön mit dem Produkt (2.3.10) zusammen[7]

$$\{V_1, V_2 \cdot V_3\}_G = \{V_1, V_2\}_G \cdot V_3 + (-1)^{(|V_1|-1)|V_2|} V_2 \cdot \{V_1, V_3\}_G. \quad (2.3.16)$$

In [29] wurde die BRST-Kohomologie zusammen mit dem Produkt (2.3.10) und der Klammer (2.3.13) 'Gerstenhaber-Algebra' getauft. In dieser Arbeit finden sich auch die Beweise der Relationen (2.3.12), (2.3.15) und (2.3.16) sowie Referenzen auf die ursprünglichen Arbeiten von Gerstenhaber.
Eine weitere nützliche Operation, die bei der Untersuchung der BRST-Kohomologie in den nächsten Kapiteln wichtig sein wird, ist

$$\Delta A(w) = \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\, (z - w) b(z) A(w). \quad (2.3.17)$$

[6] Beliebige Operatoren werden in dieser Arbeit in der Regel mit A, $B, \ldots$ und Repräsentanten von Kohomologieklassen mit V_i bezeichnet.

[7] Mathematisch formuliert wirkt die Abbildung

$$V_2 \to \{V_1, V_2\}_G$$

als eine Derivation auf dem Ring der Kohomologieklassen.

Auf dem $A(z)$ entsprechenden Zustand wirkt Δ durch Multiplikation mit der Antigeist-Nullmode b_0:

$$\Delta A(0)\,|0\rangle = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i}\; z b(z) A(0)\,|0\rangle = b_0\,|A\rangle \tag{2.3.18}$$

mit $|A\rangle = A(0)\,|0\rangle$. Es ist nicht schwer nachzuprüfen, daß Δ nilpotent ist, d.h. $\Delta^2 = 0$, und auch in der BRST-Kohomologie wohldefiniert ist. Δ wirkt zwar per Leibnitz-Regel bezüglich der Gerstenhaber-Klammer,

$$\Delta\big\{V_1, V_2\big\}_G = \big\{\Delta V_1, V_2\big\}_G + \big\{V_1, \Delta V_2\big\}_G, \tag{2.3.19}$$

aber nicht bezüglich des Produktes (2.3.10)

$$\Delta\big(V_1 \cdot V_2\big) = \big(\Delta V_1\big) \cdot V_2 + (-1)^{|V_1|} V_1 \cdot \big(\Delta V_2\big) + (-1)^{|V_1|}\big\{V_1, V_2\big\}_G. \tag{2.3.20}$$

Wie üblich darf man solche algebraischen Strukturen nicht für zu tiefsinnig halten. Vielmehr stellen das Produkt (2.3.10), die Klammer (2.3.13) und der Operator Δ in erster Linie eine neue Notation für Operationen dar, die immer wieder bei der Untersuchung der Kohomologie und der Symmetrien der Theorie auftauchen. Ein nicht völlig uninteressanter Aspekt ist jedoch die Tatsache, daß eine absolut identische algebraische Struktur im Antifeld-Formalismus auftaucht [29]. Der Antifeld-Formalismus (siehe zum Beispiel [24]) wurde entwickelt, um Feldtheorien mit komplizierter Symmetriestruktur zu untersuchen. Dabei werden den Feldern (inklusive Geister) ϕ^a der Theorie Antifelder ϕ^*_a mit entgegengesetzter Statistik und Geistzahl $gh(\phi^*_a) = -gh(\phi^a) - 1$ zugeordnet . Eine zentrale Rolle spielen die Antiklammer

$$(A, B) := A\Big(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\phi^a}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\phi^*_a} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\phi^*_a}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\phi^a}\Big)B$$

und der Operator

$$\Delta A = (-1)^{|\phi^a|+1} A \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\phi^a}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\phi^*_a}.$$

A und B sind hierbei Polynome in den Feldern und Antifeldern. Die Antiklammer und Δ haben beide Geistzahl $+1$ und erfüllen die Relationen

$$\begin{aligned}
(A, B) &= -(-1)^{(|A|+1)(|B|+1)}\,(B, A),\\
\big(A, (B, C)\big) &+ \text{‘gradiert zyklisch’} = 0,\\
(A, BC) &= (A, B)C + (-1)^{|B|(|A|+1)}\,B(A, C),\\
\Delta(A, B) &= (A, \Delta B) - (-1)^{|B|}(\Delta A, B),\\
\Delta(AB) &= A\Delta B + (-1)^{|B|}(\Delta A)B + (-1)^{|B|}(A, B).
\end{aligned}$$

Nach Identifizierung der Targetraum Geistzahl gh mit der negativen Weltflächen Geistzahl N^g stimmen diese Gleichungen genau mit den weiter oben angegeben Relationen der konformen Feldtheorie überein. Das ist umso bemerkenswerter, wenn man bedenkt, daß die Gerstenhaber-Operationen der Stringtheorie durch Wegintegrale in der komplexen Ebene definiert sind, während im Antifeld-Formalismus Ableitungen im Raum der Felder auftreten – also zwei völlig verschiedene Konzepte. Es scheint aber bisher nicht genau klar zu sein, inwiefern man diese Analogie ausdehnen kann. Ein weiterer, ganz ähnlicher Zusammenhang zwischen BRST-quantisierter Stringtheorie und dem Antifeldformlismus wird in Abschnitt vier von Kapitel V beschrieben.

Bosonisierung

Ein wichtiges technisches Hilfsmittel in Superstringtheorien ist die Bosonisierung der bosonischen Geister. Damit lassen sich zum Beispiel Operatoren konstruieren, die die Bildladung ändern. Bosonisierung der $\gamma^{\pm}$- und $\beta^{\mp}$-Geister besteht aus der Ersetzung

$$\gamma^{\pm} \to \eta^{\pm} e^{\varphi^{\pm}}, \qquad \beta^{\mp} \to e^{-\varphi^{\pm}} \partial \xi^{\mp}. \tag{2.3.21}$$

Hierbei sind $\varphi^{\pm}$ Bosonen mit konformen Gewicht 0 und $\eta^{\pm}$ und $\xi^{\mp}$ sind zueinander konjugierte fermionische Felder mit konformen Gewichten 1 beziehungsweise 0. Ihre Operatorprodukt-Entwicklungen sind

$$\varphi^{\pm}(z)\varphi^{\pm}(w) \sim -\ln(z-w), \qquad \eta^{\pm}(z)\xi^{\mp}(w) \sim \frac{1}{z-w}. \tag{2.3.22}$$

Zunächst scheint in (2.3.21) die Statistik nicht zu stimmen. Um diesen Fehler zu beheben, muß man $e^{\varphi^{\pm}}$ mit sogenannten Kozykel-Faktoren $C_{\pm}$ (die in dieser Arbeit aber nie explizit hingschrieben werden) ausstatten, die dafür sorgen, daß $e^{\varphi^{\pm}}$ mit allen anderen fermionischen Objekten der Theorie (zum Beispiel auch mit Differentialformen) antivertauscht, und die Relation $C_{\pm}^2 = 1$ erfüllt. Mit dieser Vorschrift und den OPE in (2.3.22) kann man dann nachprüfen, daß die neuen Ausdrücke für die bosonischen Geister die richtigen OPE's haben. Das garantiert, daß die Korrelationsfunktionen in der komplexen Ebene übereinstimmen. Ein zweiter Hinweis, daß in (2.3.21) zwei äquivalente Beschreibungen derselben Theorie angegeben sind, ist die Tatsache, daß die Zustandssummen übereinstimmen (siehe, zum Beispiel, den Anhang von [49]). Der $\gamma^{\pm}, \beta^{\mp}$ Anteil des Energie-Impuls-Tensors in (2.3.3) wird zu

$$\begin{aligned}&-\tfrac{3}{2}(\partial\gamma^{-}\beta^{+} + \partial\gamma^{+}\beta^{-}) - \tfrac{1}{2}(\gamma^{-}\partial\beta^{+} + \gamma^{+}\partial\beta^{-}) \to \\ &-\frac{1}{2}\partial\varphi^{+}\partial\varphi^{+} - \partial^2\varphi^{+} - \frac{1}{2}\partial\varphi^{-}\partial\varphi^{-} - \partial^2\varphi^{-} - \eta^{+}\partial\xi^{-} - \eta^{-}\partial\xi^{+}.\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Dieser Energie-Impuls-Tensor produziert die richtigen konformen Gewichte für die Felder $\eta^{\pm}$, $\xi^{\pm}$ und $\varphi^{\pm}$. Man sieht aber auch, daß $\varphi^{\pm}$ keine freien Bosonen sind: Eine Wirkung, die zu dem Ausdruck in (2.3.23) als Symmetriegenerator führt, enthält eine Kopplung von $\varphi^{\pm}$ an den Krümmungsskalar der zugrundeliegenden Riemannfläche [18].
Mit den neuen Variablen lassen sich Vertexoperatoren für die Grundzustände (2.2.11) konstruieren:

$$\left|\pi^{+}, \pi^{-}\right\rangle_b = e^{\pi^{-}\varphi^{+} + \pi^{+}\varphi^{-}}(0)\left|0,0\right\rangle_b . \tag{2.3.24}$$

Zum Beispiel lautet der Vertexoperator für den physikalischen Zustand im $(-1,-1)$ Bild (siehe (2.2.35)) damit

$$V_{-1,-1}(z,k) = ce^{-\varphi^+} e^{-\varphi^-} e^{\frac{i}{2}(\bar{k}\cdot Z + k\cdot \bar{Z})}(z). \tag{2.3.25}$$

Operatoren, die die Bildladung messen, sind

$$\pi^+ = -\partial\varphi^- + \eta^+\xi^-, \qquad \pi^- = -\partial\varphi^+ + \eta^-\xi^+. \tag{2.3.26}$$

Die Bildladung kann also gewissermaßen als (ganzzahlig quantisierter) Impuls in Richtung der '$\varphi^\pm$-Koordinaten' zuzüglich eines von den ξ, η Fermionen stammenden Terms aufgefaßt werden.
Der Geistzahl-Operator $N^g_{\beta\gamma}$ aus (2.2.23) kann nun ebenfalls explizit angegeben werden

$$N^g_{\beta\gamma} = \oint \frac{dz}{2\pi i}\,\left(\eta^+\xi^- + \eta^-\xi^+\right). \tag{2.3.27}$$

Ein wichtiger Aspekt der Bosonisierung ist, daß in der Reformulierung der $\beta^\pm$ Geister in (2.3.21) nur die Ableitungen der Felder $\xi^\pm$ auftauchen. Das heißt, die Nullmoden

$$\xi^\pm_0 = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{-1}\xi^\pm(z) \tag{2.3.28}$$

tauchen in der Bosonisierung nicht auf (die Zustandssummen der $(\gamma^\pm, \beta^\mp)$- und der $(\eta^\pm, \xi^\pm, \varphi^\pm)$-Theorien stimmen auch nur überein, wenn man im Fockraum der zweiten Theorie die $\xi^\pm_0$-Moden nicht berücksichtigt). Das hat die wichtige Konsequenz, daß Zustände der Form

$$Q\xi^\pm_0\,|j\rangle \tag{2.3.29}$$

nicht BRST-trivial sind, da $\xi^\pm_0\,|j\rangle$ keine Zustände der ursprünglichen Theorie sind [18]! Damit lassen sich aus bereits bekannten Kohomologieklassen neue konstruieren. Für Vertexoperatoren geschieht diese Abbildung durch Multiplikation mit

$$X^\pm := \{Q, \xi^\pm\} = -c\partial\xi^\pm + \left(G^\pm - 4\gamma^\pm b \pm 4\partial\gamma^\pm b' \pm 2\gamma^\pm \partial b'\right)e^{\varphi^\mp}. \tag{2.3.30}$$

Offensichtlich tragen X^+ bzw. X^- Bildladung $(1,0)$ bzw. $(0,1)$. Man kann also durch Anwenden dieser 'Bildwechseloperatoren' auf den Vertexoperator $V_{-1,-1}$ neue Vertexoperatoren in höheren Bildern erzeugen

$$V_{\pi^+,\pi^-}(k,z) := \left(X^+\right)^{\pi^+ + 1} \cdot \left(X^-\right)^{\pi^- + 1} \cdot V_{-1,-1}(k,z). \tag{2.3.31}$$

Einfache Beispiele sind

$$\begin{aligned} V_{-1,0}(k) &= ck\cdot\psi^- e^{-\varphi^-} e^{\frac{i}{2}(k\cdot\bar{Z} + \bar{k}\cdot Z)}, \\ V_{0,-1}(k) &= c\bar{k}\cdot\psi^+ e^{-\varphi^+} e^{\frac{i}{2}(k\cdot\bar{Z} + \bar{k}\cdot Z)}. \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

Man muß sich allerdings darüber im klaren sein, daß das Kohomologieproblem für beliebige Bilder durch die Bildwechseloperatoren selbst dann noch nicht gelöst ist, wenn man die Kohomologie im $(-1,-1)$ Bild vollständig kennt. Denn erstens müssen die Vertexoperatoren in (2.3.31) nicht unbedingt von Null verschieden sein[8] und zweitens ist nicht garantiert, daß sie die Kohomologie voll ausschöpfen.

4. Streuamplituden und effektive Feldtheorie

Amplituden des geschlossenen N=2 Strings

Streuamplituden können in der gegenwärtigen Formulierung der Stringtheorie nur als Störungsreihe definiert werden. Eine N-Punkt-Funktion in g-ter Ordnung der Loop-Entwicklung entspricht einer Riemannfläche vom Geschlecht g mit N davon ausgehenden langen Zylindern, die den ein- und auslaufenden freien Strings entsprechen. Aufgrund der (super-) konformen Invarianz der Theorie müssen aber Konfigurationen, die durch konforme Abbildungen ineinander übergehen, identifiziert werden. Insbesondere lassen sich die langen Zylinder der freien ein- und auslaufenden Strings auf Punkte abbilden, an denen entsprechende Vertexoperatoren V_i eingesetzt werden. Eine plausible Definition der N-Punkt Amplitude ist (unter Vernachlässigung der verschiedenen $U(1)$-Bündel) also

$$A_N = \sum_{g=0}^{\infty} \lambda^g \left\langle V_1 \ldots V_N \right\rangle_g \equiv \sum_g \lambda^g \int d\mu \, e^{-S} V_1 \ldots V_N . \qquad (2.4.1)$$

λ ist hierbei die String-Kopplungskonstante, die die Beiträge der verschiedenen Topologien gewichtet.
Die Korrelationsfunktionen für das Geschlecht g sind hier durch das Pfadintegral definiert. Die Wirkung wurde in Gleichung (2.1.3) angegeben, und die Integration erstreckt sich über alle darin auftretenden Felder modulo Symmetrien. Zur Auswertung des Pfadintegrals müssen die Symmetrien der Wirkung fixiert werden. Das führt auf ein Spektrum an Geistfeldern, das mit dem des algebraischen Zugangs aus Abschnitt zwei übereinstimmt. Im Endeffekt hängt die Amplitude dann nur von der Kopplungskonstanten und den Quantenzahlen der Vertexoperatoren (typischerweise Impuls und Polarisation) ab.
Für den N=2 String wurde die Pfadintegral-Quantisierung für beliebiges Geschlecht ausführlich in [8] beschrieben. Ein wichtiges Merkmal, durch das sich der

[8] Mathematisch formuliert: Der Ring der BRST-Kohomologie ist mit dem Produkt (2.3.10) nicht nullteilerfrei. Zum Beispiel ist

$$V_{-1,-1}(k_1) \cdot V_{-1,-1}(k_2) = 0 .$$

N=2 String von anderen Stringtheorien unterscheidet, ist die Existenz eines $U(1)$-Eichfeldes, das auf der Weltfläche topologisch nichttriviale Konfigrationen annehmen kann. Solche Eichfelder können mathematisch präzise durch Faserbündel beschrieben werden, deren Topologie durch die Chernzahl charakterisiert wird. Wie die Beiträge verschiedener Chernzahlen zum Pfadintegral in der Amplitude (2.4.1) gewichtet werden, ist natürlich in gewisser Weise Definitionssache, siehe [10, 30]. Wie bereits erwähnt, werden wir uns in dieser Arbeit aber nur auf Amplituden mit verschwindender Chernzahl und verschwindendem Geschlecht beschränken. Die dabei auftretende Riemannfläche ist die Sphäre oder äquivalent die komplexe Ebene (mit Koordinaten z und $\bar{z}$), bei der die Punkte im Unendlichen identifiziert werden. Die Positionen der Vertexoperatoren müssen im allgemeinen über die gesamte Riemannfläche integriert werden. In der komplexen Ebene ist es aber möglich, aufgrund der auch nach der Eichfixierung existierenden Symmetrien die Positionen dreier Vertexoperatoren festzulegen. Eine genaue Auswertung des Pfadintegrals zeigt, daß die fixierten und integrierten Vertexperatoren des geschlossenen Strings von der Form

$$V_{\pi^+,\pi^-}(2k,z,\bar{z}) = V_{\pi^+,\pi^-}(k,z)\tilde{V}_{\tilde{\pi}^+,\tilde{\pi}^-}(k,\bar{z}) \tag{2.4.2}$$

und

$$V^{\int}_{\pi^+,\pi^-}(2k) = V^{(1)}_{\pi^+,\pi^-}(k,z)\tilde{V}^{(1)}_{\tilde{\pi}^+,\tilde{\pi}^-}(k,\bar{z}) \tag{2.4.3}$$

sind. Die Bildladungen müssen in den Korrelatoren so gewählt werden, daß sie sich alle vier jeweils zu einem Gesamtwert von -2 addieren (siehe Gleichung (2.2.27)). Mit diesen Regeln lautet die 3-Punkt-Funktion

$$A_3(k_1,k_2,k_3) = A_3^L(k_1,k_2,k_3)\tilde{A}_3^R(k_1,k_2,k_3) \tag{2.4.4}$$

mit

$$A_3^L = \langle V_{-1,-1}(k_1,z_1)V_{0,-1}(k_2,z_2)V_{-1,0}(k_3,z_3)\rangle \tag{2.4.5}$$

und einem entsprechenden Ausdruck für $\tilde{A}_3^R$. Hierbei wurde benutzt, daß holomorphe und antiholomorphe Anteile nicht miteinander wechselwirken, und die Amplitude faktorisiert. Sämtliche Skalarprodukte und Operatorprodukt-Entwicklungen sind aus dem vorigen Abschnitt bekannt. Mit den expliziten Ausdrücken für die V_i und dem Wick-Theorem findet man für die Amplitude

$$A_3(k_1,k_2,k_3) = (k_1{\cdot}\bar{k}_2 - k_2{\cdot}\bar{k}_1)^2. \tag{2.4.6}$$

Die Bildladungen können in dem Korrelator (2.4.5) willkürlich gewählt werden (solange sie sich zu -2 addieren). Der Grund dafür ist, daß das Verschieben des Bildwechseloperators von einem Vertexoperator zum anderen BRST-trivial ist:

$$X^{\pm}(z_1) - X^{\pm}(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dw\{Q,\partial\xi^{\pm}(w)\}. \tag{2.4.7}$$

Dies ist ein echter BRST-Kommutator, da die $\xi_0^{\pm}$-Moden auf der rechten Seite nicht mehr auftauchen. Die Amplituden und damit die Wechselwirkungen des Strings sind also bildunabhängig. Es gibt keine Möglichkeit, die Bildladung eines Teilchens zu messen. Daher sollten die Vertexoperatoren in verschiedenen Bildern, die durch die Operatoren $X^{\pm}$ wie in (2.3.31) miteinander verbunden sind, als äquivalente Beschreibung desselben Freiheitsgrades betrachtet werden.
Bei der Berechnung der 4-Punkt-Funktion wird über die Position eines Vertexoperators integriert, die anderen werden üblicherweise auf die Positionen $z = 0, 1, \infty$ festgelegt.

$$\begin{aligned} A_4(k_1, \ldots, k_4) &= \int d^2 z \left| \left\langle V_{-1,0}(k_1, 0) V_{-1,0}^{(1)}(k_2, z) V_{0,-1}(k_3, 1) V_{0,-1}(k_4, \infty) \right\rangle \right|^2 \\ &\sim F^2(k) \frac{\Gamma(1-s/2)\Gamma(1-t/2)\Gamma(1-u/2)}{\Gamma(s/2)\Gamma(t/2)\Gamma(u/2)}. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Hierbei sind s, t und u die üblichen Mandelstam - Variablen, $s = -(\bar{k}_1 \cdot k_2 + \bar{k}_2 \cdot k_1)$, $t = (\bar{k}_2 \cdot k_3 + \bar{k}_3 \cdot k_2)$, $u = -s - t$. Die entscheidende Beobachtung ist, daß der hierbei auftretende kinematische Vorfaktor

$$F(k) = (k_1 \cdot \bar{k}_3)(k_2 \cdot \bar{k}_4) t + (k_1 \cdot \bar{k}_4)(k_2 \cdot \bar{k}_3) u \tag{2.4.9}$$

und damit die ganze Amplitude verschwindet [37]!
Allgemeine N-Punkt-Funktionen haben ganz analog die Form

$$A_N(k_1, \ldots, k_N) = \prod_{i=4}^{N} \int d^2 z_i \left| \left\langle V_{-1,-1}(k_1, 0) V_{0,-1}(k_2, 1) V_{-1,0}(k_3, \infty) V_{0,0}^{(1)}(k_i, z_i) \right\rangle \right|^2 .$$

Diese Amplituden wurden in [5] und [23] für beliebiges N ausgewertet mit dem Ergebnis

$$A_N(k_1, \ldots, k_N) = 0 \qquad \text{für} \qquad N > 3. \tag{2.4.10}$$

Die 3-Punkt-Funktion ist also die einzige nichtverschwindende Amplitude.

Effektive Feldtheorie

Kann man eine Feldtheorie finden, die diese Amplituden reproduziert? Der Stringzustand wird nur durch seinen Impuls bestimmt; die in Frage kommende Feldtheorie muß also ein masseloses Skalarfeld ϕ beschreiben. Die Lagrangedichte [37]

$$\mathcal{L} = \phi \eta^{a\bar{a}} \partial_a \bar{\partial}_{\bar{a}} \phi + \frac{2}{3} \epsilon^{ab} \epsilon^{\bar{a}\bar{b}} \partial_a \bar{\partial}_{\bar{a}} \phi \partial_b \bar{\partial}_{\bar{b}} \phi. \tag{2.4.11}$$

führt zu einer 3-Punkt-Funktion

$$(k_1 \cdot \bar{k}_2)(k_2 \cdot \bar{k}_1) - (k_1 \cdot \bar{k}_1)(k_1 \cdot \bar{k}_1). \tag{2.4.12}$$

On-shell, das heißt für $k \cdot \bar{k} = 0$, verschwindet der zweite Term, und der Ausdruck stimmt mit (2.4.6) überein. Wie beim String verschwinden bemerkenswerterweise alle (on-shell-) Amplituden mit mehr als drei äußeren Beinen. Die Theorie (2.4.11) reproduziert also *alle* Amplituden des Strings auf Tree-Niveau. Das ist kein völlig überraschendes Ergebnis, denn schließlich sind die Stringoszillationen unphysikalsich. Die Dynamik des verbleibenden Freiheitsgrades (die Schwerpunktsbewegung) kann dann genau durch eine Feldtheorie wiedergegeben werden.
Die Theorie (2.4.11) hat eine sehr schöne geometrische Interpretation, die man folgendermaßen finden kann. Eine N=2 Stringtheorie im gekrümmten Raum wird durch ein zweidimensionales Sigma-Modell mit N=2 Supersymmetrie beschrieben. Diese Supersymmetrie ist nur möglich, wenn der Targetraum eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist[9]. Damit die konforme Invarianz nicht durch Ein-Loop-Beiträge der zweidimensionalen Theorie verletzt wird, muß die Kähler-Metrik außerdem Ricci-flach sein[10]. Erfahrungen mit anderen Stringtheorien zeigen, daß geschlossene Strings typischerweise 'geometrische Freiheitsgrade' – also Gravitation – beschreiben; es wäre also sehr plausibel, wenn der N=2 String die Theorie einer Ricci-flachen Kähler-Metrik in vier reellen Dimensionen mit Signatur $(2,2)$ wäre. Eine Kähler-Metrik $g_{a\bar{b}}$ läßt sich durch ein Potential Ω beschreiben,

$$g_{a\bar{b}} = \partial_a \bar{\partial}_{\bar{b}} \Omega. \tag{2.4.13}$$

Die hierbei benutzten Ableitungen

$$\partial_a := \frac{\partial}{\partial Z^a}, \qquad \bar{\partial}_{\bar{b}} := \frac{\partial}{\partial \bar{Z}^{\bar{b}}} \tag{2.4.14}$$

nach den Targetraum-Koordinaten dürfen nicht mit den Ableitungen ∂ und $\bar{\partial}$ auf der Weltfläche verwechselt werden. Die einzigen nichtverschwindenden Komponenten des Riccitensors sind

$$R_{a\bar{b}} = \partial_a \bar{\partial}_{\bar{b}} \ln \left|\det g\right|. \tag{2.4.15}$$

Das führt auf $\ln \left|\det g\right| = f(Z) + \tilde{f}(\bar{Z})$. Die Funktionen f und $\tilde{f}$ lassen sich durch geeignete Wahl der Koordinaten eliminieren, also $\det g = -1$ beziehungsweise

$$\epsilon^{ab} \epsilon^{\bar{a}\bar{b}} \partial_a \bar{\partial}_{\bar{a}} \Omega \partial_b \bar{\partial}_{\bar{b}} \Omega = -2. \tag{2.4.16}$$

Diese Gleichung heißt erste Plebanski-Gleichung[11] [40]. Einem flachen Targetraum mit Metrik $\eta_{a\bar{a}}$ entspricht das Potential $\eta_{a\bar{a}} Z^a \bar{Z}^{\bar{a}}$. Abweichung vom flachen Raum

[9] Das ist völlig analog zu der Tatsache, daß ein N=1 Sigma-Modell in 4 Dimensionen ebenfalls eine Kähler-Mannigfaltigkeit beschreibt, denn beide Theorien haben die gleiche Anzahl an Superladungen.

[10] Genau dann, wenn eine Kähler-Mannigfaltigkeit Ricci-flach ist, besitzt sie einen selbstdualen Krümmungstensor. Daher werden die Begriffe selbstdual und Ricci-flach + Kähler im folgenden synonym benutzt.

[11] In [40] wurde auch eine zweite Plebanski Gleichung angegeben, die aus einer anderen Wahl des Koordinatensystems folgt. In dieser Arbeit tritt aber nur die Gleichung (2.4.16) auf und wird im folgenden mit Plebanski-Gleichung bezeichnet, da keine Möglichkeit der Verwechselung besteht.

werden also durch

$$\phi = \Omega - \eta_{a\bar{a}} Z^a \bar{Z}^{\bar{a}} \tag{2.4.17}$$

beschrieben. Setzt man diese Relation in die Plebanski-Gleichung (2.4.16) ein, ergibt sich

$$\eta^{a\bar{a}} \partial_a \bar{\partial}_{\bar{a}} \phi = \frac{1}{2} \epsilon^{ab} \epsilon^{\bar{a}\bar{b}} \partial_a \bar{\partial}_{\bar{a}} \phi \partial_b \bar{\partial}_{\bar{b}} \phi, \tag{2.4.18}$$

also die zu (2.4.11) gehörende Bewegungsgleichung. Die Interpretation, daß der N=2 Strings selbstduale Gravitation beschreibt, ist also richtig.
Die Plebanski-Gleichung (2.4.16) ist offensichtlich invariant unter Kähler-Transformationen

$$\Omega(Z, \bar{Z}) \to \Omega(Z, \bar{Z}) + f(Z) + \tilde{f}(\bar{Z}). \tag{2.4.19}$$

Darüberhinaus besitzt sie aber noch eine unendliche Anzahl versteckter, nichtlokaler Symmetrien, die letztendlich für das Verschwinden der Amplituden verantwortlich sind. Diese Symmetrien und insbesondere ihre Realisierung in der Stringtheorie sind Gegenstand von Kapitel V.

Kapitel III:

BRST-Kohomologie bei nichtverschwindendem Impuls

In diesem Kapitel soll das Kohomologieproblem des $N{=}2$ Strings für nichtverschwindenden Impuls gelöst werden.

Da der chirale Fockraum eine komplizierte Struktur hat, ist es zwecklos, zu versuchen mit expliziten Rechnungen zum Ziel zu gelangen. Die Berechnung der Kohomologie ist daher in mehrere Schritte unterteilt. In den nächsten beiden Abschnitten werden einige Kohomologietypen beschrieben und Tricks gezeigt, die das Problem erheblich vereinfachen. Die Kohomologie kann im $(-1,-1)$ Bild vollständig bestimmt werden. Wir benutzen dazu eine von Frenkel, Garland und Zuckerman [17] stammende Methode, die im dritten Abschnitt am Beispiel des bosonischen Strings erklärt und in Abschnitt vier auf den $N{=}2$ String angewandt wird. In den Abschnitten fünf und sechs werden dann die Ergebnisse auf beliebige Bildladung erweitert. Im letzten Abschnitt wird die Kohomologie schließlich explizit in einigen einfachen Fällen bestimmt, um die Ergebnisse zu illustrieren.

1. Absolute, relative und semirelative Kohomologie

Im diesem Kapitel wird ausschließlich die chirale Kohomologie behandelt. Nur am Ende dieses Abschnittes wird kurz auf den geschlossenen String eingegangen.

Bei der Berechnung der BRST-Kohomologie spielen die Nullmoden der bosonischen Symmetrieströme und der entsprechenden fermionischen Geistfelder eine herausragende Rolle. Für vorgegebenen Impuls hat der hermitesche Operator $\hat{L}_0$ ein diskretes Spektrum, denn er mißt die Summe aus Schwerpunktsenergie und Modenlevel eines Fockraum-Zustandes. Ein Zustand mit nichtverschwindendem $\hat{L}_0$-Eigenwert kann nicht Element der Kohomologie sein, denn aus

$$\{Q, b_0\} = \hat{L}_0\,, \qquad \hat{L}_0\,|\psi\rangle = a\,|\psi\rangle\,, \qquad Q\,|\psi\rangle = 0 \tag{3.1.1}$$

folgt für $a \neq 0$ [1]

$$|\psi\rangle = \frac{1}{a} Q b_0 \, |\psi\rangle \,. \tag{3.1.2}$$

Das gleiche Argument läßt sich auch auf $\hat{J}_0$ – die Nullmode des $U(1)$ Stromes – anwenden, denn ganz analog ist $\{Q, b'_0\} = \hat{J}_0$, wobei der $\hat{J}_0$-Eigenwert die halbzahlige $U(1)$-Ladung eines Zustandes angibt.
Für die Berechnung der Kohomologie ist es also ausreichend, sich auf Zustände der Form

$$\hat{L}_0 \, |\psi\rangle = \hat{J}_0 \, |\psi\rangle = 0 \tag{3.1.3}$$

zu beschränken. Auf diesen Zuständen ist die Wirkung von Q verträglich mit den weiteren Forderungen

$$b_0 \, |\psi\rangle = b'_0 \, |\psi\rangle = 0. \tag{3.1.4}$$

Das sind genau die Bedingungen aus Gleichung (2.2.34). Der Raum dieser Zustände heißt der relative Fockraum $\mathcal{F}_{rel}$ (in diesem Abschnitt spielen Impuls und Bildladung keine Rolle und werden daher nicht explizit angegeben) und die zugehörende 'relative Kohomologie' wird mit H_{rel} bezeichnet. Im Gegensatz dazu wird der komplette Fockraum $\mathcal{F}$, der keinen Einschränkungen unterliegt, auch absoluter Fockraum und die entsprechende Kohomologie H 'absolute Kohomologie' genannt. H_{rel} besitzt ebenso wie H Gradierungen bezüglich Impuls, Geistzahl und Bildladung.
Die Bedingungen (3.1.4) hat natürlich Konsequenzen für die Kohomologie, das heißt im allgemeinen ist $H_{rel} \neq H$. Der Zusammenhang zwischen diesen Räumen läßt sich aber sehr präzise mit einer exakten Sequenz beschreiben [17, 55]. Betrachten wir zunächst den Fall, daß die b_0-Bedingung aufgehoben wird. Der entsprechende Fockraum

$$\mathcal{F}' = \left\{ \ |\psi\rangle \in \mathcal{F} \ \middle| \ b'_0 \, |\psi\rangle = \hat{L}_0 \, |\psi\rangle = \hat{J}_0 \, |\psi\rangle = 0 \ \right\} \tag{3.1.5}$$

wird im folgenden b'-relativer Fockraum genannt und die Kohomologie mit H' bezeichnet. $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}_{rel}$ unterscheiden sich nur durch die Möglichkeit, den Oszillator c_0 anzuwenden, d.h.

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{rel} \oplus c_0 \mathcal{F}_{rel} \,. \tag{3.1.6}$$

Die Inklusion $i : \mathcal{F}_{rel} \to \mathcal{F}'$ und die Projektion $pr : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}_{rel}$, definiert durch

$$i(|\psi\rangle) = |\psi\rangle \,, \qquad pr(|\psi\rangle + c_0 \, |\chi\rangle) = |\chi\rangle \,, \qquad |\psi\rangle \,, |\chi\rangle \in \mathcal{F}_{rel}, \tag{3.1.7}$$

[1] Das bedeutet, daß Vertexoperatoren V von Kohomologieklassen konformes Gewicht null haben müssen. Insbesondere sind Ableitungen solcher Vertexoperatoren BRST-trivial, z.B.

$$[Q, V^{(1)}] = \partial V$$

mit $V^{(1)}$ aus Gleichung (2.3.14).

bilden die folgende kurze, exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{rel} \xrightarrow{i} \mathcal{F}' \xrightarrow{pr} \mathcal{F}_{rel} \longrightarrow 0. \tag{3.1.8}$$

Die Projektion antivertauscht mit dem BRST-Operator Q:

$$\begin{aligned} & pr \circ Q(|\psi\rangle + c_0 |\chi\rangle) = pr \circ Q c_0 |\chi\rangle = pr(\{Q, c_0\} - c_0 Q) |\chi\rangle \\ & = -Q |\chi\rangle = -Q \circ pr(|\psi\rangle + c_0 |\chi\rangle). \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß $\{Q, c_0\}$ keinen Term mit c_0 enthält. In der ersten Zeile fällt $|\psi\rangle$ raus, denn der einzige Term in $Q|\psi\rangle$, der c_0 enthält, ist $c_0 \hat{L}_0 |\psi\rangle = 0$. Da auch i mit Q vertauscht, induziert diese Sequenz ein exaktes Kohomologiedreieck[2]:

$$\begin{tikzcd} & H' \arrow[dr, "pr"] & \\ H_{rel} \arrow[ur, "i"] & & H_{rel} \arrow[ll, "\{Q, c_0\}"'] \end{tikzcd}$$

Der Verbindungshomomorphismus trägt Geistzahl 2 und erlaubt, das Dreieck zu einer langen, exakten Kohomologie-Sequenz 'abzurollen':

$$\ldots H_{rel}^{g+1} \xrightarrow{i} H'^{g+1} \xrightarrow{pr} H_{rel}^{g} \xrightarrow{\{Q,c_0\}} H_{rel}^{g+2} \xrightarrow{i} H'^{g+2} \xrightarrow{pr} \ldots \tag{3.1.10}$$

In Abschnitt fünf dieses Kapitels werden wir zeigen, daß die relative Kohomologie nur für Geistzahl eins von Null verschieden ist. An der Sequenz liest man dann ab, daß $H'^{g} = 0$ für $g \neq 1, 2$ und daß die Abbildungen

$$i : H_{rel}^1 \to H'^1 \quad \text{und} \quad pr : H'^2 \to H_{rel}^1 \tag{3.1.11}$$

Isomorphismen sind. Falls die relative Kohomologie zum Beispiel nur ein Element $|\psi\rangle$ enthält, heißt das, daß die beiden Zustände $|\psi\rangle$ und $c_0 |\psi\rangle + |\chi\rangle$ mit $b_0 |\chi\rangle = 0$ eine Basis von H' bilden. $|\chi\rangle$ wird dabei so gewählt, daß $c_0 |\psi\rangle + |\chi\rangle$ BRST-invariant ist.

Der Zusammenhang zwischen H' und der absoluten Kohomologie H kann analog über die Zerlegung $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus c_0' \mathcal{F}'$ und die Abbildungen $i' : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ und $pr' : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$, definiert durch

$$i'(|\psi\rangle) = |\psi\rangle, \qquad pr'(|\psi\rangle + c_0' |\chi\rangle) = |\chi\rangle, \qquad |\psi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{F}', \tag{3.1.12}$$

gewonnen werden. Die entsprechende lange Sequenz lautet

$$\ldots H'^{g+1} \xrightarrow{i'} H^{g+1} \xrightarrow{pr'} H'^{g+1} \xrightarrow{\{Q,c_0'\}} H'^{g+2} \xrightarrow{i'} H^{g+2} \xrightarrow{pr'} \ldots \tag{3.1.13}$$

[2] Dies ist eine mathematische Standardkonstrunktion, siehe zum Beispiel Ref. [22], Kapitel null.

Aus der Sequenz (3.1.10) hatten wir bereits erhalten, daß nur ${H'}^1$ und ${H'}^2$ ungleich null sind. Das führt in (3.1.13) zu dem Ergebnis, daß

$$pr' : H^3 \to {H'}^2 \quad \text{und} \quad i' : {H'}^1 \to H^1 \tag{3.1.14}$$

Isomorphismen sind. Bei H^2 ist die Situation etwas komplizierter. Der relevante Teil der Sequenz lautet

$$0 \longrightarrow {H'}^2 \xrightarrow{i'} H^2 \xrightarrow{pr'} {H'}^1 \longrightarrow 0. \tag{3.1.15}$$

Das heißt, i' ist injektiv und pr' ist ist ein Isomorphismus zwischen $H^2 - i'({H'}^2)$ und ${H'}^1$. Also hat H^2 die Form

$$H^2 = i'\big({H'}^2\big) \oplus {pr'}^{-1}\big({H'}^1\big). \tag{3.1.16}$$

Dadurch, daß die relative Kohomologie nur Elemente mit Geistzahl eins hat, ist die absolute Kohomologie also völlig durch die relative bestimmt. Aus einem Repräsentanten $|\psi\rangle$ der relativen Kohomologie lassen sich die folgenden absoluten Kohomologieklassen ableiten

$$\begin{aligned} g &= 1 : |\psi\rangle \,, \\ g &= 2 : c_0\,|\psi\rangle + |\chi_1\rangle \,, \quad c_0'\,|\psi\rangle + |\chi_2\rangle \,, \\ g &= 3 : c_0' c_0\,|\psi\rangle + |\chi_3\rangle \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

mit nicht-invarianten Zuständen $|\chi_i\rangle$, die so gewählt sind, daß die Zustände in (3.1.17) BRST-invariant sind. Dieses Resultat macht es plausibel, daß sich das Spektrum der Theorie nur in der relativen Kohomologie wiederspiegelt (siehe Kapitel V für eine etwas andere Begründung dieses Punktes). Die relative Kohomologie besitzt allerdings kein eigenes Skalarprodukt, da man dafür Geistnullmoden benötigt. Die aus relativen Kohomologieklassen konstruierten Zustände höherer Geistzahl haben daher die Funktion, für ein nichtverschwindendes Skalarprodukt, dessen Existenz Voraussetzung für eine quantenmechanische Interpretation ist, zu sorgen.

In Kapitel II, Abschnitt drei, hatten wir gesehen, daß die absolute BRST-Kohomologie zusammen mit der Multiplikation (2.3.10) einen Ring bildet. Es ist eine wichtige Frage, ob sich diese Struktur auch auf die relative Kohomologie überträgt. Vertexoperatoren V in der relativen BRST-Kohomologie müssen die Bedingungen

$$\Delta V = \Delta' V = 0 \tag{3.1.18}$$

mit Δ aus (2.3.17) und

$$\Delta' V(w) = \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\; b'(z) V(w) \tag{3.1.19}$$

erfüllen. Man kann zeigen, daß Δ' einer Leibnitz-Regel gehorcht,

$$\Delta'(V_1 \cdot V_2) = (\Delta' V_1) \cdot V_2 + (-1)^{|V_1|} V_1 \cdot (\Delta' V_2), \tag{3.1.20}$$

das heißt, mit $|V_1\rangle$ und $|V_2\rangle$ wird auch der Produktzustand $(V_1 \cdot V_2)(0)\,|0\rangle$ von b_0' vernichtet. Dagegen erfüllt Δ keine Leibnitz-Regel (siehe Gleichung (2.3.20)), wodurch die Ringstruktur der relativen Kohomologie zerstört wird, denn das Produkt zweier relativer Kohomologieklassen wird im allgemeinen nicht von b_0 vernichtet! Zum Abschluß diskutieren wir noch kurz den geschlossenen String, dessen Fockraum das Tensorprodukt links- und rechtlaufender Anteile ist, die beide isomorph zur chiralen Theorie sind (siehe Gleichung (2.2.32)). Ebenso wie in der chiralen Theorie kann man sich bei Kohomologiebetrachtungen auf Zustände beschränken, die von den Nullmoden sämtlicher bosonischer Symmetrieströme vernichtet werden. Das führt auf den relativen Fockraum $\mathcal{F}_{cl,rel}$ des geschlossenen Strings, der Zustände $|\psi\rangle$ der Form

$$\begin{aligned} &\hat{L}_0\,|\psi\rangle = \tilde{\hat{L}}_0\,|\psi\rangle = \hat{L}_0\,|\psi\rangle = \tilde{\hat{L}}_0\,|\psi\rangle = 0, \\ &b_0^{\pm}\,|\psi\rangle = {b'}_0^{\pm}\,|\psi\rangle = 0 \;\text{ mit }\; b_0^{\pm} = b_0 \pm \tilde{b}_0, \;\; {b'}_0^{\pm} = b_0' \pm \tilde{b}_0'. \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

enthält. Offensichtlich faktorisiert dieser Fockraum ebenfalls in links- und rechtslaufenden Anteil, was mit dem Künneth-Theorem auch für die relative Kohomologie H_{rel}^{cl} des geschlossenen Strings gilt:

$$\mathcal{F}_{cl,rel} = \mathcal{F}_{L,rel} \otimes \mathcal{F}_{R,rel} \;\Rightarrow\; H_{rel}^{cl} = H_{L,rel} \otimes H_{R,rel}. \tag{3.1.22}$$

Wir werden aber in Kapitel V sehen, daß im Gegensatz zur chiralen Theorie nicht die relative, sondern 'semirelative' Kohomologie mit Zuständen, bei denen die b_0^+-Bedingung aufgehoben wird, die entscheidende ist. Insbesondere faktorisert die semirelative Kohomologie im allgemeinen nicht in links- und rechtslaufenden Anteil. Der Zusammenhang zwischen absoluter, semirelativer und relativer Kohomologie kann aber wieder wie oben mit Hilfe von exakten Kohomologiesequenzen analysiert werden. Die entsprechenden Verbindungshomomorphismen sind $\{Q, c_0^+\}$ beziehungsweise $\{Q, c_0^-\}$. Weitere Details findet man in [55].

2. Poincaré Dualität und Spektraler Fluß

In den folgenden Abschnitten geht es darum, die chirale, relative Kohomologie $H^g_{rel,\pi^+,\pi^-}(k)$ für jede Geistzahl g, Bildladung (π^+,π^-) und beliebigen Impuls $k \neq 0$ zu untersuchen. Als Vorbereitung wird in diesem Abschnitt zunächst gezeigt, daß die Kohomologien H_{rel,π^+,π^-} und $H_{rel,\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}$ übereinstimmen, wenn

$$\begin{aligned} \pi^+ + \pi^- &= \hat{\pi}^+ + \hat{\pi}^- && \text{spekraler Fluß}, \\ (\pi^+,\pi^-) &= (-\hat{\pi}^+ - 2, -\hat{\pi}^- - 2) && \text{Poincaré Dualität}. \end{aligned}$$

Zunächst wird der spektrale Fluß behandelt: In Kapitel II, Abschnitt eins, wurde erklärt, daß die N=2 superkonformen Algebren, die man als Zwangsbedingungen für verschiedene Randbedingungen der fermionischen Stringkoordinaten erhält, alle zueinander isomorph sind. Für die geisterweiterten Generatoren lautet dieser Isomorphismus konkret

$$\hat{L}_n \to \hat{L}_n + \Theta \hat{J}_n, \qquad \hat{J}_n \to \hat{J}_n, \qquad \hat{G}_r^{\pm} \to \hat{G}_{r\pm\Theta}^{\pm}, \tag{3.2.1}$$

für einen beliebigen Spektalparameter $\Theta \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist diese Abbildung ein Automorphismus der in dieser Arbeit benutzten NS-Algebra, wenn man $\Theta = \pm 1$ wählt, denn dann bleibt der Modenindex der fermionischen Generatoren halbzahlig. Offensichtlich sind die Automorphismen für $\Theta = 1$ und $\Theta = -1$ invers zueinander.
Es ist zu erwarten, daß dieser Automorphismus auch Auswirkungen auf die Kohomologie der Theorie hat. Ein Operator $S(\Theta)$, der die Abbildung (3.2.1) implementiert, wurde zum Beispiel in [8] explizit angegeben. Für $\Theta = \pm 1$ trägt er die Bildladung $(\mp 1, \pm 1)$ und lautet

$$\begin{aligned} S(\Theta = 1) \equiv S &= (1 - cb')J^{--}e^{\varphi^+}e^{-\varphi^-}, \\ S(\Theta = -1) = S^{-1} &= (1 + cb')J^{++}e^{-\varphi^+}e^{\varphi^-}. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Im nächsten Kapitel wird gezeigt, daß S und S^{-1} die Vertexoperatoren von Kohomologieklassen mit Geistzahl null und verschwindendem Impuls sind. Auf Vertexoperatoren $V^g_{\pi^+,\pi^-}(k)$, die beliebige Kohomologieklassen mit Impuls k, Geistzahl g und Bildladung (π^+, π^-) repräsentieren, wirkt S durch das Multiplikationsgesetz (2.3.10):

$$S \cdot V^g_{\pi^+,\pi^-}(k) \in H^g_{\pi^+-1,\pi^-+1}(k). \tag{3.2.3}$$

Die Relation $S \cdot S^{-1} = 1$ läßt sich leicht mit den expliziten Ausdrücken (3.2.2) nachprüfen. Aufgrund der Assoziativität des Produktes auf Kohomologieklassen ist Multiplikation mit S eine invertierbare Abbildung, also ein Isomorphismus:

$$H^g_{\pi^+,\pi^-}(k) \cong H^g_{\pi^+-1,\pi^-+1}(k). \tag{3.2.4}$$

Die Operatoren S und S^{-1} vertauschen mit b_0 und b'_0 und bilden daher relative auf relative Kohomologieklassen ab. Der Isomorphismus (3.2.4) gilt also ebenso zwischen den relativen Kohomologien.

Bei der Poincaré Dualität wird die Existenz eines Skalarproduktes ausgenutzt, um verschiedene Kohomologien miteinander in Verbindung zu bringen. Leider enthält das Skalarprodukt in Kapitel II, Abschnitt zwei, die Nullmoden der fermionischen Geister. Alle Elemente des relativen Fockraumes stehen also senkrecht aufeinander. Um ein nichtverschwindendes Skalarprodukt zwischen Zuständen, die von den

Antigeist-Nullmoden vernichtet werden, zu erhalten, muß man die Nullmoden von Hand einfügen. Außerdem ist das Produkt nur dann von Null verschieden, wenn alle Quantenzahlen zueinanderpassen:

$$\begin{aligned} &|\psi\rangle \in \mathcal{F}^{g}_{rel,\pi^+,\pi^-}(k), \qquad \langle\chi|\, c_0 c_0' \,|\psi\rangle \neq 0 \\ &\Rightarrow |\chi\rangle \in \mathcal{F}^{-g-2}_{rel,-\pi^+-2,-\pi^--2}(k). \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Aufgrund der Struktur des Fockraumes ist klar, daß das Skalarprodukt nicht degeneriert ist, mit anderen Worten: Die (endlichdimensionalen!) Räume

$$\mathcal{F}^{g}_{rel,\pi^+,\pi^-}(k) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}^{-g-2}_{rel,-\pi^+-2,-\pi^--2}(k) \tag{3.2.6}$$

sind dual zueinander. Trotz der Nullmoden ist Q hermitesch:

$$\begin{aligned} &\langle\chi|\, c_0 c_0' Q \,|\psi\rangle = \langle\chi|\, c_0 c_0' Q b_0' b_0 c_0 c_0' \,|\psi\rangle \\ &= \langle\chi|\, c_0 c_0' b_0' b_0 Q c_0 c_0' \,|\psi\rangle = \langle\chi|\, Q c_0 c_0' \,|\psi\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

wobei ausgenutzt wurde, daß $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$ von $\hat{L}_0$ und $\hat{J}_0$ vernichtet werden. Unter diesen Umständen wurde in [28], Abschnitt drei, gezeigt, daß die Kohomologien gleiche Dimension haben,

$$\dim H^{g}_{rel,\pi^+,\pi^-}(k) = \dim H^{-g-2}_{rel,-\pi^+-2,-\pi^--2}(k). \tag{3.2.8}$$

Da sie endlichdimensional sind, sind sie isomorph. Allerdings läßt sich nicht ohne weiteres ein kanonischer Isomorphismus angeben. Das liegt daran, daß der zu einem Repräsentanten einer Kohomologieklasse $|\psi\rangle$ duale Zustand $|\psi_D\rangle$ mit $\langle\psi_D|\, c_0 c_0' \,|\psi\rangle = 1$ nicht notwendigerweise BRST-invariant ist. Es gibt also kein einfaches Rezept, um aus einer Kohomologieklasse in $H^{g}_{rel,\pi^+,\pi^-}(k)$ einen Repräsentanten aus $H^{-g-2}_{rel,-\pi^+-2,-\pi^--2}(k)$ zu konstruieren.

3. Zum Aufwärmen: relative BRST-Kohomologie des bosonischen Strings

Eine sehr elegante Methode zur Analyse der relativen, chiralen BRST-Kohomologie, die sich auch auf den $N{=}2$ String im $(-1,-1)$-Bild anwenden läßt, wurde von Frenkel, Garland und Zuckerman [17] gefunden. In diesem Abschnitt wird die Rechnung allerdings erst am einfacheren Beispiel des bosonischen Strings erläutert.

In der bosonischen Stringtheorie enthält der Fockraum nur die Fouriermoden der Stringkoordinaten und Reparametrisierungsgeister. Ein beliebiger Zustand hat also die Form

$$f(\alpha_m, b_n, c_k)\,|\Omega, p\rangle\,, \qquad m,k<0,\; n\leq 0, \tag{3.3.1}$$

wobei f irgendein Polynom der Erzeuger und $|\Omega, p\rangle = c_1 |p\rangle$ ist. Wie üblich ist der relative Fockraum der Unterraum aller Zustände, die von b_0 und $\hat{L}_0$ vernichtet werden. Der BRST-Operator hat die Form

$$Q = \sum_n c_{-n} L_n - \frac{1}{2} \sum_{m,n} (m-n) : c_{-m} c_{-n} b_{m+n} : . \tag{3.3.2}$$

Das zentrale Resultat ist das sogenannte 'Vanishing Theorem' , welches besagt, daß für nichtverschwindenden Impuls die relative BRST-Kohomologie des bosonischen Strings außer für Geistzahl eins verschwindet:

$$H^g_{rel}(p) = 0 \qquad \text{für} \qquad g \neq 1,\ p \neq 0. \tag{3.3.3}$$

Damit ist die Kohomologie natürlich noch lange nicht vollständig ausgerechnet. Wir werden aber im nächsten Abschnitt sehen, daß dieses Ergebnis auch für den $N = 2$ String gilt und dort erlaubt, die Kohomologie im $(-1, -1)$ Bild sehr einfach und vollständig zu bestimmen.
Der Beweis von Gleichung (3.3.3) beruht auf einer Beobachtung, die aus den Zeiten des 'alten kovarianten Zugangs' zur Quantisierung von Stringtheorien stammt: Für nichtverschwindenden Impuls besitzt der Materiefockraum eine Basis, deren Elemente die Form

$$|\psi\rangle = L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |\chi\rangle, \qquad n_1, \dots, n_k > 0, \tag{3.3.4}$$

haben [48]. Der Materiefockraum ist also die (unendliche) direkte Summe von universellen einhüllenden Algebren $U(Vir^-)$ der Unteralgebra Vir^- der Virasoro-Algebra, die aus den Elementen mit strikt negativem Modenindex bestehen, symbolisch

$$\mathcal{F}^{mat} = \sum_\chi U(Vir^-). \tag{3.3.5}$$

Für Impuls $p = 0$ ist $L_{-1} |0\rangle = 0$, das heißt, die Basis des Fockraumes ist in diesem Fall nicht von der Form (3.3.4).
Die Generatoren von Vir^- treten im BRST-Operator in der Form

$$\sum_{n>0} c_n L_{-n} \tag{3.3.6}$$

auf, d.h. im auf $|\Omega, p\rangle$ aufgebauten Fockraum wirken die den L_{-n} zugeordneten Geistmoden als Vernichter. Dieser Teil des BRST-Operators wirkt also auf den Fockraum $\mathcal{C}(\alpha, b)$, der nur aus Polynomen in den α- und b-Erzeugern besteht. Explizit ist

$$\mathcal{C}(\alpha, b) = \text{span}\Big\{ \prod_{n>0} \alpha^\mu_{-n} \prod_{n>0} b_{-n} |\Omega, p\rangle \Big\}. \tag{3.3.7}$$

Der Geistanteil des BRST-Operators enthält ebenfalls Terme, die auf $\mathcal{C}(\alpha, b)$ wirken. Es ist also plausibel, den Operator

$$Q_1 = \sum_{n>0} c_n L_{-n} + \frac{1}{2} \sum_{m,n>0} (m-n) c_m c_n b_{-m-n} \tag{3.3.8}$$

zu betrachten. Man prüft leicht nach, daß Q_1 nilpotent ist; es ist also sinnvoll, die Kohomologie zu betrachten. Dazu ist es nützlich, sich die geometrische Bedeutung von $\mathcal{C}(\alpha, b)$ klarzumachen:
Im ersten Kapitel wurden die Geistmoden c_n als 1-Formen auf einer Gruppenmannigfaltigkeit interpretiert. Da sie hier aber nur als Vernichter auftreten, ist es an dieser Stelle angebracht, die Antigeister als die fundamentalen Objekte zu betrachten. Die Antigeister sind dual zu den Geistern (siehe (2.2.2)), also Elemente der äußeren Algebra der Lie-Algebra. Wegen Gleichung (3.3.4) läßt sich der Raum $\mathcal{C}(\alpha, b)$ außer für Impuls $p = 0$ dann als

$$\mathcal{C}(\alpha, b) = \sum U(Vir^-) \otimes \bigwedge Vir^- \tag{3.3.9}$$

schreiben (in hoffentlich offensichtlicher Notation). Der Operator Q_1 berechnet also die Homologie von Vir^- mit Koeffizienten in $\sum U(Vir^-)$. Die Berechnung dieser Homologie ist ein mathematisches Standardproblem[3] mit dem Ergebnis, daß sie nur den Grundzustand enthält, das heißt

$$H(\mathcal{C}(\alpha, b), Q_1)) = |\Omega, p\rangle \,, \tag{3.3.10}$$

also ein vielversprechender Anfang im Hinblick auf unser Ziel Gleichung (3.3.3).
Q_1 ist allerdings nur ein Teil des BRST-Operators und in $\mathcal{C}(\alpha, b)$ treten keine Geisterzeuger auf. Um von Gleichung (3.3.10) auf die Kohomologie des vollständigen BRST-Operators im relativen Raum $\mathcal{F}_{rel}$ zu schließen, wird eine weitere Gradierung – der Filtrierungsgrad $fdeg$ – eingeführt. Der Filtrierungsgrad ist definiert als

$$fdeg\,|\Omega, p\rangle = -\frac{1}{2} p^2\,|\Omega, p\rangle \tag{3.3.11}$$

$$[fdeg, \alpha_n] = n\alpha_n, \qquad [fdeg, c_n] = |n| c_n, \qquad [fdeg, b_n] = -|n| b_n.$$

Für festen Impuls p gibt es nur endlich viele Zustände mit vorgegebenem Filtrierungsgrad, d.h. der relative Fockraum $\mathcal{F}_{rel}(p)$ läßt sich in endlichdimensionale Unterräume mit definiertem Filtrierungsgrad zerlegen. Es ist von entscheidender Bedeutung, daß Q zwar nicht homogen in $fdeg$ ist, aber auch keinen Teil enthält,

[3] siehe z.B. [19]. Da der Beweis aber für die BRST-Kohomologie von Stringtheorien von zentraler Bedeutung ist und einige Rechentricks enthält, die typisch für die Analyse von Kohomologieproblemen sind, wird er im Anhang kurz beschrieben.

der $fdeg$ erniedrigt. Q kann also in einen Anteil Q_0, der vom Grad null in $fdeg$ ist, und einen Anteil, der $fdeg$ strikt erhöht, zerlegt werden. Aus $Q^2 = 0$ folgt dann unmittelbar $Q_0^2 = 0$, so daß es sinnvoll ist, auch die Kohomologie von Q_0 zu betrachten. In der Theorie der Spektralsequenzen (siehe z.B. [22]) lernt man, daß die Kohomologie von Q nur dann nichttrivial ist, wenn auch die von Q_0 nichttrivial ist. Für den Beweis des 'Vanishing Theorems' (3.3.3) reicht also schon die einfachere Beziehung

$$H^g(\mathcal{F}_{rel}, Q_0) = 0 \qquad \text{für} \qquad g \neq 1. \tag{3.3.12}$$

Spektralsequenzen sind ein kompliziertes Geschäft. Der hier benutzte Zusammenhang läßt sich aber an einem einfachen Beispiel erläutern. Betrachte dazu einen endlichdimensionalen gradierten Vektoraum $R = \sum_a R^a$, der mit einem nilpotenten, linaren Operator $d = d_0 + d_1$ ausgestattet ist. Dabei soll d_0 den Grad eines Elementes unverändert lassen und d_1 ihn um 1 erhöhen. Für ein homogenes Element $\alpha \in R^a$ ist also

$$d_0\alpha \in R^a, \qquad d_1\alpha \in R^{a+1}.$$

Zerlegen der Relation $d^2 = 0$ in Teile gleichen Homogenitätsgrades liefert

$$d_0^2 = d_1^2 = \{d_0, d_1\} = 0.$$

Mit diesen einfachen Strukturen läßt sich der uns interessierende Zusammenhang

$$H(R, d_0) = 0 \Rightarrow H(R, d) = 0 \tag{3.3.13}$$

zeigen. Dazu nehmen wir zunächst $H(R, d) \neq 0$ an. Ein Repräsentant α einer beliebigen nichtverschwindenden Kohomologieklasse läßt sich dann in homogene Anteile zerlegen,

$$\alpha = \sum_{l=l_i}^{l_f} \alpha_l, \tag{3.3.14}$$

wobei man für eine vorgegebene Kohomologieklasse den Repräsentanten so wählen kann, daß l_i maximal ist. Durch Abzählen der Homogenitätsgrade stellt man den Zusammenhang

$$d\alpha = 0 \Rightarrow d_0\alpha_{l_i} = 0 \tag{3.3.15}$$

fest. Da die d_0-Kohomologie nach Voraussetzung trivial ist, ist $\alpha_{l_i} = d_0\beta$ mit $\beta \in R^{l_i}$. Dann hat aber das zu α äquivalente Element $\alpha - d\beta$ eine Zerlegung in homogene Anteile, die mit höherem untersten Homogenitätsgrad startet, was im Widerspruch dazu steht, daß α so gewählt wurde, daß l_i maximal ist. Damit ist (3.3.13) bewiesen. Die BRST-Kohomologie des bosonischen Strings ist etwas komplizierter, da wir es mit einem unendlichdimensionalen Vektorraum zu tun haben und die Zerlegung von Q unendlich viele homogene Anteile enthält (aber keinen, der den Homogenitätsgrad erniedrigt). Dieser Fall wird in der allgemeinen Theorie der Spektralsequenzen behandelt, die ähnlich wie oben, aber in präziserer Form argumentiert. Es stellt sich heraus, daß der Zusammenhang (3.3.13) auch für den unendlichdimensionalen Fall gilt, solange nur die Unterräume R^a alle endlichdimensional sind. Wie bereits erwähnt ist diese Bedingung im BRST-Fall erfüllt, da es für vorgegebenen Impuls nur endlich viele Zustände in $\mathcal{F}_{rel}$ mit festem Filtrierungsgrad gibt.

Explizit hat Q_0 die Form $Q_0 = c_0\hat{L}_0 + Q_1 + Q_2$ mit Q_1 aus Gleichung (3.3.8) und

$$Q_2 = -\frac{1}{2}\sum_{m,n>0}(m-n)c_{-m}c_{-n}b_{m+n}. \qquad (3.3.16)$$

Im Gegensatz zu Q_1 treten die c-Moden in Q_2 nur als Erzeuger auf und die b-Moden als Vernichter. Die folgenden Relationen sind offensichtlich:

$$Q_0^2 = Q_1^2 = Q_2^2 = \{Q_1, Q_2\} = 0. \qquad (3.3.17)$$

Der Term $c_0\hat{L}_0$ in Q_0 kann ignoriert werden, da wir uns ja im relativen Fockraum befinden, dessen Zustände von $\hat{L}_0$ vernichtet werden. Die Gleichung (3.3.17) legt außerdem nahe, nicht nur den Operator $Q_1 + Q_2$ zu betrachten, sondern Q_1 und Q_2 getrennt. Dabei ist die folgende Beobachtung wichtig: Es ist bei der Berechnung der BRST-Kohomologie im allgemeinen nicht möglich, die Bedingung $b_0 = 0$ unabhängig von der Bedingung $\hat{L}_0 = 0$ zu betrachten, weil der BRST-Operator für $\hat{L}_0 \neq 0$ aus dem Kern von b_0 herausführt (siehe (3.1.1)). Im Moment haben wir es allerdings nur noch mit Q_1 und Q_2 zu tun, die mit b_0 natürlich vertauschen. Die Kohomologie von Q_1 und Q_2 kann man also auch betrachten, wenn man die $\hat{L}_0$-Bedingung lockert. Konkret definieren wir den Raum[4]

$$\mathcal{C} := \big\{\, |\psi\rangle \in \mathcal{F};\ b_0\,|\psi\rangle = 0\big\}. \qquad (3.3.18)$$

Wie üblich erhält auch $\mathcal{C}$ wieder Gradierungen bezüglich Geistzahl und Schwerpunktsimpuls. Der relative Fockraum hängt mit $\mathcal{C}$ über $\mathcal{F}_{rel} = \mathcal{C} \cap \mathrm{Ker}\,\hat{L}_0$ zusammen. $\mathcal{C}$ hat eine sehr einfache Struktur, denn er ist das Tensorprodukt

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\alpha, b) \otimes \mathcal{C}(c), \qquad (3.3.19)$$

mit $\mathcal{C}(\alpha, b)$ aus Gleichung (3.3.7) und

$$\mathcal{C}(c) = span\Big\{\prod_{n>0} c_{-n}\,|\Omega, p\rangle\Big\} \qquad (3.3.20)$$

Q_1 wirkt nur auf $\mathcal{C}(\alpha, b)$ und Q_2 nur auf $\mathcal{C}(c)$. Man kann also das Künneth-Theorem anwenden,

$$H(\mathcal{C}, Q_1 + Q_2) = H(\mathcal{C}(\alpha, b), Q_1) \otimes H(\mathcal{C}(c), Q_2). \qquad (3.3.21)$$

Es ist instruktiv, in dieser Gleichung die Geistzahl sichtbar zu machen. Da sowohl Q_1 als auch Q_2 die Geistzahl um eins erhöhen, sind auch die Kohomologien gradiert, allerdings trägt $\mathcal{C}(\alpha, b)$ nur negative und $\mathcal{C}(c)$ nur positive Geistzahl:

$$H^g(\mathcal{C}, Q_1 + Q_2) = \sum_{\substack{g=v+u \\ v\geq 1,\, u\leq 1}} H^u(\mathcal{C}(\alpha, b), Q_1) \otimes H^v(\mathcal{C}(c), Q_2). \qquad (3.3.22)$$

[4] Zur Erinnerung: $\mathcal{F}$ ist der komplette Fockraum, der keinerlei Einschränkungen unterliegt.

Mit Gleichung (3.3.10) erhalten wir also das wichtige Zwischenergebnis

$$H^g(\mathcal{C}, Q_1 + Q_2) = 0 \qquad \text{für} \qquad g < 1. \tag{3.3.23}$$

Der nächste Schritt besteht darin, eine analoge Gleichung für $H(\mathcal{F}_{rel}, Q_0)$ abzuleiten. Wie bereits erwähnt ist $\mathcal{F}_{rel}$ der Raum der Zustände $|\psi\rangle \in \mathcal{C}$, die zusätzlich die Gleichung $\hat{L}_0 \, |\psi\rangle = 0$ erfüllen. Die Q_0-invarianten Zustände aus $\mathcal{F}_{rel}$ sind auf jeden Fall auch $Q_1 + Q_2$-invariant, für negative Geistzahl also trivial in $\mathcal{C}$. Konkret heißt das

$$\begin{aligned} &|\psi\rangle \in \mathcal{F}_{rel}^{g<1}, \; Q_0 \, |\psi\rangle = 0 \\ &\Rightarrow |\psi\rangle = (Q_1 + Q_2) \, |\chi\rangle = Q_0 \, |\chi\rangle \,, \quad |\chi\rangle \in \mathcal{C}^{g<1}. \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

$|\psi\rangle$ kann nur dann nichttrivial in $\mathcal{F}_{rel}$ sein, wenn $|\chi\rangle$ nicht die Bedingung $\hat{L}_0 = 0$ erfüllt, also gar nicht in $\mathcal{F}_{rel}$ liegt. Da aber Q_0 und $\hat{L}_0$ vertauschen und $\hat{L}_0$ für festen Impuls ein diskretes Spektrum hat, muß auch $|\chi\rangle$ von $\hat{L}_0$ vernichtet werden, d.h. $|\chi\rangle \in \mathcal{F}_{rel}$. Die relative Q_0-Kohomologie ist also trivial für negative Geistzahl. Damit ist auch die relative Kohomolgie des vollständigen BRST-Operators trivial für negative Geistzahl. Aus der Poincaré Dualität (siehe (3.2.8), für den bosonischen String muß man natürlich die Bildladung ignorieren) folgt dann sofort, daß sämtliche relativen Kohomologieklassen Geistzahl eins haben müssen, das 'Vanishing-Theorem' (3.3.3) ist also bewiesen.
Zum Abschluß unserer Diskussuion des bosonischen Strings behandeln wir noch den Fall $p = 0$. Der Grundzustand wird in diesem Fall von L_{-1} vernichtet, die Basis des Materiefockraumes hat also nicht die Form (3.3.4). Damit wird die ganze Argumentation hinfällig und das 'Vanishing-Theorem' kann nicht bewiesen werden. Glücklicherweise ist es nicht schwer, die Kohomologie in diesem Fall explizit zu berechnen. Dabei findet man in der Tat, daß das 'Vanishing-Theorem' für verschwindenden Impuls verletzt ist, denn es gibt nichttriviale Kohomologieklassen für die Geistzahlen 0, 1 und 2. Explizit hat die Kohomologie für $p = 0$ die Form

$$H_{rel}(p = 0) = \left\{ c_{-1} \, |\Omega\rangle \,, \; \alpha_{-1}^{\mu} \, |\Omega\rangle \,, \; b_{-1} \, |\Omega\rangle \, \right\}. \tag{3.3.25}$$

Ein ähnliches Verhalten werden wir auch beim N=2 String feststellen. Vor allem ist dann die Kohomologie bei verschwindendem Impuls abhängig von der Bildladung.

4. BRST-Kohomologie des N=2 Strings im $(-1,-1)$ Bild

Die eben beschriebene Methode zur Berechnung der BRST-Kohomologie ist sehr allgemein. Die wichtigste Voraussetzung war Gleichung (3.3.4), alle weiteren Schritte waren nur von der allgemeinen Struktur des BRST-Operators abhängig, die ja für beliebige Zwangsbedingungen ähnlich ist (wenn die Algebra der Zwangsbedingungen linear ist. Es gibt auch String-Modelle, in denen das nicht der Fall

ist – die W Strings). Gleichung (3.3.4) läßt sich auch noch allgemeiner formulieren. Die Basis einer Darstellung der Virasoro-Algebra hat immer dann die Form (3.3.4), wenn die Darstellung der Unteralgebra Vir^- frei ist. Das legt die Vermutung nahe, daß die relative chirale Kohomologie eines String-Modelles immer dann in Geistzahl eins konzentriert ist, wenn der Materiesektor eine freie Darstellung der Unteralgebra der Zwangsbedingungen, die einen negativem Modenindex haben, ist. Es ist daher auch nicht überraschend, daß das 'Vanishing-Theorem' auch für den N=1 String bewiesen wurde [28].
Für den N=2 String wurde in Ref. [7] gezeigt, daß der Materiefockraum für Impuls $p \neq 0$ eine Basis der Form

$$L_{-n_1} \dots L_{-n_a} G^+_{-r_1} \dots G^+_{-r_b} G^-_{-s_1} \dots G^-_{-s_c} J_{-m_1} \dots J_{-m_d} |\psi\rangle \tag{3.4.1}$$

hat $(n_1, \dots, m_d > 0)$. Der Beweis des 'Vanishing-Theorems' läßt sich nun ganz genau wie im vorigen Abschnitt durchführen. Ein Punkt verdient allerdings Beachtung. Der Operator Q_1 hat nun die Form

$$\begin{aligned} Q_1 = & \sum_{n>0} (c_n L_{-n} + c'_n J_{-n}) + \sum_{r>0} (\gamma_r^- G^+ + \gamma_r^+ G^-) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m,n>0} (m-n) c_m c_n b_{-m-n} + \sum_{m,n>0} m c'_m c_n b'{}_{-m-n} + \\ & - \sum_{n,s>0} (\frac{1}{2} n - s) c_n (\gamma_s^- \beta^+_{-n-s} + \gamma_s^+ \beta^-_{-n-s}) - \sum_{n,s>0} c'_n (\gamma_s^+ \beta^-_{-n-s} - \gamma_s^- \beta^+_{-n-s}) \\ & - 4 \sum_{r,s>0} \gamma_s^- \gamma_r^+ b_{-r-s} + 2 \sum_{r,s>0} (s-r) \gamma_s^- \gamma_r^+ b'{}_{-r-s}. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Für das ganze Argument ist es wichtig, daß die Geistmoden in Q_1 Vernichter und die Antigeistmoden Erzeuger sind. Das ist nur im $(-1,-1)$ Bild der Fall. In anderen Bildern läßt sich die Kohomologie nicht auf diese Art berechnen!
Der Filtrierungsgrad muß dann definiert werden als

$$\begin{aligned} & fdeg\, |\Omega, p\rangle = -\frac{1}{2} p^2 \, |\Omega\rangle \,, & & \\ & [fdeg, \alpha_n] = n \alpha_n \,, & & [fdeg, d_r] = r d_r \,, \\ & [fdeg, c_n] = |n| c_n \,, & & [fdeg, b_n] = -|n| b_n \,, \\ & [fdeg, c'{}_n] = |n| c'{}_n \,, & & [fdeg, b'{}_n] = -|n| b'{}_n \,, \\ & [fdeg, \gamma_r^\pm] = |r| \gamma_r^\pm \,, & & [fdeg, \beta_r^\pm] = -|r| \beta_r^\pm \,. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Man kann explizit prüfen, daß Q den Filtrierungsgrad nicht erniedrigt und der Term, der den Filtrierungsgrad erhält, die Form $Q_0 = c_0 \hat{L}_0 + c'_0 \hat{J}_0 + Q_1 + Q_2$ hat mit

$$
\begin{aligned}
Q_2 = &-\frac{1}{2}\sum_{m,n>0}(m-n)c_{-m}c_{-n}b_{m+n} - \sum_{m,n>0} mc'_{-m}c_{-n}b'_{m+n} + \\
&+\sum_{n,s>0}(\frac{1}{2}n-s)c_{-n}(\gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s}+\gamma^+_{-s}\beta^-_{n+s}) - \sum_{n,s>0} c'_{-n}(\gamma^+_{-s}\beta^-_{n+s}-\gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s}) \\
&-4\sum_{r,s>0}\gamma^-_{-s}\gamma^+_{-r}b_{r+s} - 2\sum_{r,s>0}(s-r)\gamma^-_{-s}\gamma^+_{-r}b'_{r+s}\,.
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

Um die Kohomologie von $Q_1 + Q_2$ zu berechnen, werden die $\hat{L}_0$- und $\hat{J}_0$-Bedingungen, nicht aber die der Antigeist-Nullmoden fallengelassen. Der relevante Fockraum ist

$$
\mathcal{C} = \mathcal{C}(c, c', \gamma^\pm) \otimes \mathcal{C}(b, b', \beta^\pm, \alpha, d^\pm) \tag{3.4.5}
$$

mit

$$
\mathcal{C}(c, c', \gamma^\pm) = \mathrm{span}\{\prod_{n>0} c_{-n}\prod_{n>0} c'_{-n}\prod_{r>0}\gamma^\pm_{-r}\}\,|\Omega, p\rangle \tag{3.4.6}
$$

und

$$
\mathcal{C}(b, b', \beta^\pm, \alpha, d) = \mathrm{span}\{\prod_{n>0} b_{-n}\prod_{n>0} b'_{-n}\prod_{n>0}\alpha_{-n}\prod_{r>0}\beta^\pm_{-r}\prod_{r>0} d^\pm_{-r}\}\,|\Omega, p\rangle\,.
$$

Wie beim bosonischen String wirkt Q_1 nur auf $\mathcal{C}(b, b', \beta^\pm, \alpha, d)$ und Q_2 nur auf $\mathcal{C}(c, c', \gamma^\pm)$. Eine Super-Version des Resultats aus Anhang B bedeutet dann, daß $H(\mathcal{C}, Q_1 + Q_2)$ für Geistzahl $g < 1$ verschwindet. Die Erweiterung dieses Ergebnisses auf die relative Kohomologie von Q_0 und – per Poincaré Dualität – auf positive Geistzahlen funktioniert genau wie beim bosonischen String, was schließlich für nichtverschwindenden Impuls auf das 'Vanishing Theorem' für den $N{=}2$ String führt:

$$
H^g_{rel}(p) = 0 \qquad \text{für} \qquad g \neq 1,\ p \neq 0. \tag{3.4.7}
$$

Die Dimension der Kohomologie läßt sich mit dem Euler-Poincaré Prinzip[5] berechnen. Dabei spielt der Impulsindex p der diversen Verktorräume eine wichtige Rolle

[5]Unter diesem Namen läuft die folgende Beobachtung: R sei ein gradierter Vektorraum, $R = \sum_a R^a$, und besitze einen nilpotenten Operator d, der den Grad um genau eine Einheit erhöht, $d : R^a \to R^{a+1}$. Die Kohomologie H erbt in diesem Fall die Gradierung, $H = \sum_a H^a$, und es gilt

$$
\sum_a (-1)^a \dim R^a = \sum_a (-1)^a \dim H^a. \tag{3.4.8}
$$

Beweis: Zerlege $R^a = Z^a \oplus A^a$ in einen Unterraum Z^a, der von d vernichtet wird und ein Komplement A^a. Man kann Z^a weiter in einen d-trivialen Raum B^a und die Kohomologie zerlegen, $Z^a = B^a \oplus H^a$. Das setzt man in die linke Seite von (3.4.8) ein und erhält die rechte Seite, wenn man $\dim A^a = \dim B^{a+1}$ benutzt.

und wird für den Rest dieses Abschnittes immer explizit angegeben. Gleichung (3.4.7) und das Euler-Poincaré Prinzip führen auf

$$\dim H^1_{rel}(p) = -\sum_g (-1)^g \dim H^g_{rel}(p) = -\sum_g (-1)^g \dim \mathcal{F}^g_{rel}(p). \tag{3.4.9}$$

Um die rechte Seite zu berechnen, betrachten wir zuerst den Raum $\mathcal{C}(p)$ (Gleichung (3.4.5)), gradiert bezüglich des $\hat{J}_0$ - Eigenwertes j und des Massenlevels n, d.h. des Eigenwertes von $\hat{L}_0 - \frac{1}{2}p^2$:

$$\mathcal{C}(p) = \sum_{j\in\mathbb{Z}, n\geq 0} \mathcal{C}^{j,n}(p). \tag{3.4.10}$$

Da $\mathcal{F}_{rel}(p)$ der Durchschnitt dieses Raumes mit dem Kern von $\hat{L}_0$ und $\hat{J}_0$ ist, ist also $\mathcal{F}_{rel}(p) = \mathcal{C}^{0,-\frac{1}{2}p^2}(p)$.

Der Charakter $ch_x V$ eines gradierten Vektorraumes V ist definiert als

$$ch_x V := \sum_n x^n \mathrm{dim} V^n. \tag{3.4.11}$$

Für einen Vektorraum mit zwei Gradierungen ist

$$ch_{xy} V := \sum_{n,m} x^n y^m \mathrm{dim} V^{n,m}. \tag{3.4.12}$$

eine natürliche Verallgemeinerung. Es ist ein kombinatorisches Problem, den Character von $\mathcal{C}(p)$ zu berechnen,

$$\begin{aligned} ch_{xy}\mathcal{C}(p) = \prod_{k>0}(1+x^k)^4 \prod_{k>0}(1-x^{k-1/2}y^{-1})^{-2} \prod_{k>0}(1-x^{k-1/2}y)^{-2} \times \\ \prod_{k>0}(1-x^k)^{-4} \prod_{k>0}(1+x^{k-1/2}y^{-1})^2 \prod_{k>0}(1+x^{k-1/2}y)^2. \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Die einzelnen Faktoren stammen dabei jeweils von den fermionischen Geistern, den β^+, γ^+-Moden, den β^-, γ^--Moden, den α-Moden und den d^+, d^--Moden. Die Dimension von $\mathcal{F}_{rel}(p)$ ist der Koeffizient von $x^{-\frac{1}{2}p^2}$ in $ch_{xy}\mathcal{C}(p)$. Den Faktor $(-1)^g$ in Gleichung (3.4.9) berücksichtigt man, indem man $\mathcal{C}(p)$ auch noch bezüglich der Geistzahl gradiert und den Ausdruck $\sum_{j,n,g}(-1)^g x^n y^j \mathrm{dim}\mathcal{C}^{n,j,g}(p)$ berechnet. Dabei drehen sich die Vorzeichen in den ersten drei Faktoren um:

$$\begin{aligned} &\sum_{j,n,g}(-1)^g x^n y^j \dim \mathcal{C}^{n,j,g}(p) = \\ &\prod_{k>0}(1-x^k)^4 \prod_{k>0}(1+x^{k-1/2}y^{-1})^{-2} \prod_{k>0}(1+x^{k-1/2}y)^{-2} \times \\ &\prod_{k>0}(1-x^k)^{-4} \prod_{k>0}(1+x^{k-1/2}y^{-1})^2 \prod_{k>0}(1+x^{k-1/2}y)^2 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Das Euler-Poincaré Prinzip besagt also, daß die Dimension von $H^1_{rel}(p)$ der Koeffizient von $x^{-\frac{1}{2}p^2}$ in diesem Ausdruck ist. Das liefert das endgültige Resultat

$$\dim H^1_{rel}(p) = 1 \;\text{ falls }\; p^2 = 0 \text{ und } 0 \text{ sonst.} \qquad (3.4.15)$$

Damit ist die Berechnung der Kohomologie in diesem Bild abgeschlossen.
Diese Methode ist das BRST-algebraische Pendant zur Berechnung der Zustandsumme [37], d.h. der 1-Loop-Vakuumamplitude, zu der alle Zustände der Theorie beitragen. Der Ausdruck (3.4.14) taucht dabei als Integrand auf. Das Vorzeichen $(-1)^g$ in Gleichung (3.4.9) repräsentiert den Effekt, daß sich Geistzustände und unphysikalische Zustände in den inneren Linien von Loop-Diagrammen aufheben.

5. Bildwechsel, Teil Eins

In den beiden vorigen Abschnitten haben wir gesehen, daß die Theorie im $(-1,-1)$ Bild nur einen physikalischen Zustand enthält. Leider ist die dabei benutzte algebraische Methode zur Analyse der Kohomologie nicht in anderen Bildern anwendbar, und es stellt sich die Frage, ob und wie man die Ergebnisse (3.3.3) und (3.4.15) auf andere Bilder übertragen kann.
Aus der Kohomologie eines Bildes (π^+, π^-) kann man weitere Klassen in höheren Bildern durch Anwenden der Bildwechseloperatoren $X^\pm$ gewinnen. Es wurde aber schon in Kapitel II darauf hingewiesen, daß das Kohomologieproblem damit noch nicht vollständig gelöst ist. Es bleibt zu zeigen, daß die Bildwechseloperatoren wirklich Isomorphismen der Kohomologien in verschiedenen Bildern sind.
Das analoge Problem existiert auch in der $N{=}1$ Stringtheorie, in der es nur einen Bildwechseloperator X gibt. Die Lehrbuch-Lösung [25] besteht darin, den inversen Bildwechseloperator Y zu betrachten. Ebenso wie der Bildwechseloperator X vertauscht Y mit Q und hat konformes Gewicht 0. Seine Nullmode $Y_0 = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-1} Y(z)$ erfüllt die Beziehung

$$X_0 \circ Y_0 = Y_0 \circ X_0 = 1 + [Q, \epsilon]. \qquad (3.5.1)$$

Dabei ist $X_0 = \{Q, \xi_0\}$ die Nullmode des Bildwechseloperators und ϵ ein Operator, dessen explizite Form unwichtig ist. Gleichung (3.5.1) zeigt, daß Y_0 den Bildwechseloperator X_0 auf Kohomologieklassen invertiert, da dann der zweite Term auf der rechten Seite irrelevant ist. Damit ist die Bildunabhängigkeit der Kohomologie bewiesen[6]. Allerdings vertauscht Y nicht mit b_0 [12, 6], bildet also die relative Kohomologie nicht unbedingt wieder in sich selbst ab! Die Existenz von Y zeigt also noch nicht die Isomorphie der relativen Kohomologie (bzw. der semirelativen Kohomologie im Fall des geschlossenen Strings). Daher betrachten Berkovits

[6] Gleichung (3.5.1) bedeutet natürlich nicht, daß die Fockräume in den verschiedenen Bildern isomorph sind. Bildwechsel ist also nur ein 'on-shell' - Isomorphismus.

und Zwiebach in [6] den BRST-invarianten Operator $\mathcal{A}^{\mu}_{-1} := \oint \frac{dz}{2\pi} e^{-\varphi}\psi^{\mu}(z)$. $\mathcal{A}^{\mu}_{-1}$ vertauscht mit b_0 und erfüllt die Relationen

$$X_0 \circ \mathcal{A}^{\mu}_{-1} = -\frac{1}{2}\mathcal{A}^{\mu} + \{Q, m^{\mu}\}, \qquad \mathcal{A}^{\mu}_{-1} \circ X_0 = -\frac{1}{2}\mathcal{A}^{\mu} + \{Q, n^{\mu}\}, \tag{3.5.2}$$

wobei $\mathcal{A}^{\mu} := \oint \frac{dz}{2\pi}\partial X^{\mu}$ der Impulsoperator ist und die Operatoren m und n mit b_0 vertauschen. Diese Relationen reichen aus, für nichtverschwindenden Impuls die Isomorphie der relativen Kohomologie in verschiedenen Bildern zu beweisen: Sei z.B. $|\psi, \pi, k\rangle$ Repräsentant einer Kohomologieklasse im Bild π mit Impuls k und $k^0 \neq 0$. Mit Hilfe der ersten Gleichung in (3.5.2) kann man also schreiben

$$k^0 \, |\psi, \pi, k\rangle = -2X_0 \circ \mathcal{A}^{0}_{-1} \, |\psi, \pi, k\rangle + 2Qm^0 \, |\psi, \pi, k\rangle \,. \tag{3.5.3}$$

Der Zustand $|\psi, \pi, k\rangle$ liegt also im Bild von X_0 modulo eines BRST-trivialen Zustandes. Damit ist gezeigt, daß X_0 auf der Menge der Kohomologieklassen surjektiv ist. Die Injektivität läßt sich ebenso leicht mit der zweiten Gleichung in (3.5.2) zeigen. Die Tatsache, daß $\mathcal{A}^{\mu}_{-1}$, m^{μ} und n^{μ} mit b_0 vertauschen ist wichtig, um dieses Argument auch auf die relative Kohomologie auszudehnen. Dadurch wird sichergestellt, daß $\mathcal{A}^{0}_{-1} \, |\psi, \pi, k\rangle$ und $m^0 \, |\psi, \pi, k\rangle$ von b_0 vernichtet werden, sobald $|\psi, \pi, k\rangle$ von b_0 vernichtet wird.

Es ist offensichtlich, daß dieser Beweis für verschwindenden Impuls nicht mehr funktioniert. Zusammenfassend zeigt die Existenz der Operatoren Y und $\mathcal{A}^{\mu}_{-1}$ im Fall des N=1 Strings also die Bildunabhängigkeit der absoluten Kohomologie für beliebigen Impuls und der relativen Kohomologie für Impuls $k \neq 0$. Das läßt noch die Möglichkeit einer Bildabhängigkeit der relativen Kohomolgie bei $k = 0$ offen, was im Ramond-Sektor tatsächlich der Fall ist[7].

In der N=2 Theorie ist die Situation komplizierter, denn es existieren keine zu Y analogen inversen Bildwechseloperatoren [9, 31]. Dies ist keineswegs erstaunlich, denn wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß die absolute Kohomologie bei verschwindendem Impuls bildabhängig ist. Ein impulsunabhängiger inverser Bildwechseloperator – wie etwa Y – kann also nicht existieren. Es ist daher naheliegend, ähnlich wie in [6] vorzugehen und zu versuchen, die Bildwechsel-Operatoren in impulsabhängiger Weise zu invertieren. Dazu betrachten wir die Impulsoperatoren im $(0, -1)$ Bild

$$\mathcal{A}^{a}_{0,-1} = \oint \frac{dz}{2\pi} \, e^{-\varphi^{+}} \, \psi^{+a}(z). \tag{3.5.4}$$

Wegen

$$\left[Q, e^{-\varphi^{+}} \psi^{+a}\right] = \partial(c e^{-\varphi^{+}} \psi^{+a}) \tag{3.5.5}$$

[7] Im NS-Sektor ist die relative Kohomologie vermutlich auch bei $k = 0$ bildunabhängig, obwohl kein Beweis dafür existiert.

ist $\mathcal{A}^a_{0,-1}$ BRST-invariant und erfüllt wie in der $N{=}1$ Theorie die Schlüsselrelationen

$$X_0^- \circ \mathcal{A}^a_{0,-1} = 2\mathcal{A}^a + \{Q, m^a\}, \qquad \mathcal{A}^a_{0,-1} \circ X_0^- = 2\mathcal{A}^a + \{Q, n^a\}, \tag{3.5.6}$$

wobei $\mathcal{A}^a = \oint \frac{dz}{2\pi}\, \partial Z^a$ der Schwerpunktsimpuls ist, und m^a und n^a sind durch

$$\begin{aligned} m^a &= \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \oint_{|z_2|<|z_1|} \frac{dz_2}{2\pi} \int_{z_2}^{z_1} dw\, \partial\xi^-(w) e^{-\varphi^+}\psi^{+a}(z_2), \\ n^a &= \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \oint_{|z_1|<|z_2|} \frac{dz_1}{2\pi z_1} \int_{z_2}^{z_1} dw\, e^{-\varphi^+}\psi^{+a}(z_2)\partial\xi^-(w) \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

gegeben. An den expliziten Ausdrücken erkennt man, daß alle Operatoren mit b_0 und b_0' vertauschen. Mit demselben Argument, das oben für den $N{=}1$ String beschrieben wurde, zeigt man, daß X^- für Impuls $k \neq 0$ invertierbar ist. Alle Rechnungen lassen sich naturlich völlig analog im $(-1, 0)$ Bild durchführen, was auf das gleiche Resultat für X^+ führt. Damit ist die Bildunabhängigkeit der relativen BRST-Kohomologie bei Impuls $k \neq 0$ beweisen.

Um die erste Gleichung in (3.5.6) zu beweisen, schreiben wir $X_0^- \circ \mathcal{A}^a_{0,-1}$ als

$$X_0^- \circ \mathcal{A}^a_{0,-1} = \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \oint_{|z_2|<|z_1|} \frac{dz_2}{2\pi}\, X^-(z_1) e^{-\varphi^+}\psi^{+a}(z_2). \tag{3.5.8}$$

Wenn sich die Felder X^- und $e^{-\varphi^+}\psi^{+a}$ einander nähern, tauchen keine Singularitäten auf, denn sie haben die Operatorprodukt-Entwicklung

$$X^-(z) e^{-\varphi^+}\psi^{+a}(w) \sim c\partial\xi^- e^{-\varphi^+}\psi^{+a}(w) + 2\partial Z^a(w) + \mathcal{O}(z-w). \tag{3.5.9}$$

Daher läßt sich die Relation

$$X^-(z_1) = X^-(z_2) + \int_{z_2}^{z_1} dw\, \{Q, \partial\xi^-(w)\} \tag{3.5.10}$$

in Gleichung (3.5.8) einsetzen, was auf

$$\begin{aligned} X_0^- \circ \mathcal{A}^a_{0,-1} = &\oint \frac{dz}{2\pi}\, (c\partial\xi^- e^{-\varphi^+}\psi^{+a} + 2\partial Z^a) \\ &+ \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \oint_{|z_2|<|z_1|} \frac{dz_2}{2\pi} \int_{z_2}^{z_1} dw\, \{Q, \partial\xi^-(w)\} e^{-\varphi^+}\psi^{+a}(z_2) \end{aligned}$$

führt. Unter Ausnutzung von (3.5.5) läßt sich der Integrand umschreiben in

$$\begin{aligned} \{Q, \partial\xi^-(w)\} e^{-\varphi^+}\psi^{+a}(z_2) = &\{Q, \partial\xi^-(w) e^{-\varphi^+}\psi^{+a}(z_2)\} \\ &+ \partial\xi^-(w)\partial(c e^{-\varphi^+}\psi^{+a}(z_2)). \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

Aus dem zweiten Integral in (3.5.10) wird dann

$$\begin{aligned}
&\{Q, \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \oint_{|z_2|<|z_1|} \frac{dz_2}{2\pi} \int_{z_2}^{z_1} dw\, \partial\xi^-(w) e^{-\varphi^+} \psi^{+a}(z_2)\} \\
&+ \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \oint_{|z_2|<|z_1|} \frac{dz_2}{2\pi} (\xi^-(z_1) - \xi^-(z_2)) \partial(c e^{-\varphi^+} \psi^{+a}(z_2)) \\
&= \{Q, m^a\} - \oint \frac{dz_2}{2\pi} \xi^-(z_2) \partial(c e^{-\varphi^+} \psi^{+a}(z_2)).
\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

Einsetzen in (3.5.10) liefert

$$\begin{aligned}
X_0^- \circ \mathcal{A}^a_{0,-1} &= 2\mathcal{A}^a + \{Q, m^a\} \\
&+ \oint \frac{dz}{2\pi} (c\partial\xi^- e^{-\varphi^+} \psi^{+a} - \xi^- \partial(c e^{-\varphi^+} \psi^{+a})).
\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Das ist bereits das gewünschte Ergebnis, denn der Integrand im letzten Term ist eine totale Ableitung und das Integral verschwindet.

6. Bildwechsel, Teil Zwei

In diesem Kapitel wird ein alternativer Beweis, daß die Bildwechseloperatoren $X_0^\pm$ Isomorphismen der absoluten BRST-Kohomologie bei Impuls $k \neq 0$ sind, gegeben. Dabei wird nicht versucht, $X_0^\pm$ explizit zu invertieren, so daß dieses Argument logisch völlig unabhängig von dem vorangegangenen ist. Leider können wir in diesem Abschnitt keine Aussagen über die relative, sondern nur über die b'-relative Kohomologie machen – allerdings unabhängig vom Impuls. Dadurch werden wir Informationen über die Bildabhängigkeit der b'-relativen Kohomologie bei $k = 0$ erhalten.

Um die grundlegende Idee des Beweises [36] zu erläutern, betrachten wir wieder den N=1 String. Wie bereits erklärt wurde, wird im Rahmen der Bosonisierung der γ, β-Geister der chirale Fockraum durch den Oszillator ξ_0 zu

$$\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F} \oplus \xi_0 \mathcal{F} \tag{3.6.1}$$

erweitert. Diese Zerlegung ist völlig analog zu Gleichung (3.1.6) in Abschnitt eins dieses Kapitels; wir können also mit den gleichen Methoden eine Beziehung zwischen der Kohomologie H^ξ von $\mathcal{F}_\xi$ und der absoluten Kohomologie H von $\mathcal{F}$ herstellen: Die Inklusion $i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_\xi$ und die Projektion $pr : \mathcal{F}_\xi \to \mathcal{F}$, definiert als

$$i(a) := a + \xi_0 0, \qquad pr(a + \xi_0 b) := b, \quad a,\ b \in \mathcal{F}, \tag{3.6.2}$$

lassen sich zu der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}_\xi \xrightarrow{pr} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \tag{3.6.3}$$

kombinieren. Natürlich vertauscht die Inklusion mit dem BRST-Operator. Daß die Projektion mit dem BRST-Operator antivertauscht, zeigt eine kleine Rechnung:

$$\begin{aligned} pr \circ Q(a + \xi_0 b) &= pr(Qa + \{Q, \xi_0\}b - \xi_0 Qb) \\ &= -Qb = -Q \circ pr(a + \xi_0 b), \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

denn die Projektion vernichtet den Zustand $\{Q, \xi_0\}b$, da er kein ξ_0 enthält. Die Sequenz induziert also genau wie in Abschnitt eins ein Kohomologie-Dreieck mit Verbindungshomomorphismus $\{Q, \xi_0\} = X_0$. Wenn man die Bildladung berücksichtigt, wird daraus eine lange, exakte Kohomologie-Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H^{\xi}_{\pi} \xrightarrow{pr} H_{\pi-1} \xrightarrow{X_0} H_{\pi} \xrightarrow{i} H^{\xi}_{\pi} \longrightarrow \ldots, \tag{3.6.5}$$

wobei benutzt wurde, daß die Projektion Bildladung -1 und X_0 Bildladung $+1$ trägt.

Die Schlüsselbeobachtung ist nun, daß die Kohomologie von $\mathcal{F}_{\xi}$ trivial ist, das heißt $H^{\xi}_{\pi} = 0$ für jedes π, denn im erweiterten Fockraum gibt es einen Homotopie-Operator[8]

$$W(z) = 4c\xi\partial\xi e^{-2\varphi} \tag{3.6.6}$$

mit der Eigenschaft

$$\big\{Q, W(z)\big\} = 1. \tag{3.6.7}$$

Setzt man $H^{\xi}_{\pi} = 0$ in (3.6.5) ein, erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_{\pi-1} \xrightarrow{X_0} H_{\pi} \longrightarrow 0. \tag{3.6.8}$$

X_0 ist also ein Isomorphismus.

Der Operator W hängt natürlich eng mit dem inversen Bildwechseloperator zusammen

$$W(z) = -\xi \cdot Y(z). \tag{3.6.9}$$

Ein BRST-invarianter Zustand läßt sich (modulo BRST-trivialer Anteile) immer schreiben als

$$|\psi\rangle = X_0 Y_0 |\psi\rangle = Q\xi_0 Y |\psi\rangle. \tag{3.6.10}$$

Für den N=1 String ist das obige Argument also nur eine Umformulierung der Analyse aus dem vorigen Abschnitt. Das Bemerkenswerte ist allerdings, daß der zu

[8] Man beachte, daß W kein legaler Operator im Fockraum $\mathcal{F}$ ist, denn er enthält die Nullmode ξ_0.

W analoge Operator auch in der N=2 Stringtheorie existiert, obwohl es keine zu Y analogen Operatoren gibt! Explizit hat W in der N=2 Stringtheorie die Form

$$W(z) = -\frac{1}{4} c\xi^+\xi^- e^{-\varphi^+} e^{-\varphi^-}(z), \tag{3.6.11}$$

und erfüllt die gewünschte Relation $\{Q, W(z)\} = 1$. Im Gegensatz zum N=1 String erhält man aber durch Herausziehen einer einzelnen $\xi^\pm$-Nullmode keinen legalen Operator. Eine zu (3.6.9) analoge Relation existiert für den N=2 String nicht.
Der Operator W vertauscht zwar mit b'_0 aber nicht mit b_0! Aus Gleichung (3.6.7) folgt also nur, daß die Kohomologie des $\xi_0^\pm$ erweiterten, b'-relativen Fockraumes

$$\mathcal{F}'_\xi = \mathcal{F}' \oplus \xi_0^+ \mathcal{F}' \oplus \xi_0^- \mathcal{F}' \oplus \xi_0^+ \xi_0^- \mathcal{F}' \tag{3.6.12}$$

verschwindet (siehe (3.1.5) für die Definition von $\mathcal{F}'$). Die Kohomologie dieses Raumes wird mit H'^ξ bezeichnet. Aus $\{Q, W(z)\} = 1$ läßt sich also schließen, daß diese Kohomologie für beliebige Bildladung und Geistzahl verschwindet, das heißt $H'^{\xi,g}_{\pi^+,\pi^-} = 0$.
Leider ist der Zusammenhang (3.6.12) etwas komplizierter als (3.6.1). Wir können also nicht eine einfache exakte Sequenz wie (3.6.5) hinschreiben und gehen daher in zwei Schritten vor. Zuerst definieren wir

$$\mathcal{F}_\pm := \mathcal{F}' \oplus \xi_0^\pm \mathcal{F}' \tag{3.6.13}$$

und die Projektion

$$pr : \mathcal{F}'_\xi \to \mathcal{F}_-, \qquad pr(a + \xi_0^- b + \xi_0^+ c + \xi_0^+ \xi_0^- d) := c + \xi_0^- d, \tag{3.6.14}$$

für a, b, c, $d \in \mathcal{F}'$. Die Abbildung pr hat wiederum Bildladung -1 und antikommutiert mit Q, denn

$$\begin{aligned}
&(pr \circ Q)(a + \xi_0^- b + \xi_0^+ c + \xi_0^+ \xi_0^- d) \\
&= pr(Qa + Q\xi_0^- b + Q\xi_0^+ c + Q\xi_0^+ \xi_0^- d) \\
&= pr(Qa + X_0^- b - \xi_0^- Qb + X_0^+ c - \xi_0^+ Qc + X_0^+ \xi_0^- d - \xi_0^+ Q\xi_0^- d) \qquad (3.6.15) \\
&= -Q(c + \xi_0^- d) \\
&= -(Q \circ pr)(a + \xi_0^- b + \xi_0^+ c + \xi_0^+ \xi_0^- d), \qquad (3.6.16)
\end{aligned}$$

wobei alle Nullmoden $\xi_0^\pm$ explizit aufgeführt wurden. Zusammen mit der Inklusion $i : \mathcal{F}_- \to \mathcal{F}'_\xi$ (die trivialerweise mit Q vertauscht) kann man die kurze, exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_- \xrightarrow{i} \mathcal{F}'_\xi \xrightarrow{pr} \mathcal{F}_- \longrightarrow 0 \tag{3.6.17}$$

bilden. Wie in der N=1 Theorie wird eine lange, exakte Kohomologie-Sequenz induziert:

$$\ldots \longrightarrow H'^{\xi}_{\pi^+,\pi^-} \xrightarrow{pr} H^{-}_{\pi^+-1,\pi^-} \xrightarrow{X_0^+} H^{-}_{\pi^+,\pi^-} \xrightarrow{i} H'^{\xi}_{\pi^+,\pi^-} \longrightarrow \ldots . \tag{3.6.18}$$

Ebenso erhält man eine analoge Sequenz, die H^+ enthält ($H^{\pm}$ bezeichnet die Kohomologien von $\mathcal{F}_{\pm}$). Mit Hilfe von $H'^{\xi}_{\pi^+,\pi^-} = 0$ erhalten wir das folgende (impulsunabhängige) Resultat:

Die Abbildungen

$$X_0^+ : H^{-}_{\pi^+,\pi^-} \to H^{-}_{\pi^++1,\pi^-} \tag{3.6.19}$$

und

$$X_0^- : H^{+}_{\pi^+,\pi^-} \to H^{+}_{\pi^+,\pi^-+1} \tag{3.6.20}$$

sind Isomorphismen. $H^{-}_{\pi^+,\pi^-}$ *kann also nur von* π^- *und* $H^{+}_{\pi^+,\pi^-}$ *nur von* π^+ *abhängen.*

Im zweiten Schritt betrachten wir die Projektion

$$pr' : \mathcal{F}_- \to \mathcal{F}', \qquad pr(a + \xi_0^- b) = b. \tag{3.6.21}$$

pr' antivertauscht wieder mit Q und über die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F}_- \xrightarrow{pr'} \mathcal{F}' \longrightarrow 0 \tag{3.6.22}$$

und das entsprechende Kohomologie-Dreieck erhalten wir für jedes Paar (π^+, π^-) eine lange exakte Kohomologie-Sequenz mit Verbindungshomomorphismus X_0^-:

$$\ldots \xrightarrow{X_0^-} H'_{\pi^+,\pi^-} \xrightarrow{i} H^{-}_{\pi^+,\pi^-} \xrightarrow{pr'} H'_{\pi^+,\pi^--1} \xrightarrow{X_0^-} H'_{\pi^+,\pi^-} \xrightarrow{i} \ldots . \tag{3.6.23}$$

Damit können wir das folgende impulsunabhängige Resultat beweisen:

Wenn

$$X_0^+ : \quad H'_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-} \longrightarrow H'_{\hat{\pi}^++1,\hat{\pi}^-} \tag{3.6.24}$$

für fest vorgegebene Bildladung $(\hat{\pi}^+, \hat{\pi}^-)$ *ein Isomorphismus ist, dann ist*

$$X_0^+ : \quad H'_{\hat{\pi}^+,\pi^-} \longrightarrow H'_{\hat{\pi}^++1,\pi^-} \tag{3.6.25}$$

ein Isomorphismus für beliebiges π^-. *Spektralfluß garantiert dann die Isomorphie aller* H_{π^+,π^-}. *Ein analoges Resultat gilt für* X_0^-.

Diese Behauptung ist eine direkte Anwendung des Fünfer-Lemmas aus der Theorie der exakten Sequenzen (siehe z.B. [47]). Die entscheidende Beobachtung ist, daß die Sequenz (3.6.23) unabhängig von π^+ ist. Um zu zeigen, daß X_0^+ bijektiv ist, schreiben wir zwei Sequenzen für die Bildladungen $\widehat{\pi}^+$ und $\widehat{\pi}^+ + 1$ nebeneinander hin und verbinden sie durch X_0^+ (aus Platzgründen ist das folgende Diagramm um $90°$ aus seiner üblichen Form gedreht).

$$\begin{tikzcd}
H^-_{\widehat{\pi},\widehat{\pi}^-+1} \arrow[r, "X_0^+", "\cong"'] \arrow[d, "pr'"'] & H^-_{\widehat{\pi}^++1,\widehat{\pi}^-+1} \arrow[d, "pr'"'] \\
H'_{\widehat{\pi}^+,\widehat{\pi}^-} \arrow[r, "X_0^+"] \arrow[d, "X_0^-"'] & H'_{\widehat{\pi}^++1,\widehat{\pi}^-} \arrow[d, "X_0^-"'] \\
H'_{\widehat{\pi}^+,\widehat{\pi}^-+1} \arrow[r, "X_0^+"] \arrow[d, "i"'] & H'_{\widehat{\pi}^++1,\widehat{\pi}^-+1} \arrow[d, "i"'] \\
H^-_{\widehat{\pi}^+,\widehat{\pi}^-+1} \arrow[r, "X_0^+", "\cong"'] \arrow[d, "pr'"'] & H^-_{\widehat{\pi}^++1,\widehat{\pi}^-+1} \arrow[d, "pr'"'] \\
H'_{\widehat{\pi}^+,\widehat{\pi}^-} \arrow[r, "X_0^+"] & H'_{\widehat{\pi}^++1,\widehat{\pi}^-}
\end{tikzcd} \tag{3.6.26}$$

Aufgrund von (3.6.19) sind die erste und vierte horizontale Abbildung von oben Isomorphismen. Außerdem sind die Spalten exakt und es gelten die Relationen

$$\begin{aligned}
&[X_0^+, pr'] = [X_0^+, i] = 0, \\
&[X_0^+, X_0^-] = X_0^+ \xi_0^- Q - \xi_0^- Q \xi_0^+ Q - Q[X_0^+, \xi_0^-].
\end{aligned} \tag{3.6.27}$$

Da $[X_0^+, \xi_0^-]$ die Nullmoden $\xi_0^\pm$ nicht enthält, vertauschen sämtliche Abbildungen auf den Kohomologieräumen. Das Diagramm ist also kommutativ. Wenn wir nun wie in der zu beweisenden Behauptung annehmen, daß auch die zweite und fünfte horizontale Abbildung Isomorphismen sind, besagt das Fünfer-Lemma, daß die mittlere horizontale Abbildung ebenfalls bijektiv ist. Die Behauptung folgt dann für alle $\pi^- > \widehat{\pi}^-$ per Induktion. Der Fall $\pi^- < \widehat{\pi}^-$ kann analog behandelt werden, indem man die Rollen von X_0^+ und X_0^- vertauscht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Um dieses Resultat anwenden zu können, wird im nächsten Abschnitt explizit gezeigt, daß der Bildwechseloperator X^- im masselosen Fall, also $\bar{k} \cdot k = 0$, ein Isomorphismus zwischen den b'-relativen Kohomologien in den $(-1,-1)$ und $(-1,0)$ Bildern ist. Außerdem vertauscht auch der Spektralflußoperator S mit b'_0. Auf diese Weise erhalten wir das folgende kommutative[9] Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H'_{-1,-1}(\bar{k}\cdot k{=}0) & \xrightarrow[\cong]{X^-} & H'_{-1,0}(\bar{k}\cdot k{=}0) \\ {\scriptstyle S^{-n}}\big\downarrow\cong & & {\scriptstyle S^{-n}}\big\downarrow\cong \\ H'_{-1+n,-1-n}(\bar{k}\cdot k{=}0) & \xrightarrow{X^-} & H'_{-1+n,n}(\bar{k}\cdot k{=}0) \end{array} \tag{3.6.28}$$

X^- ist also auch ein Isomorphismus in der unteren Reihe. Da ein analoges Diagramm auch für X^+ existiert, sind

$$\begin{aligned} X^- &: H'_{-1+n,-1-n}(\bar{k}\cdot k{=}0) \to H'_{-1+n,-n}(\bar{k}\cdot k{=}0), \\ X^+ &: H'_{-1+n,-1-n}(\bar{k}\cdot k{=}0) \to H'_{n,-1-n}(\bar{k}\cdot k{=}0) \end{aligned} \tag{3.6.29}$$

für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen. Wir können nun Gleichung (3.6.25) anwenden und haben damit bewiesen, daß für $\bar{k}\cdot k = 0$ die Bildwechseloperatoren Isomorphismen zwischen den Kohomologien beliebiger Bildladung sind.
Im Prinzip ist diese Methode auch für höhere Massenlevel anwendbar. Allerdings muß man als Induktionsvoraussetzung explizit nachweisen, daß die Bildwechseloperatoren zum Beispiel Isomorphismen zwischen den $(-1,-1)$ und $(-1,0)$ Bildern sind, was sehr aufwendig werden kann.

7. Explizite Rechnungen

Zum Schluß dieses Abschnittes wird die Kohomologie im masselosen Fall, also für $\bar{k}\cdot k = 0$, in einigen einfachen Fällen explizit berechnet.
Wir betrachten zunächst das $(-1,-1)$ Bild. Mit Hilfe der Gleichungen (2.2.25) stellt man fest, daß der relative Fockraum nur aus einem einzigen Zustand mit Geistzahl eins besteht,

$$c_1|\,-1,-1,k\,\rangle, \qquad k\cdot\bar{k} = 0. \tag{3.7.1}$$

Dieser Zustand ist offensichtlich BRST-invariant aber nicht exakt. Er bildet also die relative Kohomologie im $(-1,-1)$-Bild. Im b'-relativen Fockraum gibt es zusätzlich noch den Zustand

$$c_0c_1|\,-1,-1,k\,\rangle, \qquad k\cdot\bar{k} = 0, \tag{3.7.2}$$

der ebenfalls invariant aber nicht exakt ist. Die b'-relative Kohomologie enthält also einen Zustand mit Geistzahl eins, einen mit Geistzahl zwei und verschwindet sonst. Man kann leicht nachprüfen, daß dieses Ergebnis im Einklang mit der Sequenz

[9] X^- und S wirken über die kommutative und assoziative Multiplikation (2.3.10) auf Kohomologieklassen.

(3.1.10) ist. Der Vertexoperator für den Zustand (3.7.1) wurde bereits in (2.3.25) angegeben und der für (3.7.2) lautet

$$V^{g=2}_{-1,-1} = c\partial c e^{-\varphi^+} e^{-\varphi^-} e^{\frac{i}{2}(\bar{k}\cdot Z + k\cdot \bar{Z})}. \tag{3.7.3}$$

Im $(-1,0)$ Bild wird der relative Fockraum durch die folgenden Zustände aufgespannt:

$$\begin{aligned} A^{\bar{a}}_N &:= c_1(\gamma^+_{1/2})^N(\gamma^-_{-1/2})^N d^{-\bar{a}}_{-1/2}|\,-1,0,k\,\rangle, && g = 2N+1,\\ B_N &:= c_1(\gamma^+_{1/2})^N(\gamma^-_{-1/2})^{N+1}|\,-1,0,k\,\rangle, && g = 2N+2,\\ C^{\bar{a}\bar{b}}_N &:= c_1(\gamma^+_{1/2})^{N+1}(\gamma^-_{-1/2})^N d^{-\bar{a}}_{-1/2} d^{-\bar{b}}_{-1/2}|\,-1,0,k\,\rangle, && g = 2N+2, \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

wobei N eine nichtnegative ganze Zahl ist. Der BRST-Operator wirkt als

$$\begin{aligned} QA^{\bar{a}}_N &= 2\bar{k}^{\bar{a}} B_N + \eta_{a\bar{b}} k^a C^{\bar{b}\bar{a}}_N,\\ QB_N &= \eta_{a\bar{b}} k^a A^{\bar{b}}_{N+1},\\ QC^{\bar{a}\bar{b}}_N &= 2\bar{k}^{\bar{a}} A^{\bar{b}}_{N+1} - 2\bar{k}^{\bar{b}} A^{\bar{a}}_{N+1}. \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

Es ist nicht schwer, die Kohomologie dieses Systems explizit zu berechnen. Für Schwerpunktsimpuls $k \neq 0$ enthält die Kohomologie genau einen Zustand mit Geistzahl 1:

$$\eta_{a\bar{b}} k^a A^{\bar{b}}_0 = c_1 \bar{k}\cdot d^-_{-1/2}|\,-1,0,k\,\rangle, \qquad k\cdot\bar{k} = 0. \tag{3.7.6}$$

Der entsprechende Vertexoperator $V_{-1,0}$ steht in (2.3.32). Mit den Resultaten aus Abschnitt eins dieses Kapitels, stellt man fest, daß die b'-relative Kohomologie für Geistzahl $g \neq 1,2$ verschwindet. Der Anteil mit Geistzahl eins ist der Zustand (3.7.6). Anwenden von Q auf $c_0\eta_{a\bar{b}}k^a A^{\bar{b}}_0$ ergibt

$$Qc_0\eta_{a\bar{b}} k^a A^{\bar{b}}_0 = -4\eta_{a\bar{b}} k^a A^{\bar{b}}_0 = -4QB_0, \tag{3.7.7}$$

was zeigt, daß die Kohomologieklasse auf Geistzahl zwei durch $c_0\eta_{a\bar{b}}k^a A^{\bar{b}}_0 + 4B_0$ repräsentiert wird. Der Vertexoperator ist

$$V^{g=2}_{-1,0} = \left(c\partial c k\cdot\psi^- e^{-\varphi^-} - 4ic\eta^-\right) e^{\frac{i}{2}(\bar{k}\cdot Z + k\cdot\bar{Z})}. \tag{3.7.8}$$

Mit dem expliziten Ausdruck für X^- lassen sich die folgenden Relationen leicht nachprüfen.

$$X^-\cdot V_{-1,-1} = V_{-1,0}, \qquad X^-\cdot V^{g=2}_{-1,-1} = V^{g=2}_{-1,0}. \tag{3.7.9}$$

Damit ist explizit nachgewiesen, daß Bildwechsel ein Isomorphismus zwischen diesen beiden Bildern ist – ein Ergebnis, das als Induktionsanfang für den Beweis in Abschnitt sechs benötigt wurde.

Kapitel IV: BRST-Kohomologie bei verschwindendem Impuls

Die BRST-Kohomologie bei nichtverschwindendem Impuls, die im vorigen Kapitel untersucht wurde, ist entscheidend für das Spektrum der Theorie. Wichtig war vor allem die Bildunabhängigkeit der Kohomologie, denn nur mit diesem Ergebnis lassen sich die Kohomologieklassen verschiedener Bilder als äquivalente Beschreibung desselben Freiheitsgrades betrachten.
Die Kohomologie bei Impuls $k = 0$, die in diesem Kapitel untersucht wird, ist dagegen für das Spektrum unerheblich, da es nur um einen isolierten Punkt im Impulsraum geht. Insbesondere steht eine Bildabhängigkeit dieser Kohomologie nicht dazu im Widerspruch, die dynamischen Freiheitsgrade der verschiedenen Bilder zu identifizieren. Wir haben allerdings bereits mehrfach gesehen, daß Operatoren mit verschwindendem Impuls eine wichtige Rolle spielen – etwa der Spektralflußoperator S und die Bildwechseloperatoren $X^{\pm}$, die alle Vertexoperatoren von Kohomologieklassen der Geistzahl null sind. Diese Operatoren wirken über das Produkt (2.3.10). Daneben gibt es noch die Gerstenhaber-Klammer, durch die Operatoren mit Geistzahl eins wirken können. Etwas anders formuliert: Seien $\mathcal{O}$ und P Operatoren in der Kohomologie mit Geistzahlen null und eins. Dann sind die Abbildungen

$$V \to \mathcal{O} \cdot V, \qquad V \to \{P, V\}_G \tag{4.1}$$

(V repräsentiert hier eine beliebige Kohomologieklasse) Abbildungen innerhalb der BRST-Kohomologie, die die Geistzahl nicht ändern und den Impuls von $\mathcal{O}$ und P tragen. Verlangt man weiterhin, daß diese Abbildungen den Impuls des Vertexoperators nicht ändern – eine Forderung, die sehr natürlich ist, wenn man (4.1) zum Beispiel als Symmetrietransformationen interpretieren will – endet man zwangsläufig bei einer Untersuchung der BRST-Kohomologie bei Impuls null.
Die Ergebnisse aus Abschnitt zwei, Kapitel III lassen sich ohne weiteres auch auf das Kohomologieproblem bei verschwindendem Impuls übertragen. Wie bereits erwähnt wurde, funktioniert bei Impuls null aber weder die FGZ-Methode noch die Bildwechsel-Methode der relativen Kohomologie (Kapitel III, Abschnitte vier und fünf). Wir sind daher im wesentlichen auf explizite Rechnungen wie in Abschnitt sieben des letzten Kapitels angewiesen. Allgemeine Aussagen lassen sich nur über die b'-relative Kohomologie bei Impuls null machen.

1. Geistzahl Null

Im $(-1,-1)$ Bild ist die Situation völlig analog zum Fall nichtverschwindenden Impulses. Der relative Fockraum enthält nur den Zustand (3.7.1) mit $k=0$, ist also leer für Geistzahl null. Das gleiche gilt für das $(-1,0)$ und $(0,-1)$ Bild. Mit anderen Worten: Es gibt keine relative Geistzahl null Kohomologie in diesen Bildern.
Im $(0,0)$ Bild enthält der relative Fockraum für Geistzahl null zwei Kandidaten[1]:

$$|0,0\rangle \qquad \text{und} \qquad c_1 b'_{-1}\,|0,0\rangle \tag{4.1.1}$$

Der erste Zustand ist der $sl(2)$-invariante Grundzustand der konformen Feldtheorie, der natürlich BRST-invariant ist, wohingegen der zweite Zustand nicht invariant ist. Da der relative Fockraum in diesem Bild für negative Geistzahl leer ist, kann $|0,0\rangle$ auch nicht trivial sein (andernfalls hätten wir ernsthafte Schwierigkeiten mit dem ganzen BRST-Formalismus). Der Grundzustand (beziehungsweise der Identitätsoperator in der Sprache der Vertexoperatoren) bildet also die relative Geistzahl null Kohomologie im $(0,0)$ Bild. Dieses einfache Beispiel zeigt schon, daß die Kohomologie für verschwindendem Impuls bildabhängig ist.
Es ist instruktiv, ebenfalls das $(-1,1)$ Bild zu betrachten. Kandidaten-Zustände sind

$$d^{-\bar{a}}_{-1/2} d^{-\bar{b}}_{-1/2}\,|-1,1\rangle\,, \qquad c_1 b'_{-1} d^{-\bar{a}}_{-1/2} d^{-\bar{b}}_{-1/2}\,|-1,1\rangle\,. \tag{4.1.2}$$

Eine kleine Rechnung zeigt, daß die Kombination

$$(1-c_1 b'_{-1}) d^{-\bar{a}}_{-1/2} d^{-\bar{b}}_{-1/2}\,|-1,1\rangle \tag{4.1.3}$$

invariant ist. Wiederum existiert kein Zustand mit negativer Geistzahl. (4.1.3) stellt also die Kohomologie in diesem Bild dar. Der entsprechende Vertexoperator ist natürlich der Spektralflußoperator (3.2.1), den wir hier mit einer kohomologischen Methode wiederentdeckt haben. Völlig analog findet man, daß S^{-1} die Kohomologie im $(1,-1)$ Bild darstellt.
Wir kommen nun zum $(1,0)$ beziehungsweise $(0,1)$ Bild. Was sollten wir erwarten? Es gibt natürlich die Bildwechseloperatoren $X^{\pm}(z)$, (2.3.30). Die entsprechenden Zustände

$$|X^{\pm}\rangle = X^{\pm}(z=0)\,|0\rangle \tag{4.1.4}$$

repräsentieren Kohomologieklassen in den uns interessierenden Bildern mit Impuls und Geistzahl null. Es gibt jedoch noch einen anderen Weg, eine Kohomologieklasse etwa im $(0,1)$ Bild zu konstruieren [10]: Man betrachtet einfach den Operator $Y^- := S\cdot X^+$, also

$$\begin{aligned} Y^- = \big[c\beta^+ e^{\varphi^+} - 4(1-cb')(b+\frac{1}{2}\partial b')\gamma^+ e^{\varphi^+} + 4b'\gamma^+\partial e^{\varphi^+}\big] J^{--} \\ + (1-cb')e^{\varphi^+}\widehat{G}^-, \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

[1] $|\pi^+,\pi^-\rangle$ steht in diesem Kapitel für $|\pi^+,\pi^-,k=0\rangle$.

beziehungsweise den entsprechenden Zustand $|Y^-\rangle$. Die wichtige Beobachtung ist, daß $|X^-\rangle$ *und* $|Y^-\rangle$ *BRST-inäquivalent sind.* Um das zu zeigen, nehmen wir an, sie wären äquivalent. Dann müßte es eine BRST-triviale Linearkombination von $|X^-\rangle$ und $|Y^-\rangle$ geben, also

$$\left|X^-\right\rangle + \alpha \left|Y^-\right\rangle \stackrel{?}{=} Q\,|\lambda\rangle \tag{4.1.6}$$

mit einem geeignet gewähltem Koeffizienten α und Zustand $|\lambda\rangle$. Offensichtlich muß $|\lambda\rangle$ Element des relativen Fockraumes im $(0,1)$ Bild mit Geistzahl -1 sein. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß dieser Raum nur den Zustand

$$b'_{-1} d^{-\bar{a}}_{-1/2}\,|0,1\rangle \tag{4.1.7}$$

enthält und erkennt schon an der Indexstruktur, daß $Qb'_{-1} d^{-\bar{a}}_{-1/2}\,|0,1\rangle$ nicht als Linearkombination von $|X^-\rangle$ und $|Y^-\rangle$ geschrieben werden kann.
Alternativ kann man, um die Kohomologie in diesem Bild zu analysieren, eine Basis des relativen Fockraumes hinschreiben und nach BRST-invarianten aber nichttrivialen Linearkombinationen suchen. Diese Rechnung ist zu lang, um hier wiedergegeben werden zu können (die Dimension des relativen Fockraumes ist in diesem Fall 38), zeigt aber, daß es neben $|X^-\rangle$ und $|Y^-\rangle$ keine weiteren Kohomologieklassen gibt. Völlig analog kann man zeigen, daß die Kohomologie im $(1,0)$ Bild von den Operatoren X^+ und $X^- \cdot S^{-1}$ aufgespannt wird.
Kohomologieklassen in höheren Bildern kann man konstruieren, indem man positive Potenzen von $X^\pm$ und ganzzahlige Potenzen von S betrachtet. Für vorgegebenes Bild (π^+, π^-) erhält man $\pi^+ + \pi^- + 1$ Operatoren:

$$\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} := (X^+)^{\pi^+ + n} \cdot (X^-)^{\pi^- - n} \cdot S^n, \qquad n = -\pi^+, ..., \pi^-. \tag{4.1.8}$$

Der Laufbereich von $n \in \mathbb{Z}$ ist auf diese Weise eingeschränkt, denn es existieren keine negativen Potenzen von $X^\pm$. Zunächst stellt sich die Frage, ob die $\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n}$ wieder in der relativen Kohomologie liegen, d.h. ob sie von Δ aus Gleichung (2.3.17) vernichtet werden. In Kapitel III, Abschnitt eins, hatten wir ja gesehen, daß das durch die Konstruktion (4.1.8) keineswegs garantiert ist. Da $X^\pm$ und S in der relativen Kohomologie liegen, gilt natürlich $\Delta X^\pm = \Delta S = 0$. Durch explizites Nachrechnen zeigt man außerdem:

$$\Delta\big(X^+ \cdot X^-\big) = \Delta\big(X^\pm \cdot X^\pm\big) = \Delta\big(X^\pm \cdot S\big) = 0. \tag{4.1.9}$$

Mit Gleichung (2.3.20) folgt dann

$$\big\{X^+, X^-\big\}_G = \big\{X^\pm, X^\pm\big\}_G = \big\{X^\pm, S\big\}_G = 0. \tag{4.1.10}$$

Mit diesen Relationen sieht man induktiv, daß die Operatoren in (4.1.8) alle in der relativen Kohomologie liegen.

Es bleibt aber noch zu zeigen, daß die $\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n}$ nichttrivial sind. Dazu betrachten wir, wie diese Operatoren auf die Vertexoperatoren $V_{\pi^+,\pi^-}(k)$ aus (2.3.31) wirken. Eine einfache Rechung zeigt

$$S \cdot V_{0,-1}(k) = h(k)V_{-1,0}(k), \quad S^{-1} \cdot V_{-1,0}(k) = h(k)^{-1}V_{0,-1}(k), \quad (4.1.11)$$

wobei $h(k)$ definiert ist als

$$h(k) = \frac{\bar{k}^0}{k^1} = \frac{\bar{k}^1}{k^0}. \quad (4.1.12)$$

Diese Impulsfunktion spielt eine prominente Rolle in [5] (siehe auch [39]) und wird auch im nächsten Kapitel bei der Diskussion der Symmetrien des N=2 Strings wichtig sein. Insbesondere ist $h(k)$ nur eine Phase, also $|h| = 1$ beziehungsweise $h^* = 1/h$. Aufgrund der Kommutativität des Produktes wirken S und S^{-1} auf die Operatoren $V_{\pi^+,\pi^-}(k)$ mit beliebiger Bildladung ebenso wie in (4.1.11). Für die Operatoren in (4.1.8) findet man

$$\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}(k) = h(k)^n V_{\pi^++\hat{\pi}^+,\pi^-+\hat{\pi}^-}(k). \quad (4.1.13)$$

Damit können wir zeigen, daß alle $\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n}$ verschiedene Kohomologieklassen repräsentieren. Denn wenn das nicht der Fall wäre, müßte es eine triviale Linearkombination geben, also

$$\sum_n \alpha_n \mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} = \{Q, \Lambda\} \quad (4.1.14)$$

für ein passendes Λ und geeignet gewählte Koeffizienten α_n. Das Produkt dieser Summe mit einem beliebigen Vertexoperator müßte dann trivial sein. Andererseits ist aber

$$\Big(\sum_n \alpha_n \mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n}\Big) \cdot V_{0,0}(k) = \Big(\sum_n \alpha_n h(k)^n\Big) V_{\pi^+,\pi^-}(k). \quad (4.1.15)$$

Die rechte Seite kann nur dann trivial sein, wenn die Summe $\sum_n \alpha_n h(k)^n$ für jeden lichtartigen Impuls k verschwindet. Da das nicht der Fall sein kann, ist die Nichttrivialität der $\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n}$ bewiesen. Damit ist allerdings nicht gezeigt, daß in (4.1.8) die Kohomologie vollständig angegeben ist. Es ist möglich, daß es in Bildern jenseits von $\pi^+ + \pi^- = 1$ noch weitere Kohomologieklassen gibt.

Um die bisherigen Resultate zusammenzufassen, führen wir die Notation $\pi = \pi^+ + \pi^-$ ein. Dann gelten die folgenden Tatsachen über die Kohomologie mit Geistzahl und Impuls null:

- Die Kohomologien der Bilder (π^+, π^-) und $(\hat{\pi}^+, \hat{\pi}^-)$ stimmen für $\pi = \hat{\pi}$ überein (das ist natürlich nur der Spektalfluß-Automorphismus und gilt auch für andere Impulse und Geistzahlen).

- Die Kohomologie ist leer für $\pi = -2$ und $\pi = -1$.
- Für $\pi = 0$ ist die Kohomologie eindimensional. Sie wird für $(\pi^+, \pi^-) = (-n, n)$ durch den Operator S^n repräsentiert.
- Für $\pi = 1$ ist die Kohomologie zweidimensional. Sie wird für $(\pi^+, \pi^-) = (1-n, n)$ durch die Operatoren $X^+ \cdot S^n$ und $X^- \cdot S^{n-1}$ repräsentiert.
- Für $\pi > 1$ enthält die Kohomologie die Operatoren (4.1.8). Sie stellen verschiedene aber eventuell nicht alle Kohomologieklassen dar.

2. Geistzahl Eins

Im $(-1,-1)$ Bild ist die Impuls null Kohomologie mit Geistzahl eins einfach der Grenzwert $k \to 0$ des physikalischen Zustandes (3.7.1). Dies ist das typische Verhalten eines skalaren Freiheitsgrades. Der entsprechende Vertexoperator ist

$$P_{-1,-1} \equiv V_{-1,-1}(k=0) = ce^{-\varphi^+}e^{-\varphi^-}. \tag{4.2.1}$$

Im $(-1,0)$ Bild wird der relevante relative Fockraum von den Zuständen $A_0^{\bar{a}}$ in (3.7.4) aufgespannt. Gleichung (3.7.5) für $k=0$ zeigt, daß sie invariant sind. Da es keine Geistzahl null Zustände im relativen Fockraum gibt, repräsentieren sie die vollständige Kohomologie. Das $(0,-1)$ Bild kann natürlich völlig analog behandelt werden. Die resultierenden Vertexoperatoren sind[2]

$$\bar{P}^{\bar{a}}_{-1,0} = c\psi^{-\bar{a}}e^{-\varphi^-}, \qquad P^a_{0,-1} = c\psi^{+a}e^{-\varphi^+}. \tag{4.2.2}$$

Dieselbe Rechnung im $(0,0)$ Bild ist etwas aufwendiger, da die Dimension des relativen Fockraumes mit steigender Bildladung sehr schnell anwächst. Am Ende findet man aber, daß die Kohomologie von den vier Operatoren

$$-iP^a_{0,0} = c\partial Z^a - 2\gamma^-\psi^{+a}, \qquad -i\bar{P}^{\bar{a}}_{0,0} = c\partial\bar{Z}^{\bar{a}} - 2\gamma^+\psi^{-\bar{a}} \tag{4.2.3}$$

aufgespannt wird. Wir sehen also, daß die Kohomologie bei Impuls null nur im $(-1,-1)$ Bild der $k \to 0$ Grenzwert der Kohomlogie mit $k \neq 0$ ist. In höheren Bildern verhält sich die Dimension der Kohomologie diskontinuierlich bei $k=0$. Die Bedeutung dieses Phänomens läßt sich im Rahmen der Feldtheorie verstehen. Man betrachte zum Beispiel ein freies, masseloses Klein-Gordon Feld. Kanonische Quantisierung führt auf die üblichen Erzeugungsoperatoren $a^\dagger(k)$. Der Raum der physikalischen Zustände (die Kohomologie des identisch verschwindenden BRST-Operators) besteht aus Elementen der Form $a^\dagger(k)\,|0\rangle$ mit $k^2 = 0$, ist also für

[2] Das sind natürlich genau diejenigen Operatoren, deren Ladungen in Abschnitt fünf von Kapitel III benutzt wurden, um die Bildwechseloperatoren zu invertieren.

vorgegebenen Impuls eindimensional. Bei $k = 0$ passiert nichts besonderes – ganz analog zum $(-1, -1)$ Bild des N=2 Strings.

Bei Feldern mit höherem Spin ist die Situation anders. Zum Beispiel besitzt der aus den Erzeugern $a^\dagger_\mu(k)$ eines abelschen Vektorfeldes A_μ gebildete Fockraum kein positiv definites Skalarprodukt. Um die $U(1)$-Eichsymmetrie zu berücksichtigen, führt man zusätzlich ein Geistfeld und ein Antigeistfeld mit Erzeugern $c^\dagger(k)$ und $\bar{c}^\dagger(k)$ ein. Der physikalisch relevante Zustandsraum ist wiederum die Kohomologie des BRST-Operators, der in der Lorentz-Eichung die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} Q\bar{c}^\dagger(k)\,|0\rangle &= k^\mu a^\dagger_\mu(k)\,|0\rangle\,, \\ Qa^\dagger_\mu(k)\,|0\rangle &= ik_\mu c^\dagger(k)\,|0\rangle\,, \\ Qc^\dagger(k)\,|0\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Für $k \neq 0$ enthält die Kohomologie genau zwei Zustände – die transversal polarisierten Photonen. Bei $k = 0$ sieht man aber, daß Q identisch verschwindet. Alle Ein-Teilchen-Zustände sind physikalisch und die Dimension der Kohomologie macht einen Sprung. Dieses Verhalten ist im Rahmen der Quantenfeldtheorie (vermutlich) irrelevant, aber typisch für alle Felder mit nichtverschwindendem Spin. Ein weiteres Beispiel ist der offene bosonische String, dessen Kohomologie im masselosen Sektor für Impuls $k \neq 0$ und Geistzahl eins 24 transversale Photonen enthält, bei identisch verschwindendem Impuls null aber 26-dimensional ist (siehe (3.3.25)).

Der Vergleich mit dem N=2 String zeigt also, daß sich der Freiheitsgrad der Theorie nur im $(-1, -1)$ Bild wie ein Skalar verhält und in höheren Bildern wie ein Feld mit höherem Spin.

In diesem Zusammenhang kann man auch die Wirkung des Bildwechseloperators verstehen. Zum Beispiel ist ein freies antisymmetrisches Tensorfeld in vier Dimensionen 'äquivalent' zu einem freien Skalarfeld. Eine vielleicht etwas zu formale Methode, diesen Zusammenhang zu beweisen, wäre, einen Isomorphismus zwischen den physikalischen Zustandsräumen beider Theorien anzugeben. Das ist aber nur für Impuls $k \neq 0$ möglich, denn während sich die Dimension des Zustandsraumes der skalaren Theorie auch bei $k = 0$ nicht ändert, macht sie in der Tensortheorie ebenso wie im Fall des Vektorfeldes einen Sprung. Einen Isomorphismus zwischen den Zustandsräumen kann es also für $k = 0$ nicht geben. Diese Analogie legt nahe, den Bildwechseloperator als eine Art Dualitätstransformation zwischen verschiedenen, aber äquivalenten Beschreibungen eines Freiheitsgrades aufzufassen.

Nach dieser Abschweifung wenden wir uns wieder der Geistzahl eins Kohomologie des N=2 Strings zu. Kandidaten für Kohomologieklassen im $(0, 1)$ Bild sind die Produkte von X^- und Y^- mit den Operatoren aus (4.2.3). Die expliziten Ausdrücke sind sehr lang und werden daher hier nicht wiedergegeben. Um einzusehen, daß keine Linearkombination dieser Operatoren BRST-trivial ist, reicht es aber, die Anteile der Form $c\psi\partial Z\partial Z$ zu betrachten:

$$
\begin{aligned}
X^- \cdot P^a &\sim ce^{\varphi^+}\eta_{b\bar{b}}\psi^{-b}\partial\bar{Z}^{\bar{b}}\partial Z^a + \dots\,, \\
X^- \cdot \bar{P}^{\bar{a}} &\sim ce^{\varphi^+}\eta_{b\bar{b}}\psi^{-b}\partial\bar{Z}^{\bar{b}}\partial\bar{Z}^{\bar{a}} + \dots\,, \\
Y^- \cdot P^a &\sim ce^{\varphi^+}\epsilon_{\bar{b}\bar{c}}\psi^{-\bar{b}}\partial\bar{Z}^{\bar{c}}\partial Z^a + \dots\,, \\
Y^- \cdot \bar{P}^{\bar{a}} &\sim ce^{\varphi^+}\epsilon_{\bar{b}\bar{c}}\psi^{-\bar{b}}\partial\bar{Z}^{\bar{c}}\partial\bar{Z}^{\bar{a}} + \dots\,.
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

Die einzige Stelle, in der ein Operator der Form $c\psi\partial Z\partial Z$ im Bild von Q auftaucht, ist

$$
\left[Q, cb'e^{\varphi^+}\psi^{-\bar{a}}\right] \sim ce^{\varphi^+}\psi^{-\bar{a}}\partial Z \cdot \partial\bar{Z} + \dots\,. \tag{4.2.6}
$$

Also liegt keine Linearkombination der Operatoren in (4.2.5) im Bild von Q – sie repräsentieren acht verschiedene Kohomologieklassen. Offensichtlich erhält man verschiedene Kohomologieklassen mit Geistzahl eins, indem man die Operatoren in (4.1.8) und (4.2.3) miteinander multipliziert:

$$
\begin{aligned}
P^a_{\pi^+,\pi^-,n} &:= \mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot P^a_{0,0}, \\
\bar{P}^{\bar{a}}_{\pi^+,\pi^-,n} &:= \mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot \bar{P}^{\bar{a}}_{0,0}.
\end{aligned}
\tag{4.2.7}
$$

Es muß wieder gezeigt werden, daß keine Linearkombination trivial ist. Dazu können wir aber nicht genau wie in Abschnitt eins (siehe (4.1.13)) vorgehen, denn das Produkt von $P^a_{\pi^+,\pi^-,n}$ mit einem physikalischen Vertexoperator ist null,

$$
P^a_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}(k) = 0 \pmod{Q}, \tag{4.2.8}
$$

was einfach mit Geistzahlargument folgt: Die rechte Seite hat Geistzahl zwei, bei der es aufgrund des Resultats aus Kapitel III keine relative Kohomologie gibt. Eine Operation, die einen Operator aus (4.2.7) mit einem physikalischen Vertexoperator verknüpft und wieder einen physikalischen Vertexoperator produziert, müßte also die Geistzahl um eine Einheit erniedrigen – der natürliche Kandidat dafür ist die Gerstenhaberklammer. Eine kleine Rechnung zeigt zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
\left\{P^a_{0,0}, V_{-1,-1}\right\}_G &= k^a V_{-1,-1}(k), \\
\left\{\bar{P}^{\bar{a}}_{0,0}, V_{-1,-1}\right\}_G &= \bar{k}^{\bar{a}} V_{-1,-1}(k).
\end{aligned}
\tag{4.2.9}
$$

Dieses Resultat läßt sich auf höhere Bildladung verallgemeinern,

$$
\begin{aligned}
\left\{P^a_{\pi^+,\pi^-,n}, V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}\right\}_G &= h(k)^n k^a V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}(k), \\
\left\{\bar{P}^{\bar{a}}_{\pi^+,\pi^-,n}, V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}\right\}_G &= h(k)^n \bar{k}^{\bar{a}} V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}(k),
\end{aligned}
\tag{4.2.10}
$$

indem man die Rechenregeln der Gerstenhaber-Algebra aus Kapitel II, Abschnitt drei, und die Relationen

$$
\left\{P^a_{0,0}, X^\pm\right\}_G = \left\{P^a_{0,0}, S\right\}_G = \left\{\bar{P}^{\bar{a}}_{0,0}, X^\pm\right\}_G = \left\{\bar{P}^{\bar{a}}_{0,0}, S\right\}_G = 0 \tag{4.2.11}
$$

benutzt, die offensichtlich gelten, weil $X^\pm$ und S Operatoren mit verschwindendem Impuls sind. Die BRST-Inäquivalenz der Operatoren in (4.2.7) zeigt man nun mit demselben Argument, mit dem im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, daß alle Operatoren in (4.1.8) verschiedene Kohomologieklassen repräsentieren. Wiederum ist es aber möglich, daß es noch weitere Kohomologieklassen gibt.

3. höhere Geistzahlen

Im $(-1,-1)$ Bild verschwindet die relative Kohomologie bei Impuls null für Geistzahlen $g > 1$, weil der relative Fockraum leer ist.
Die $(-1,0)$ und $(0,-1)$ Kohomologien verhalten sich dagegen völlig anders. Zum Beispiel enthält der relative Fockraum im $(-1,0)$ Bild die Zustände $A_N^{\bar{a}}$, B_N und $C_N^{\bar{a}\bar{b}}$ aus (3.7.4) mit beliebig hoher Geistzahl. Laut Gleichung (3.7.5) wirkt der BRST-Operator für verschwindenden Impuls als

$$QA_N^{\bar{a}} = QB_N = QC_N^{\bar{a}\bar{b}} = 0 \text{ für alle } N \in \mathbb{N}. \tag{4.3.1}$$

Das bedeutet, daß alle Zustände invariant sind, aber keiner trivial ist. Die relative Kohomologie ist also zweidimensional für jede nicht-negative Geistzahl in diesem Bild. Nach dem alten Rezept erhalten wir entsprechende Kohomologieklassen höherer Bilder durch Multiplikation mit den Operatoren (4.1.8)[3]:

$$\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot A_N^{\bar{a}}, \qquad \mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot B_N, \qquad \mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot C_N^{\bar{a}\bar{b}}, \tag{4.3.2}$$

Das sind für jede Geistzahl $g > 0$ und festes Bild (π^+, π^-) genau $4(\pi^+ + \pi^- + 1)$ Operatoren (die aus A_0 abgeleiteten Operatoren haben Geistzahl eins und wurden bereits im Abschnitt zwei untersucht).
Die Beweismethode, die in den beiden vorigen Abschnitten benutzt wurde, um die BRST-Inäquivalenz der Kohomologieklassen in (4.1.8) und (4.2.7) nachzuweisen, funktioniert allerdings nicht mehr für Geistzahlen $g > 1$, denn kombiniert man einen der Operatoren in (4.3.2) mit $g > 1$ entweder mit Hilfe des Produktes (2.3.10) oder der Gerstenhaber-Klammer mit einem physikalischen Vertexoperator $V_{\pi^+,\pi^-}(k)$, dann kann das Ergebnis nur BRST-trivial sein, wie man einfach durch Abzählen der Geistzahl sieht. Nur die Kohomologieklassen mit Geistzahl null oder eins lassen sich benutzen, um auf natürliche Weise physikalische Zustände ineinander abzubilden. Daher spielen auch nur diese Operatoren eine Rolle in der Diskussion der Symmetrien des Strings im nächsten Kapitel. Die Bedeutung der Kohomologieklassen höherer Geistzahl ist bislang im wesentlichen unbekannt.
Die folgendene Überlegung aus [54] zeigt auf jeden Fall, daß die Operatoren (4.1.8) und (4.3.2) bestensfalls für $\pi \equiv \pi^+ + \pi^- \leq 0$ die Kohomolgie vollständig beschreiben können: Man betrachte eine vom Impuls k parametrisierte Familie von

[3] In Gleichung (3.7.4) bezeichnen die Symbole A_N, B_N und C_N Elemente des Fockraumes. Wir benutzen hier dieselben Symbole für die entsprechenden Vertexoperatoren.

Zuständen $|\alpha(k)\rangle$ mit Norm eins. Wenn nur der Zustand $|\alpha(k_0)\rangle$ für einen diskreten Wert k_0 des Impulses BRST-invariant ist, muß gelten:

$$Q\,|\alpha(k)\rangle = f(k)\,|\beta(k)\rangle\,, \tag{4.3.3}$$

wobei $|\beta(k)\rangle$ ebenfalls Norm eins hat und $f(k)$ genau bei $k = k_0$ verschwindet. Neue Kohomologieklassen bei diskreten Werten der Impulse können also nur in Paaren benachbarter Geistzahl auftreten: $|\alpha(k)\rangle$ ist bei $k = k_0$ invariant und $|\beta(k)\rangle$ ist nicht mehr trivial [4]. Für den N=2 String hatten wir in Kapitel III gesehen, daß es für festes Bild und Impuls $k > 0$ genau einen Zustand mit Geistzahl $g = 1$ und keinen mit anderer Geistzahl gibt. Dagegen konnten wir die relativen $k = 0$ Kohomologien nur in den Bildern $(-1,-1)$, $(-1,0)$ und $(0,-1)$ für beliebige Geistzahl vollständig berechnen und es ist leicht nachzuprüfen, daß sie mit der obigen Überlegung konsistent sind. Das gilt ebenfalls für die Vermutung, daß die Operatoren (4.1.8) und (4.3.2) die relative $k = 0$ Kohomologie im $(0,0)$ Bild vollständig beschreiben. Für $\pi > 0$ sieht man aber auf diese Weise, daß die Operatoren in (4.1.8) entweder nicht alle inäquivalent sind oder die Kohomologie nicht vollständig ausschöpfen.

Im $(0,0)$ Bild enthält die relative, chirale Kohomologie mit Impuls $k = 0$ und Geistzahl $g = 2$ die Zustände

$$\begin{aligned}
|V_1\rangle &= \left(\epsilon_{ab} c_1 \gamma^-_{1/2} \alpha^a_{-1} d^{+b}_{-1/2} + \epsilon_{ab} \gamma^-_{1/2} \gamma^-_{1/2} d^{+a}_{-1/2} d^{+b}_{-1/2}\right)|0\rangle\,,\\
|V_2\rangle &= \left(\epsilon_{\bar a\bar b} c_1 \gamma^+_{1/2} \bar\alpha^{\bar a}_{-1} d^{-\bar b}_{-1/2}\,|0\rangle + \epsilon_{\bar a\bar b} \gamma^+_{1/2} \gamma^+_{1/2} d^{-\bar a}_{-1/2} d^{-\bar b}_{-1/2}\right)|0\rangle\,,\\
|V_3\rangle &= Q c_0\,|0\rangle = \left(c_1 c_{-1} - 2\gamma^-_{-1/2}\gamma^+_{1/2} - 2\gamma^-_{1/2}\gamma^+_{-1/2}\right)|0\rangle\,,\\
|V_4\rangle &= Q c_0'\,|0\rangle = \left(c_1 c_1' + 2\gamma^+_{1/2}\gamma^-_{-1/2} - 2\gamma^+_{-1/2}\gamma^-_{1/2}\right)|0\rangle\,.
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

$|V_3\rangle$ und $|V_4\rangle$ sind nicht trivial, da $c_0\,|0\rangle$ und $c_0'\,|0\rangle$ keine Elemente des relativen Fockraumes sind. Diese Zustände sind analog zur Kohomologieklasse $Q c_0\,|0\rangle = c_1 c_{-1}\,|0\rangle$ des bosonischen Strings, der eine wesentliche Rolle für den Beweis des 'Soft-Dilaton-Theorems' spielt, siehe [15]. Das Auftauchen der Zustände $|V_3\rangle$ und $|V_4\rangle$ läßt sich in der N=2 Stringtheorie vielleicht ähnlich verstehen. Das eigentliche Mirakel sind die Zustände $|V_1\rangle$ und $|V_2\rangle$, deren Rolle völlig unklar zu sein scheint.

4. b'-relative Kohomologie

Die Behandlung des Bildwechsel-Problems in Kapitel III, Abschnitt sechs, war unabhängig vom Wert des Impulses und läßt sich daher auch in diesem Kapitel anwenden, um einiges über die Bildabhängigkeit der b'-relativen Kohomologie bei Impuls null in Erfahrung zu bringen.

[4] Zum Beispiel fällt das ganze komplizierte Spektrum der diskreten Zustände der $2D$ Stringtheorie in dieses Schema.

Die Sequenz (3.6.23) lautete

$$\ldots \xrightarrow{X_0^-} H'^{g}_{\pi^+,\pi^-} \xrightarrow{i} H^{-,g}_{\pi^+,\pi^-} \xrightarrow{pr'} H'^{g+1}_{\pi^+,\pi^--1} \xrightarrow{X_0^-} H'^{g+1}_{\pi^+,\pi^-} \xrightarrow{i} \ldots, \qquad (4.4.1)$$

wobei hier im Gegensatz zu (3.6.23) die Geistzahl explizit angegeben wurde. Weiterhin hatten wir in Abschnitt zwei gesehen, daß

$$H'^{g}_{-1,0}(k{=}0) \;=\; H'^{g}_{-1,-1}(k{=}0) \;=0 \qquad \text{für} \quad g \neq 1,2.$$

Eingesetzt in (4.4.1) für $(\pi^+,\pi^-) = (-1,0)$ ergibt sich

$$H^{-,g}_{-1,0}(k{=}0) \;=0 \qquad \text{für} \quad g \neq 0,1,2.$$

Der Spektralflußoperator (3.2.1) ist natürlich auch ein Automorphismus der Kohomologie H^-. Da er außerdem Geistzahl null hat, folgt

$$H^{-,g}_{\pi^+,\pi^-}(k{=}0) \;=0 \qquad \text{für} \quad \pi^+{+}\pi^- = -1 \quad \text{und} \quad g \neq 0,1,2.$$

Wegen (3.6.20) können diese Kohomologien nicht von π^+ abhängen. Sie müssen daher alle verschwinden. Mit der Sequenz (4.4.1) lernen wir daraus, daß X_0^- ein Isomorphismus der absoluten Kohomologie für Impuls $k=0$ und Geistzahl $g \neq 0,1,2,3$ ist. Genauso läßt sich natürlich ein analoges Resultat für X_0^+ ableiten. Wegen

$$H'^{g}_{-1,-1}(k{=}0) \;=0 \qquad \text{für} \quad g \neq 1,2$$

ist also

$$H'^{g}_{\pi^+,\pi^-}(k{=}0) \;=0 \qquad \text{für} \quad g \neq 0,1,2,3 \qquad (4.4.2)$$

für beliebige Bildladungen $\pi^\pm$.

Kapitel V: Symmetrien des N=2 Strings

Kaum jemand bestreitet die überragende Rolle von Symmetrien bei der Formulierung der fundamentalen Naturgesetze. Zum Beispiel wäre die Entdeckung des phänomenologisch so erfolgreichen Standardmodells ohne die bahnbrechenden Arbeiten von Yang und Mills über Eichtheorien undenkbar.

Es gibt Hinweise, daß Symmetrien auch in der Stringtheorie eine wichtige Rolle spielen. Zum Beispiel ist es eine alte Idee [35], daß sich der unendliche Turm von massiven Zuständen der bosonischen und N=1 Stringtheorien im flachen Targetraum irgendwie als eine Art verallgemeinerter massiver Eichbosonen einer riesigen spontan gebrochenen Symmetrie interpretieren lassen. In diesen Zusammenhang passen auch die in den vergangenen Jahren gefundenen Dualitätssymmetrien, die darauf hindeuten, daß die verschiedenen N=1 Stringmodelle alle Störungsentwicklungen um verschiedene Grundzustände derselben Theorie – der M-Theorie – sind. Je nach Wahl des Grundzustandes tauchen in der Störungstheorie dann verschiedene Anteile der der M-Theorie zugrundeliegenden Symmetrie auf [47].

Es ist natürlich nicht leicht, diese Ideen zu präzisieren, denn aufgrund der unbefriedigenden Definition der Stringtheorie ist das Auffinden der Symmetrien nicht ganz einfach. Im Gegensatz dazu ist es in der Feldtheorie zumindest im Prinzip klar, wie man vorzugehen hat: Man betrachtet die Bewegungsgleichungen und sucht nach Transformationen, die eine gegebene Lösung in eine neue abbilden. Insbesondere sind diese Überlegungen unabhängig von der Wahl des Grundzustandes. Selbst wenn der Grundzustand einige Symmetrien bricht, kann man immer noch aus der vollen Symmetriegruppe der Bewegungsgleichungen nützliche Informationen erhalten. Zum Beispiel basiert der Beweis, daß Eichtheorien auch noch bei spontan gebochener Symmetrie renormierbar sind, auf den Ward-Identitäten der vollen Symmetrie der Bewegungsgleichungen [34].

Das Problem der Stringtheorie ist, daß Bewegungsgleichungen, deren Symmetrien man studieren könnte, wenigstens in der heutigen Formulierung nicht existieren. Alles, was die Stringtheorie produziert, ist eine Streumatrix für physikalische ('on-shell') Zustände. Daran lassen sich bestenfalls die Ward-Identitäten der ungebrochenen Symmetrien überprüfen. Die Versuche, auch etwas über die spontan gebrochenen Symmetrien zu erfahren – etwa durch das Studium der Streuamplituden bei sehr hohen Energien oder durch Bemühungen, off-shell Amplituden zu definieren – waren im großen und ganzen nicht erfolgreich [35].

In dieser Hinsicht könnte der $N=2$ String ein nützliches 'toy-model' sein, denn das Verschwinden aller Tree-level Amplituden mit mehr als drei äußeren Beinen ist sicherlich kein Zufall, sondern Konsequenz einer (Targetraum-) Symmetrie. Andererseits wird der $N=2$ String zumindest in niedrigster Ordnung der Störungstheorie exakt durch die Feldtheorie (2.4.11) beschrieben, von der bekannt ist [45], daß sie eine unendlichdimensionale Algebra nichtlokaler Symmetrietransformationen besitzt. In diesem Kapitel wird daher die Frage untersucht, ob und wie diese Symmetrien in der $N=2$ Stringtheorie realisiert sein könnten. In Abschnitt eins wird dazu zunächst die Feldtheorie behandelt, das heißt, es werden die Symmetrien der Plebanski-Gleichung untersucht. Dieser Abschnitt ist an den Anfang des Kapitel gestellt, um im Rahmen der einfacheren Feldtheorie zu erkunden, welche Art von Symmetrie wir in der Stringtheorie suchen sollten. Abschnitt zwei enthält dann eine Diskussion über den Zusammenhang zwischen Symmetrien auf der Weltfläche und im Targetraum. Dies ist der übliche Mechanismus, durch den ungebrochene Symmetrien in der Stringtheorie sichtbar werden. Hier wird auch die Rolle der BRST-Kohomologie für die Symmetriestruktur der Stringtheorie erklärt. Dieser Formalismus wird dann in Abschnitt drei benutzt, um einen unendlichen Satz von Symmetrieladungen des $N=2$ Strings zu identifizieren. Außerdem wird das Transformationsgesetz der physikalischen Vertexoperatoren (2.3.31) bestimmt und mit den Ergebnissen aus Abschnitt eins verglichen. Der nächste logische Schritt ist das Ableiten der entsprechenden Ward-Identitäten. Dies geschieht in Abschnitt fünf. Davor befindet sich jedoch noch ein Abschnitt über String-Feldtheorie. Diese Diskussion dient zum einen dazu, die Symmetrien einer Stringtheorie aus einem etwas anderen Blickwinkel zu betrachten (zum Beispiel läßt sich in diesem Rahmen verstehen, warum spontan gebrochene Symmetrien *nicht* mit der BRST-Kohomologie zusammenhängen), und zum anderen werden einige Resultate beschrieben, die für die weitere Diskussion benötigt werden. In Abschnitt fünf werden die Ward-Identitäten dann auf zwei unterschiedliche Arten abgeleitet. Die erste, etwas abstraktere Methode basiert darauf, daß man Korrelationsfunktionen von Vertexoperatoren als Differentialformen auf dem Moduliraum auffassen kann[1], während die Ward-Identitäten bei der zweiten Methode als Aussage über die Entkopplung BRST-trivialer Zustände gewonnen werden. Außerdem wird gezeigt, daß aus diesen Ward-Identitäten tatsächlich das Verschwinden der Amplituden folgt.

1. Symmetrien der Plebanski-Gleichung

Die Symmetrien der Plebanski-Gleichung (2.4.16) wurden in einer Vielzahl von Arbeiten diskutiert[2]. Der effektivste, aber auch abstrakteste Zugang ist die Twistortheorie [37, 38, 51]. Eine explizitere, für unserer Zwecke geeignetere Beschreibung

[1]Derjenige Leser, der sich nur für diese Form der Ward-Identität interessiert, kann den Abschnitt über String-Feldtheorie ohne weiteres auslassen.

[2]Eine ausführliche Liste von Referenzen findet man in [45].

läßt sich allerdings finden, wenn man erkent, daß sich die Plebanski-Gleichung als Kompatibilitätsbedingung

$$[L_0, L_1] = 0 \tag{5.1.1}$$

der beiden Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} L_0 &= (1+\lambda)\partial_0 + \partial_0\partial_{\bar{0}}\Omega\partial_{\bar{1}} - \partial_0\partial_{\bar{1}}\Omega\partial_{\bar{0}}, \\ L_1 &= (1+\lambda)\partial_1 + \partial_1\partial_{\bar{0}}\Omega\partial_{\bar{1}} - \partial_1\partial_{\bar{1}}\Omega\partial_{\bar{0}} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

umformulieren läßt. λ ist hierbei ein beliebiger Parameter, (5.1.1) muß also in jeder Ordnung in λ getrennt erfüllt sein. Diese Struktur ist aus der Theorie der zweidimensionalen integrablen Modelle bekannt. In der Tat wurde in [38] gezeigt, daß sich selbstduale Gravitation als ein spezielles, zweidimensionales Modell auffassen läßt. Die Symmetrien der Plebanski-Gleichung lassen sich dann analysieren, indem man einfach Standardrezepte, die aus vielen Beispielen in zwei Dimensionen bekannt sind, anwendet.

Die Plebanski-Gleichung als zweidimensionales Modell

Park hat in [38] zweidimensionale Modelle (Koordinaten Z^0, Z^1) untersucht, deren fundamentale Variable ein Feld $g(Z)$ ist, das Werte in einer Lie-Gruppe G annimmt. Aus g kann man ein Lie-Algebra-wertiges Feld

$$A_a(Z) = g^{-1}\partial_a g, \qquad a = 0, 1 \tag{5.1.3}$$

konstruieren, das für viele Zwecke nützlicher als $g(Z)$ ist. Insbesondere verschwindet die zu A_a gehörende Feldstärke. Eine große Klasse von Modellen läßt sich als Kompatibilitätsbedingung (5.1.1) der Differentialoperatoren

$$L_0 = (1+\lambda)\partial_0 + A_0, \qquad L_1 = (1+c\lambda)\partial_1 + A_1, \qquad c = \text{konst.} \tag{5.1.4}$$

beschreiben. Für $c \neq 0, 1$ definiert (5.1.1) das sogenannte ‘prinzipale chirale Modell’, $c = 0$ ist das Wess-Zumino-Witten Modell und $c = 1$ das sogenannte topologische Modell. Im folgenden konzentrieren wir uns auf den Fall $c = 1$, also das topologische Modell. Gleichung (5.1.1) lautet in diesem Fall

$$[L_0, L_1] = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 + [A_0, A_1] + \lambda\big(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0\big) = 0. \tag{5.1.5}$$

Der λ^0-Term ist die Bedingung, daß die Feldstärke verschwindet und der λ^1-Term kann als Bewegungsgleichung aufgefaßt werden (diese Bewegungsgleichung läßt sich aus einer Wirkung, die nur aus einem Wess-Zumino Term besteht, ableiten). Bisher war die Gruppe G noch unbestimmt. Wir betrachten nun den Fall der unendlichdimensionalen Gruppe SDiffM_2 der volumenformerhaltenden Diffeomorphismen einer zweidimensionen Mannigfaltigkeit M_2 mit Koordinaten $\widehat{Z}^{\hat{a}}$.

Diese Gruppe besteht aus Diffeomorphismen

$$\widehat{Z}^{\hat{a}} \to f^{\hat{a}}(\widehat{Z}), \tag{5.1.6}$$

deren Jacobi-Determinante den Wert eins hat, also

$$\partial_{\hat{0}} f^{\hat{0}}\ \partial_{\hat{1}} f^{\hat{1}} - \partial_{\hat{0}} f^{\hat{1}}\ \partial_{\hat{1}} f^{\hat{0}} = 1. \tag{5.1.7}$$

Infinitesimale Diffeomorphismen haben die Form:

$$f^{\hat{a}}(\widehat{Z}) = \widehat{Z}^{\hat{a}} + \epsilon V^{\hat{a}}(\widehat{Z}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{5.1.8}$$

mit einem kleinen Parameter ϵ. Sie werden also durch das Vektorfeld $V = V^{\hat{a}}\partial_{\hat{a}}$ erzeugt. Gleichung (5.1.7) übersetzt sich dann in die Bedingung

$$\partial_{\hat{0}} V^{\hat{0}} + \partial_{\hat{1}} V^{\hat{1}} \equiv \partial_{\hat{a}} V^{\hat{a}} = 0. \tag{5.1.9}$$

Diese divergenzfreien Vektorfelder bilden eine geschlossene Algebra – die Lie-Algebra sdiffM_2 der Gruppe SDiffM_2. (5.1.9) wird gelöst durch

$$V = \epsilon^{\hat{a}\hat{b}}\partial_{\hat{a}}\Lambda\partial_{\hat{b}} \tag{5.1.10}$$

für eine beliebige erzeugende Funktion $\Lambda(\widehat{Z})$. Der Kommutator zweier divergenzfreier Vektorfelder V_1, V_2 mit erzeugendenden Funktionen Λ_1 und Λ_2 ist

$$[V_1, V_2] = \epsilon^{\hat{a}\hat{b}}\partial_{\hat{a}}\Lambda_{12}\partial_{\hat{b}} \ \text{ mit } \ \Lambda_{12} = \epsilon^{\hat{a}\hat{b}}\partial_{\hat{a}}\Lambda_1\partial_{\hat{b}}\Lambda_2. \tag{5.1.11}$$

Wenn $g \in$ SDiffM_2 ist, können die beiden Komponenten von A_a als divergenzfreie Vektorfelder mit erzeugenden Funktionen Λ_a geschrieben werden:

$$A_a = \epsilon^{\hat{a}\hat{b}}\partial_{\hat{a}}\Lambda_a\partial_{\hat{b}}. \tag{5.1.12}$$

Sowohl $A_a(Z,\widehat{Z})$ als auch $\Lambda_a(Z,\widehat{Z})$ hängen jetzt von den vier Koordinaten Z^a und $\widehat{Z}^{\hat{a}}$ ab. Die Bedingungen, die aus (5.1.1) folgen, lauten in dieser Formulierung

$$\epsilon^{cd}\partial_{\hat{a}}\partial_c\Lambda_d = 0 \tag{5.1.13}$$

und

$$\partial_{\hat{a}}\big(\partial_{\hat{0}}\Lambda_1\partial_{\hat{1}}\Lambda_0 - \partial_{\hat{1}}\Lambda_1\partial_{\hat{0}}\Lambda_0\big) = 0. \tag{5.1.14}$$

Die erste dieser Gleichungen wird gelöst durch

$$\epsilon^{cd}\partial_c\Lambda_d = R(Z) \tag{5.1.15}$$

und die zweite durch

$$\partial_{\hat{0}}\Lambda_1\partial_{\hat{1}}\Lambda_0 - \partial_{\hat{1}}\Lambda_1\partial_{\hat{0}}\Lambda_0 = S(Z), \tag{5.1.16}$$

wobei die Funktionen R und S nur von Z aber nicht von $\widehat{Z}$ abhängen.

In der Wahl von Λ_a herrscht beträchtliche Freiheit: Das Feld A_a in (5.1.12) ändert sich nicht, wenn man zu Λ_a eine Funktion $F_a(Z)$ addiert, die ebenfalls nur von Z aber nicht von $\widehat{Z}$ abhängt. Eine Lösung Λ_a von (5.1.15) ist also durch eine Verschiebung $\Lambda_a \to \Lambda_a + F_a$ mit $\epsilon^{ab}\partial_a F_b = R$ äquivalent zu einer Lösung von

$$\epsilon^{cd}\partial_c \Lambda_d = 0. \tag{5.1.17}$$

Das bedeutet, daß Λ_a als

$$\Lambda_a(Z, \widehat{Z}) = \partial_a \Omega(Z, \widehat{Z}). \tag{5.1.18}$$

geschrieben werden kann und führt, in (5.1.16) eingesetzt, auf

$$\partial_{\hat{0}}\partial_1\Omega\partial_{\hat{1}}\partial_0\Omega - \partial_{\hat{0}}\partial_0\Omega\partial_{\hat{1}}\partial_1\Omega = S. \tag{5.1.19}$$

Jetzt kann man noch zu neuen Koordinaten übergehen, z.B. $Z^0 \to {Z'}^0$ mit $\partial_0 {Z'}^0 = S$, und erhält schließlich

$$\partial_{\hat{0}}\partial_1\Omega\partial_{\hat{1}}\partial_0\Omega - \partial_{\hat{0}}\partial_0\Omega\partial_{\hat{1}}\partial_1\Omega = 1. \tag{5.1.20}$$

Das ist genau die Plebanski-Gleichung (2.4.16), wenn wir die Geometrie unserer Konstruktion so wählen, daß Z und $\widehat{Z}$ komplex konjugiert zueinander sind, also $\widehat{Z} = \bar{Z}$.
Selbstduale Gravitation ist also nur ein Spezialfall des linearen Systems (5.1.1) und (5.1.4). Es ist seit langem bekannt (ein lesenswerter Übersichtsartikel ist [47], in dem auch ein kurzer Abriß der Geschichte dieser Modelle zu finden ist), daß diese Theorien neben der offensichtlichen Symmetrie $\delta A_a = [A_a, \eta]$ mit einer Lie-Algebra-wertigen Konstanten η einen unendlichen Satz von nichtlokalen Symmetrien, die sich im allgemeinen nur iterativ angeben lassen, besitzen (wenigstens klassisch). Die Algebra dieser Symmetrien ist typischerweise die affine Erweiterung der ursprünglichen Lie-Algebra, in der das Feld A_a seine Werte annimmt. Auf diese Weise sieht man, daß die Symmetriealgebra der Plebanski-Gleichung die affine Erweiterung der zweidimensionalen divergenzfreien Vektorfelder ist.

Nichtlokale Transformationen des Kähler-Potentials

Für einen Vergleich mit der Stringtheorie ist es notwendig, die bereits erwähnten nichtlokalen Transformationsgesetze Ω explizit zu bestimmen. Wir betrachten also die Gleichungen des topologischen Modells

$$\epsilon^{ab}\partial_a A_b = 0, \qquad [A_a, A_b] = 0. \tag{5.1.21}$$

Diese Gleichungen sind invariant unter der Transformation

$$\delta_0 A_a = [A_a, \rho_0], \tag{5.1.22}$$

wobei ρ_0 ein antiholomorphes, divergenzfreies Vektorfeld ist, also

$$\rho_0 = \rho_0^{\bar{a}} \bar{\partial}_{\bar{a}} \qquad \text{mit} \qquad \partial_b \rho_0^{\bar{a}} = \bar{\partial}_{\bar{a}} \rho_0^{\bar{a}} = 0. \tag{5.1.23}$$

Im Sinne des letzten Unterabschnittes ist δ_0 eine Eichtransformation, denn ρ_0 hängt nur von $\bar{Z}$ – also den Gruppenparametern – ab. Ein unendlicher Turm nichtlokaler Symmetrien kann folgendermaßen erzeugt werden: Offensichtlich ist

$$\epsilon^{ab} \partial_a [A_b, \rho_0] = 0, \tag{5.1.24}$$

also $[A_b, \rho_0] = \partial_b \rho_1$. Damit kann man ein neues Transformationsgesetz

$$\delta_1 A_a = [A_a, \rho_1] \tag{5.1.25}$$

definieren, das wiederum (5.1.21) invariant läßt, obwohl ρ_1 nicht mehr antiholomorph ist. δ_1 ist also keine Eichtransformation mehr. Die gleichen Schritte, die zu ρ_1 geführt haben, führen zu einem weiteren Vektorfeld ρ_2, das eine neue Symmetrie δ_2 definiert und so weiter. Man erhält einen unendlichen Turm von Symmetrien

$$\delta_n A_a = [A_a, \rho_n] \qquad \text{mit} \qquad \partial_a \rho_n = [A_a, \rho_{n-1}]. \tag{5.1.26}$$

Die rechte Gleichung ist die definierende Relation für ρ_n. Wenn man die Ableitung in $\partial_a \rho_n$ beseitigen möchte, muß man über $[A_a, \rho_{n-1}]$ integrieren, was die Nichtlokalität der Symmetrien zeigt.
Diese Transformationen müssen nun auf das Kählerpotential und das Feld ϕ übertragen werden. Wenn man die Gleichungen (5.1.12) und (5.1.18) zusammenfaßt, hängen A_a und Ω über

$$A_a = \epsilon^{\bar{a}\bar{b}} \partial_a \bar{\partial}_{\bar{a}} \Omega \bar{\partial}_{\bar{b}} \tag{5.1.27}$$

zusammen. Die Eichtransformation δ_0 übersetzt sich in

$$\delta_0 \Omega = \rho_0^{\bar{a}} \bar{\partial}_{\bar{a}} \Omega. \tag{5.1.28}$$

Das ist das Transformationsgesetz eines Skalars unter der Koordinatentransformation $\bar{Z}^{\bar{a}} \to \bar{Z}^{\bar{a}} + \rho_0^{\bar{a}}$. Es ist nicht überraschend, daß die Plebanski-Gleichung

$$\epsilon^{ab} \epsilon^{\bar{a}\bar{b}} \partial_a \bar{\partial}_{\bar{a}} \Omega \, \partial_b \bar{\partial}_{\bar{b}} \Omega = -2 \tag{5.1.29}$$

nur unter volumenformerhaltenden Diffeomorphismen invariant ist, denn in ihrer Herleitung (siehe Kapitel II) wurde ein spezielles Koordinatensystem gewählt. Daher tauchen die numerisch definierten ϵ-Tensoren in der Gleichung auf, die nur unter volumenformerhaltenden Koordinatentransformationen invariant sind. Die Transformationen δ_n mit $n > 0$ lauten

$$\partial_a \delta_n \Omega = \rho_n^{\bar{c}} \bar{\partial}_{\bar{c}} \partial_a \Omega. \tag{5.1.30}$$

Hier transformiert Ω offensichtlich nicht so, wie ein Skalar unter einer zugrundeligenden Koordinatentransformation transformieren würde. Diese Transformationen stehen nicht in direktem Zusammenhang zu Diffeomorphismen und sind daher keine Eichtransformationen. Sie bilden eine Lösung der Plebanski-Gleichung in eine neue ab. Die Invarianz von (5.1.29) läßt sich leicht nachprüfen:

$$\begin{aligned}\epsilon^{ab}\epsilon^{\bar a\bar b}\partial_a\bar\partial_{\bar a}\delta_n\Omega\,\partial_b\bar\partial_{\bar b}\Omega &= \epsilon^{ab}\epsilon^{\bar a\bar b}\bar\partial_{\bar a}\left(\rho_n^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\partial_a\Omega\right)\partial_b\bar\partial_{\bar b}\Omega\\ &= \epsilon^{ab}\epsilon^{\bar a\bar b}\bar\partial_{\bar a}\rho_n^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\partial_a\Omega\,\partial_b\bar\partial_{\bar b}\Omega + \frac{1}{2}\rho_n^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\left(\epsilon^{ab}\epsilon^{\bar a\bar b}\partial_a\bar\partial_{\bar a}\Omega\,\partial_b\bar\partial_{\bar b}\Omega\right) = 0.\end{aligned} \tag{5.1.31}$$

Der erste Term der zweiten Zeile verschwindet, denn die Divergenzfreiheit von ρ_n bedeutet, daß $\epsilon^{\bar a\bar b}\bar\partial_{\bar a}\rho_n^{\bar c}$ symmetrisch in $\bar b\leftrightarrow\bar c$ ist, und der zweite Term verschwindet aufgrund der Bewegungsgleichung. Das ist natürlich nicht die ganze Geschichte, denn (5.1.30) ist eine Differentialgleichung für $\delta_n\Omega$, die nur dann eine Lösung hat, wenn die rechte Seite die Konsistenzbedingung

$$0 = \epsilon^{ab}\partial_a\partial_b\delta\Omega = \epsilon^{ab}\partial_a\rho_n^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\partial_b\Omega, \tag{5.1.32}$$

erfüllt. Hat man eine Lösung dieser Gleichung gefunden, ist ρ_{n+1}, definiert durch

$$\partial_a\rho_{n+1}^{\bar c} = \bar\partial_{\bar a}\left(\rho_n^{\bar b}\epsilon^{\bar a\bar c}\bar\partial_{\bar b}\partial_a\Omega\right) \tag{5.1.33}$$

eine weitere. Das ist genau die Iteration (5.1.26).
Das Feld ϕ war definiert durch

$$\Omega(Z,\bar Z) = \eta_{a\bar a}Z^a\bar Z^{\bar a} + \phi(Z,\bar Z) \tag{5.1.34}$$

(vergleiche Kapitel II, Abschnitt 4). Die Transformationen für dieses Feld lauten

$$\partial_a\delta_n\phi = \rho_n^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\partial_a\Omega = \eta_{a\bar c}\rho_n^{\bar c} + \rho_n^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\partial_a\phi, \tag{5.1.35}$$

und man kann nachprüfen, daß sie die Bewegungsgleichungen (2.4.18) invariant lassen. Die Iterationsgleichung (5.1.32) lautet durch ϕ ausgedrückt:

$$\partial_a\rho_{n+1}^{\bar c} = \epsilon_a^{\bar a}\bar\partial_{\bar a}\rho_n^{\bar c} + \bar\partial_{\bar a}\left(\rho_n^{\bar b}\epsilon^{\bar a\bar c}\bar\partial_{\bar b}\partial_a\phi\right) \tag{5.1.36}$$

mit $\epsilon_a^{\bar a}\equiv\epsilon^{\bar a\bar b}\eta_{a\bar b}$. Es ist instruktiv, einige Transformationsgesetze explizit auszurechnen:

$$\begin{aligned}\delta_0\phi &= \eta_{a\bar c}Z^a\rho_0^{\bar c} + \rho_0^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\phi,\\ \rho_1^{\bar c} &= \epsilon_a^{\bar a}Z^a\bar\partial_{\bar a}\rho_0^{\bar c} + \epsilon^{\bar a\bar c}\bar\partial_{\bar a}\left(\rho_0^{\bar b}\bar\partial_{\bar b}\phi\right)\\ \partial_a\delta_1\phi &= \eta_{a\bar c}\epsilon_b^{\bar a}Z^b\bar\partial_{\bar a}\rho_0^{\bar c} + \epsilon_a^{\bar a}\bar\partial_{\bar a}\left(\rho_0^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\phi\right) + \epsilon_b^{\bar a}Z^b\bar\partial_{\bar a}\rho_0^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\partial_a\phi\\ &\quad + \epsilon^{\bar a\bar c}\bar\partial_{\bar a}\left(\rho_0^{\bar b}\bar\partial_{\bar b}\phi\right)\bar\partial_{\bar c}\partial_a\phi.\end{aligned} \tag{5.1.37}$$

Diese Transformationen sind im allgemeinen inhomogen und enthalten ϕ-unabhängige Terme. Sie sind spontan gebrochen durch die Wahl $\phi = 0$ als Grundzustand. In Abschnitt vier werden wir sehen, daß solche Transformationen auf der Seite der Stringtheorie – wenigstens in dem in dieser Arbeit benutzten erstquantisierten Formalismus – nicht auftauchen können. Wenn wir jedoch ein konstantes $\rho_0^{\bar c}$ wählen, also globale Translationen in den $\bar Z$-Koordinaten betrachten, kann der inhomogene Term in δ_0 durch eine Kählertransformation kompensiert werden. Anders ausgedrückt:

$$\tilde\delta_0\phi = \rho_0^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\phi \tag{5.1.38}$$

ist immer noch eine Symmetrie der Bewegungsgleichung. Bei konstantem $\rho_0^{\bar c}$ verschwinden außerdem die feldunabhängigen Terme in $\rho_1^{\bar c}$ und δ_1:

$$\begin{aligned} \rho_1^{\bar c} &= \epsilon^{\bar a\bar c}\rho_0^{\bar b}\,\bar\partial_{\bar a}\bar\partial_{\bar b}\phi, \\ \partial_a\delta_1\phi &= \epsilon_a^{\bar a}\rho_0^{\bar c}\bar\partial_{\bar c}\bar\partial_{\bar a}\phi + \epsilon^{\bar a\bar c}\rho_0^{\bar b}\bar\partial_{\bar a}\bar\partial_{\bar b}\phi\,\bar\partial_{\bar c}\partial_a\phi. \end{aligned} \tag{5.1.39}$$

δ_1 enthält einen linearen und einen nichtlinearen Term. Leider können wir in der Stringtheorie nicht die volle nichtlineare Symmetriestruktur erkennen. Für unsere Zwecke reicht es also aus, im folgenden nur die linearisierten Transformationen zu betrachten.

Dazu ist die folgende Beobachtung wichtig: Die iterative Konstruktion (5.1.36) erzeugt keinen feldunabhängigen Term in den $\rho_n^{\bar c}$, die von einem konstanten $\rho_0^{\bar c}$ abgeleitet werden. Die entsprechenden Transformationen δ_n sind also ungebrochene Symmetrien! Wir können $\rho_n^{\bar c}$ also in einen linearen Anteil $\widehat\rho_n^{\,\bar c}$ und einen Rest, der höhere Potenzen von ϕ enthält, aufspalten:

$$\rho_n^{\bar c} = \widehat\rho_n^{\,\bar c} \;+\; \mathcal{O}(\phi^2). \tag{5.1.40}$$

Aus (5.1.35) folgt dann

$$\partial_a\delta_n\phi = \eta_{a\bar c}\widehat\rho_n^{\,\bar c} \;+\; \mathcal{O}(\phi^2). \tag{5.1.41}$$

Jetzt muß nur noch das von einem konstanten ρ_0 stammende $\widehat\rho_n^{\,\bar c}$ bestimmt werden. Die Iterationsgleichung (5.1.36) reduziert sich in diesem Fall zu

$$\partial_a\rho_{n+1}^{\bar c} = \epsilon_a^{\bar a}\bar\partial_{\bar a}\widehat\rho_n^{\,\bar c} \;+\; \mathcal{O}(\phi^2), \tag{5.1.42}$$

denn $\rho_n^{\bar c}$ enthält keinen ϕ-unabhängigen Term. Induktion führt zur folgenden Formel:

$$\partial_{a_1}\ldots\partial_{a_n}\widehat\rho_{n+1}^{\,\bar c} = \epsilon_{a_1}^{\bar a_1}\ldots\epsilon_{a_n}^{\bar a_n}\bar\partial_{\bar a_1}\ldots\bar\partial_{\bar a_n}\widehat\rho_1^{\,\bar c}. \tag{5.1.43}$$

Nach einer Fouriertransformation

$$\phi(Z,\bar Z) = \int d^4k\, e^{\frac{i}{2}(k\cdot\bar Z+\bar k\cdot Z)}\tilde\phi(k) \tag{5.1.44}$$

kann man die Massenschalenbedingung $k \cdot \bar{k} = 0$ und dann die Relation

$$\eta_{a\bar{a}} \bar{k}^{\bar{a}} = -h(k) \epsilon_{ab} k^b \tag{5.1.45}$$

benutzen (der Impulsfaktor $h(k)$ wurde in (4.1.12) definiert). Damit erhält man schließlich für das n-te Transformation von $\tilde{\phi}(k)$ den Ausdruck:

$$\delta_n \tilde{\phi}(k) = \frac{i}{2} h(k)^{-n} \eta_{c\bar{c}} \rho_0^{\bar{c}} k^c \tilde{\phi}(k) \ + \ \mathcal{O}(\tilde{\phi}^2). \tag{5.1.46}$$

Das sind die linearen Anteile der von den Translationen abgeleiteten nichtlokalen Symmetrien ('affinisierte Translationen' wäre vielleicht ein passender Begriff). Diese Transformationen gilt es in der Stringtheorie wiederzufinden.

2. Ungebrochene Symmetrien in der Stringtheorie

Üblicherweise machen sich ungebrochene Targetraumsymmetrien in geschlossenen Stringtheorien durch Kohomologieklassen mit Geistzahl eins bemerkbar. Einige Beispiele sind

- Translationssymmetrien aller kritischen Stringtheorien im flachen Raum.
- Eichsymmetrien, die durch Torus-Kompaktifizierung entstehen.
- Supersymmetrie in N=1 Stringmodellen [18].
- Die W_∞-Symmetrien der $2D$ Stringtheorie [54].

Im Prinzip wurde der Zusammenhang zwischen BRST-Kohomologie und Targetraumsymmetrien schon zu Beginn des letzten Kapitels angegeben. Über die Gerstenhaber-Klammer und die Multiplikation (2.3.10) erzeugen Kohomologieklassen geeigneter Geistzahl Abbildungen auf der Menge der Vertexoperatoren physikalischer Zustände – das sind die Symmetrietransformationen. Diese Behauptung wird im Rest dieses Abschnittes und in Abschnitt vier näher begründet.

Absteigegleichungen

Oft hängen Targetraumsymmetrien mit Symmetrien der Feldtheorie auf der Weltfläche zusammen (eine Ausnahme von dieser Regel wird in [2] beschrieben) und führen dort zur Existenz erhaltener Ströme[3]. Wie in Kapitel II kann die Weltfläche eines geschlossenen Strings durch eine komplexe Koordinate $z = e^{\tau + i\sigma}$ parametrisiert werden. Ein Strom mit Komponenten $J_z(z, \bar{z})$ und $J_{\bar{z}}(z, \bar{z})$ heißt erhalten, wenn seine Divergenz verschwindet:

$$\bar{\partial} J_z + \partial J_{\bar{z}} = 0. \tag{5.2.1}$$

[3] Dieser Unterabschnitt basiert auf [55].

Die entsprechende Ladung ist

$$\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{C}} \Omega_1 \qquad \text{mit} \qquad \Omega_1 = J_z dz - J_{\bar{z}} d\bar{z}. \tag{5.2.2}$$

$\mathcal{C}$ ist hierbei ein geschlossener Weg um den Ursprung. Die Ladung ist in diesen Koordinaten erhalten, wenn sie den gleichen Wert für homologe Wege $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ hat ($\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ bilden also den Rand ∂M einer Fläche M). Wie üblich folgt Ladungserhaltung aus Stromerhaltung:

$$\oint_{\mathcal{C}} \Omega_1 - \oint_{\mathcal{C}'} \Omega_1 = \oint_{\partial M} \Omega_1 = \int_M d\Omega_1 = 0, \tag{5.2.3}$$

denn (5.2.1) bedeutet, daß Ω_1 geschlossen ist.
Im BRST-Formalismus muß die Ladung nur bis auf einen BRST-trivialen Term erhalten sein, das heißt $d\Omega_1 = [Q, \Omega_2]$ [4] für irgendeine 2-Form Ω_2. Sie muß außerdem BRST-invariant sein. Das ist der Fall, wenn es eine Funktion Ω_0 gibt, so daß $[Q, \Omega_1] = d\Omega_0$. Wenn man Q ein weiteres Mal auf diese Gleichung anwendet, sieht man, daß $[Q, \Omega_1]$ eine Konstante sein muß, die aber besser verschwinden sollte, denn sonst wäre der Einheitsoperator BRST-trivial und es gäbe nicht mehr viel zu untersuchen. Diese Überlegungen lassen sich zu den Absteigegleichungen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} [Q, \Omega_0] &= 0, \\ [Q, \Omega_1] &= d\Omega_0, \\ [Q, \Omega_2] &= d\Omega_1. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Der ganze Formalismus erlaubt die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \Omega_0 &\to \Omega_0 + [Q, \alpha], \\ \Omega_1 &\to \Omega_1 + d\alpha. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Die Gleichungen für Ω_0 sind genau die definierenden Relationen für die BRST-Kohomologie. Aus jeder Kohomologieklasse läßt sich also eine Ladung konstruieren. Es ist nicht schwer, für ein vorgegebenes Element der Kohomologie

$$\Omega_0(z, \bar{z}) = W(z)\widetilde{W}(\bar{z}) \tag{5.2.6}$$

[4] Da wir uns in diesem Abschnitt nicht unnötigerweise auf ein bestimmtes Modell festlegen wollen, können die Formen Ω_i entweder bosonisch oder fermionisch sein. Um die Notation dennoch nicht zu überfrachten, steht das Symbol $[\cdot, \cdot]$ für einen Kommutator oder Antikommutator. Einige Gleichungen in diesem Abschnitt gelten daher auch nur bis auf (unwichtige) Vorzeichen, die sich aber leicht richtigstellen lassen, sobald man ein konkretes Modell betrachtet.

(W und $\widetilde{W}$ sind holomorphe und antiholomorphe Vertexoperatoren beliebiger chiraler Kohomologieklassen) eine Lösung der Absteigegleichungen anzugeben:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= (-1)^{|W|} W^{(1)}(z)\widetilde{W}(\bar{z})dz + W(z)\widetilde{W}^{(1)}(\bar{z})d\bar{z},\\ \Omega_2 &= W^{(1)}(z)\widetilde{W}^{(1)}(\bar{z})dz \wedge d\bar{z}.\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

mit $W^{(1)}$ aus (2.3.14). Hier erkennt man auch wieder die entscheidende Rolle der relativen Kohomologie, denn der aus einer Kohomologieklasse Ω_0 abgeleitete Strom sollte ein Primärfeld sein beziehungsweise der zugehörende Zustand sollte ein Höchstgewichtszustand sein. Das ist aber nur dann der Fall, wenn Ω_0 in der relativen Kohomologie liegt (siehe Abschnitt 2.2 von [55]).
Es läßt sich auch ohne Schwierigkeiten berechnen, wie die aus Ω_1 gebildete Ladung $\mathcal{A}$ einen weiteren BRST-invarianten Vertexoperator $V(z,\bar{z}) = V(z)\widetilde{V}(\bar{z})$ des geschlossenen Strings transformiert:

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{A}, V(w,\bar{w})\right] &= (-1)^{|W|} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} W^{(1)}(z)\widetilde{W}(\bar{z})V(w)\widetilde{V}(\bar{w})\\ &+ \oint_w \frac{d\bar{z}}{2\pi i} W(z)\widetilde{W}^{(1)}(\bar{z})V(w)\widetilde{V}(\bar{w})\\ &= (-1)^{|W|}\left\{W,V\right\}_G(w)\,\widetilde{W}\cdot\widetilde{V}(\bar{w}) + (-1)^{|V|} W\cdot V(w)\left\{\widetilde{W},\widetilde{V}\right\}_G(\bar{w}).\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Das erklärt die Behauptung, daß die Gerstenhaber-Klammer und das Produkt (2.3.10) Symmetrietransformationen erzeugen. Man erkennt auch, daß die BRST-Kohomologie in der Stringtheorie eine doppelte Rolle spielt. Neben den dynamischen Freiheitsgraden enthält sie auch Informationen über die Symmetrien der Theorie (zumindest über die ungebrochenen, siehe Abschnitt vier). Es ist am natürlichsten, für Ω_0 eine Kohomologieklasse mit Geistzahl eins zu wählen, denn die daraus resultierende Ladung $\mathcal{A}$ hat dann Geistzahl null. Nur in diesem Fall kann die Ladung die Menge der physikalischen Vertexoperatoren in sich selbst abbilden. Damit erhalten wir das wichtige Resultat, daß die Symmetrien der Stringtheorie in der BRST-Kohomologie mit Geistzahl eins auftauchen, während die Freiheitsgrade Geistzahl zwei haben.
Ein einfaches Beispiel für diesen Formalismus ist der bosonische String. Für eine Kohomologieklasse mit Geistzahl eins braucht man zum Beispiel einen rechtslaufenden Vertexoperator mit Geistzahl null oder kleiner. Der einzige Kandidat ist der Einheitsoperator **1**. Der linkslaufende Anteil muß dann Geistzahl eins haben. Damit ist die Lösung der Absteigegleichung eindeutig bestimmt (der rechtslaufende Einheitsoperator wird wie üblich unterdrückt):

$$\Omega_0 = c\partial X^\mu, \qquad \Omega_1 = \partial X^\mu, \qquad \Omega_2 = 0. \tag{5.2.9}$$

Die resultierende Ladung $\mathcal{A}^\mu$ ist natürlich der Impulsoperator und wirkt auf Vertexoperatoren e^{ikX} durch Multiplikation mit k^μ:

$$[\mathcal{A}^\mu, e^{ikX}(w,\bar{w})] = \oint_w \frac{dz}{2\pi i} \partial X^\mu(z) e^{ikX}(w,\bar{w}) = -ik^\mu e^{ikX}(w,\bar{w}). \quad (5.2.10)$$

3. Nichtlokale Transformation der Vertexoperatoren

In diesem Abschnitt werden die obigen Ergebnisse auf den N=2 String angewandt. Um Ladungen zu konstruieren beziehungsweise eine komplette Lösung der Absteigegleichungen anzugeben, fangen wir mit Kohomologieklassen der Geistzahl eins an, die wir aus den Operatoren (4.2.7) und (4.1.8) kombinieren:

$$\Omega^a_{0,\pi^+,\pi^-,m,n} := P^a_{\pi^+,\pi^-,m}(z)\tilde{\mathcal{O}}_{\pi^+,\pi^-,n}(\bar{z}), \qquad m,n = -\pi^+,...,\pi^-. \quad (5.3.1)$$

Man könnte auch den holomorphen und antiholomorphen Anteil vertauschen. Es stellt sich aber heraus, daß das nichts neues liefert. $\mathcal{O}$ und P haben hier identische Bildladung. Vom Standpunkt der BRST-Kohomologie ist das nicht unbedingt notwendig, scheint aber dennoch die natürliche Wahl zu sein. Berechnet man zum Beispiel Amplituden in einer gemischten Theorie aus offenen und geschlossenen Strings, müssen die Vertexoperatoren so gewählt werden, daß links- und rechtlaufende Bildladung übereinstimmen. Andernfalls erhält man ein falsches Ergebnis. Wir beschränken uns daher in dieser Arbeit auf Kohomologieklassen der Form (5.3.1).
Die aus Ω_0 abgeleiteten 1- und 2-Formen lauten:

$$\begin{aligned} \Omega^a_{1,\pi^+,\pi^-,m,n} &= -P^{a(1)}_{\pi^+,\pi^-,m}(z)\tilde{\mathcal{O}}_{\pi^+,\pi^-,n}(\bar{z})\,dz \\ &\quad + P^a_{\pi^+,\pi^-,m}(z)\tilde{\mathcal{O}}^{(1)}_{\pi^+,\pi^-,n}(\bar{z})\,d\bar{z} \\ \Omega^a_{2,\pi^+,\pi^-,m,n} &= P^{a(1)}_{\pi^+,\pi^-,m}(z)\tilde{\mathcal{O}}^{(1)}_{\pi^+,\pi^-,n}(\bar{z})\,dz\wedge d\bar{z}. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Auf den physikalischen Vertexoperatoren (2.4.2) wirken die entsprechenden Ladungen

$$\mathcal{A}^a_{\pi^+,\pi^-,m,n} = \oint_{\mathcal{C}} \Omega^a_{1,\pi^+,\pi^-,m,n} \quad (5.3.3)$$

als

$$\begin{aligned} &[\mathcal{A}^a_{\pi^+,\pi^-,m,n}, V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}(k,w,\bar{w})] \\ &= \{P^a_{\pi^+,\pi^-,m}, V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}\}_G(w)\,\tilde{\mathcal{O}}_{\pi^+,\pi^-,n}\cdot\tilde{V}_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}(\bar{w}) \\ &+P^a_{\pi^+,\pi^-,m}\cdot V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}(w)\,\{\tilde{\mathcal{O}}_{\pi^+,\pi^-,n}, \tilde{V}_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}\}_G(\bar{w}). \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Der Term in der letzten Zeile verschwindet, wie man durch Abzählen der Geistzahl sieht. Zum Beispiel ist $P^a_{\pi^+,\pi^-,m} \cdot V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}(w)$ ein chiraler, BRST-invarianter Operator mit nichtverschwindendem Impuls und Geistzahl zwei und muß daher BRST-trivial sein (siehe Kapitel III). Den verbleibenden Term hatten wir schon in (4.1.13) und (4.2.10) berechnet. Es ergibt sich also das folgende, nichtlokale Transformationsgesetz für die Vertexoperatoren:

$$\left[\mathcal{A}^a_{\pi^+,\pi^-,m,n}, V_{\hat{\pi}^+,\hat{\pi}^-}(k,w,\bar{w})\right] = h(k)^{m+n} k^a V_{\pi^+ + \hat{\pi}^+, \pi^- + \hat{\pi}^-}(k,w,\bar{w}). \quad (5.3.5)$$

Die Ähnlichkeit mit der linearisierten Transformation (5.1.46) ist offensichtlich (siehe auch Gleichung (4.1) in [5]), bedarf aber noch einer weiteren Diskussion.
Es wurde bereits mehrfach erwähnt, daß das Auffinden der vollen Symmetrie einer Stringtheorie nicht einfach ist, denn im allgemeinen würde das eine nichtstörungstheoretische Definition der Theorie voraussetzen. Um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie man Gleichung (5.3.5) bewerten sollte, ist es sinnvoll, einige Tatsachen über den geschlossenen bosonischen String zu wiederholen. Diese Theorie enthält Gravitation und sollte daher invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen sein. Die übliche Störungsentwicklung ist jedoch um den flachen Raum und bricht die Symmetrie zur Poincaré-Gruppe. Die Impuls null Kohomologie für Geistzahl eins enthält aber nur die Translationen (siehe (3.3.25)). Man kann zwar Ströme

$$J^{\mu\nu} = X^\mu \partial X^\nu - X^\nu \partial X^\mu \quad (5.3.6)$$

hinschreiben, die BRST-invariante Ladungen besitzen und Lorentztransformationen erzeugen; sie werden aber nicht in der BRST-Kohomologie sichtbar, denn die Stringkoordinate X^μ ist kein legaler Operator, der in der Operator-Zustand-Korrespondenz der konformen Feldtheorie auftaucht.
Ganz analog beschreibt das Feld ϕ, das den Freiheitsgrad des N=2 Strings kodiert, Abweichungen eines Kähler-Potentials vom flachen Raum. Wir sollten daher Translationen im $(0,0)$ Bild sehen. Dieses Bild ist das natürlichste in dem Sinne, daß es das einzige ist, in dem die aus Kohomologieklassen abgeleiteten Ströme keine Beiträge des Geistsektors enthalten. Sie können daher über die Weltfläche integriert werden und Deformationen der konformen Feldtheorie erzeugen (siehe zum Beispiel [16]).
In Abschnitt eins dieses Kapitels haben wir gesehen, daß die aus den Translationen abgeleiteten *nichtlokalen* Transformationen (5.1.46) die flache Metrik ebenfalls invariant lassen. Sie sollten also irgendwo in der Kohomologie bei Impuls null auftauchen. Die Ähnlichkeit der Gleichungen (5.1.46) und (5.3.5) läßt die Spekulation zu, daß sie über die Bildabhängigkeit der Kohomologie sichtbar werden. Es ist jedoch fast überflüssig zu erwähnen, daß diese Interpretation zusätzliche Belege benötigt.
Ein weiterer Aspekt ist, daß die Transformationen δ_n nur für $n=0$ Eichtransformationen sind. Andererseits gibt es ein Theorem, daß Stringtheorien keine starren,

kontinuierlichen Symmetrien im Targetraum zulassen (siehe [43], Kapitel 18). Der Beweis dieser Behauptung basiert auf Tatsache, daß zu jeder dieser Symmetrien erhaltene Ströme auf der Weltfläche gehören, aus denen man Vertexoperatoren für entsprechende Eichbosonen konstruieren kann. Man kann sich also fragen, wie die ungebrochenen, nichtlokalen Symmetrien überhaupt in der N=2 Theorie realisiert sein können. Der wesentliche Punkt ist, daß das eben erwähnte Theorem davon ausgeht, daß die Ströme chiral erhalten sind – und das ist nicht immer der Fall. Die Ströme in (5.3.6) stellen ein Gegenbeispiel dar. Deswegen gibt es in der Stringtheorie keine Eichbosonen für Lorentztransformationen ('Stringtheorie eicht nur die Translationen', [2]). Für den N=2 String sind die zu den Ladungen gehörenden Ströme in (5.3.2) angegeben. Sie sind nur für $(\pi^+, \pi^-) = (0,0)$ chiral erhalten, denn dann ist der rechtslaufende Anteil der Einheitsoperator. Das entsprechende Eichboson ist das Plebanski-Feld ϕ. Für andere Werte der Bildladung, aber $m = n = 0$, sind die Ströme nicht chiral erhalten. Trotzdem kann man Eichbosonen aus ihnen konstruieren, die aber durch Bildwechsel mit dem $(0,0)$ Vertexoperator verbunden sind. Für nichtverschwindende Werte von m und n lassen sich dagegen keine Eichbosonen aus den Stömen erhalten, was erklärt, daß sie zu starren Transformationen im Targetraum gehören.

4. String-Feldtheorie

Ein plausibler Versuch, eine nichtstörungstheoretische Definition einer Stringtheorie zu finden, ist, Funktionale $\Psi[X(\sigma)]$ von Stringkonfigurationen $X^\mu(\sigma)$ zu betrachten. Man könnte dann analog zur Quantenfeldtheorie Wirkungen $S[\Psi]$ untersuchen und die Theorie zum Beispiel durch ein Pfadintegral (in diesem Fall ein Integral über die Menge aller Funktionale) definieren,

$$\int [d\Psi] e^{iS}. \tag{5.4.1}$$

Für offene Strings hat so ein Formalismus eine Reihe attraktiver Eigenschaften [52], ist aber so kompliziert, daß es nur mit Mühe möglich ist, die Ergebnisse der erstquantisierten Theorie wiederzugeben. Darüber hinausgehende Resultate – etwa über die volle Symmetriestruktur der Theorie – scheinen bisher kein kohärentes Bild zu ergeben. Für geschlossene Strings ist die Situation noch schlechter, denn es gibt keine wirklich natürliche Definition für das Produkt zweier geschlossener Stringfelder, und ohne Produkt kann man keine Wirkung hinschreiben. In [56] ist es dennoch gelungen, für den bosonischen String ein Produkt und eine Wirkung so zu definieren, daß die aus dem Pfadintegral (5.4.1) abgeleiteten Feynman-Regeln den störungstheoretischen Ausdruck (2.4.1) reproduzieren und damit per Konstruktion korrekt sind. Die Wirkung ist jedoch nichtpolynomial, wobei die N-Punkt Vertizes Beiträge aus jeder Ordnung der Loop-Entwicklung enhalten[5]. Das

[5]Ein sehr lesenswerter Übersichtsartikel, auf dem diese Diskussion beruht, ist [42].

erinnert an nichtrenormierbare Quantenfeldtheorien, die zwar nützlich sind, um Phänomene weit unterhalb einer vorgegeben Skala zu untersuchen, aber nicht als Definition einer Theorie dienen können. Dennoch hat String-Feldtheorie auch für die Diskussion in dieser Arbeit ihren Wert. Ein Grund ist, daß im wechselwirkungsfreien Fall die Probleme verschwinden und ein sehr eleganter Formalismus entsteht, durch den man ein besseres Verständnis einiger Dinge, wie zum Beispiel der Rolle der Geistzahl, der relativen BRST-Kohomologie oder des $U(1)$-Moduliraumes bekommen kann. Außerdem kann man im Rahmen der wechselwirkenden Theorie zumindest qualitativ den Zusammenhang zwischen Symmetriestruktur und BRST-Kohomologie verstehen[6].
Ein Stringfunktional $\Psi[X(\sigma)]$ läßt sich als Skalarprodukt eines allgemeinen Stringzustandes $|\Psi\rangle$ mit einem Positionseigenzustand $|X(\sigma)\rangle$ schreiben,

$$\Psi[X(\sigma)] = \langle X(\sigma)\,|\Psi\rangle\,. \tag{5.4.2}$$

Die Wahl der Parametrisierung von $X(\sigma)$ sollte keine Rolle spielen, was man dadurch berücksichtigt, daß das Stringfeld auch von den Geistern abhängen kann. Aus den Erfahrungen mit der BRST-Kohomologie sollte man zusätzlich fordern, daß es Geistzahl eins für offene und zwei für geschlossene Strings hat. $|\Psi\rangle$ läßt sich auf bequeme Weise durch die Oszillatoren ausdrücken. Für den masselosen Sektor des offenen bosonischen Strings erhält man zum Beispiel:

$$|\Psi\rangle = \int d^{26}k\,\left(\tilde{A}_\mu(k)\,\alpha_{-1}^\mu c_1 + i\tilde{B}(k)\,c_0\right)|k\rangle\,. \tag{5.4.3}$$

Es stellt sich heraus, daß der folgende Ausdruck eine brauchbare Wirkung abgibt:

$$\begin{aligned} S &= -\,\langle\Psi|\,Q\,|\Psi\rangle \\ &= \int d^{26}x\,\left(\frac{1}{2}A_\mu\Box A^\mu - 2B(\partial_\mu A^\mu + B)\right)\,, \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

wobei die Konvention $\langle k|p\rangle = (2\pi)^{26}\delta(k-p)$ benutzt wurde. Das B-Feld kann eliminiert werden, da es keinen kinetischen Term hat. Das Resultat ist die Maxwell-Wirkung. Die Bewegungsgleichung hat in diesem Formalismus die Form $Q\,|\Psi\rangle = 0$. Außerdem ist die Wirkung invariant unter

$$|\Psi\rangle \to |\Psi\rangle + Q\,|\Lambda\rangle\,. \tag{5.4.5}$$

Die BRST-Kohomologie ist also die Lösung der Bewegungsgleichung modulo Symmetrien. In unserem Beispiel ist

$$|\Lambda\rangle = \int d^{26}k\,\tilde{\lambda}(k)\,|0\rangle\,, \tag{5.4.6}$$

[6] Dieser Abschnitt dient hauptsächlich dazu, einige bereits diskutierte Dinge von einem anderen Standpunkt aus zu betrachten und liegt daher etwas außerhalb des logischen Aufbaus dieses Kapitels. Da nur ein kleiner Teil des nächsten Abschnittes auf diese Ergebnisse aufbaut, ist es ohne weiteres möglich, diesen Abschnitt zu übergehen.

was zu den Transformationen

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x), \qquad \delta B(x) = -\frac{1}{2}\Box\lambda(x) \tag{5.4.7}$$

führt. Damit kann das B-Feld weggeeicht werden. Allgemeiner kann man für das Stringfeld immer die Siegel-Eichung $b_0 \left|\Psi\right\rangle = 0$ erreichen. Damit werden gerade die nichtdynamischen Felder eliminiert. An der expliziten Form des BRST-Operators erkennt man, daß sich die Wirkung (5.4.4) dann zu

$$S = -\left\langle\Psi\right| c_0 \hat{L}_0 \left|\Psi\right\rangle \tag{5.4.8}$$

reduziert. In dieser eichfixierten Form läßt sich der Propagator D als Inverses des kinetischen Operators berechnen:

$$D c_0 \hat{L}_0 \left|\Psi\right\rangle = \left|\Psi\right\rangle \quad \Rightarrow \quad D = b_0 \hat{L}_0^{-1}. \tag{5.4.9}$$

Man kann auch die Einschränkung des Stringfeldes auf Geistzahl eins fallen lassen. Für den masselosen Level hat man dann

$$\begin{aligned} \left|\Psi\right\rangle = \int d^{26}k \Big(&\tilde{C}(k) + \tilde{A}_\mu(k) c_1 \alpha^\mu_{-1} + i\tilde{B}(k) c_0 + i\tilde{A}^*_\mu(k) c_0 c_1 \alpha^\mu_{-1} \\ &+ i\tilde{B}^*(k) c_1 c_{-1} + i\tilde{C}^*(k) c_0 c_1 c_{-1}\Big) \left|k\right\rangle . \end{aligned}$$

Damit $\left|\Psi\right\rangle$ eine definierte Statistik hat, sind B, A_μ und C^* bosonische und C, A^*_μ und B^* fermionische Felder. Ausgedrückt durch diese Felder lautet die Wirkung:

$$S = \int d^{26}x \left(\frac{1}{2} A_\mu \Box A^\mu - 2B(\partial_\mu A^\mu + B) - 2i A^*_\mu \partial^\mu C - iB^* \Box C\right) .$$

Das ist genau die Wirkung, die man im Antifeldformalismus aus der Komponentenform von (5.4.4) ableiten würde; sie löst also die Mastergleichung. Die Komponentenfelder von Zuständen mit Weltflächen-Geistzahl N^g haben Targetraum-Geistzahl $1 - N^g$. Dieselbe Relation haben wir schon in Abschnitt drei von Kapitel II gesehen. Die Targetraum BRST-Transformationen s lassen sich kurz und knapp als

$$s\left|\Psi\right\rangle = Q\left|\Psi\right\rangle$$

schreiben. Auf diese Weise erhält jedes Element des Fockraumes der Stringtheorie eine Interpretation im Targetraum [48, 56]. Für den offenen String zum Beispiel haben die Materiefelder (Weltflächen-) Geistzahl $N^g = 1$, die Geistfelder haben $N^g < 1$ und die Antifelder $N^g > 1$.

Für den geschlossenen bosonischen String muß die Wirkung (5.4.4) modifiziert werden. Das Stringfeld soll Geistzahl zwei haben; für ein verschwindendes Matrixelement braucht man aber insgesamt sechs Einheiten an Geistzahl. Es muß also eine Geist-Nullmode eingefügt werden. Der kinetische Term $\alpha_0 \cdot \alpha_0$ wird im BRST-Operator mit $c_0 + \tilde{c}_0$ multipliziert und darf auf keinen Fall aus der Wirkung verschwinden. Das führt auf

$$S = -\left\langle\Psi\right| (c_0 - \tilde{c}_0) Q \left|\Psi\right\rangle . \tag{5.4.10}$$

Dabei muß das Stringfeld aber die Bedingungen

$$(b_0 - \tilde{b}_0)\,|\Psi\rangle = (\hat{L}_0 - \tilde{\hat{L}}_0)\,|\Psi\rangle = 0 \tag{5.4.11}$$

erfüllen, damit die Wirkung reell ist. Diese Bedingungen muß man von vorneherein an das Stringfeld stellen[7], während man

$$(b_0 + \tilde{b}_0)\,|\Psi\rangle = 0 \tag{5.4.12}$$

wieder als Eichbedingung wählen kann. Der Propagator lautet in dieser Eichung

$$D = \frac{\tilde{b}_0 b_0}{\hat{L}_0 + \tilde{\hat{L}}_0}\delta(\hat{L}_0 - \tilde{\hat{L}}_0) \sim \tilde{b}_0 b_0 \int_{|z|\leq 1} d^2 z z^{\hat{L}_0 - 1}\bar{z}^{\tilde{\hat{L}}_0 - 1}. \tag{5.4.13}$$

Dieses Ergebnis kann man anschaulich verstehen. In einer Korrelationsfunktion beschreibt D die Ausbreitung eines Strings von $z = 0$ bis $z = 1$. An diesen Stellen trifft er auf weitere Strings, mit denen er wechselwirken kann. Die z-Integration entspricht also dem Integral über den Moduliraum der punktierten Sphäre im Polyakov-Pfadintegral.

Auf diese Weise kann man auch den N=2 String behandeln. Das Stringfeld sollte Geistzahl zwei haben. Da ein nichtverschwindendes Skalarprodukt insgesamt Geistzahl acht erfordert (jeweils vier aus holomorphem und antiholomorphem Sektor, siehe (2.2.22)), müssen wieder zusätzliche Geist-Nullmoden in die Wirkung eingebaut werden. Die einzige Möglichkeit ist

$$S = i\,\langle\Psi|\, c_0'\tilde{c}_0'(c_0 - \tilde{c}_0)Q\,|\Psi\rangle\,, \tag{5.4.14}$$

wobei $|\Psi\rangle$ die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
&(b_0 - \tilde{b}_0)\,|\Psi\rangle = (\hat{L}_0 - \tilde{\hat{L}}_0)\,|\Psi\rangle = 0,\\
&\hat{J}_0\,|\Psi\rangle = \tilde{\hat{J}}_0\,|\Psi\rangle = b_0'\,|\Psi\rangle = \tilde{b}_0'\,|\Psi\rangle = 0
\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

erfüllen muß. Man erkennt also, daß die $U(1)$-Geister eine andere Rolle als die metrischen Geister spielen. Der Propagator in der Siegel-Eichung lautet

$$\frac{\tilde{b}_0 b_0 \tilde{b}_0' b_0'}{\hat{L}_0 + \tilde{\hat{L}}_0}\,\delta(\hat{L}_0 - \tilde{\hat{L}}_0)\,\delta(\tilde{\hat{J}}_0)\,\delta(\hat{J}_0) \equiv DD' \tag{5.4.16}$$

mit D aus (5.4.13) und

$$\begin{aligned}
D' &= \tilde{b}_0' b_0'\,\delta(\tilde{\hat{J}}_0)\,\delta(\hat{J}_0)\\
&\sim \tilde{b}_0' b_0' \int_0^{2\pi} d\sigma_1 e^{i\sigma_1 \hat{J}_0} \int_0^{2\pi} d\sigma_2 e^{i\sigma_2 \tilde{\hat{J}}_0}.
\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

[7] $L_0 - \tilde{L}_0$ erzeugt globale Translationen in σ-Richtung auf der Weltfläche. $(\hat{L}_0 - \tilde{\hat{L}}_0)\,|\Psi\rangle = 0$ kann man also geometrisch verstehen, denn es gibt auf der Weltfläche eines geschlossenen String keinen ausgezeichneten Wert von σ.

Der $U(1)$-Anteil führt zu einer zusätzlichen Integration über einen Torus $T_2 = S_1 \times S_1$, die sich wieder als Integration über den Moduliraum interpretieren läßt[8]. Insbesondere hat der $U(1)$-Moduliraum keinen Rand. Dieses Resultat wird bei der Behandlung der Ward-Identitäten im nächsten Abschnitt eine Rolle spielen.
Wie bereits erwähnt wurde, ist der Übergang zur wechselwirkenden Theorie nicht einfach – unter anderem, weil es sehr kompliziert ist, ein vernünftiges Produkt zweier Stringfelder anzugeben. Die offensichtliche Verallgemeinerung der Transformation (5.4.5) ist

$$|\Psi\rangle \to |\Psi\rangle + Q\,|\Lambda\rangle + |\Psi * \Lambda\rangle + \text{höhere Ordnungen}, \tag{5.4.18}$$

ohne daß wir hier genauer auf die explizite Form von $*$ einzugehen brauchen. Es reicht zu wissen, daß es möglich ist, ein Produkt zu konstruieren [56]. Das Stringfeld Ψ beschreibt kollektiv die Abweichungen der Komponentenfelder von ihrem Vakuumwert. Eine Symmetrie des gewählten Grundzustandes sollte also den Wert Ψ=0 nicht ändern. Eine Transformation mit einem nicht-invarianten Parameter Λ enthält feldunabhängige Terme, die den Grundzustand nicht invariant lassen. Ungebrochene Symmetrien erfordern also $Q\,|\Lambda\rangle = 0$. BRST-triviale Operatoren führen allerdings zu Symmetrien, aus denen man keine erhaltenen Ladungen gewinnen kann. Damit sehen wir auch in diesem Formalismus, daß man die ungebrochenen Symmetrien der Theorie in der BRST-Kohomologie mit Geistzahl eins findet.

5. Ward-Identitäten des N=2 Strings

Aus den Symmetrien einer Theorie lassen sich im allgemeinen Relationen zwischen den Korrelationsfunktionen ableiten (sogenannte Ward-Identitäten). Im Fall des N=2 Strings sollte man erwarten, daß die Ward-Identitäten ausreichen, um die Amplituden mit mehr als drei äußeren Beinen zu null zu diskutieren. Es ist also wichtig zu testen, welche Auswirkungen für die Korrelatoren sich aus unseren Kandidaten (5.3.3) für die nichtlokalen Ladungen ergeben. Bevor wir uns dem N=2 String zuwenden, scheint es allerdings angebracht zu sein, einen Teil des allgemeinen Formalismus kurz zusammenzufassen [27, 50, 55].

Einige Grundlagen

Wir betrachten der Einfachheit halber zunächst den geschlossenen bosonischen String in niedrigster Ordnung der Störungstheorie. Die Weltfläche hat also die Topologie einer Sphäre. Von einem etwas abstrakteren Standpunkt aus betrachtet kann eine Korrelationsfunktion

$$\Theta = \langle V_1 \ldots V_{N+1} \rangle \tag{5.5.1}$$

[8] Diese Rechnung kann natürlich bestenfalls als eine Art Eselsbrücke verstehen. Für eine mathematisch korrekte Bestimmung des $U(1)$-Moduliraum muß das Indextheorem betrachtet werden, siehe [8].

von N+1 BRST-invarianten Vertexoperatoren mit Geistzahl g_i als eine Differentialform vom Grad

$$\deg\Theta = \sum_{i=1}^{N+1} g_i - 6 \tag{5.5.2}$$

auf dem Moduliraum $\mathcal{M}_{N+1}$ einer Sphäre mit $N+1$ markierten Punkten aufgefaßt werden. $\mathcal{M}_{N+1}$ ist dabei einfach der Konfigurationsraum von $N-2$ Punkten auf der Sphäre, denn drei der Punkte können aufgrund der Isometrien beliebig festgelegt werden. Diese Behauptung ist sehr plausibel, denn man braucht gerade $\sum_{i=1}^{N+1} g_i - 6$ Antigeist-Einsetzungen beziehungsweise Integrationen, um aus Θ eine Zahl zu erhalten. Weiterhin ist es ein wichtiges Ergebnis, daß diese Form geschlossen ist [1].
Um Streuamplituden zu berechnen, nimmt man ausschließlich Vertexoperatoren mit Geistzahl zwei. In diesem Fall ist Θ eine Volumenform und kann über den vollen Moduliraum integriert werden. Um eine Ward-Identität abzuleiten, wählt man dagegen nur N Operatoren mit Geistzahl zwei und nimmt zusätzlich eine Kohomologieklasse mit Geistzahl eins, die mit den Symmetrien der Theorie zusammenhängt. Θ ist dann eine Form vom Grad $\dim\mathcal{M}_{N+1} - 1$ und kann nur noch über eine Untermannigfaltigkeit mit Kodimension eins intergriert werden. Der natürliche Kandidat dafür ist der Rand $\partial\mathcal{M}_{N+1}$. Wegen $d\Theta = 0$ und Stokes' Theorem verschwindet dieses Integral allerdings, so daß die Ward-Identität lautet:

$$\int_{\partial\mathcal{M}_{N+1}} \Theta = \int_{\mathcal{M}_{N+1}} d\Theta = 0. \tag{5.5.3}$$

Dem Rand des Moduliraumes einer Sphäre mit $N+1$ markierten Punkten entsprechen Konfigurationen, bei denen zwei der Punkte zusammenrücken (Abb. 1B).

Abbildung 1: Konfiguration A entspricht einem Punkt im Inneren des Moduliraumes einer Sphäre mit vier Punktierungen. B liegt dicht am Rand.

Diese Situation ist konform äquivalent dazu, daß sich die Sphäre in zwei Teile auspaltet, die nur durch eine unendlich lange, dünne Röhre miteinander verbunden sind (Abbildung 2). Einer dieser Teile enthält p und der andere $N+1-p$ Punkte für irgendeine ganze Zahl p zwischen 2 und $N-1$. Die Endpunkte des Zylinders sorgen für zwei neue Punktierungen. Außerdem ist der Twist-Winkel des Zylinders ein weiterer Modulus. Damit stimmen auch die Dimensionen: Der Moduliraum einer n-punktierten Sphäre hat die reelle Dimension $2(n-3)$, also

$$\begin{aligned}\dim \partial\mathcal{M}_{N+1} &= 2(N-2)-1 = 2(N-p-1)+2(p-2)+1 \\ &= \dim\mathcal{M}_{N-p+2} + \dim\mathcal{M}_{p+1} + 1. \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

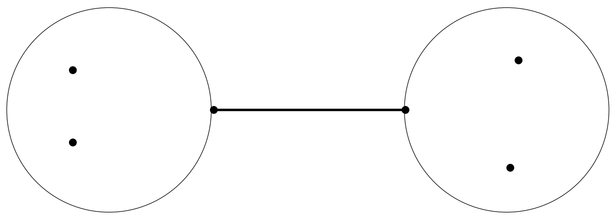

Abbildung 2: Hier sind zwei Sphären dargestellt, die durch einen dünnen Zylinder miteinander verbunden sind. Diese Abbildung ist konform äquivalent zur Konfiguration B in Abbildung 1.

Die dünne Röhre kann durch einen vollständigen Satz physikalischer Zustände, die zwischen den beiden Sphären propagieren, beschrieben werden. Der Twist-Winkel der Röhre führt zu einer Antigeist-Einsetzung von $b(z)-\tilde{b}(z)$. Der Satz der Zustände hat daher die Form

$$\sum_i |\widehat{O}^i\rangle\,\langle O_i|\,, \tag{5.5.5}$$

wobei i eine Basis der absoluten BRST-Kohomologie durchnumeriert und

$$\langle O_j|O^i\rangle = \delta^i_j, \qquad |\widehat{O}^i\rangle = (b_0-\tilde{b}_0)\,|O^i\rangle\,. \tag{5.5.6}$$

Die Ward-Identität für eine Korrelationsfunktion, die N Geistzahl zwei Vertexoperatoren $V_i := V(k_i, z_i, \bar{z}_i)$ und einen Geistzahl eins Operator Ω_0 enthält, lautet also

$$\sum_{i,\alpha} \langle\!\langle V_{u_1}\ldots V_{u_p}\Omega_0\widehat{O}^i\rangle\!\rangle \langle\!\langle O_i V_{u_{p+1}}\ldots V_{u_N}\rangle\!\rangle = 0. \tag{5.5.7}$$

Der Index α läuft hierbei über alle Möglichkeiten, die N Vertexoperatoren in eine Untermenge $\{V_{u_1}\ldots V_{u_p}\}$ auf der Sphäre von Ω_0 und den Rest $\{V_{u_{p+1}}\ldots V_{u_N}\}$

auf der anderen Sphäre zu unterteilen. Die Doppelklammern sind ganz normale Korrelatoren auf der Sphäre. Diese Notation deutet nur an, daß die Integration über den Moduliraum bereits ausgeführt wurde.
In der N=2 Stringtheorie hat der Moduliraum eine kompliziertere Form (wir betrachten weiterhin nur den Fall verschwindender Chernzahl). Die Integration über die fermionischen Moduli kann explizit ausgeführt werden [8] und führt zu der Vorschrift, daß sich die beiden Bildladungen $\pi^+ = \tilde{\pi}^+$ und $\pi^- = \tilde{\pi}^-$ der Vertexoperatoren jeweils zu -2 addieren müssen, um einen nichtverschwindenden Korrelator zu erhalten. Die $U(1)$-Moduli hängen mit der Homologie der punktierten Riemannfläche zusammen. Auf der Sphäre entsprechen sie einfach den nichttrivialen Monodromien der $U(1)$-geladenen Felder um die Punktierungen. Die Korrelatoren für verschiedene Monodromien werden jedoch über den Spektralflußautomorphismus miteinander identifiziert, so daß wir uns an jeder Punktierung auf den NS-Sektor beschränken können. Die Integration über die $U(1)$-Moduli trägt daher nur zur Normierung bei.
Außerdem hat der $U(1)$-Moduliraum keinen Rand, wie wir schon auf etwas heuristische Weise in Abschnitt zwei dieses Kapitels gesehen haben und wie sich auch aus der genauen mathematischen Behandlung mit Hilfe des Indextheorems ergibt [8]. Die Art und Weise wie die Ward-Identität oben hergeleitet wurde zeigt, daß der $U(1)$-Sektor keine Rolle spielt. Gleichung (5.5.7) gilt also unverändert für den N=2 String.
Es ist sehr aufschlußreich, die Ward-Identität auch noch von einem etwas anderen Standpunkt aus als Aussage über die Entkopplung von BRST-trivialen Zuständen zu betrachten [27, 50]. Korrelationsfunktionen auf der Sphäre können immer umgeschrieben werden als Matrixelemente ortsunabhängiger Operatoren [43]. Zum Beispiel lautet eine 4-Punkt-Funktion des geschlossenen bosonischen Strings

$$A_4 = \langle V_1 | V_2(1) D V_3(1) | V_4 \rangle \;+\; \text{Permutationen.} \tag{5.5.8}$$

Hierbei sind V_i physikalische Zustände aus der relativen Kohomologie (sie haben also Geistzahl zwei) und der Propagator wurde bereits in (5.4.13) angegeben. Die Entkopplung eines trivialen Zustandes $|V_1\rangle = Q\,|\Lambda\rangle$ zeigt man, indem man Q nach rechts durchzieht. Der einzige nichtverschwindende Kommutator, der dabei auftritt, ist $[Q, D]$. Aus den beiden verschiedenen Ausdrücken für D in (5.4.13) erhält man einerseits

$$\begin{aligned} [Q, D] &= \frac{1}{2}(b_0 - \tilde{b}_0)\delta(\hat{L}_0 - \tilde{\hat{L}}_0) \\ &= \sum_i (b_0 - \tilde{b}_0)|O^i\rangle \langle O_i| = \sum_i |\widehat{O}^i\rangle \langle O_i| \,. \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

Die Summe läuft hier über einen vollständigen Satz von Zuständen, die von $\hat{L}_0 - \tilde{\hat{L}}_0$ vernichtet werden. Im Matrixelement (5.5.8) tragen aber nur die Kohomologieklassen bei [43], so daß sich die gleiche Summe wie in (5.5.5) ergibt. Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
\big[Q,D\big] &= \big(b_0\hat{\tilde{L}}_0 - \tilde{b}_0\hat{L}_0\big)\int_{|z|\leq 1} d^2z\, z^{\hat{L}_0-1}\bar{z}^{\hat{\tilde{L}}_0-1}\\
&= b_0\int_{|z|\leq 1} d^2z\,\partial\left(z^{\hat{L}_0-1}\bar{z}^{\hat{\tilde{L}}_0}\right) - \tilde{b}_0\int_{|z|\leq 1} d^2z\,\bar{\partial}\left(z^{\hat{L}_0}\bar{z}^{\hat{\tilde{L}}_0-1}\right).
\end{aligned}
\tag{5.5.10}
$$

Hier sieht man, daß die Ränder des Moduliraumes beitragen (den Rand des kompletten Moduliraum erhält man, wenn man in (5.5.8) alle Permuationen berücksichtigt). Wenn es um die Entkopplung longitudinaler Freiheitsgrade geht, trägt $|\Lambda\rangle$ Impuls k. Man kann dann in eine Region des Impulsraumes gehen, in der die $\hat{L}_0$-Werte groß sind und die Beiträge vom Rand des Moduliraumes verschwinden ('canceled propagator argument'). Um eine Ward-Identität zu erhalten, benutzt man für Λ BRST-invariante Zustände Ω_0 mit Geistzahl eins und festgelegtem Impuls, die mit den Symmetrien der Theorie assoziiert sind (für den $N{=}2$ String also die Operatoren (5.3.1)). Die Ward-Identität nimmt dann zum Beispiel für eine 4-Punkt-Funktion die Form

$$0 = \langle\Omega_0|QV_2(1)DV_3(1)|V_4\rangle \ + \ \text{Permutationen} \tag{5.5.11}$$

an. Welche Modifikationen sich für den $N{=}2$ String ergeben, sieht man, indem man den Kommutator des BRST-Operators mit dem Propagator (5.4.16) berechnet:

$$\big[Q,DD'\big] = \big[Q,D\big]D', \tag{5.5.12}$$

denn D' vertauscht mit dem BRST-Operator. Zum Beispiel ist

$$\big\{Q, b'_0\,\delta(\hat{J}_0)\big\} = \hat{J}_0\,\delta(\hat{J}_0) = 0. \tag{5.5.13}$$

Wir sehen also auch hier, daß der $U(1)$-Sektor keine Rolle für die Ward-Identitäten des $N{=}2$ Strings spielt. Aus diesem Grund werden im folgenden Abschnitt die $U(1)$ Geister nicht explizit aufgeführt.

Explizite Form der Ward-Identitäten

Wir betrachten nun die Ward-Identitäten mit den Operatoren aus (5.3.1). Die Bildladung wird nicht explizit angegeben, um die Formeln etwas übersichtlicher zu halten. Für den Fall der 3-Punkt-Funktion, bei dem drei Vertexoperatoren $V_i(k_i)$ mit lichtartigen Impulsen $k_1+k_2+k_3=0$ beitragen, lautet (5.5.7)[9]:

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \big\langle V_1\Omega^a_{0,m,n}\widehat{O}^i\big\rangle\big\langle O_iV_2V_3\big\rangle + \sum_i \big\langle V_2\Omega^a_{0,m,n}\widehat{O}^i\big\rangle\big\langle O_iV_3V_1\big\rangle\\
&+\sum_i \big\langle V_3\Omega^a_{0,m,n}\widehat{O}^i\big\rangle\big\langle O_iV_1V_2\big\rangle = 0.
\end{aligned}
\tag{5.5.14}
$$

[9] Für die 3-Punkt-Funktion auf der Sphäre gibt es keinen Unterschied zwischen der doppelten und der einfachen Klammer, da der metrische Moduliraum in diesem Fall nur aus einem Punkt besteht.

Die Bild- und Geistladungen sowie die Impulse der Operatoren O_i und $\widehat{O}^i$ liegen eindeutig fest. Zum Beispiel trägt in der ersten Summe nur $O_i = V_1$ mit konjugierten Zuständen $O^i = \partial c \bar{\partial} \tilde{c} V_1$ und $\widehat{O}^i = (\partial c + \bar{\partial} \tilde{c}) V_1$ bei. Der zweite Faktor des ersten Terms ist die gewöhnliche 3-Punkt-Funktion und der erste spaltet folgendermaßen in holomorphen und antiholomorphen Anteil auf:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle V_1(k_1) \Omega^a_{0,m,n} (\partial c + \bar{\partial} \tilde{c}) V_1(-k_1) \right\rangle \\
&= \left\langle V_1(k_1) \mathcal{P}^a_m V_1(-k_1) \right\rangle_L \left\langle \tilde{V}_1(k_1) \tilde{\mathcal{O}}_n \bar{\partial} \tilde{c} \tilde{V}_1(-k_1) \right\rangle_R .
\end{aligned}
\tag{5.5.15}
$$

Die Indizes L und R sollen hier andeuten, daß die Korrelatoren in Hinblick auf die chiralen links- und rechtslaufenden Hälften gemeint sind (der Term $\partial c V_1$ trägt aus Geistzahlgründen nicht bei). Die ganze Diskussion hängt außerdem nicht von den gewählten Bildladungen ab. Es gibt daher keine Einschränkungen an die Werte von m und n. Die Korrelatoren (5.5.15) lassen sich auswerten, indem man die Ergebnisse aus Kapitel IV benutzt und ergeben $k_1^a h(k_1)^{m+n}$. Der explizite Ausdruck der Ward-Identität für die 3-Punkt-Funktion lautet daher schließlich

$$
A_3 \sum_{i=1}^{3} k_i^a h(k_i)^m = 0 \tag{5.5.16}
$$

für jeden Wert $m \in \mathbb{Z}$. Eine analoge Gleichung gilt auch, wenn man k_i^a durch $\bar{k}_i^{\bar{a}}$ ersetzt. Die Amplitude kann also nur dann von Null verschieden sein, wenn die Summe in (5.5.16) verschwindet. Die eindeutige Lösung ist:

$$
h(k_1) = h(k_2) = h(k_3) = 0. \tag{5.5.17}
$$

Das stimmt genau mit dem Ergebnis aus [5] überein und erhält bereits nichttriviale Information, wie man folgendermaßen einsehen kann: Die Massenschalenbedingung $k_i \cdot \bar{k}_i = 0$ bedeutet $|k_i^0| = |k_i^1|$. Die nullten und ersten Komponenten der Impulse k_i bilden also aufgrund der Impulserhaltung zwei Dreiecke mit gleicher Seitenlänge, die sich bis auf ihre unwichtige Schwerpunktsposition in der Impulsebene nur in der Orientierung unterscheiden können. Man kann sich leicht überlegen, daß eine nichtverschwindende 3-Punkt-Funktion entgegengesetzt orientierte k^0- und k^1-Dreiecke erfordert – eine kinematische Situation, die auch aus der Ward-Identität (5.5.16) folgt [5].

Wir kommen nun zu den Ward-Identitäten für beliebige N-Punkt-Funktionen, bei denen N lichtartige Impulse k_i auftauchen mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_N = 0$. Die α-Summe in (5.5.7) läuft nun über eine große Anzahl möglicher Entartungen der Riemannfläche. Insbesondere besteht die Möglichkeit, daß der Operator Ω_0 mit mehr als einem weiteren Vertexoperator auf einer der beiden Sphären sitzt. Das führt zum Korrelator

$$
\langle\!\langle V_{u_1} V_{u_2} \ldots V_{u_p} \Omega^a_{0,m,n} \widehat{O}^i \rangle\!\rangle \langle\!\langle O_i V_{u_{p+1}} \ldots V_{u_N} \rangle\!\rangle . \tag{5.5.18}
$$

O_i hat Impuls $k_{u_1}+k_{u_2}+\ldots+k_{u_p}$ und ist im allgemeinen kein 'on-shell'-Operator, hat also nichtverschwindenden $\hat{L}_0$-Eigenwert. Diese Situation behandelt man üblicherweise, indem man sich auf das bereits erwähnte 'canceled propagator argument' beruft (siehe Kapitel 9 aus [43]): Man wertet den Korrelator (5.5.18) in einer kinematischen Region aus, in der die Zwischenzustände positive Skalendimension haben. Die Beiträge vom Rand des Moduliraums verschwinden in diesem Fall (siehe (5.5.10)). Aufgrund analytischer Fortsetzung sollte der Korrelator dann auch in jeder anderen Region des Impulsraumes verschwinden. Wenn Ω_0 jedoch nur mit einem weiteren Vertexoperator abspaltet, funktioniert dieses Argument nicht, weil der Zwischenzustand in dieser Situation Impuls k_i hat und daher immer auf der Massenschale liegt. Die Ward-Identität erhält daher nur Beiträge von diesem Typ der Entartung der Riemannfläche und lautet

$$\sum_{i=1}^{N} \langle V(k_i)\Omega^a_{0,m,n}\widehat{V}(-k_i)\rangle A_N = A_N \sum_{i=1}^{N} k_i^a h(k_i)^{m+n} = 0 \qquad (5.5.19)$$

für beliebige $m,n \in \mathbb{Z}$. Sie sieht nicht besonders aufregend aus (schließlich wurde sie aus 'affinisierten Translationen' abgeleitet), hat aber zur Folge, daß die N-Punkt-Funktion verschwinden muß, falls nicht die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{N} k_i^a h(k_i)^m = 0 \qquad \text{für jedes } m \in \mathbb{Z} \qquad (5.5.20)$$

gilt. Um die Lösungen dieser Gleichung zu finden, sollte man sich daran erinnern, daß h nur eine Phase ist und daher als $h(k_i) = e^{\gamma_i}$ geschrieben werden kann. Wenn man (5.5.20) durch $h(k_1)^m$ teilt und dann über m summiert, erhält man

$$0 = \sum_{i=1}^{N} k_i^a \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{im(\gamma_i-\gamma_1)} = \sum_{i=1}^{N} k_i^a \delta(\gamma_i - \gamma_1). \qquad (5.5.21)$$

Der erste Term, $i = 1$, in dieser Summe verschwindet nicht; es muß also noch andere von Null verschiedene Summanden geben. Unter Berufung auf analytische Fortsetzung können wir kinematische Situationen, in denen schon eine echte Untermenge der Impulse separat erhalten ist, vernachlässigen. Damit (5.5.21) erfüllt sein kann, muß also gelten

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_N. \qquad (5.5.22)$$

(5.5.21) stimmt dann wegen Impulserhaltung. Die Ward-Identität (5.5.20) führt schließlich dazu, daß die N-Punkt-Funktion nur dann von Null verschieden sein kann, wenn

$$h(k_1) = h(k_2) = \ldots = h(k_N) \qquad (5.5.23)$$

gilt. Diese Bedingung bedeutet unter anderem, daß alle Skalarprodukte $k_i \cdot \bar{k}_j + k_j \cdot \bar{k}_i$ verschwinden und stimmt genau mit dem Ergebnis von Berkovits und Vafa überein [5].

In diesem Abschnitt haben wir spezielle kinematische Situationen vernachläßigt und uns auf analytische Fortsetzung verlassen. In einer Theorie, die eine physikalische Situation beschreibt, wäre das sicherlich berechtigt. Ob man allerdings auch verlangen sollte, daß 'on-shell' Amplituden in einem Targetraum mit Signatur $(2,2)$ analytisch sein müssen, ist Interpretationssache. Zum Beispiel argumentiert Parkes in [39], daß δ-Funktionsbeiträge zur S-Matrix des $N=2$ Strings wichtig sind im Hinblick auf seine Rolle in der Theorie der integrablen Modelle. Es ist klar, daß solche Feinheiten der Argumentation in diesem Abschnitt nicht zugänglich sind.

Kapitel VI: Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen

Es war das Ziel dieser Arbeit, die Symmetrien des $N=2$ Strings zu untersuchen. Dazu wurde nach einer allgemeinen Einführung in die $N=2$ Stringtheorie in den Kapiteln III und IV die BRST-Kohomologie ausführlich analysiert. Ergebnis war, daß die Kohomologie bei nichtverschwindendem Impuls im massiven Fall $k\cdot\bar{k} \neq 0$ leer ist und bei $k\cdot\bar{k} = 0$ für jede Bildladung genau einen Zustand enthält. Da Korrelationsfunktionen aber bildunabhängig sind, sollten die Vertexoperatoren in verschiedenen Bildern als äquivalente Beschreibung nur eines Freiheitsgrades interpretiert werden. In dem für das Spektrum irrelevanten Fall verschwindenden Impulses wurde gezeigt, daß die Kohomologie bildabhängig ist. Insbesondere wurden nichttriviale Operatoren mit Geistzahl null und eins für beliebige Bildladung explizit konstruiert.
Auf diesen Resultaten aufbauend wurde dann in Kapitel V ein unendlicher Satz von Ladungen angegeben, die durch ihr Bild und eine ganze Zahl n charakterisiert werden (siehe Gleichung (5.3.3)). Weiterhin wurde vorgeschlagen, diese Ladungen als Generatoren der ungebrochenen Symmetrien des $N=2$ Strings im flachen Targetraum zu interpretieren. Dafür sprechen vor allem die beiden folgenden Punkte:

1. Die Transformationen der physikalischen Vertexoperatoren (5.3.5) stimmen mit den linearisierten, nichtlokalen Transformationen (5.1.46) des Plebanski-Feldes ϕ überein.

2. Aus den entsprechenden Ward-Identitäten (5.5.19) lassen sich alle Tree-Level-Amplituden mit mehr als drei äußeren Beinen bestimmen.

Dieses Resultat wirft natürlich Fragen auf. In der Quantenfeldtheorie lernt man zum Beispiel, daß BRST-Quantisierung nur eine Wahl des Formalismus ist. Viele Aspekte der Theorie kann man in diesem Zugang zwar sehr gut verstehen, dennoch scheint die BRST-Konstruktion nicht mehr als ein technisches Hilfsmittel zu sein, dessen Gebrauch man auch vermeiden könnte. Andererseits haben die Ladungen (5.3.3) verschiedene Bildzahl – ein Konzept, das nur über die Spinor-Geister ins Spiel kommt. Es stellt sich daher die Frage, ob und wie man die Ergebnisse dieser Arbeit ohne BRST-Formalismus erhalten könnte.

Die Antwort könnte darin liegen, daß die BRST-Quantisierung in der Stringtheorie vielleicht einen anderen Stellenwert als in der Feldtheorie hat[1]. Ein Hinweis darauf sind die Schwierigkeiten, die es in den Anfängen der Stringtheorie gab, Vertexoperatoren für Targetraum-Fermionen anzugeben. Eine zufriedenstellende Konstruktion wurde erst gefunden, als der Geistsektor berücksichtigt wurde [18][2]. Ein anderes Beispiel ist die $2D$ Stringtheorie, deren Ähnlichkeit mit dem $N{=}2$ String von vielen Autoren betont wurde. In dieser Theorie führt BRST-Quantisierung auf der Weltfläche ebenfalls zu einem unendlichen Satz von Geistzahl null Kohomologieklassen mit diskreten Impulswerten, aus der sich eine unendlichdimensionale Symmetriealgebra ableiten läßt [54] (die wesentlichen mathematischen Strukturen, die in Kapitel V benutzt wurden – Absteigegleichung und Gerstenhaber-Algebra – wurden bei der Untersuchung der $2D$ Stringtheorie Anfang der neunziger Jahre entwickelt [29, 55]). Diese Ergebnisse lassen sich zumindest in dieser konzeptionell klaren Form nicht dadurch reproduzieren, daß man einfach eine andere Quantisierung auf der Weltfläche (z.B. eine Art Lichtkegelquantisierung) wählt. Dennoch existiert ein anderer Zugang zur $2D$ Stringtheorie, dessen Ergebnisse mit denen der BRST-Quantisierung sehr gut übereinstimmen: die Matrixmodelle [20]. Bemerkenswert dabei ist, daß die Matrixmodelle auf der Triangulierung von zweidimensionalen Flächen beruhen – ein Konzept, das sich vom herkömmlichen Zugang zur Stringtheorie deutlich unterscheidet. Diese Beispiele lassen die (vielleicht etwas gewagte) Vermutung zu, daß es nötig sein kann, qualitativ neue Ideen ins Spiel zu bringen, um alle Aspekte des BRST-Zugangs zu reproduzieren. Auf den $N{=}2$ String übertragen heißt dies, daß es sehr interessant wäre, die Rolle der Bildladung auf alternative Weise zu verstehen.

Eine mögliche Überlegung in diese Richtung ist die folgende: Wenn man den Vergleich zwischen $N{=}2$ Strings der $2D$ Stringtheorie etwas vertieft, stellt man fest, daß beide Theorien das gleiche Spektrum (ein Freiheitsgrad) und einen Ring chiraler Kohomologieklassen mit Geistzahl null besitzen. Die Elemente dieses Ringes tragen in der $2D$-Theorie quantisierte Werte des Liouville-Impulses und wirken auf den physikalischen Zustand durch Multiplikation mit einer impulsabhängigen Funktion und Verschieben des Impulses. Das ist völlig analog zur Relation

$$\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot V_{\widehat{\pi}^+,\widehat{\pi}^-}(k) = h(k)^n V_{\pi^+ + \widehat{\pi}^+,\pi^- + \widehat{\pi}^-}(k) \tag{6.1}$$

auf der Seite des $N{=}2$ Strings und läßt die Vermutung zu, daß die Felder $\varphi^\pm$, die bei der Bosonisierung der Spinor-Geister auftreten, eine ähnliche Rolle wie das Liouville-Feld spielen könnten (siehe (2.3.24) und nachfolgende Bemerkungen).

[1]Spekulationen in diese Richtung gab es vor allem im Rahmen der String-Feldtheorie [53], bei der der Geistsektor eine unverzichtbare Rolle spielt. Wie schon in Kapitel V, Abschnitt vier, erwähnt wurde, ist allerdings nicht klar, ob String-Feldtheorie wirklich der richtige Zugang ist.

[2]Bei Impuls null lassen sich aus diesen Vertexoperatoren Supersymmetrieladungen konstruieren, die meistens im $-1/2$ Bild angegeben werden. Der Antikommutator zweier solcher Ladungen liegt im -1 Bild und ergibt den erwarteten Impulsoperator nur modulo Bildwechsel. Auch hier spielt die Bildladung eine wichtige Rolle in der Symmetriestruktur.

Schließlich handelt es sich in beiden Fällen um Skalarfelder mit quantisiertem Impuls, die an eine Hintergrundladung koppeln. Man könnte also versuchen, die Felder $\varphi^{\pm}$ als die Koordinaten einer zusätzlichen komplexen Dimension zu betrachten. [3]
Auf der Seite der Feldtheorie wurde der Zusammenhang mit einer Gleichung in drei komplexen Dimensionen in [41] diskutiert. Die grundlegende Idee ist, selbstduale Yang-Mills Theorie in einem Raum mit Koordinaten $Z^0, \ldots, Z^3$ und Metrik $ds^2 = -dZ^0 dZ^2 + dZ^1 dZ^3$ zu betrachten. Die Selbstdualitätsbedingungen lauten:

$$F_{02} - F_{13} = 0, \qquad F_{01} = F_{23} = 0. \tag{6.2}$$

Die Eichung kann so gewählt werden, daß die ersten beiden Komponenten des Yang-Mills Feldes A verschwinden. Die verbleibenden Gleichungen sind

$$\begin{aligned} &\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 + \left[A_2, A_3\right] = 0, \\ &\partial_0 A_2 - \partial_1 A_3 = 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Die zweite Bedingung kann man durch Einführen eines Feldes Θ, das in der Lie-Algebra liegt, lösen:

$$A_2 = \partial_1 \Theta, \qquad A_3 = \partial_0 \Theta. \tag{6.4}$$

Wählt man weiterhin als Eichgruppe die bereits in Kapitel V, Abschnitt eins, auftretende Gruppe der volumenformerhaltenden Diffeomorphismen einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit mit Koordinaten $\bar{Z}^0$ und $\bar{Z}^1$, also

$$\Theta = \epsilon^{\bar{a}\bar{b}} \bar{\partial}_{\bar{a}} \Omega \bar{\partial}_{\bar{b}} \quad \text{mit} \quad \Omega = \Omega(Z^0, \ldots, Z^3, \bar{Z}^0, \bar{Z}^1), \tag{6.5}$$

wird die erste Gleichung von (6.3) zu einer Gleichung für Ω in sechs Variablen. In [41] wurde gezeigt, daß sich daraus verschiedene Versionen der selbstdualen Gravitation durch dimensionale Reduktion ableiten lassen. Die Plebanski-Gleichung erhält man zum Beispiel einfach durch die Forderung, daß Ω von den Koordinaten Z^2 und Z^3 unabhängig ist.
Um ein besseres Verständnis der Bildladung zu bekommen, könnte man also versuchen, den genauen Zusammehang zwischen dem N=2 String und dieser sechsdimensionalen Gleichung zu verstehen. Da hier die selbstduale Yang-Mills Theorie auftritt, scheint auch der offene N=2 String eine Rolle zu spielen. Wenn man alle möglichen Kombinationen von Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen berücksichtigt, lassen sich die einzelnen Bausteine vielleicht irgendwann zu einem konsistenten Gesamtbild zusammensetzen [33].

[3] Zusätzliche Dimensionen, die über das γ, β-Geistsystem sichtbar werden könnten, wurden schon in [4] diskutiert. Ähnliche Gedanken findet man auch in [21] und den daran anknüpfenden Arbeiten.

Anhang A: Impuls Null Kohomologie

In diesem Anhang wird die chirale BRST-Kohomologie bei verschwindendem Impuls für verschieden Werte der Bildladung zusammengefasst.

Geistzahl Null

Bildladung (π^+, π^-)	Kohomologieklassen	Dimension der Kohomologie
$(-2-p, p)$	—	0
$(-1-p, p)$	—	0
$(-p, p)$	S^p	1
$(1-p, p)$	$X^+ \cdot S^p, \qquad X^- \cdot S^{p-1}$	2
$\pi^+ + \pi^- > 1$	$\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} := (X^+)^{\pi^+ + n} \cdot (X^-)^{\pi^- - n} \cdot S^n$, für $n = -\pi^+ \ldots \pi^-$ plus evtl. weitere Zustände.	$\geq \pi^+ + \pi^- + 1$

Hier ist $p \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl. Das Normalprodukt wurde in Gleichung (2.3.10) definiert und die expliziten Ausdrücke für die Operatoren S, S^{-1} und $X^\pm$ sind:

$$
\begin{aligned}
S &= (1 - cb')J^{--}e^{\varphi^+}e^{-\varphi^-}, \\
S^{-1} &= (1 + cb')J^{++}e^{-\varphi^+}e^{\varphi^-}, \\
X^\pm &= -c\partial\xi^\pm + \big(G^\pm - 4\gamma^\pm b \pm 4\partial\gamma^\pm b' \pm 2\gamma^\pm \partial b'\big)e^{\varphi^\mp}.
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

Geistzahl Eins

Bildladung (π^+, π^-)	Kohomologielassen	Dimension der Kohomologie
$(-2-p, p)$	$S^{p+1} \cdot c e^{-\varphi^+} e^{-\varphi^-}$	1
$(-1-p, p)$	$S^p \cdot c\psi^{+a} e^{-\varphi^-}$	2
$(-p, p)$	$S^p \cdot P^a, \; S^p \cdot \bar{P}^{\bar{a}}$	4
$(1-p, p)$	$X^+ \cdot S^p \cdot P^a, \quad X^- \cdot S^{p-1} \cdot P^a$ $X^+ \cdot S^p \cdot \bar{P}^{\bar{a}}, \quad X^- \cdot S^{p-1} \cdot \bar{P}^{\bar{a}}$ plus evtl. weitere Zustände.	≥ 8
$\pi^+ + \pi^- > 1$	$\mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot P^a, \quad \mathcal{O}_{\pi^+,\pi^-,n} \cdot \bar{P}^{\bar{a}}$ plus evtl. weitere Zustände.	$\geq 4(\pi^+ + \pi^- + 1)$

Die Impulsoperatoren sind

$$
\begin{aligned}
-iP^a &\equiv -iP^a_{0,0} = c\partial Z^a - 2\gamma^- \psi^{+a}, \\
-i\bar{P}^{\bar{a}} &\equiv -i\bar{P}^{\bar{a}}_{0,0} = c\partial \bar{Z}^{\bar{a}} - 2\gamma^+ \psi^{-\bar{a}}.
\end{aligned} \tag{A.2}
$$

Aufgrund der Poincaré Dualität erhält man ähnliche Tabellen für $\pi^+ + \pi^- \leq -2$.

Anhang B:

Lie-Algebra-Homologie

In diesem Anhang geht es darum, Gleichung (3.3.10) zu beweisen (dieser Anhang basiert auf [19]). Wir wiederholen zunächst kurz die Lie-algebraische Interpretation des Operators Q_1 in Gleichung (3.3.8).
Dazu sei E eine beliebige Lie-Algebra mit Basis $\{b_n\}$ und Strukturkonstanten ${f_{mn}}^k$. Die äußere Algebra $\bigwedge E$ ist die Menge der Polynome in den antikommutierenden Größen b_n. Die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial b_n} \equiv \{c_{-n}, b_m\} = \delta_{n,m} \tag{B.1}$$

wird auf $\bigwedge E$ durch eine gradierte Produktregel definiert.
Außerdem spielt die universelle einhüllende Algebra $U(E)$ eine wichtige Rolle. Um $U(E)$ zu beschreiben, ist es zweckmäßig die Basiselemente von b_n in L_n umzutaufen. $U(E)$ ist einfach die Menge aller Polynome in den L_n, wobei $[L_m, L_n]$ und ${f_{mn}}^k L_k$ identifiziert werden.
Auf $U(E) \otimes \bigwedge E$ kann man den nilpotenten Operator

$$d := \sum_n L_n \otimes \frac{\partial}{\partial b_n} b_m + \frac{1}{2} \sum_{m,n} \mathbf{1} \otimes [b_m, b_n] \frac{\partial}{\partial b_n} \frac{\partial}{\partial b_m} \tag{B.2}$$

definieren. Im folgenden werden die Tensorprodukt-Symbole unterdrückt, da keine Gefahr der Verwechselung besteht. d läßt sich dann als

$$d := \sum_n L_n c_{-n} + \frac{1}{2} \sum_{m,n,k} {f_{mn}}^k b_k c_m c_n \tag{B.3}$$

schreiben. Der Operator Q_1 aus (3.3.8) ergibt sich, wenn man für E die Unteralgebra Vir^- der Elemente der Virasoro-Algebra, die einen strikt negativen Modenindex haben, einsetzt.
Um die Kohomologie von d zu berechnen, führt man zunächst eine Gradierung[1] auf $U(E)$ ein,

$$U^{-n}(E) = \operatorname{span}\{L_1^{k_1} \ldots L_l^{k_l} \ , \ k_1 + \ldots + k_l = n\}, \tag{B.4}$$

[1] Aufgrund des Poincare-Birkhoff-Witt Theorems ist diese Gradierung eindeutig

und definiert damit eine Gradierung auf $U(E) \otimes \bigwedge E$:

$$\left(U(E) \otimes \bigwedge E\right)^p = \sum_{k-l=p} U^k(E) \otimes \wedge^l E. \tag{B.5}$$

Diese Gradierung ist etwas unüblich, da sie den Elementen einen negativen Grad zuordnet. Sie ist aber so gewählt, daß d in einen Teile d_0 vom Grad 0 und d_1 vom Grad 1 zerfällt.

$$\begin{aligned} d_0 &= \sum_n L_n c_{-n}, \\ d_1 &= \frac{1}{2} \sum_{m,n,k} f_{mn}{}^k b_k c_m c_n. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Dadurch ist es möglich, zunächst nur die Kohomlogie von d_0 zu betrachten. Ein nützlicher Operator in diesem Zusammenhang ist die Homotopie

$$t = \sum_n b_n \frac{\partial}{\partial L_n}, \tag{B.7}$$

denn wegen

$$\{d_0, t\} = \sum_n \left(b_n \frac{\partial}{\partial b_n} + L_n \frac{\partial}{\partial L_n} \right) \tag{B.8}$$

wäre das Problem praktisch gelöst [13]. Allerdings ist die Ableitung $\frac{\partial}{\partial L_n}$ auf $U(E)$ nicht definiert, denn die Relationen $\frac{\partial L_m}{\partial L_n} = \delta_{nm}$ und $L_n L_m - L_m L_n = f_{mn}{}^k L_k$ sind nicht miteinander kompatibel. $L_m L_n$ und $L_n L_m$ unterscheiden sich jedoch um einen Term höheren Homogenitätsgrad. Die Bemerkungen in Kapitel III, Abschnitt drei, zeigen jedoch, daß solche Terme irrelevant sind, wenn man auf die Kohomologie von $d_0 + d_1$ schließen will [2]. Es reicht also, die universelle einhüllende Algebra durch den Raum $U'(E)$, in dem zwei Elemente identifiziert werden, sobald sie im Teil minimalen Homogenitätsgrades übereinstimmen, zu ersetzen. In $U'(E)$ macht die Ableitung $\frac{\partial}{\partial L_n}$ keine Probleme mehr und die Existenz des Homotopie-Operators t zeigt, daß die Kohomologie von d höchstens aus dem Einheitselement bestehen kann. Daß das Einheitselement in der Tat eine Kohomologieklasse darstellt, läßt sich leicht mit einer expliziten Rechnung überprüfen.

[2] Dieses Argument kann man präziser machen, wenn man das Konzept einer Filtrierung einführt, siehe Kapitel 1 in [22].

Literatur

[1] L. Alvarez Gaumé, C. Gomez, G. Moore und C. Vafa, Nucl. Phys. **B 303** (1988) 455.

[2] T. Banks und L.Dixon, Nucl. Phys. **B 381** (1988) 93.

[3] N. Berkovits, Nucl. Phys. **B 420** (1994) 332, hep-th/9308129.

[4] N. Berkovits, Phys. Lett. **B 395** (1997) 28, hep-th/9610134.

[5] N. Berkovits und C. Vafa, Nucl. Phys. **B 433** (1995) 123, hep-th/9407190.

[6] N. Berkovits und B. Zwiebach, Nucl. Phys. **B 523** (1998) 311, hep-th/9711087.

[7] J. Bieńkowska, Phys. Lett. **B 281** (1992) 59, hep-th/9111047.

[8] J. Bischoff, *Moduli und Amplituden des N=2 Strings*, Dissertation, Universität Hannover (1996).

[9] J. Bischoff, S.V. Ketov, und O. Lechtenfeld, Nucl. Phys. **B 438** (1995) 37, hep-th/9406101.

[10] J. Bischoff und O. Lechtenfeld, Phys. Lett. **B 390** (1997) 153, hep-th/9608196.

[11] J. Bischoff und O. Lechtenfeld, Int. J. Mod. Phys. **A 27** (1997) 4933, hep-th/9612218.

[12] P. Bouwknegt, J. McCarthy und K. Pilch, Nucl. Phys. **B 377** (1992) 541, hep-th/9112036.

[13] F. Brandt, N. Dragon und M.Kreuzer, Phys. Lett. **B 231** (1989) 263.

[14] Ch. Devchand and O. Lechtenfeld, Nucl. Phys. **B 516** (1998) 255, hep-th/9712043.

[15] J. Distler, P. Nelson, Comm. Math. Phys. **138** (1991), 273.

[16] M. Evans and I. Giannakis, Phys. Rev. **D 44** (1991) 2467.

[17] I. Frenkel, H. Garland, and G.J. Zuckerman, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83** (1986) 8446.

[18] D. Friedan, E. Martinec, and S. Shenker, Nucl. Phys. **B 271** (1986) 93.

[19] D.B. Fuks, *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Consultants Bureau (1986).

[20] P. Ginsparg and G. Moore, *Lectures on* $2-D$ *Gravity and* $2-D$ *String Theory*, hep-th/9304011.

[21] A. Giveon, D. Kutasov and N. Seiberg, hep-th/9806194.

[22] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, volume 3, Academic Press, New York (1976).

[23] R. Hippmann, Diplomarbeit,
http://www.itp.uni-hannover.de/lechtenf/Thesis/hippmann.ps.

[24] M. Henneaux, Nucl. Phys. B, (Proc. Suppl.) **18 A** (1990), 47.

[25] G.T. Horowitz, R.C. Myers, and S.P. Martin, Phys. Lett. **B 218** (1989) 309.

[26] S. Ketov, O. Lechtenfeld, and A.J. Parkes, Phys. Rev. **D 51** (1995) 2872 hep-th/9312150.

[27] I. Klebanov and A. Pasquinucci, Nucl. Phys. **B 393** (1993) 261, hep-th/9204052.

[28] B.H. Lian and G.J. Zuckerman, Comm. Math. Phys. **125** (1989) 301.

[29] B.H. Lian and G.J. Zuckerman, Comm. Math. Phys. **154** (1993) 613, hep-th/9211072.

[30] O. Lechtenfeld and W. Siegel, Phys. Lett. **B 405** (1997) 49, hep-th/9704076.

[31] H. Lu and C.N. Pope, Nucl. Phys. **B 447** (1995) 297, hep-th/9411101.

[32] D. Lüst, S. Theisen, *Lectures in String Theory*, Lecture Notes in Physics, Springer, 1989.

[33] E. Martinec, hep-th/9710122.

[34] G. Moore, hep-th/9305139.

[35] G. Moore, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **67** (1998) 56, hep-th/9710198

[36] F.J. Narganes-Quijano, Phys.Lett. **B 212** (1988) 292.

[37] H. Ooguri and C. Vafa, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1389.

[38] Q.H. Park, Int. J. Mod. Phys. **A 7** (1992) 1415.

[39] A. Parkes, Nucl. Phys. **B 376** (1992) 279, hep-th/9110075.

[40] J.F. Plebanski, J. Math. Phys. **16** (1975) 2395.

[41] J.F. Plebanski and M. Przanowski, Phys. Lett. **A 212** (1996) 22.

[42] J. Polchinski, Lectures at the 1994 Les Houches Summer School, hep-th/9411028

[43] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press, 1998.

[44] J. Polchinski, hep-th/9812104,

[45] A.D. Popov, M. Bordemann and H. Römer, Phys. Lett. **B 385** (1996) 63, hep-th/9606077.

[46] A. Schwimmer and N. Seiberg, Phys. Lett. **B 184** (1987) 191.

[47] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York (1966).

[48] C.B. Thorn, Nucl. Phys. **B 286** (1987) 61.

[49] C.B. Thorn, Phys. Rep. **175** (1989) 1.

[50] E. Verlinde, Nucl. Phys. **B 381** (1992) 141, hep-th/9202021.

[51] R.S. Ward und Wells, *Twistor Theory*, Cambridge University Press, 1990.

[52] E. Witten, Nucl. Phys. **B 268** (1986) 253.

[53] E. Witten, Nucl. Phys. **B 276** (1986) 291.

[54] E. Witten, Nucl. Phys. **B 373** (1992) 187, hep-th/9108004.

[55] E. Witten and B. Zwiebach, Nucl. Phys. **B 377** (1992) 55, hep-th/9201056.

[56] B. Zwiebach, Nucl. Phys. **B 390** (1993) 33, hep-th/9206084.

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. O. Lechtenfeld für die Unterstützung, die zahlreichen Diskussionen und die nette Arbeitsatmosphäre bedanken.

Außerdem danke ich natürlich auch meinen Mitstreitern P. Adamietz, J. Bischoff, H. Dennhardt, F. Flechsig, M. Marquart und B. Niemeyer für viele Diskussionen, die immer interessant waren und oft weitergeholfen haben.

Lebenslauf

12.10.1968	Geboren in Alfeld.
1975-1979	Besuch der Grundschule in Freden.
1979-1988	Besuch des Gymnasiums Alfeld.
19.5.1986	Abitur am Gymnasium Alfeld.
7.1988-9.1989	Wehrdienst in Hildesheim.
1989-1995	Studium der Physik an der Universität Hannover und am Imperial College London.
15.12.1993	International Imperial College Diploma.
2.8.1995	Diplom in Theoretischer Physik an der Universität Hannover.
Seit 10. 1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der Universität Hannover.
Seit 1.10.1995	Doktorand bei Prof. Dr. O. Lechtenfeld.