# Streuamplituden selbstdualer Feldtheorien

Monika Marquart

Diplomarbeit am
Institut für Theoretische Physik
der Universität Hannover

Januar 99

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der Streuamplituden von selbstdualer Yang-Mills Theorie (SDYM) und selbstdualer Gravitation (SDG) in 2+2 Dimensionen. Es wird erwartet, daß diese Theorien die effektiven Feldtheorien des N=2 Strings sind. Eine effektive Feldtheorie hat auf tree-niveau dieselben Streuamplituden wie der Niederenergie Limes der Stringtheorie, in dem der Beitrag der typischerweise auftretenden massiven Anregungen unterdrückt wird. Der N=2 String bildet hier eine Ausnahme: Da es für offene und geschlossene Strings nur je eine masselose Anregung gibt, sind alle Stringamplituden mit denen der Feldtheorie vergleichbar, ohne daß eine Näherung erforderlich ist. Die Zustände des offenen N=2 Strings werden dabei mit den selbstdualen Yang-Mills Feldern identifiziert [1] während die des geschlossenen N=2 Strings selbstduale gravitative Anregungen beschreiben [2]. Die effektive Feldtheorie der gemischten Theorie offener und geschlossener Strings sollte die gekoppelte Theorie von SDG und SDYM sein [3].

Selbstdualität bedeutet im Yang-Mills Fall eine Einschränkung des Feldstärketensors, die als Bewegungsgleichung für ein Präpotential des Eichfeldes betrachtet werden kann. Aus einer zugehörigen Wirkung für das Präpotential werden in dieser Arbeit in Kapitel 3 alle tree-level Streuamplituden berechnet und mit den Amplituden des offenen N=2 Strings verglichen.

SDG kann auf zwei unterschiedliche Arten betrachtet werden. Einmal wird Gravitation analog zu Yang-Mills Theorie als Eichtheorie, mit der Lorentzgruppe als Eichgruppe, behandelt. Selbstdualität ist dann eine Einschränkung an den Riemanntensor. Man erhält wie in SDYM eine Bewegungsgleichung für ein Präpotential der Spinkonnektion und kann daraus eine Wirkung aufgestellen. Aus der Wirkung werden in Kapitel 4 dieser Arbeit alle tree-level Streuamplituden für SDG berechnet und mit denen des geschlossenen N=2 Strings verglichen.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin ein Theorem zu benutzen, welches besagt, daß SDG in vier Dimensionen äquivalent zu einem ricciflachen Kählerraum ist [1]. Ein verschwindender Riccitensor liefert eine Bedingung an die Kählermetrik. Für das Kählerpotential kann dann eine Bewegungsgleichung aufgestellt werden. Die Abweichung des Kählerpotentials vom flachen Raum ist eich-äquivalent zum Präpotential in der anderen Betrachtungsweise.

Aus einer Wirkung für die gekoppelten Theorien SDG und SDYM werden in Kapitel 5 einige gemischte tree-level Streuamplituden berechnet. Diese werden mit den bekannten Streuamplituden der gemischten N=2 Stringtheorie verglichen und liefern darüber hinaus Vorhersagen für noch unbekannte Stringamplituden.

Abschließend werden in Kapitel 6 für reine SDYM und für reine SDG einige Einloop Amlituden berechnet. Da unterschiedliche Wirkungen aus einer Bewegungsgleichung für Präpotentiale konstruiert werden können, sind die Amplituden jenseits des tree-level nicht festgelegt. Es ist also zunächst fraglich, ob erwartet werden kann, daß die in dieser Arbeit berechneten feldtheoretischen Loop Amplituden mit den Loop Amplituden der Stringtheorie übereinstimmen. Aus der Stringtheorie sind bisher lediglich die Zweipunktfunktionen rein offener und rein geschlossener Strings mit einem Loop und die Dreipunktfunktion geschlossener Strings mit einem Loop bekannt. Diese Amplituden werden mit den entsprechenden feldtheoretischen Amplituden verglichen.

## 1.1 Notation

Im folgenden wird die van der Waerden Index Notation benutzt, das heißt die SO(2,2) Vektorindizes $m \in \{0,1,2,3\}$ werden aufgespalten in zwei SL(2,R) Indizes $\alpha \in \{+,-\}$ und $\dot\alpha \in \{\dot+,\dot-\}$. Dabei sind griechische Indizes immer Spinorindizes und lateinische Indizes sind Vektorindizes:

$$k_{\alpha\dot\alpha} = \sigma_{m\alpha\dot\alpha}k^m = \begin{pmatrix} k^0+k^3 & k^1+k^2 \\ k^1-k^2 & k^0-k^3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma_{m\alpha\dot\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und den $\sigma$-Matrizen mit oberen Spinorindizes

$$\bar\sigma_m{}^{\dot\alpha\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma_{m\beta\dot\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Spinorindizes werden mit dem antisymmetrischen $\varepsilon$-Tensor hoch- und runtergezogen, mit $\varepsilon^{+-} = \varepsilon^{\dot+\dot-} = 1$ gilt

$$\varepsilon^{+-} = -\varepsilon_{+-} = \varepsilon^{\dot+\dot-} = -\varepsilon_{\dot+\dot-} = 1.$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $k, q$ lautet

$$\eta_{mn}k^m q^n = k^{\alpha\dot\alpha}q_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}k^{\alpha\dot\alpha}q^{\beta\dot\beta}$$

mit der Metrik $\eta_{mn} = diag(-,+,-,+)$ .
Das Längenquadrat eines Vektors ist also

$$k^2 = \eta_{mn}k^m k^n = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}k^{\alpha\dot\alpha}k^{\beta\dot\beta} = -\det k^{\alpha\dot\alpha}.$$

Die Lorentzgeneratoren der beiden Gruppen SL(2,R) sind

$$\sigma_{mn\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{4}\left(\sigma_{m\alpha\dot\alpha}\bar\sigma_n{}^{\dot\alpha\beta} - \sigma_{n\alpha\dot\alpha}\bar\sigma_m{}^{\dot\alpha\beta}\right)$$

und

$$\bar\sigma_{mn}{}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \frac{1}{4}\left(\bar\sigma_m{}^{\dot\alpha\beta}\sigma_{n\beta\dot\beta} - \bar\sigma_n{}^{\dot\alpha\beta}\sigma_{m\beta\dot\beta}\right).$$

Im allgemeinen werden die Generatoren einer Darstellung $(j, j')$ der Lorentzalgebra $SL(2,R) \times SL(2,R)'$ mit $\Gamma_{mn}$ bezeichnet. In den Darstellungen $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ lauten diese Generatoren

$$\begin{aligned}
\Gamma_{mn}(k_\alpha) &= \sigma_{mn\alpha}{}^{\beta} k_\beta, \\
\Gamma_{mn}(k^{\dot\alpha}) &= \bar\sigma_{mn}{}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} k^{\dot\beta}, \\
\Gamma_{mn}(k^l) &= \delta_m{}^l k_n - \delta_n{}^l k_m.
\end{aligned}$$

In späteren Rechnungen werden für zwei Vektoren $k_A$ und $k_B$ folgende Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned}
a_{AB} &:= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} k_A^{+\dot\alpha} k_B^{+\dot\beta} \\
k_{AB} &:= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} k_A^{+\dot\alpha} k_B^{-\dot\beta} \\
s_{A+B} &:= (k_A + k_B)^2 = (k_A^2 + 2k_{AB} + 2k_{BA} + k_B^2) \\
&= 2(k_{AA} + k_{AB} + k_{BA} + k_{BB}).
\end{aligned}$$

# 2 Selbstduale Feldtheorien

## 2.1 SDYM

Die Forderung der Selbstdualität ist eine Einschränkung an den Feldstärketensor einer Yang-Mills Theorie. Im allgemeinen lautet die Wirkung einer reinen Eichtheorie:

$$S = tr \int d^4 x \mathcal{F}^{mn} \mathcal{F}_{mn}$$

mit dem Feldstärketensor

$$\mathcal{F}_{mn} = g^{-1} \left[ \mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n \right] = \partial_{[m} \mathcal{A}_{n]} + g \left[ \mathcal{A}_m, \mathcal{A}_n \right],$$

und der kovarianten Ableitung $\mathcal{D}_m = \partial_m + g\mathcal{A}_m$. Die eckigen (runden) Klammern an den Indizes bedeuten Antisymmetrisierung (Symmetrisierung). Das Eichfeld $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}^a_m T_a$ nimmt Werte in einer Lie-Algebra an. Die Definition von (Anti-)Selbstdualität ist

$$\mathcal{F}_{mn} = (-)\frac{1}{2} \varepsilon_{mn}{}^{kl} \mathcal{F}_{kl}.$$

Die Vektorindizes des Feldstärketensors werden durch Multiplikation mit den entsprechenden $\sigma$-Matrizen in Spinorindizes umgeschrieben. Da der Tensor antisymmetrisch in den beiden (Vektor-)Indizes ist, kann er zerlegt werden in

$$\mathcal{F}_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} = \epsilon_{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \mathcal{F}_{\alpha\beta},$$

mit dem in $(\alpha\beta)$ symmetrischen Anteil

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_{(\alpha}{}^{\dot{\gamma}} \mathcal{A}_{\beta)\dot{\gamma}} + g \left[ \mathcal{A}_{\alpha}{}^{\dot{\gamma}}, \mathcal{A}_{\beta\dot{\gamma}} \right] = \epsilon_{\beta\gamma} \mathcal{F}^{mn} \sigma_{mn\alpha}{}^{\gamma}$$

und dem in $(\dot{\alpha}\dot{\beta})$ symmetrischen Anteil

$$\mathcal{F}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \partial^{\gamma}{}_{(\dot{\alpha}} \mathcal{A}_{\gamma\dot{\beta})} + g \left[ \mathcal{A}^{\gamma}{}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{A}_{\gamma\dot{\beta}} \right] = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \mathcal{F}^{mn} \bar{\sigma}_{mn}{}^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}.$$

Diese beiden Anteile des Feldstärketensors sind gerade der selbstduale und antiselbstduale Anteil. Selbstdualität bedeutet also

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = 0,$$

dies sind drei Gleichungen, die nun gelöst werden. Zunächst wird für die Konnektion Lichtkegeleichung $\mathcal{A}_{+\dot{+}} = 0$ gewählt. Die Selbstdualitätsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{++} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\partial_+{}^{\dot{\gamma}} \mathcal{A}_{+\dot{\gamma}} + g \left[ \mathcal{A}_+{}^{\dot{\gamma}}, \mathcal{A}_{+\dot{\gamma}} \right] = 0; \\
&\qquad \partial_{+\dot{+}} \mathcal{A}_{+\dot{-}} = 0, \text{ da bereits } \mathcal{A}_{+\dot{+}} = 0 \text{ gesetzt wurde;} \\
&\qquad \text{wähle nun } \mathcal{A}_{+\dot{-}} = 0, \text{ damit ist } \mathcal{A}_+{}^{\dot{\gamma}} = 0; \\
\mathcal{F}_{+-} = \mathcal{F}_{-+} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left( \partial_+{}^{\dot{\gamma}} \mathcal{A}_{-\dot{\gamma}} + \partial_-{}^{\dot{\gamma}} \mathcal{A}_{+\dot{\gamma}} \right) + g \left[ \mathcal{A}_+{}^{\dot{\gamma}}, \mathcal{A}_{-\dot{\gamma}} \right] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_+^{\dot\gamma}\mathcal{A}_{-\dot\gamma} = 0, && \text{diese Gleichung ist erfüllt durch} \\
& \mathcal{A}_{-\dot\gamma} = \partial_{+\dot\gamma}\phi_{--}, && \text{mit dem Lie-Algebra-} \\
& \text{wertigen Präpotential } \phi_{--}; \\
\mathcal{F}_{--} = 0 \quad \Rightarrow \quad & 2\partial_-^{\dot\gamma}\mathcal{A}_{-\dot\gamma} + g\left[\mathcal{A}_-^{\dot\gamma}, \mathcal{A}_{-\dot\gamma}\right] = 0; \\
& \text{dies ist die Leznov Bewegungsgleichung [7],[8]} \\
& 2\partial_-^{\dot\gamma}\partial_{+\dot\gamma}\phi_{--} + g\left[\partial_+^{\dot\gamma}\phi_{--}, \partial_{+\dot\gamma}\phi_{--}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Die Indizes des Skalarfeldes $\phi_{--}$ geben seine Helizität $j = -1$ an. Mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators $\phi_{++}$ der Helizität $j = 1$ läßt sich nun eine Wirkung formulieren, die die obige klassische Bewegungsgleichung reproduziert [14]:

$$S \;=\; tr\int d^4x\left(\phi_{++}\Box\phi_{--} + \frac{g}{2}\phi_{++}\left[\partial^{+\dot\gamma}\phi_{--}, \partial^+_{\dot\gamma}\phi_{--}\right]\right). \tag{1}$$

Diese Wirkung läßt sich von Helizitäten $j = \pm 1$ auf unendlich viele $\phi_j$ mit beliebigen ganzzahligen Helizitäten $j \in Z$ erweitern [3]:

$$S \;=\; tr\int d^4x\left(\sum_{J=0}\frac{1}{2}\phi_j\Box\phi_{-j} + \frac{g}{6}\sum_{J=1}\phi_{j_1}\left[\partial^{+\dot\gamma}\phi_{j_2}, \partial^+_{\dot\gamma}\phi_{j_3}\right]\right). \tag{2}$$

Dabei ist $J$ die Summe der einzelnen Helizitäten der Präpotentiale. Die Wirkungen (1),(2) sind Alternativen zur urprünglichen Leznov Wirkung [8]

$$S \;=\; tr\int d^4x\left(\frac{1}{2}\phi_{--}\Box\phi_{--} + \frac{g}{6}\phi_{--}\left[\partial^{+\dot\gamma}\phi_{--}, \partial^+_{\dot\gamma}\phi_{--}\right]\right).$$

In Zukunft wird das Präpotential $\phi$ der Einfachheit halber als Gluon bezeichnet. Zur Berechnung der Streuamplituden in dieser Arbeit werden nur Gluonen mit Helizitäten $j = \pm 1$ betrachtet. Ein Propagator hat an einem Ende Helizität $+1$, an dem anderen Ende $-1$ und der Vertex hat eine Gesamthelizität $J = 1$. Daher ist es nicht möglich, Streudiagramme mit mehr als einem Loop zu konstruieren. Die quantisierte Theorie wird also bereits vollständig durch die Einloop Ordnung festgelegt.

Zum Vergleich mit der Stringtheorie werden an dieser Stelle ein paar Sätze über Streuamplituden des N=2 Strings zitiert [3]. Eine Amplitude hat für eine feste Anzahl $n_c$ geschlossener und $n_o$ offener Strings folgende Form:

$$A = \sum_J\sum_{c=-J}^{c=+J}\binom{2J}{J+c}g^J\sin^{J-c}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{J+c}\left(\frac{\theta}{2}\right)A_{J,c}.$$

Dabei ist $J = 2n_c + n_o - 2\chi$, mit der Eulerzahl $\chi$ der Weltfläche des Strings, $c$ ist die Instantonzahl des U(1) Bündels auf der Weltfläche, $\theta$ ist der Instanton Winkel und $g$ ist die Kopplungskonstante des offenen Strings. $A_{J,c}$ ist die über die Moduli integrierte Korrelationsfunktion der Vertexoperatoren. Die Kopplungskonstante und der Winkel ändern sich unter globalen $SO(2,2)$ Transformationen, daher kann für alle Rechnungen $g = 1$ und $\theta = 0$ gesetzt werden. Damit liefert $c = J$ den einzigen nichtverschwindenden Beitrag, und die Amplitude lautet $A = \sum_J A_{J,J}$. Die Zahl $J$ wird auch als Helizität bezeichnet. Für die Streuung offener Strings sind alle tree-niveau Amplituden ($\chi = 1$ für offene Strings) bekannt [4]:

$$A_{1,1}^{n_o=3} = f^{ABC} a_{AB} \text{ und } A_{J=n_o-2}^{n_o\geq 4} = 0.$$

Dabei ist $f^{ABC}$ die Strukturkonstante einer Lie-Algebra mit den Indizes $ABC$ der ein- bzw. auslaufenden Stringzustände ( $a_{AB}$ siehe Notation). Die nichtverschwindende Dreipunktfunktion der Stringtheorie ist nicht invariant unter der vollen Lorentzgruppe $SO(2,2)$, sondern nur unter der kleineren Gruppe $GL(1,R) \times SL(2,R)$.

Die Dreipunktfunktion der Wirkung (2) ist identisch mit der Stringtheorie Dreipunktfunktion für $\theta = 0$. Alle Amplituden der Wirkung (2) mit mehr als drei Beinen sind Null, dies wird in dieser Arbeit bewiesen. SDYM wird ist also die effektive Feldtheorie des offenen N=2 Strings. Die "Helizitäten" $J$ der Stringtheorie werden mit den Helizitäten der Gluonen identifiziert, wobei $J$ die Summe der Helizitäten $j$ der einzenlen Felder an jedem Vertex ist.

Eine alternative Parametrisierung der selbstdualen Eichfelder führt zur Yang Wirkung als effektive Feldtheorie des N=2 Strings [1]. Die Yang Bewegungsgleichung erhält man ebenfalls aus der Forderung der Sebstdualität $\mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0$. In Lichtkegeleichung $\mathcal{A}^{++} = 0$ werden die Gleichungen hier folgendermaßen gelöst:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{++} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{A}^{++} = 0; \\
\mathcal{F}^{--} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{wähle für } \mathcal{A}^{-\dot\alpha} \text{ reine Eichung } \mathcal{A}^{-\dot\alpha} = e^{-g\phi}\partial^{-\dot\alpha}e^{g\phi}: \\
&\quad\ \partial^{(-\dot\alpha}\left(e^{-g\phi}\partial^{-)}_{\dot\alpha}e^{g\phi}\right) + \left[e^{-g\phi}\partial^{-\dot\alpha}e^{g\phi}, e^{-g\phi}\partial^{-}_{\dot\alpha}e^{g\phi}\right] = 0 \\
&\quad\ 2\partial^{-\dot\alpha}\left(e^{-g\phi}\partial^{-}_{\dot\alpha}e^{g\phi}\right) + 2e^{-g\phi}\left(\partial^{-\dot\alpha}e^{g\phi}\right)e^{-g\phi}\left(\partial^{-}_{\dot\alpha}e^{g\phi}\right) = 0 \\
&\quad\ 2\left(\partial^{-\dot\alpha}e^{-g\phi}\right)\left(\partial^{-}_{\dot\alpha}e^{g\phi}\right) - 2\left(\partial^{-\dot\alpha}e^{-g\phi}\right)e^{g\phi}e^{-g\phi}\left(\partial^{-}_{\dot\alpha}e^{g\phi}\right) = 0, \\
&\quad\ \text{die Gleichung ist also erfüllt;} \\
\mathcal{F}^{+-} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \partial^{(+\dot\alpha}\mathcal{A}^{-)}_{\dot\alpha} = 0; \\
&\quad\ \text{dies ist die Yang-Bewegungsgleichung} \\
&\quad\ \partial^{(+\dot\alpha}\left(e^{-g\phi}\partial^{-)}_{\dot\alpha}e^{g\phi}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Man erhält sie aus der nichtpolynomialen Wirkung

$$S = tr\int d^4x\left[\left(\partial^{(+\dot\alpha}\phi\right)\left(\partial^{-)}_{\dot\alpha}\phi\right) + g\phi\left(\partial^{(+\dot\alpha}\phi\right)\left(\partial^{-)}_{\dot\alpha}\phi\right) + \mathcal{O}(\phi^4)\right],$$

oder einer Erweiterung dieser Wirkung mit Lagrange-Multiplikatoren [14]. Die Yang Wirkung reproduziert die entsprechenden Amplituden der Stringtheorie jedoch nur für den $c = 0$ Sektor [1]. Um die volle Stringamplitude zu berechnen, muß allerdings über die Instantonzahl summiert werden. Die Leznov Wirkung reproduziert die Streuamplituden der Stringtheorie für $c = J$, die Summation über $c$ entfällt also und man erhält sofort die volle Stringamplitude. Die Beiträge zu einer Streuamplitude aus den verschiedenen Instantonzahl Sektoren lassen sich durch Lorentztransformationen ineinander überführen. Verschwindende Streuamplituden der einen Wirkung bedeuten daher natürlich verschwindende Amplituden der anderen Wirkung.

## 2.2 SDG

### 2.2.1 SDG als Eichtheorie

Gravitation kann äquivalent zu Yang-Mills Theorien als Eichtheorie betrachtet werden, die Eichgruppe ist dabei die Lorentzgruppe. Damit später SDG an SDYM gekoppelt werden kann, werden alle Vektoren bezüglich allgemeiner Koordinatentransformationen mit Hilfe des Vierbeinformalismus in Lorentzvektoren umgewandelt. Die Vierbeine sind, zunächst mit Vektorindizes, folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} g^{mn} &= \eta^{ab} E_a{}^m E_b{}^n; \\ \eta_{ab} &= g_{mn} E_a{}^m E_b{}^n. \end{aligned}$$

Dabei sind $a, b$ flache und $m, n$ gekrümmte Indizes, $\eta_{ab}$ und $g_{mn}$ sind die jeweiligen Metriken. Das inverse Vierbein ist

$$E^a_{\ m} = \eta^{ab} g_{mn} E_b{}^n.$$

Selbstduale Gravitation bedeutet, analog zu SDYM, daß der Riemanntensor seldstdual ist. In Riemannscher Geometrie verschwindet die Torsion, dies ergibt zusätzliche Gleichungen. Riemanntensor und Torsion werden aus dem Kommutator zweier kovarianter Ableitungen berechnet. Die kovariante Ableitung enthält die Spinkonnektion $w_a$ [11], die Werte in der Lorentzalgebra mit Generatoren $\Gamma^{bc}$ annimmt:

$$\mathcal{D}_a = E_a{}^m \partial_m + w_{abc}\Gamma^{bc} = E_a + w_a.$$

Der Kommutator lautet dann

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] = \mathcal{R}_{ab}{}^{cd}\Gamma_{cd} + \mathcal{T}_{ab}{}^c \mathcal{D}_c = \mathcal{R}_{ab} + \mathcal{T}_{ab},$$

mit dem Riemanntensor

$$\mathcal{R}_{ab}{}^{cd} = E_{[a}{}^m \partial_m w_{b]}{}^{cd} + w_{[a}{}^{ce} w_{b]e}{}^d - E_{[a}{}^m \left(\partial_m E_{b]}{}^n\right) E_n{}^e w_e{}^{cd}$$

und der Torsion

$$\mathcal{T}_{ab}{}^c = w_{[ab]}{}^c - E_{[a}{}^m \left(\partial_m E_{b]}{}^n\right) E_n{}^c.$$

Beide Tensoren sind antisymmetrisch in den ersten beiden Indizes. In Spinorschreibweise $\mathcal{R}_{ab} \to \mathcal{R}_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}$ und $\mathcal{T}_{ab} \to \mathcal{T}_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}$ können deshalb der Riemanntensor und die Torsion folgendermaßen in eine selbstduale und eine antiselbstduale Komponente zerlegt werden :

$$\mathcal{R}_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)} + \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\mathcal{R}_{(\alpha\beta)}$$

mit dem selbstdualen Anteil

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)} &= E^\alpha_{\ (\dot\alpha}{}^m \partial_m w_{\alpha\dot\beta)} + w^\alpha_{\ (\dot\alpha} w_{\alpha\dot\beta)} \\ &\quad -2E^\alpha_{\ (\dot\alpha}{}^m \left(\partial_m E_{\alpha\dot\beta)}{}^n\right) E_n{}^{\gamma\dot\gamma} w_{\gamma\dot\gamma} \end{aligned}$$

und dem antiselbstdualen Anteil

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{(\alpha\beta)} &= E_{(\alpha}{}^{\dot\alpha\ m}\partial_m w_{\beta)\dot\alpha} + w_{(\alpha}{}^{\dot\alpha} w_{\beta)\dot\alpha} \\ &\quad -2E_{(\alpha}{}^{\dot\alpha\ m}\left(\partial_m E_{\beta)\dot\alpha}{}^{n}\right) E_n{}^{\ \varepsilon\dot\varepsilon} w_{\gamma\dot\gamma}.\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck muß für SDG verschwinden. Die beiden Komponenten des Riemanntensors

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{(\alpha\beta)} &= \mathcal{R}_{(\alpha\beta)\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}\Gamma^{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}, \\ \mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)} &= \mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}\Gamma^{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}\end{aligned}$$

werden nun zunächst in ihre irreduziblen Teile zerlegt. Die irreduziblen Anteile sind gerade diejenigen, welche separat in den gepunkteten und ungepunkteten Indizes symmetrisch sind [11]. Der selbstduale und antiselbstduale Teil des Riemanntensors zerlegen sich folgendermaßen (siehe Anhang A):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}\Gamma^{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta} &= C_{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)}\Gamma^{\dot\gamma\dot\delta} + R_{(\gamma\delta)(\dot\alpha\dot\beta)}\Gamma^{\gamma\delta} + R\Gamma_{\dot\alpha\dot\beta}, \\ \mathcal{R}_{(\alpha\beta)\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}\Gamma^{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta} &= C_{(\alpha\beta\gamma\delta)}\Gamma^{\gamma\delta} + R_{(\alpha\beta)(\dot\gamma\dot\delta)}\Gamma^{\dot\gamma\dot\delta} + R\Gamma_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

wobei $\Gamma^{\gamma}{}_{\delta}$ und $\Gamma_{\dot\gamma}{}^{\dot\delta}$ die Lorentzgeneratoren der jeweiligen Gruppen SL(2,R) sind. $C_{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)}$ ($C_{(\alpha\beta\gamma\delta)}$) sind der selbstduale (antiselbstduale) Anteil des Weyl-Tensors, $R_{(\gamma\delta)(\dot\alpha\dot\beta)}$ ist der spurfreie Riccitensor, $R$ ist der Ricciskalar. Wenn der antiselbstduale Anteil verschwindet, so ist jeder seiner irreduziblen Beiträge Null, und es verschwinden auch die beiden letzten Beiträge des selbstdualen Teils. Der Riemanntensor nimmt dann nur Werte in der Algebra mit gepunkteten Indizes an. In Richtung der SL(2,R) Generatoren mit ungepunkteten Indizes ist der Raum flach und alle auftretenden ungepunkteten Indizes sind flache Indizes. Ein gekrümmter Index $m$ wird in "Spinornotation" mit $\beta\dot\mu$ bezeichnet, um mit dem flachen Index $\beta$ zu verdeutlichen, daß zwei Raumzeitrichtungen flach sind. Ein gekrümmter Vektorindex kann allerdings nicht in zwei Spinorindizes aufgespalten werden, da die Gruppe der allgemeinen Koordinatentransformationen GL(4,R) keine endlich dimensionale Spinordarstellung hat [10]. Diese Notation ist daher nur symbolisch zu verstehen. Die Spinkonnektion nimmt nur Werte in der gepunkteten Algebra an, und die kovariante Ableitung lautet nun

$$\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha} = E_{\alpha\dot\alpha}{}^{\beta\dot\mu}\partial_{\beta\dot\mu} + w_{\alpha\dot\alpha\dot\gamma\dot\delta}\Gamma^{\dot\gamma\dot\delta}.$$

Die Selbstdualitätsgleichungen werden ähnlich wie in der selbstdualen Yang-Mills Theorie gelöst. Die Gleichungen lauten bei verschwindender Torsion

$$\begin{aligned} 1)\quad \left[\mathcal{D}_{+\dot\alpha}, \mathcal{D}_{+\dot\beta}\right] &= 0, \\ 2)\quad \left[\mathcal{D}_{+\dot\alpha}, \mathcal{D}_{-\dot\beta}\right] &= -\mathcal{R}_{\dot\alpha\dot\beta}, \\ 3)\quad \left[\mathcal{D}_{-\dot\alpha}, \mathcal{D}_{-\dot\beta}\right] &= 0.\end{aligned}$$

1): Die erste Gleichung wird gelöst durch

$$\begin{aligned} E_{+\dot\alpha+}{}^{\dot\mu} = 0,\ E_{+\dot\alpha-}{}^{\dot\mu} = -\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\mu},\ w_{+\dot\alpha} = 0 \\ \Rightarrow\quad \mathcal{D}_{+\dot\alpha} = \partial_{+\dot\alpha}.\end{aligned}$$

2): Die zweite Gleichung ist

$$\begin{aligned}
\left[\partial_{+\dot\alpha}, \mathcal{D}_{-\dot\beta}\right] &= \left[\partial_{+\dot\alpha}, E_{-\dot\beta+}{}^{\dot\nu}\partial_{-\dot\nu} - E_{-\dot\beta-}{}^{\dot\nu}\partial_{+\dot\nu} + w_{-\dot\beta}\right] \\
&= \left(\partial_{+\dot\alpha}E_{-\dot\beta+}{}^{\dot\nu}\right)\partial_{-\dot\nu} - \left(\partial_{+\dot\alpha}E_{-\dot\beta-}{}^{\dot\nu}\right)\partial_{+\dot\nu} + \partial_{+\dot\alpha}w_{-\dot\beta} - w_{-\dot\beta\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}\partial_{+\dot\gamma}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_{-\dot\nu} &= E_{-\dot\nu}{}^{\gamma\dot\gamma}\left(\mathcal{D}_{\gamma\dot\gamma} - w_{\gamma\dot\gamma}\right) \\
&= E_{-\dot\nu+}{}^{\dot\gamma}\mathcal{D}_{-\dot\gamma} - E_{-\dot\nu-}{}^{\dot\gamma}\partial_{+\dot\gamma} - E_{-\dot\nu+}{}^{\dot\gamma}w_{-\dot\gamma}, \\
\partial_{+\dot\nu} &= \delta_{\dot\nu}{}^{\dot\gamma}\partial_{+\dot\gamma}.
\end{aligned}$$

Die obige Gleichung lautet dann

$$\begin{aligned}
\left[\partial_{+\dot\alpha}, \mathcal{D}_{-\dot\beta}\right] &= \left(\partial_{+\dot\alpha}E_{-\dot\beta+}{}^{\dot\nu}\right)E_{-\dot\nu+}{}^{\dot\gamma}\mathcal{D}_{-\dot\gamma} \\
&\quad + \Big[-\left(\partial_{+\dot\alpha}E_{-\dot\beta+}{}^{\dot\nu}\right)E_{-\dot\nu-}{}^{\dot\gamma} - \left(\partial_{+\dot\alpha}E_{-\dot\beta+}{}^{\dot\nu}\right)\delta_{\dot\nu}{}^{\dot\gamma} - w_{-\dot\beta\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}\Big]\partial_{+\dot\gamma} \\
&\quad - \left(\partial_{+\dot\alpha}E_{-\dot\beta+}{}^{\dot\nu}\right)E_{-\dot\nu+}{}^{\dot\gamma}w_{-\dot\gamma} + \partial_{+\dot\alpha}w_{-\dot\beta}.
\end{aligned}$$

Die beiden Anteile, die an eine kovariante Ableitung multipliziert werden sind Torsionsanteile und müssen verschwinden. Also gilt

$$\partial_{+\dot\alpha}E_{-\dot\beta+}{}^{\dot\nu} = 0,$$

was erfüllt wird durch

$$E_{-\dot\beta+}{}^{\dot\nu} = \delta_{\dot\beta}{}^{\dot\nu}.$$

Aufgrund dieser Wahl des Vierbeins können nun alle gekrümmten durch flache Indizes ersetzt werden. Die kovariante Ableitung hat jetzt die Form

$$\mathcal{D}_{-\dot\alpha} = \partial_{-\dot\alpha} - E_{-\dot\alpha-}{}^{\dot\gamma}\partial_{+\dot\gamma} + w_{-\dot\alpha}.$$

Da es jetzt nur noch flache Indizes gibt, ist nun auch die Spinorschreibweise gerechtfertigt. Der verbleibende Torsionsbeitrag verknüpft das Vierbein mit der Spinkonnektion:

$$\partial_{+\dot\alpha}E_{-\dot\beta-}{}^{\dot\gamma} = -w_{-\dot\beta\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}.$$

Übrig bleibt von 2) noch der Krümmungsterm

$$\begin{aligned}
-\mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)} &= \partial_{+\dot\alpha}w_{-\dot\beta} \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_{+(\dot\alpha}w_{-\dot\beta)} + \partial_{+[\dot\alpha}w_{-\dot\beta]}\right).
\end{aligned}$$

Der in $\{\dot\alpha, \dot\beta\}$ antisymmetrische Teil muß aufgrund der Selbstdualität verschwinden. Dies ergibt die Forderung

$$\partial_{+[\dot\alpha}w_{-\dot\beta]} = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn die Spinkonnektion von der Form

$$w_{-\dot\beta} \;=\; \partial_{+\dot\beta}\phi_{--}$$

ist, mit $\phi_{--} = \phi_{--\dot\gamma\dot\delta}\Gamma^{\dot\gamma\dot\delta} \in sl(2,R)$. Der verbleibende Ausdruck

$$\mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)} \;=\; -\partial_{+\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta}\phi_{--}$$

ist der nichtverschwindende selbstduale Anteil des Riemanntensors. Dieser Term bleibt tatsächlich übrig, wenn der im Anhang berechnete selbstduale Anteil des Riemanntensors explizit mit den getroffenen Einschränkungen und der Forderung verschwindender Torsion aufgeschrieben wird.

3): Die dritte Gleichung lautet

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{D}_{-\dot\alpha},\mathcal{D}_{-\dot\beta}\right] &= \left(\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}\delta_{\dot\beta]}{}^{\dot\nu}\right)\partial_{-\dot\nu} + \left(\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}E_{-\dot\beta]-}{}^{\dot\gamma} - w_{-[\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\epsilon}E_{-\dot\beta]-}{}^{\dot\epsilon}\right)\partial_{+\dot\gamma} \\
&\quad + \mathcal{D}_{-[\dot\alpha}w_{-\dot\beta]} \\
&= \left(\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}\delta_{\dot\beta]}{}^{\dot\nu}\right)E_{-\dot\nu+}{}^{\dot\gamma}\mathcal{D}_{-\dot\gamma} \\
&\quad + \left[-\left(\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}\delta_{\dot\beta]}{}^{\dot\nu}\right)E_{-\dot\nu-}{}^{\dot\gamma} + \left(\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}E_{-\dot\beta]-}{}^{\dot\gamma} - w_{-[\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\epsilon}E_{-\dot\beta]-}{}^{\dot\epsilon}\right)\right]\partial_{+\dot\gamma} \\
&\quad + \mathcal{D}_{-[\dot\alpha}w_{-\dot\beta]} - \left(\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}\delta_{\dot\beta]}{}^{\dot\nu}\right)E_{-\dot\nu+}{}^{\dot\gamma}w_{+\dot\gamma} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die Terme mit kovarianten Ableitungen rechts sind Torsionsanteile und müssen verschwinden. Der erste Term lautet

$$\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}\delta_{\dot\beta]}{}^{\dot\nu} = \underbrace{\partial_{-[\dot\alpha}\delta_{\dot\beta]}{}^{\dot\nu}}_{=0} - \underbrace{E_{-[\dot\alpha-}{}^{\dot\gamma}\partial_{-\dot\gamma}\delta_{\dot\beta]}{}^{\dot\nu}}_{=0} + w_{-[\dot\alpha\dot\beta]}{}^{\dot\gamma}\delta_{\dot\gamma}{}^{\dot\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad w_{-[\dot\alpha\dot\beta]}{}^{\dot\gamma} \;=\; 0.$$

Wegen $w_{-\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} = \partial_{+\dot\alpha}\phi_{--\dot\beta\dot\gamma}$ wird die Gleichung gelöst durch

$$w_{-\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} = \partial_{+\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta}\varphi_{---\dot\gamma}.$$

Übrig bleiben nun aus 3) die beiden Gleichungen für verschwindende Torsion und Krümmung

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}E_{-\dot\beta]-}{}^{\dot\gamma} - w_{-[\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\epsilon}E_{-\dot\beta]-}{}^{\dot\epsilon} = 0, \\
&\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}w_{-\dot\beta]} = 0.
\end{aligned}$$

Es wird nun gezeigt, daß diese Gleichungen äquivalent für die hier getroffene Wahl der Spinkonnektion sind. Da die $sl(2,R)$ Matrizen $w_{-\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$ spurfrei sind, gilt

$$w_{-\dot\alpha\dot\beta}{}^{\dot\beta} \;=\; 0,$$

was die Existenz eines skalaren Präpotential garantiert,

$$w_{-\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} = \partial_{+\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta}\partial_{+\dot\gamma}\psi_{----}.$$

Mit dieser Form der Spinkonnektion und $E_{-\dot\alpha-\dot\beta} = -\partial_{+\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta}\psi_{----}$ gilt für den Krümmungsterm

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}w_{-\dot\beta]\dot\gamma\dot\delta} &= \mathcal{D}_{-[\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta]}\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+\dot\delta}\psi_{----} \\
&= -\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}\partial_{+\dot\gamma}E_{-\dot\beta]-\dot\delta} \\
&= -\partial_{+\dot\gamma}\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}E_{-\dot\beta]-\dot\delta} + \mathcal{R}_{(\dot\gamma[\dot\alpha)\dot\beta]}{}^{\dot\epsilon}E_{-\dot\epsilon-\dot\delta} + \mathcal{R}_{(\dot\gamma[\dot\alpha)\dot\delta}{}^{\dot\epsilon}E_{-\dot\beta]-\dot\epsilon}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Gleichung $\left[\mathcal{D}_{-\dot\alpha}, \partial_{+\dot\beta}\right] = \mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)}$ benutzt.
Mit $\mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)\dot\gamma\dot\delta} = -\partial_{+\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta}\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+\dot\delta}\psi_{----}$ eingesetzt erhält man dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}w_{-\dot\beta]\dot\gamma\dot\delta} &= -\partial_{+\dot\gamma}\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}E_{-\dot\beta]-\dot\delta} - \partial_{+\dot\gamma}\partial_{+[\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta]}\partial^{+\dot\epsilon}\psi_{----}E_{-\dot\epsilon-\dot\delta} \\
&\quad -\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+[\dot\alpha}\partial_{+\dot\delta}\partial_{+}{}^{\dot\epsilon}\psi_{----}E_{-\dot\beta]-\dot\epsilon} \\
&= -\partial_{+\dot\gamma}\left(\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}E_{-\dot\beta]-\dot\delta} + \partial_{+[\dot\alpha}\partial_{+\dot\delta}\partial_{+}{}^{\dot\epsilon}\psi_{----}E_{-\dot\beta]-\dot\epsilon}\right) \\
&= -\partial_{+\dot\gamma}\left(\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}E_{-\dot\beta]-\dot\delta} + w_{-[\dot\alpha\dot\delta}{}^{\dot\epsilon}E_{-\dot\beta]-\dot\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Dies ist bis auf das Vorzeichen und einer totalen Ableitung gerade der Torsionsterm. Damit bleibt nur noch eine Gleichung übrig, dies ist die Bewegungsgleichung

$$\mathcal{D}_{-[\dot\alpha}E_{-\dot\beta]-\dot\delta} + w_{-[\dot\alpha\dot\delta}{}^{\dot\epsilon}E_{-\dot\beta]-\dot\epsilon} \;\equiv\; \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\left(\mathcal{D}_{-}{}^{\dot\gamma}E_{-\dot\gamma-\dot\delta} + w_{-}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\delta}{}^{\dot\epsilon}E_{-\dot\gamma-\dot\epsilon}\right) = 0.$$

Das Vielbein und die Konnektion werden nun durch das Präpotential $\psi_{----}$ ausgedrückt. Damit erhält man schließlich die sogenannte zweite Plebanski Bewegungsgleichung [9]

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{-}{}^{\dot\gamma}E_{-\dot\gamma-\dot\delta} + w_{-}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\delta}{}^{\dot\epsilon}E_{-\dot\gamma-\dot\epsilon} &= \partial_{-}{}^{\dot\gamma}E_{-\dot\gamma-\dot\delta} - E_{-}{}^{\dot\gamma}{}_{-}{}^{\dot\epsilon}\partial_{+\dot\epsilon}E_{-\dot\gamma-\dot\delta} \\
&= -\partial_{-}^{\dot\gamma}\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+\dot\delta}\psi_{----} \\
&\quad -\left(\partial_{+}^{\dot\gamma}\partial_{+}^{\dot\epsilon}\psi_{----}\right)\left(\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+\dot\epsilon}\partial_{+\dot\delta}\psi_{----}\right) \\
&= -\partial_{-}^{\dot\gamma}\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+\dot\delta}\psi_{----} \\
&\quad -\frac{1}{2}\partial_{+\dot\delta}\left(\partial_{+}^{\dot\gamma}\partial_{+}^{\dot\epsilon}\psi_{----}\right)\left(\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+\dot\epsilon}\psi_{----}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_{-}^{\dot\gamma}\partial_{+\dot\gamma}\psi_{----} + \frac{1}{2}\left(\partial_{+}^{\dot\gamma}\partial_{+}^{\dot\epsilon}\psi_{----}\right)\left(\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+\dot\epsilon}\psi_{----}\right) \;=\; 0.$$

Die zu dieser Bewegungsgleichung gehörende Wirkung soll auf tree-niveau die Streuamplituden des geschlossenen N=2 Strings für $\theta = 0$ und $c = J$ reproduzieren. Wie im Kapitel über SDYM kann für die Bewegungsgleichung durch Einführung eines Lagrange-Multiplikators $\psi_{++++}$ eine Wirkung angegeben werden. Jeder Index $\pm$ eines Feldes $\psi$ steht für einen Helizitätsbeitrag von $\pm\frac{1}{2}$. Aus der Stringtheorie bekannt [3] ist die dimensionsbehaftete Kopplungskonstante $\kappa = \sqrt{\alpha'} g^2$ mit der inversen Stringspannung $\alpha'$ . Die Wirkung lautet dann [3]

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \sum_{J=0} \psi_j \Box \psi_{-j} + \frac{\kappa}{6} \sum_{J=2} \psi_{j_1} \left( \partial_+^{\dot{\alpha}} \partial_+^{\dot{\beta}} \psi_{j_2} \right) \left( \partial_{+\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\beta}} \psi_{j_3} \right) \right],$$

mit $j, j_1, j_2, j_3 \in \{\pm 2\}$. Die Dreipunktfunktion geschlossener Strings mit $J = 2$ und $c = J$ lautet

$$A_{2,2}^{n_c=3} = \kappa^2 (a_{AB})^2.$$

Die obige Wirkung reproduziert diese Amplitude. Bekannt ist, daß ab der Vierpunktfunktion alle tree-level Amplituden geschlossener Strings verschwinden [4]:

$$A_{J=2(n_c-2)}^{n_c \geq 0} = 0.$$

Es wird in dieser Arbeit gezeigt, daß auf tree-level alle mit der obigen Wirkung berechneten feldtheoretischen Streuamplituden verschwinden. Damit handelt es sich um die effektive Feldtheorie des geschlossenen N=2 Strings.

### 2.2.2 SDG ist ricciflacher Kählerraum

Es existiert ein Theorem von Atiyah, Hitchin und Singer [1], nach dem in vier Dimensionen eine Mannigfaltigkeit genau dann selbstdual ist, wenn der Raum eine Kählerform besitzt und ricciflach ist. Gegeben sei nun also ein 2+2-dimensionaler Riemannraum mit einem verschwindenden Riccitensor und einer Kählerform. Zur Vereinfachung werden komplexe Koordinaten $z_C^a, \bar{z}_C^{\bar{a}}$ eingeführt [12]:

$$z_C^1 = z^0 + iz^3, \quad \bar{z}_C^{\bar{1}} = z^0 - iz^3, \quad z_C^2 = z^1 + iz^2, \quad \bar{z}_C^{\bar{2}} = z^1 - iz^2.$$

Der Index $C$ der komplexen Koordinaten wird im folgenden weggelassen. Die hier betrachtete Kählermetrik ist eine pseudo-euklidische Metrik plus einem Term, der die Krümmung des Raumes beschreibt:

$$\begin{aligned} g_{a\bar{b}} &= \frac{\partial^2 K}{\partial z^a \partial \bar{z}^{\bar{b}}} = \eta_{a\bar{b}} + \partial_a \bar{\partial}_{\bar{b}} \psi, \\ g_{ab} &= g_{\bar{a}\bar{b}} = 0. \end{aligned}$$

Die Metrik wird bestimmt durch das Kählerpotential

$$K = \sum_{a=1}^{2} z^a \bar{z}^{\bar{a}} + \psi,$$

welches eine beliebige skalare Funktion $\psi(z, \bar{z})$ beinhaltet. Die flache Metrik lautet in komplexen Koordinaten

$$\eta_{a\bar{b}} = \eta_{\bar{b}a} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_{ab} = \eta_{\bar{a}\bar{b}} = 0.$$

Der Riccitensor läßt sich für Mannigfaltigkeiten mit einer Kählermetrik auf eine spezielle Form bringen. Nullsetzen des Riccitensors führt dann auf eine Gleichung für $\psi$, die erste Plebanski Gleichung.
Der Riemanntensor, aus dem sich durch Kontraktion zweier Indizes der Riccitensor ergibt, lautet im allgemeinen (in rellen Koordinaten)

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda} = \partial_\rho \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu}.$$

Das Christoffelsymbol $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$ läßt sich eindeutig festlegen durch die beiden zusätzlichen Forderungen [6]

$$\begin{aligned} &\partial_\nu g_{\rho\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} g_{\mu\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = 0 \quad \text{(kov. Ableitung der Metrik ist Null)}, \\ &T^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\right) = 0 \quad \text{(Torsion ist Null)}. \end{aligned}$$

Damit lautet das Christoffelsymbol

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\left(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}\right).$$

In komplexen Koordinaten und für eine Metrik der Form $g_{a\bar{b}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^a \partial \bar{z}^b}$ läßt sich dies umformen in

$$\Gamma^{a}{}_{cd} \;=\; \Gamma^{a}{}_{dc} = g^{a\bar{b}} \partial_c g_{\bar{b}d}; \quad \Gamma^{a}{}_{\bar{c}d} = \Gamma^{a}{}_{d\bar{c}} = 0.$$

Entsprechend lauten die komplex konjugierten Terme, diese werden der Einfachheit halber weggelassen. Die einzigen nichtverschwindenden Komponenten des Riemanntensors sind dann

$$R^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{c}d} = -\partial_d \Gamma^{\bar{a}}{}_{\bar{b}\bar{c}}, \quad R^{a}{}_{b\bar{c}d} = \bar{\partial}_{\bar{c}} \Gamma^{a}{}_{bd}.$$

Damit kann nun der Riccitensor umgeformt werden [12]:

$$\begin{aligned} R_{\bar{b}d} &= R^{\bar{a}}{}_{\bar{b}\bar{a}d} = -\partial_d \Gamma^{\bar{a}}{}_{\bar{b}\bar{a}} = -\partial_d\left(g^{\bar{a}n}\bar{\partial}_{\bar{b}} g_{n\bar{a}}\right) = -\partial_d \bar{\partial}_{\bar{b}} \mathrm{tr} \log|g| \\ &= -\partial_d \bar{\partial}_{\bar{b}} \log|\det g|. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn der Logarithmus die Summe zweier Funktionen ist, die jeweils nur von $z^a$ bzw. $\bar{z}^{\bar{a}}$ abhängen:

$$\log(|\det g|) = f(z) + \bar{f}(\bar{z}).$$

Durch eine geeignete holomorphe Koordinatentransformation
$z^a \to z'^a(z)$, $\bar{z}^{\bar{a}} \to \bar{z}'^{\bar{a}}(\bar{z})$ können solche Funktionen zum Verschwinden gebracht werden:

$$\begin{aligned} g'_{a\bar{b}}(z', \bar{z}') &= \frac{\partial z'^a}{\partial z^k} \frac{\partial \bar{z}'^{\bar{b}}}{\partial \bar{z}^{\bar{l}}} g_{k\bar{l}}(z, \bar{z}) \\ \det(g'_{a\bar{b}}(z', \bar{z}')) &= \det\left(\frac{\partial z'^a}{\partial z^k}\right) \det\left(\frac{\partial \bar{z}'^{\bar{b}}}{\partial \bar{z}^{\bar{l}}}\right) \det(g_{k\bar{l}}(z, \bar{z})) \\ &= t(z, z')\bar{t}(\bar{z}, \bar{z}') \det(g_{k\bar{l}}(z, \bar{z})) \\ \log(|\det(g'_{a\bar{b}}(z', \bar{z}'))|) &= \log|t(z, z')| + \log|\bar{t}(\bar{z}, \bar{z}')| + \log|\det(g_{k\bar{l}}(z, \bar{z}))| \\ &= \log|t(z, z')| + \log|\bar{t}(\bar{z}, \bar{z}')| + f(z) + \bar{f}(\bar{z}). \end{aligned}$$

Die Transformation kann so gewählt werden, daß $\log|t| = -f$ und $\log|\bar{t}| = -\bar{f}$ gilt. Übrig bleibt somit die Bedingung

$$|\det(g'_{a\bar{b}}(z',\bar{z}'))| = 1.$$

Nach einer Umbennenung der gestrichenen in ungestrichene Koordinaten und Ersetzen der Betragstriche der Determinante durch ein $(-)$-Vorzeichen erhält man:

$$\begin{aligned} \det(g_{a\bar{b}}(z,\bar{z})) + 1 &= \det\begin{pmatrix} \partial_1\bar{\partial}_{\bar{1}}\psi - 1 & \partial_1\bar{\partial}_{\bar{2}}\psi \\ \partial_2\bar{\partial}_{\bar{1}}\psi & \partial_2\bar{\partial}_{\bar{2}}\psi + 1 \end{pmatrix} + 1 \\ &= \partial_1\bar{\partial}_{\bar{1}}\psi\partial_2\bar{\partial}_{\bar{2}}\psi + (\partial_1\bar{\partial}_{\bar{1}} - \partial_2\bar{\partial}_{\bar{2}})\psi - (\partial_1\bar{\partial}_{\bar{2}}\psi)(\partial_2\bar{\partial}_{\bar{1}}\psi) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist die erste Plebanski Bewegungsgleichung [9]. Nach dem Anfangs erwähnten Theorem von Atiyah, Hitchin und Singer ist diese Gleichung die Bedingung dafür, daß $\psi$ eine selbstduale Deformation der flachen Metrik beschreibt. Stellt man die zugehörige Wirkung für eine Feldtheorie mit dem masselosen Skalarfeld $\psi$ als Feldinhalt auf, reproduzieren die Streuamplituden auf tree-niveau gerade die Amplituden des geschlossenen N=2 Strings für Instantonzahl $c = 0$. In Spinorkoordinaten lautet diese Wirkung [9]

$$S = \int d^4x \left[\psi\Box\psi + \frac{\kappa}{2}\psi\left(\partial_+{}^{\dot{\alpha}}\partial_-{}^{\dot{\beta}}\psi\right)\left(\partial_{+\dot{\alpha}}\partial_{-\dot{\beta}}\psi\right)\right]$$

oder die entpsprechende Zwei-Feld Wirkung mit einem Lagrange-Multiplikator.

## 2.3 SDYM gekoppelt an SDG

Für eine Kopplung von SDYM an SDG wird eine "neue" kovariante Ableitung definiert [3]:

$$\hat{\mathcal{D}}_{-\dot{\alpha}} = \partial_{-\dot{\alpha}} + E_{-\dot{\alpha}-}{}^{\dot{\beta}}\partial_{+\dot{\beta}} + g\mathcal{A}_{-\dot{\alpha}}.$$

Mit dieser kovarianten Ableitung werden wieder die Selbstdualitätsgleichungen gelöst. Die anderen beiden Komponenten der kovarianten Ableitung bleiben unverändert, da sie sowohl für SDG als auch für SDYM einfach die partiellen Ableitungen sind. Das Potential $\psi_{----}$ des Gravitationssektors ist ein Skalar bezüglich der Yang-Mills Eichgruppe, deshalb verändert sich die zweite Plebanski Gleichung nicht. Die Eichgruppe der Gravitation ist gerade die Lorentzgruppe, daher ändert sich die Leznov Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathcal{D}}_{-\dot{\alpha}}, \hat{\mathcal{D}}_{-\dot{\beta}}\right] &= \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\Bigg(\partial_{+\dot{\epsilon}}\partial_{+\dot{\eta}}\Big\{\partial_-{}^{\dot{\gamma}}\partial_{+\dot{\gamma}}\psi_{----} \\ &\quad + \left(\partial_+{}^{\dot{\gamma}}\partial_+{}^{\dot{\delta}}\psi_{----}\right)\left(\partial_{+\dot{\gamma}}\partial_{+\dot{\delta}}\psi_{----}\right)\Big\}\Gamma^{\dot{\epsilon}\dot{\eta}} \\ &\quad \underbrace{+\,\partial_-{}^{\dot{\gamma}}\partial_{+\dot{\gamma}}\phi_{--} + \frac{g}{2}\left[\partial_+{}^{\dot{\gamma}}\phi_{--}, \partial_{+\dot{\gamma}}\phi_{--}\right]}_{\text{Leznov Bewegungsgl.}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\partial_+{}^{\dot{\gamma}}\partial_+{}^{\dot{\delta}}\psi_{----}\right)\left(\partial_{+\dot{\gamma}}\partial_{+\dot{\delta}}\phi_{--}\right)}_{\text{gekoppelter Anteil der Leznov Bewegungsgl.}}\Bigg) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Wirkung der gekoppelten Theorie lautet:

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \sum_{J=0} \psi_j \Box \psi_{-j} + \frac{\kappa}{6} \sum_{J=2} \psi_{j_1} \left( \partial_+{}^{\dot\alpha} \partial_+{}^{\dot\beta} \psi_{j_2} \right) \left( \partial_{+\dot\alpha} \partial_{+\dot\beta} \psi_{j_3} \right) \right. \\
&\quad + tr \left( \frac{1}{2} \sum_{J=0} \frac{1}{2} \phi_j \Box \phi_{-j} + \frac{g}{6} \sum_{J=1} \phi_{j_1} \left[ \partial_+{}^{\dot\gamma} \phi_{j_2}, \partial_{+\dot\gamma} \phi_{j_3} \right] \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\kappa}{2} \sum_{J=2} \psi_j \left( \partial_+{}^{\dot\gamma} \partial_+{}^{\dot\delta} \phi_{j_1} \right) \left( \partial_{+\dot\gamma} \partial_{+\dot\delta} \phi_{j_2} \right) \right) \right]. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Der gekoppelte Term reproduziert die String Amplitude von zwei offenen und einem geschlossenen String für $\theta = 0$, die Amplitude hat die Kopplungskonstante geschlossener Strings $\kappa$. Die Stringamplitude von einem offenen und zwei geschlossenen Strings ist Null, dies ist konsistent damit, daß die zweite Plebanski Gleichung keine Korrektur durch die Kopplung an das Yang-Mills Feld erhält. In der Stringtheorie wird zur Berechnung von Streudiagrammen über alle möglichen Topologien der Weltfläche der Strings summiert. In einer Theorie offener Strings werden alle Graphen mit einem Rand als tree-level Amplituden interpretiert, alle Graphen mit mindestens zwei Rändern werden als Loopgraphen interpretiert. In einer Stringtheorie geschlossener Strings gibt es keine Weltfläche, die Ränder hat. Werden offene und geschlossene Strings gekoppelt, existieren zusätzlich zu den gemischten Amplituden auch Streugraphen ausschließlich geschlossener Strings deren Weltfläche Ränder aufweist. Geschlossene Amplituden mit einer Topologie mit einem Rand (Eulerzahl $\chi = 1$) werden zu den tree-level Amplituden gezählt. Die derartige Dreipunktfunktion induziert einen neuen Vertex für die effektive Feldtheorie. Die Stringamplitude lautet [3]

$$
A_{4,4}^{n_c=3} = \gamma \sqrt{\alpha'}^3 (a_{AB})^4,
$$

mit einer numerischen Konstanten $\gamma$. Die Gesamthelizität der Dreipunktfunktion ist $J = 4$. Um diesen Vertex in der effektiven Feldtheorie zu realisieren, benötigt man zusätzlich Felder $\psi_j$ der Helizität $j = 0$, was eine Erweiterung des bisherigen Feldinhaltes bedeutet. Zur Wirkung (3) wird der zusätzliche Term

$$
S' = \int d^4x \frac{\gamma \sqrt{\alpha'}^3}{6} \sum_{J=4} \psi_{j_1} \left( \partial_+{}^{\dot\alpha} \partial_+{}^{\dot\beta} \partial_+{}^{\dot\gamma} \partial_+{}^{\dot\delta} \psi_{j_2} \right) \left( \partial_{+\dot\alpha} \partial_{+\dot\beta} \partial_{+\dot\gamma} \partial_{+\dot\delta} \psi_{j_3} \right)
$$

addiert. Aus der Stringtheorie sind außer der Dreipunktfunktion bisher zwei gemischte tree-level Amplituden bekannt [3]:

$$
\begin{aligned}
A_{3,3}^{n_c=1, n_o=3} &= 0, \\
A_{5,5}^{n_c=3, n_o=1} &= 0,
\end{aligned}
$$

es wird aber vermutet, daß auch alle anderen gemischten Amplituden verschwinden. Für die Feldtheorie wird das Verschwinden eines Teils der gemischten Amplituden in dieser Arbeit explizit berechnet.

# 3 Streuamplituden der Gluonen

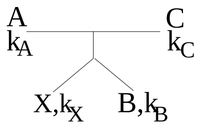
Jedes SDYM Streudiagramm setzt sich zusammen aus einem Produkt von gruppentheoretischen Faktoren und einem impulsabhängigen Anteil. Die verschiedenen gruppentheoretischen Faktoren der Diagramme einer Streuamplitude sind nicht linear unabhängig voneinander. Der erste Teil dieses Kapitels besteht darin, die linear unabhängigen Faktoren zu finden. Mit Hilfe einer Rekursionsformel werden die zugehörigen Impulskoeffizienten bestimmt. Durch vollständige Induktion wird schließlich gezeigt, daß alle Impulskoeffizienten verschwinden. Damit ist bewiesen, daß alle SDYM Streuamplituden Null sind.

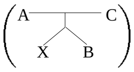
## 3.1 Die Strukturkonstanten

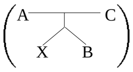
Die N-Punktfunktion $< N >$ mit den äußeren Impulsen $k_A, k_B, \ldots, k_N$ und den Indizes $A, B, \ldots, N$ an den Strukturkonstanten der Lie-Algebra ist die Summe über alle Graphen mit N äußeren Beinen:

$$\begin{aligned} < N > \;&=\; f^{ABX_1} f^{X_1CX_2} f^{X_2DX_3} \ldots f^{X_N(N-1)N} \\ &\quad \times \frac{a_{AB}\, a_{(A+B)C}\, a_{(A+B+C)D} \cdots a_{(N-1)N}}{s_{A+B}\, s_{A+B+C}\, s_{A+B+C+D} \cdots} \\ &\quad + \text{alle anderen Graphen mit N äußeren Linien} \\ &= \sum_{Graphen} \mathcal{F}^{ABCD\ldots(N-1)N} \mathcal{A}^{ABCD\ldots(N-1)N}, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $\mathcal{F}^{ABCD\ldots(N-1)N}$ das Produkt der gruppentheoretischen Faktoren ist und $\mathcal{A}^{ABCD\ldots(N-1)N}$ alle impulsabhängigen Anteile beinhaltet. Zur Veranschaulichung werden im folgenden oft die Indizes an der Strukturkonstanten durch das Bild des entsprechenden Graphen ersetzt, genauso wird mit den Impulsfunktionen $\mathcal{A}$ verfahren. Weiterhin wird eine Linie eines Graphen mit dem Impuls $k_A$ und dem Lie-Algebra Index A einfach mit dem Buchstaben A bezeichnet. Ein Beispiel:

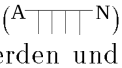


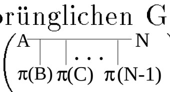
$= f^{CAY} f^{YXB} \frac{a_{CA} a_{XB}}{s_{C+A}} = \mathcal{F}\Big($ 

$\Big) \mathcal{A}\Big($ 

$\Big)$

### 3.1.1 Eine Basis der Strukturkonstanten

**Behauptung:**
Jeder zu einem beliebigen Graphen mit $N$ äußeren Beinen gehörende gruppentheoretische Faktor läßt sich schreiben als Summe von Faktoren der Form $\mathcal{F}\,($ 

$)$, wobei zwei beliebige Impulse, zum Beispiel A und N, festgehalten werden und die anderen $N-2$ äußeren Beine $B, \ldots, N-1$ je nach Form des ursprünglichen Graphen permutiert werden.
$\Big\{ \mathcal{F}\Big($ 

$\Big) \;:\; \pi \in S_{N-2} \Big\}$ bildet dann also eine Basis für alle $\mathcal{F}$ mit N äußeren Beinen.
**Beweis:**

Jede Strukturkonstante besteht aus einer Spur über Generatoren $T^K$ der zugehörigen Algebra:

$$f^{ABC} = tr\left(\left[T^A, T^B\right] T^C\right) \quad \text{mit} \quad \left[T^A, T^B\right] = f^{ABX} T^X$$
$$\text{und} \quad tr\left(T^X T^C\right) = \delta^{XC} \mathcal{C}(N),$$

wobei $\mathcal{C}(N)$ im folgenden der Einfachheit halber weggelassen wird, da der Wert in den Rechnungen keine Rolle spielt. Die gruppentheoretischen Faktoren von der Form $\mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix}A & & & & N\end{smallmatrix}\right)$ lauten damit

$$\mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix}A & & & & N\\ & \pi(B) & \pi(C) & \ldots & \pi(N\text{-}1) & \end{smallmatrix}\right) = tr\left(\left[\left[\ldots\left[\left[\left[T^A, T^{\pi(B)}\right], T^{\pi(C)}\right], T^{\pi(D)}\right]\ldots\right], T^{\pi(N-1)}\right] T^N\right).$$

Die linke Klammer *aller* in der Spur enthaltenen Kommutatoren steht also links vor dem ersten Generator $T^A$. Zu zeigen ist nun, daß sich jeder zu einem beliebigen Graphen gehörende Faktor $\mathcal{F}$ auf eine Linearkombination von Ausdrücken dieser Form bringen läßt. Dies geschieht mit Hilfe die Jacobi-Identität
$\left[\left[T^K, T^L\right], T^M\right] + zykl.(K, L, M) = 0.$
Steht in der Spur ein Kommutator zwischen zwei Generatoren $T^{\pi(K)}$ und $T^{\pi(L)}$ an einer beliebigen Stelle, so läßt sich durch einmaliges Anwenden der Jacobi-Identität der Ausdruck auf die gewünschte Form bringen:

$$\begin{aligned}
& tr\left(\left[\left[\ldots\left[\left[\left[\left[T^A, T^{\pi(B)}\right], T^{\pi(C)}\right], \ldots\right], \left[T^{\pi(K)}, T^{\pi(L)}\right]\right], \ldots\right], T^{\pi(N-1)}\right] T^N\right) \\
= \; & tr\left(\left[\left[\ldots\left[\left[\left[\left[\left[T^A, T^{\pi(B)}\right], T^{\pi(C)}\right], \ldots\right], T^{\pi(K)}\right], T^{\pi(L)}\right], \ldots\right], T^{\pi(N-1)}\right] T^N\right) \\
- \; & tr\left(\left[\left[\ldots\left[\left[\left[\left[\left[T^A, T^{\pi(B)}\right], T^{\pi(C)}\right], \ldots\right], T^{\pi(L)}\right], T^{\pi(K)}\right], \ldots\right], T^{\pi(N-1)}\right] T^N\right).
\end{aligned}$$

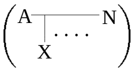
Tauchen in der Spur mehrere solcher Kommutatoren $\left[T^{\pi(K_j)}, T^{\pi(L_j)}\right]$ auf, so ist die Spur auf die richtige Form zu bringen, indem auf *jeden* dieser Kommutatoren einmal die Jacobi-Identität angewandt wird. Jede N-Punktfunktion läßt sich nun schreiben als

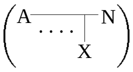
$$< N > \; = \sum_{\pi \epsilon S_{N-2}} \mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix}A & & & & N\\ & \pi(B) & \pi(C) & \ldots & \pi(N\text{-}1) & \end{smallmatrix}\right) \mathcal{X}^{A\pi(B)\ldots\pi(N-1)N}, \tag{5}$$

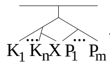
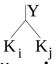
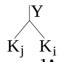
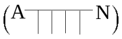
wobei $\mathcal{X}^{A\pi(B)\ldots\pi(N-1)N}$ die Summe derjenigen Funktionen $\mathcal{A}$ ist, die einen bestimmten algebraischen Faktor $\mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix}A & & & & N\\ & \pi(B) & \pi(C) & \ldots & \pi(N\text{-}1) & \end{smallmatrix}\right)$ haben. Die Reihenfolge der Indizes an $\mathcal{X}$ entspricht gerade der Reihenfolge der Beine in $\mathcal{F}$ in zyklischer Reihenfolge abgelesen. Zu zeigen ist nun, aus welchen Impulsfunktionen $\mathcal{A}$ sich die Koeffizienten $\mathcal{X}^{A\pi(B)\ldots\pi(N-1)N}$ zusammensetzen.

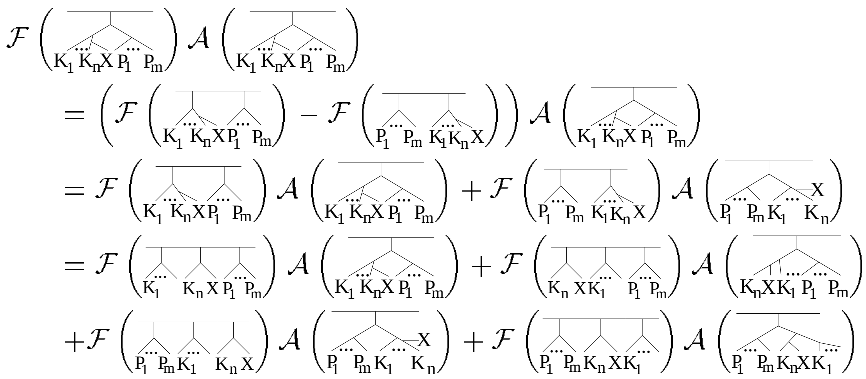
### 3.1.2 Welche Koeffizienten haben die Basiselemente?

Ziel dieses Kapitels ist zu zeigen, daß ein Koeffizient $\mathcal{X}^{AB\ldots N}$ sich aus denjenigen Impulsfunktionen zusammensezt, deren Impulse in zyklischer Reihenfolge abgelesen gerade die Reihenfolge der Indizes an $\mathcal{X}^{A\ldots N}$ ist.
An die Graphen einer N-Punktfunktion wird an alle möglichen Stellen ein weiterer Impuls X angefügt. Dabei tragen die entsprechenden Impulsfunktionen $\mathcal{A}$, je nachdem an welche Stelle X gehängt wird, zu folgenden Koeffizienten bei:

- an Impuls A: Die ursprüngliche Funktion $\mathcal{A}$ wird mit $\frac{a_{AX}}{s_{A+X}}$ multipliziert und $A \to A + X$ ersetzt. Der neue Graph hat den gruppentheoretischen Faktor $\mathcal{F}$ (  ) und $\mathcal{A}$ trägt daher bei zu $\mathcal{X}^{AX\dots N}$.

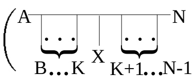
- an Impuls N: Die ursprüngliche Funktion $\mathcal{A}$ wird mit $\frac{a_{NX}}{s_{N+X}}$ multipliziert und $N \to N + X$ ersetzt. Der neue Graph hat den Faktor $\mathcal{F}$ (  ) und $\mathcal{A}$ trägt daher bei zu $\mathcal{X}^{A\dots XN}$.

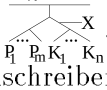
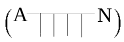
- an äußeren Impuls $K_n$ aus $B \dots N-1$: Die ursprüngliche Funktion $\mathcal{A}$ wird mit $\frac{a_{K_nX}}{s_{K_n+X}}$ multipliziert und $K_n \to K_n + X$ ersetzt. Das Bein $X$ hänge in zyklischer Reihenfolge gezählt an $n+1$-ter Stelle eines Zweiges .
Wegen  $= f^{K_iK_jY} a_{K_iK_j} = (-)f^{K_jK_iY}(-)a_{K_jK_i} =$  ist der obige Graph äquivalent zu allen Graphen an denen zwei Beine, die am gleichen Vertex hängen, vertauscht sind. Derselbe Graph läßt sich also umschreiben, so daß $X$ an den Positionen $(1, 2, n, m+1, m+2, n+m, n+m+1)$ ist. Der gruppentheoretische Faktor des obigen Graphen ist nun gerade Linearkombination von genau denjenigen $\mathcal{F}$ (  ), in denen $X$ an den oben genannten Stellen steht. Die Umformung erfolgt über mehrfaches Anwenden der Jacobi-Identität:

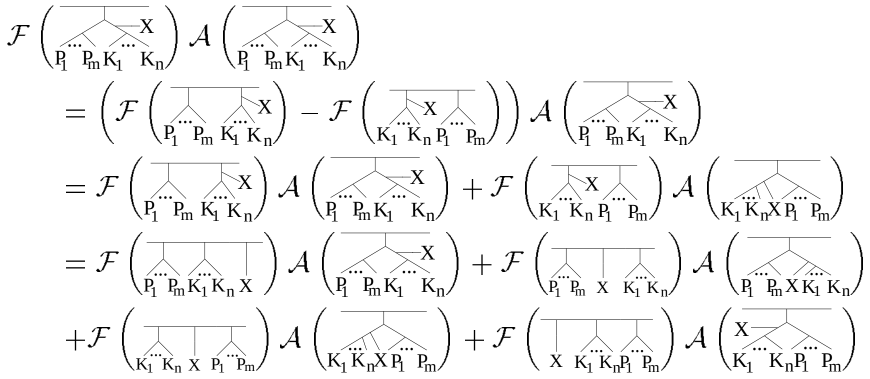



= und so weiter...

Die Funktion $\mathcal{A}$ des Graphen trägt also zu $\mathcal{X}^{A\dots X\dots N}$ bei, bei denen $X$ an $(1, 2, n, n+1, m+1, m+2, n+m, n+m+1)$-ster Stelle steht, dies entspricht den Positionen von $X$, wenn die Impulse des Graphen in zyklischer Reihenfolge abgelesen werden. Das Bein $X$ steht immer genau vor oder nach $K_n$.

- an innere Linie $I$, die $A$ und $N$ verbindet; dabei seien links der Linie $I$ die Zweige mit Impulsen $A \dots K$, rechts davon Zweige mit den Impulsen $K+1 \dots N$: Die ursprüngliche Funktion $\mathcal{A}$ wird mit $\frac{a_{(A+\dots+K)X}}{s_{A+\dots+K+X}}$ multipliziert und $A + \dots + K \to A + \dots + K + X$ ersetzt.
Die neue Funktion $\mathcal{A}$ trägt dann bei zu
$\mathcal{F}$ (  ) $\mathcal{X}^{A\pi(B\dots K)X\pi(K+1\dots N-1)N}$.

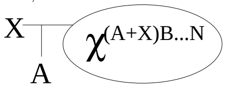
- an innere Linie $I$ in einem beliebigen Zweig mit den äußeren Beinen $K_1 \ldots K_n$: Die ursprüngliche Funktion $\mathcal{A}$ wird mit $\frac{a_{(K_1+\ldots+K_n)X}}{s_{K_1+\ldots+K_n+X}}$ multipliziert und $K_1 + \ldots + K_n \to K_1 + \ldots K_n + X$ ersetzt. Wird $X$ von rechts an $I$ gehängt, hat der Graph die Form , $X$ hängt also an der Stelle $n + m + 1$. Dieser Graph läßt sich umschreiben, so daß $X$ an den Stellen $1$, $m + 1$ und $n + 1$ steht. $X$ hängt also also entweder vor den Impulsen $P_j$ und $K_j$, genau zwischen den Ästen mit den Impulsen $P_j$ und $K_j$ oder hinter allen Impulsen $P_j$ und $K_j$. Der gruppentheoretische Faktor des obigen Graphen läßt sich auch hier genau in Faktoren der Form  zelegen, in denen $X$ an den eben genannten Stellen steht. Die geschieht mit der Jacobi-Identität:

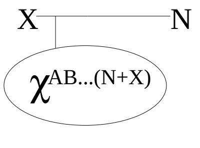


$=$ und so weiter...

Die Funktion $\mathcal{A}$ des Graphen trägt also zu allen $\mathcal{X}^{A\ldots N}$ bei, deren Impulsindizes der Reihenfolge der zyklisch abgelesenen Impulse des Graphen entsprechen.

Damit ist nun klar, daß jedes $\mathcal{X}$ genau aus der Summe derjenigen $\mathcal{A}$ besteht, deren Impulse in zyklischer Reihenfolge abgelesen gerade der Reihenfolge der Indizes an $\mathcal{X}$ entspricht. Diese Amplituden werden in Anlehnung an QCD auch "farbgeordnet" genannt, da die Graphen alle dieselbe Reihenfolge von "Farbindizes" haben [15],[16].
Sei nun ein $\mathcal{X}^{AB\ldots N}$ gegeben. Wie sieht dann die Funktion $\mathcal{X}^{XAB\ldots N}$ aus?
Nach den obigen Iterationsregeln tragen folgende Impulsfunktionen $\mathcal{A}$ zu $\mathcal{X}^{XAB\ldots N}$ bei:

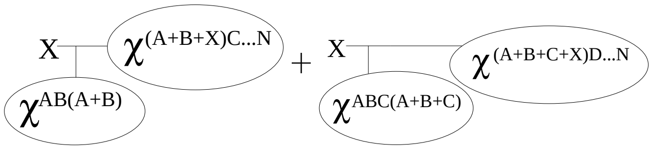
- alle Funktionen $\mathcal{A}$, die in $\mathcal{X}^{AB\ldots N}$ stehen und in denen $X$ an das Bein $A$ gehängt wird: 

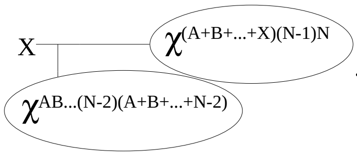
- alle Funktionen $\mathcal{A}$, die in $\mathcal{X}^{AB\ldots N}$ stehen und in denen $X$ an das Bein $N$ gehängt wird: 

- $X$ an eines der Beine $B, C, \ldots, N-1$ gehängt gibt nach den Iterationsregeln *keine* Beiträge zu $\mathcal{X}^{XAB\ldots N}$! Es wurde oben festgestellt, daß zu einer

Funktion $\mathcal{X}^{XAB\ldots N}$ gerade diejenigen $\mathcal{A}$ beitragen, deren Beine zyklisch abgelesen die Reihenfolge $XAB\ldots N$ haben. Dies ist bei Funktionen $\mathcal{A}$, in denen $X$ an den Beinen $B, C, \ldots, N-1$ hängt nicht der Fall, also tragen sie nicht bei zu $\mathcal{X}^{XAB\ldots N}$

- folgende Terme, bei denen $X$ an eine innere Linie gehängt wurde, bleiben noch zu berücksichtigen:




$+\ldots$und so weiter$\ldots+$ 

.

Summiert man alle diese Beiträge läßt sich mit $\mathcal{X}^{(-M)M} := k_M^2$ die Funktion $\mathcal{X}^{XAB\ldots N}$ auf folgende Form bringen:

$$\mathcal{X}^{XAB\ldots N} = \sum_{l=1}^{N-1} \mathcal{X}_{Loff-shell}^{AB\ldots l(-L)} \frac{a_{XL}}{s_L s_{X+L}} \mathcal{X}_{(L+X)off-shell}^{(L+X)\ldots N}, \tag{6}$$

wobei $L$ die Summe aller Impulse $(k_A + \ldots + k_l)$ ist. Die Impulse $L$ sind gerade diejenigen, an die das Bein X gehängt wird. Eine solche Rekursionsformel wurde bereits für die Berechnung von Streuqueschnitten in der QCD entwickelt [17],[18].

### 3.1.3 Ein Beispiel: die Vierpunktamplitude

Als Beispiel wird nun N=4 betrachtet. Die vier äußeren Impulse seien $A, B, X$ und $C$, wobei $X$ und $C$ festgehalten und $A$ und $B$ permutiert werden:

$$< 4 >= \mathcal{F}^{XABC}\mathcal{X}^{XABC} + \mathcal{F}^{XBAC}\mathcal{X}^{XBAC}$$

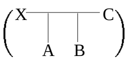
Wie oben erwähnt, reicht es aus eine der Funktionen $\mathcal{X}$ zu berechnen. $\mathcal{X}^{XABC}$ erhält man durch hizufügen des Impulses $X$ an die Beine $A$ und $C$ von $\mathcal{X}^{ABC} = \mathcal{X}\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{A} & \top & \mathrm{C}\\ & \mathrm{B} & \end{smallmatrix}\right)$. Da ein Graph mit drei Beinen keine inneren Linien besitzt, ist dies bereits alles. Also ist

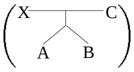
$$\mathcal{X}^{XABC} = \mathcal{A}\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{X} & \top & \top & \mathrm{C}\\ & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \end{smallmatrix}\right) + \mathcal{A}\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{X} & & \mathrm{C}\\ & \curlywedge & \\ \mathrm{A} & & \mathrm{B}\end{smallmatrix}\right) = \frac{a_{XA}a_{BC}}{s_{A+X}s_{B+C}} + \frac{a_{AB}a_{CX}}{s_{A+B}s_{C+X}}.$$

Die andere Funktion $\mathcal{X}_{XBAC}$ ergibt sich durch Vertauschen der Impulse $A$ und $B$:

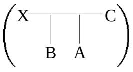
$$\mathcal{X}^{XBAC} = \mathcal{A}\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{X} & \top & \top & \mathrm{C}\\ & \mathrm{B} & \mathrm{A} & \end{smallmatrix}\right) + \mathcal{A}\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{X} & & \mathrm{C}\\ & \curlywedge & \\ \mathrm{B} & & \mathrm{A}\end{smallmatrix}\right) = \frac{a_{XB}a_{AC}}{s_{B+X}s_{A+C}} + \frac{a_{BA}a_{CX}}{s_{A+B}s_{C+X}}$$

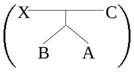
Die gesamte Vierpunktfunktion lautet also:

$< 4 > \;=\; \mathcal{F}^{XABC} \Big( \mathcal{A} \big($ 

$\big) + \mathcal{A} \big($ 

$\big) \Big)$

$+\mathcal{F}^{XBAC} \Big( \mathcal{A} \big($ 

$\big) + \mathcal{A} \big($ 

$\big) \Big)$

Ziel des nächsten Kapitels wird es nun sein, die Funktionen $\mathcal{X}$ mit Hilfe einiger Impulsrelationen zu vereinfachen und zu zeigen, daß diese on-shell verschwinden.

## 3.2 Berechnung der Koeffizienten $\mathcal{X}^{A\dots N}$ für alle N per Rekursionsformel

Um eine Funktion

$$\mathcal{X}^{XAB\dots N} = \sum_{l=1}^{N-1} \mathcal{X}^{AB\dots l(-L)}_{Loff-shell} \frac{a_{XL}}{s_L s_{X+L}} \mathcal{X}^{(L+X)(l+1)\dots N}_{(L+X)off-shell}$$

mit $N+1$ Beinen berechnen zu können, ist es nötig zu wissen, wie die Funktionen $\mathcal{X}$ mit $3, 4, \dots N$ Beinen mit einem Impuls off-shell aussehen, da diese alle in der Summe vorkommen. Der off-shell Impuls wird der jeweils neu angefügte Impuls $X$ sein, das heißt es werden die Funktionen $\mathcal{X}^{XAB\dots N}_{Xoff-shell}$ berechnet, die obige Formel ändert sich dabei nicht. Auf diese Weise erhält man iterativ die gesuchten Funktionen für alle N.
Diese Funktionen $\mathcal{X}^{XA\dots N}_{Xoff-shell}$ werden anschließend mit Hilfe einiger Impulsrelationen auf eine einfache Form gebracht und es wird gezeigt, daß sie proportional zum Quadrat des jeweiligen off-shell Impulses sind und damit wegen der Masselosigkeit der Felder on-shell verschwinden.
Als erstes werden nun $\mathcal{X}$ für N=2,3,4 mit einem Impuls off-shell berechnet. Für $N = 2, 3$ ist klar:

$$\mathcal{X}^{XA} = k_X^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{X}^{XAB} = a_{AB} = \frac{a_{AB}}{s_{A+B}} k_X^2,$$

$\mathcal{X}^{XAB}$ ist einfach der bekannte Dreiervertex. Für N=4 wird $\mathcal{X}^{XABC}$ zunächst mit allen vier Impulsen off-shell berechnet, daraus erkennt man dann die Form der Funktion mit einem beliebigen Impuls off-shell.
An dieser Stelle soll nun zunächst eine für die folgenden Rechnungen wichtige Impulsrelation gegeben werden:

$$a_{AB} k_{CD} + zykl.(A, B, C) = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich folgendermaßen herleiten:
Es gilt

$$k_A^{+\dot\alpha} k_B^{+\dot\beta} k_C^{+\dot\gamma} + antisymm.(A, B, C) = 0. \tag{7}$$

Da die gepunkteten Indizes je zwei Werte annehmen können, sind immer mindestens zwei Indizes gleich und es existiert in der antisymmetrisierten Summe zu jedem Term ein identischer mit anderem Vorzeichen, also ist die Summe Null. Dieser Ausdruck mit $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta} k_D^{-\dot\delta}$ multpliziert ergibt

$$\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta} k_A^{+\dot\alpha} k_B^{+\dot\beta} k_C^{+\dot\gamma} k_D^{-\dot\delta} + zykl.(A, B, C) \quad = \quad a_{AB} k_{CD} + zykl.(A, B, C) = 0.$$

### 3.2.1 Berechnung von $\mathcal{X}^{XABC}$ mit allen Impulsen außerhalb der Massenschale

Als erstes nun die Berechnung von $\mathcal{X}^{XABC}_{off-shell}$ :

$$\mathcal{X}^{XABC}_{off-shell} \quad = \quad \frac{a_{XA} a_{BC}}{s_{X+A}} + \frac{a_{AB} a_{CX}}{s_{C+X}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{s_{X+A}s_{C+X}}(a_{XA}a_{BC}s_{C+X} + a_{AB}a_{CX}s_{X+A}) \\ &=: \frac{1}{s_{X+A}s_{C+X}}G. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= (a_{XA}a_{BC} + a_{AB}a_{CX})k_X^2 + a_{AB}a_{CX}k_A^2 + a_{XA}a_{BC}k_C^2 \\ &\quad +2a_{XA}a_{BC}k_{CX} + 2a_{XA}a_{BC}k_{XC} + 2a_{AB}a_{CX}k_{XA} + 2a_{AB}a_{CX}k_{AX}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Einsetzen von } (i) \quad a_{AB}a_{CX}k_{AX} &= -a_{AB}(a_{XA}k_{XC} + a_{AC}k_{XX}) \\ a_{AB}a_{CX}k_{AX} &= -a_{CX}(a_{XA}k_{AB} + a_{BX}k_{AA}) \\ &= a_{CX}a_{XA}(k_{AX} + k_{AA} + k_{AC}) \\ &\quad +a_{CA}a_{AX}k_{BB} \\ \text{und } (ii) \quad a_{XA}a_{BC}k_{CX} &= -a_{XA}(a_{XB}k_{CC} + a_{CX}k_{CB}) \\ a_{XA}a_{XB}k_{XC} &= -a_{XA}(a_{CX}k_{XB} + a_{BC}k_{XX}) \end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned} G &\overset{(i)}{=} (a_{XA}a_{BC} + a_{AB}a_{C(X+A)})k_X^2 + a_{CX}a_{(X+A)X}k_A^2 + a_{CX}a_{XA}k_B^2 \\ &\quad +a_{XA}a_{BC}k_C^2 + 2a_{XA}a_{BC}k_{CX} + 2a_{XA}a_{B(C+A)}k_{XC} + 2a_{CX}a_{XA}k_{XB} \\ &\quad +2a_{XA}a_{XC}k_{CB} \\ &\overset{(ii)}{=} a_{AB}a_{BC}k_X^2 + a_{XC}a_{CB}k_A^2 + a_{CX}a_{XA}k_B^2 + a_{XA}a_{AB}k_C^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathcal{X}^{XABC}_{off-shell} &= \frac{1}{s_{X+A}s_{C+X}}(a_{AB}a_{BC}k_X^2 + a_{XC}a_{CB}k_A^2 \\ &\quad +a_{CX}a_{XA}k_B^2 + a_{XA}a_{AB}k_C^2). \end{aligned} \tag{8}$$

Da die Felder masselos sind, ist das Quadrat äußerer Impulse Null auf der Massenschale. Die Funktion $\mathcal{X}^{XABC}$ mit allen äußeren Impulsen $k_X, k_A, k_B$ und $k_C$ on-shell verschwindet deshalb. Auch die andere Funktion $\mathcal{X}^{XBAC}$ ist dann Null, also verschwindet die gesamte Vierpunktfunktion

$$<4> \;=\; \mathcal{F}^{XABC}\mathcal{X}^{XABC} + \mathcal{F}^{XBAC}\mathcal{X}^{AXBC},$$

falls alle äußeren Impulse on-shell sind.
Für die weitere Rechnung wird nun $\mathcal{X}$ mit vier Beinen und einem Impuls off-shell gebraucht:

$$\mathcal{X}^{XABC}_{k_X off-shell} = \frac{a_{AB}a_{BC}}{s_{X+A}s_{C+X}}k_X^2.$$

Aus Gleichung (8) ist zu sehen, daß die Terme mit einem anderen Impuls off-shell gerade durch zyklische Permutation der Impulse zu erhalten sind. Damit ist also bekannt, wie $\mathcal{X}$ mit vier Beinen und einem beliebigen Impuls off-shell aussieht.

### 3.2.2 Iteration auf alle $\mathcal{X}^{XAB...N}$ mit einem Impuls außerhalb der Massenschale

Für N=2,3,4 lauten die gesuchten Funktionen

$$\mathcal{X}^{XAB...(N-1)}_{X off-shell} = \frac{a_{AB}a_{BC}\cdots a_{(N-2)(N-1)}}{s_{A+B}s_{B+C}\cdots s_{(N-2)+(N-1)}}k_X^2.$$

Diese Formel gilt für alle $N$, dies wird nun durch vollständige Induktion bewiesen. Für $N \to N+1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^{XAB...N}_{X off-shell} &= \sum_{l=1}^{N-1} \mathcal{X}^{AB...l(-L)}_{L off-shell} \frac{a_{XL}}{s_L s_{X+L}} \mathcal{X}^{(L+X)(l+1)...N}_{(L+X) off-shell} \\
&= k_A^2 \frac{a_{XA}}{s_A s_{A+X}} s_{A+X} \frac{a_{BC}a_{CD}\cdots a_{(N-1)N}}{s_{B+C}s_{C+D}\cdots s_{(N-1)+N}} \\
&+ \frac{a_{AB}}{s_{A+B}} s_{A+B} \frac{a_{X(A+B)}}{s_{A+B}s_{X+A+B}} s_{X+A+B} \frac{a_{CD}\cdots a_{(N-1)N}}{s_{C+D}\cdots s_{(N-1)+N}} \\
&+ \frac{a_{AB}a_{BC}}{s_{A+B}s_{B+C}} s_{A+B+C} \frac{a_{X(A+B+C)}}{s_{A+B+C}s_{X+A+B+C}} s_{X+A+B+C} \frac{a_{DE}\cdots a_{(N-1)N}}{s_{D+E}\cdots s_{(N-1)+N}} \\
&+ \ldots \text{und so weiter} \\
&= \frac{a_{AB}a_{BC}a_{CD}\cdots a_{(N-1)N}}{s_{A+B}s_{B+C}s_{C+D}\cdots s_{(N-1)+N}} \sum_{l=1}^{N-1} \frac{a_{X(A+...+l)}}{a_{l(l+1)}} s_{l(l+1)}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{N-1} \frac{a_{X(A+...+l)}}{a_{l(l+1)}} s_{l(l+1)} &= 2\sum_{l=1}^{N-1} \frac{a_{X(A+...+l)}}{a_{l(l+1)}} \underbrace{\frac{a_{(l-1)l}}{a_{(l-1)l}}(k_{l(l+1)}}_{=-\frac{a_{l(l+1)}}{a_{(l-1)l}}k_{l(l-1)}} + k_{(l+1)l}) \\
&= 2\sum_{l=1}^{N-1} \left( \frac{a_{X(A+...+l)}}{a_{l(l-1)}} k_{l(l-1)} + \frac{a_{X(A+...+l)}}{a_{l(l+1)}} k_{(l+1)l} \right) \\
&= 2\sum_{l=2}^{N-1} \left( \frac{a_{X(A+...+l)}}{a_{l(l-1)}} k_{l(l-1)} + \frac{a_{X(A+...+(l-1))}}{a_{(l-1)l}} k_{l(l-1)} \right) \\
&\quad + 2\frac{a_{AX}}{a_{NA}} k_{AN} + 2\frac{a_{X(A+...(N-1)}}{a_{(N-1)N}} k_{N(N-1)} \\
&= 2\sum_{l=2}^{N-1} \frac{a_{Xl}}{a_{l(l-1)}} k_{l(l-1)} + 2\frac{a_{AX}}{a_{NA}} k_{AN} + 2\frac{a_{NX}}{a_{(N-1)N}} k_{N(N-1)} \\
&= 2\sum_{l=2}^{N-1} \frac{a_{(l-1)l}}{a_{l(l-1)}} k_{lX} + 2\frac{a_{AX}}{a_{NA}} k_{AN} + 2\frac{a_{NX}}{a_{(N-1)N}} k_{N(N-1)} \\
&= 2\sum_{l=2}^{N-1} (-k_{lX}) + 2\frac{a_{AN}}{a_{NA}} k_{AX} + 2\frac{a_{N(N-1)}}{a_{(N-1)N}} k_{NX} \\
&= 2k_{XX} = k_X^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{X}^{XAB...N}_{k_X off-shell} = \frac{a_{AB}a_{BC}a_{CD}\cdots a_{(N-1)N}}{s_{A+B}s_{B+C}s_{C+D}\cdots s_{(N-1)+N}} k_X^2 \tag{9}$$

Für jedes beliebige $N$ ist also jede Funktion $\mathcal{X}$ mit einem Impuls $k_X$ off-shell gerade proportional zum Quadrat dieses Impulses. Wegen der Masselosigkeit der Felder sind dann alle $\mathcal{X}$ mit den äußeren Impulsen auf der Massenschale Null.

Damit ist bewiesen, daß alle tree-level Amplituden von SDYM verschwinden. Da diese Amplituden auf tree-niveau volständig mit denen des offenen N=2 Strings übereinstimmen, ist SDYM die effektive Feldtheorie des offenen N=2 Strings.

# 4 Streuamplituden der Gravitonen

## 4.1 Berechnung der N-Punktfunktionen

Die Streuamplituden der Gravitonen lassen sich analog zu denen der Gluonen berechnen. Eine N-Punktfunktion mit den äußeren Impulsen $A, B, \ldots, N$ ist die Summe über alle Graphen mit N Beinen:

$$\begin{aligned} < N > \quad &= \quad \frac{a_{AB}^2 a_{(A+B)C}^2 a_{(A+B+C)D}^2 \cdots a_{(N-1)N}^2}{s_{A+B} s_{A+B+C} s_{A+B+C+D} \cdots} \\ &\quad\; + \text{alle anderen Graphen mit N Beinen} \\ &= \sum_{Graphen} \alpha^{ABCD\ldots(N-1)N} \mathcal{A}^{ABCD\ldots(N-1)N} \end{aligned} \tag{10}$$

mit $\alpha^{ABCD\ldots(N-1)N} := a_{AB} a_{(A+B)C} a_{(A+B+C)D} \cdots a_{(N-1)N}$

und mit $\mathcal{A}$ wie in Kapitel 3.1 definiert.

Zur Erinnerung:
Für die Berechnung der Amplituden der Gluonen wurde die N-Punktfunktion auf die Form

$$\begin{aligned} < N > \quad &= \sum_{Graphen} \mathcal{F}^{ABCD\ldots(N-1)N} \mathcal{A}^{ABCD\ldots(N-1)N} \\ &= \sum_{\pi \epsilon S_{N-2}} \mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix} \text{A} & & & & \text{N} \\ & \pi(\text{B}) & \pi(\text{C}) & \ldots & \pi(\text{N-1}) \end{smallmatrix}\right) \mathcal{X}^{A\pi(B)\ldots\pi(N-1)N} \end{aligned}$$

gebracht. Die entscheidende Rolle spielte dabei die Jacobi-Identität

$$f^{ABY} f^{YCD} + f^{CAY} f^{YBD} + f^{BCY} f^{YAD} = \mathcal{F}^{ABCD} + zykl.(A,B,C) = 0.$$

Eine der Jacobi-Identität ähnliche Gleichung gilt nun für die Funktionen $\alpha^{ABCD}$ aus Gleichung (10). Aus Kapitel 3.2 ist die Gleichung (7)

$$k_A^{+\dot\alpha} k_B^{+\dot\beta} k_C^{+\dot\gamma} + antisymm.(A,B,C) = 0$$

bekannt. Multipliziert mit $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta} k_D^{+\dot\delta}$ erhält man

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta} k_A^{+\dot\alpha} k_B^{+\dot\beta} k_C^{+\dot\gamma} k_D^{+\dot\delta} + zykl.(A,B,C) = a_{AB} a_{CD} + zykl.(A,B,C) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha^{ABCD} + zykl.(A,B,C) = 0 \\ &(\text{vgl.} \quad \mathcal{F}^{ABCD} + zykl.(A,B,C) = 0). \end{aligned}$$

Da alle Relationen, die zur Berechnung der Yang-Mills-Felder für die Funktionen $\mathcal{F}^{AB\ldots N}$ benutzt werden auf der Jacobi-Identität beruhen, gelten dieselben Beziehungen für die Funktionen $\alpha^{AB\ldots N}$. Die Amplituden können können damit auf eine ähnliche Form wie in Kapitel 3 gebracht werden:

$$\begin{aligned} < N > \quad &= \sum_{Graphen} \alpha^{ABCD\ldots(N-1)N} \mathcal{A}^{ABCD\ldots(N-1)N} \\ &= \sum_{\pi \epsilon S_{N-2}} \alpha\left(\begin{smallmatrix} \text{A} & & & & \text{N} \\ & \pi(\text{B}) & \pi(\text{C}) & \ldots & \pi(\text{N-1}) \end{smallmatrix}\right) \mathcal{X}^{A\pi(B)\ldots\pi(N-1)N}. \end{aligned}$$

Die Funktionen $\mathcal{X}^{A\pi(B)\ldots\pi(N-1)N}$ sind hierbei *dieselben* wie in in Kapitel 3, Gln.(6). Es wurde gezeigt, daß diese alle verschwinden, also verschwinden auch die Amplituden der Gluonen on-shell.
Auf tree-niveau hat SDG damit dieselben Streuamplituden wie der geschlossene N=2 String, SDG ist ist also die effektive Feldtheorie des geschlossenen N=2 Strings.

# 5 Gemischte Streuamplituden

## 5.1 Alle gemischten Vierpunktfuntionen sind Null

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß auf tree-niveau alle gemischten Vierpunktfunktionen verschwinden, was in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Stringtheorie ist. Für die gemischten Streuamplituden wird die Abkürzung $< N_{Gl} + N_{Gr} >$ benutzt. Dabei ist die erste Zahl $N_{Gl}$ die Anzahl der Gluonen und die zweite Zahl $N_{Gr}$ die Anzahl der Gravitonen, für die Kopplungen wird $g = 1$ und $\kappa = \sqrt{\alpha'}$ gesetzt.

- Zunächst die Vierpunktfunktion mit drei Gluonen und einem Graviton $< 3 + 1 >$, der Propagator ist ein Gluon. Die Gluon-Beine haben die Impulse $k_A, k_B, k_C$ und die Algebra-Indizes $A, B, C$, das Graviton hat den Impuls $k_D$.

$$\begin{aligned}
< 3+1 > &= \sqrt{\alpha'} f^{ABC} \left( \frac{a_{AB} a_{CD}^2}{s_{A+B}} + f^{BCA} \frac{a_{BC} a_{DA}^2}{s_{B+C}} + f^{ACB} \frac{a_{AC} a_{BD}^2}{s_{A+C}} \right) \\
&= \sqrt{\alpha'} f^{ABC} \left( \frac{a_{AB} a_{CD}^2}{s_{A+B}} + \frac{a_{BC} a_{DA}^2}{s_{B+C}} - \frac{a_{AC} a_{BD}^2}{s_{A+C}} \right) \\
&\quad \text{on-shell gilt:} \quad \frac{a_{AB} a_{CD}}{s_{A+B}} = \frac{a_{CB} a_{DA}}{s_{B+C}} \\
&= \sqrt{\alpha'} f^{ABC} \left( \frac{a_{DA} a_{BC} a_{BD}}{s_{B+C}} - \frac{a_{AC} a_{BD}^2}{s_{A+C}} \right) \\
&= \sqrt{\alpha'} f^{ABC} a_{AC} \left( \frac{a_{DA} a_{CB}}{s_{B+C}} + \frac{a_{AC} a_{BD}}{s_{A+C}} \right) = 0
\end{aligned}$$

  Die Streuamplitude von drei offenen und einem geschlossenen String lautet [3]

$$A_{3,3}^{n_o=3, n_c=1} = 0,$$

  String- und Feldtheorie Amplitude stimmen also überein.

- Vierpunktamplitude mit zwei Gluonen und zwei Gravitonen $< 2+2 >$, die Gravitonen haben die Impulse $k_B, k_C$, die Gluonen $k_A, k_D$ und Algebra-Indizes $A, D$ :

$$\begin{aligned}
< 2+2 > &= \alpha' \delta^{AD} \left( \frac{a_{AB}^2 a_{CD}^2}{s_{A+B}} + \frac{a_{BC}^2 a_{DA}^2}{s_{B+C}} + \frac{a_{AC}^2 a_{BD}^2}{s_{A+C}} \right) \\
&= \alpha' \delta^{AD} (\text{Vierpunktfunktion SDG}) = 0
\end{aligned}$$

  Für die Stringtheorie ist die entsprechende Amplitude bisher nicht bekannt.

- Die Amplitude $< 1 + 3 >$ existiert mit den zur Verfügung stehenden Vertizes nicht. Die entsprechende String Amplitude verschwindet [3]:

$$A_{5,5}^{n_o=1, n_c=3} = 0.$$

- Vierpunktfunktion mit vier Gravitonen und beiden Graviton-Graviton-Kopplungen $< 0+4 >'$:

$$
\begin{aligned}
< 0+4 >' &= \gamma\alpha'^2\Bigg(\frac{a_{AB}^4 a_{CD}^2}{s_{A+B}} + \frac{a_{BC}^2 a_{DA}^4}{s_{B+C}} + \frac{a_{AC}^4 a_{BD}^2}{s_{A+C}} \\
&\quad + \frac{a_{AB}^2 a_{CD}^4}{s_{A+B}} + \frac{a_{BC}^4 a_{DA}^2}{s_{B+C}} + \frac{a_{AC}^2 a_{BD}^4}{s_{A+C}}\Bigg) \\
&= \gamma\alpha'^2\Bigg(\frac{1}{s_{A+B}}\left(a_{AB}^4 a_{CD}^2 + a_{AB}^2 a_{CD}^4\right) \\
&\quad + \frac{1}{s_{A+C}}\left(a_{AC}^4 a_{BD}^2 + a_{AC}^2 a_{BD}^4\right) \\
&\quad + \frac{1}{s_{A+D}}\left(a_{AD}^4 a_{BC}^2 + a_{AD}^2 a_{BC}^4\right)\Bigg) \\
&= \gamma\alpha'^2\Bigg(\frac{a_{CB}a_{AD}}{s_{A+D}}\Big[a_{AB}a_{DC}\left(a_{CD}^2 + a_{AB}^2\right) \\
&\quad + a_{AC}a_{BD}\left(a_{AC}^2 + a_{BD}^2\right) \\
&\quad + a_{AD}a_{CB}(a_{AD}^2 + a_{BC}^2)\Big]\Bigg) \\
&= \gamma\alpha'^2\Bigg(\frac{a_{CB}a_{AD}}{s_{A+D}}\Big[a_{AC}a_{BD}\left(-a_{CD}^2 - a_{AB}^2 + a_{AC}^2 + a_{BD}^2\right) \\
&\quad + a_{AD}a_{CB}\left(-a_{CD}^2 - a_{AB}^2 + a_{AD}^2 + a_{BC}^2\right)\Big]\Bigg) \\
&= \gamma\alpha'^2\Bigg(\frac{a_{CB}a_{AD}}{s_{A+D}}\Big[a_{AB}a_{DC}\left(2a_{CB}^2 + 2a_{CB}a_{AB} + 2a_{CB}a_{CD}\right) \\
&\quad + a_{AD}a_{CB}\left(2a_{CB}^2 + 2a_{AC}a_{AB} + 2a_{CB}a_{CD}\right)\Big]\Bigg) \\
&= \gamma\alpha'^2\Bigg(2\frac{a_{CB}a_{AD}}{s_{A+D}}\Big[a_{CB}^2 a_{CD}\left(a_{AB} + a_{AD}\right) \\
&\quad + a_{CB}a_{AC}\left(a_{BD}a_{AB} + a_{BD}a_{CD} + a_{AD}a_{AB}\right)\Big]\Bigg) \\
&= \gamma\alpha'^2 2\frac{a_{CB}a_{AD}}{s_{A+D}}\Big[a_{CB}^2 a_{CD}a_{CA} + a_{CB}^2 a_{AC}a_{CD}\Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Die entsprechende Amplitude der Strintheorie ist bisher nicht bekannt.

- Es bleibt noch die Graviton Vierpunktfunktion $< 0{+}4 >''$ mit zwei Kopplungen ($\propto \gamma\sqrt{\alpha'}^3$). Entgegen der Vermutung, daß alle tree-Amplituden der Feldtheorie verschwinden, zeigt sich, daß diese nicht Null ist. Ein Vergleich mit der Stringtheorie liefert eine mögliche Erklärung: Der Vertex mit der Kopplung ($\propto \gamma\sqrt{\alpha'}^3$) kommt von der Streuung dreier geschlossener Strings, wobei die Weltfläche eine Rand hat. Hängt man in der

Feldtheorie zwei solche Vertizes aneinander, hat die Weltfläche der vergleichbaren Stringamplitude eine Topologie mit zwei Rändern, ist also keine tree-level-, sondern eine Loopamplitude. Daher stellt sich nun die Frage, ob die Summe der hier betrachteten Feldtheorie Amplitude und der Feldtheorie Loopamplitude mit der String-Loopamplitude verglichen werden können oder müssen. Die Berechnung der Amplitude $< 4 >''$ ergibt:

$$\begin{aligned}
< 0+4 >'' &= \gamma^2 \alpha'^3 \left[ \frac{a_{AB}^4 a_{CD}^4}{s_{A+B}} + \frac{a_{BC}^4 a_{DA}^4}{s_{B+C}} + \frac{a_{AC}^4 a_{BD}^4}{s_{A+C}} \right] \\
&= \gamma^2 \alpha'^3 \Big[ (a_{AB} a_{CD})^3 \underbrace{\left( \frac{a_{AB} a_{CD}}{s_{A+B}} + \frac{a_{BC} a_{DA}}{s_{B+C}} \right)}_{=0 on-shell} \\
&\quad + (a_{AC} a_{BD})^3 \underbrace{\left( \frac{a_{AC} a_{BD}}{s_{A+C}} + \frac{a_{CB} a_{DA}}{s_{B+C}} \right)}_{=0 on-shell} \\
&\quad -3 a_{AB} a_{CD} a_{AC} a_{BD} \frac{a_{BC}^2 a_{DA}^2}{s_{B+C}} \Big] \\
&= 3\gamma^2 \alpha'^3 \frac{a_{DA}^2 a_{BC}^2}{s_{B+C}} a_{AB} a_{AC} a_{CD} a_{DB}.
\end{aligned}$$

## 5.2 Streuamplituden von N Gluonen und einem Graviton

In diesem Kapitel werden per Rekursionsformel alle Streuamplituden mit einem Graviton und beliebig vielen Gluonen berechnet. Die Zerlegung der Amplitude in linear unabhängige gruppentheoretische Faktoren erfolgt wie im Kapitel zur Berechnung der reinen SDYM-Amplituden, da das zusätzliche Graviton diese Faktoren nicht verändert. Die Amplitude $< N+1 >$ lautet

$$< N+1 > \;=\; \sum_{\pi \epsilon S_{N-2}} \mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{A} & & \dots & \mathrm{N} \\ \pi(\mathrm{B}) & \pi(\mathrm{C}) & & \pi(\mathrm{N\text{-}1}) \end{smallmatrix}\right) \mathcal{L}^{A\pi(B)\dots\pi(N-1)N},$$

wobei die Koeffizienten $\mathcal{L}$ nun zu berechnen sind. Diese bestehen aus den SDYM-Graphen mit N Beinen, an denen an jede mögliche Stelle ein Graviton angefügt wurde:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}^{ABC\dots N,y} &= \sum_{l=1}^{N-1} \mathcal{X}^{AB\dots l(-L)}_{Loff-shell} \frac{(a_{yL})^2}{s_L s_{y+L}} \mathcal{X}^{(L+y)(l+1)\dots N}_{(L+y)off-shell} \\ &\quad + zykl(A,B,C,\dots,N). \end{aligned}$$

Das Bein $y$ ist das hinzugefügte Graviton, $A, B\dots N$ bezeichnen die Gluonen. Das Graviton wird per Vertex $(a_{yL})^2$ an das Bein L gehängt, der erste Teil der Formel ist dem Ausdruck zur Berechnung der reinen SDYM-Amplituden sehr ähnlich. In der Summe $\mathcal{L}^{AB\dots N,y}$ sind alle Graphen enthalten, deren SDYM-Impulse in zyklischer Reihenfolge $AB\dots N$ angeordnet sind. Da $y$ in diesen Graphen an beliebiger Stelle stehen kann, sind außerdem alle Graphen mitzuzählen, deren Implulse $A, B\dots N$ zyklisch vertauscht sind. Bei Summation von $l = 1\dots N-1$ erhält man auf diese Weise gerade jeden Graphen doppelt, daher der Faktor 2 auf der linken Seite. Für $l = 1$ zum Beispliel ist der Summand inklusive der zyklischen Vertauschungen gleich demjenigen für $l = N-1$, der für $l = 2$ ist identisch mit dem für $l = N-2$ und so weiter. Es wäre also ausreichend, die Summme von $l = 1$ bis $l = (N-1)/2$ für gerade $N-1$ und bis $l = N/2$ für ungerade $N-1$ laufen zu lassen. Da die oben benutzte Form unabhängig vom Wert von $N-1$ ist, wird sie im Folgenden verwendet.
Die Funktionen $\mathcal{X}$ sind bekannt, Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}^{AB\dots N,y} &= \frac{a_{AB}a_{BC}a_{CD}\dots a_{(N-1)N}}{s_{A+B}s_{B+C}s_{C+D}\dots s_{(N-1)+N}} \\ &\quad \times \sum_{l=1}^{N-1} (a_{y(A+\dots+l)})^2 \frac{s_{l+(l+1)}}{a_{l(l+1)}} + zykl(A,B,C,\dots,N) \\ &= \frac{a_{AB}a_{BC}a_{CD}\dots a_{(N-1)N}a_{NA}}{s_{A+B}s_{B+C}s_{C+D}\dots s_{(N-1)+N}s_{N+A}} \\ &\quad \times \sum_{u=1}^{N} \sum_{l=u}^{u+N-2} (a_{y(u+\dots+l)})^2 \frac{s_{l+(l+1)}s_{(u-1)+u}}{a_{l(l+1)}a_{(u-1)u}} \\ &=: \frac{a_{AB}a_{BC}a_{CD}\dots a_{(N-1)N}a_{NA}}{s_{A+B}s_{B+C}s_{C+D}\dots s_{(N-1)+N}s_{N+A}} M \end{aligned}$$

$$M = 4\sum_{u=1}^{N} \sum_{l=u}^{u+N-2} (a_{y(u+\dots+l)})^2 \left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}} - \frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)\left(\frac{k_{l(l-1)}}{a_{l(l-1)}} - \frac{k_{(l+1)l)}}{a_{(l+1)l}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\sum_{u=1}^{N}\left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}-\frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)\left(\sum_{l=u}^{u+N-2}(a_{y(u+\ldots+l)})^2\frac{k_{l(l-1)}}{a_{l(l-1)}}\right.\\
&\quad\left.-\sum_{l=u+1}^{u+N-1}(a_{y(u+\ldots+(l-1))})^2\frac{k_{l(l-1)}}{a_{l(l-1)}}\right)\\
&= 4\sum_{u=1}^{N}\left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}-\frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)\left(\sum_{l=u+1}^{u+N-1}\left[(a_{y(u+\ldots+l)})^2-(a_{y(u+\ldots(l-1))})^2\right]\frac{k_{l(l-1)}}{a_{l(l-1)}}\right.\\
&\quad\left.+(a_{yu})^2\frac{k_{u(u-1)}}{a_{u(u-1)}}-(a_{y(u+\ldots+(u+N-2))})^2\frac{k_{(u-1)(u-2)}}{a_{(u-1)(u-2)}}\right)\\
&= 4\sum_{u=1}^{N}\left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}-\frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)\left(\sum_{l=u+1}^{u+N-2}\frac{k_{l(l-1)}}{a_{l(l-1)}}a_{yl}\left[2a_{y(u+\ldots+(l-1))}+a_{yl}\right]\right.\\
&\quad\left.+(a_{yu})^2\frac{k_{u(u-1)}}{a_{u(u-1)}}-(a_{y(u-1)})^2\frac{k_{(u-1)(u-2)}}{a_{(u-1)(u-2)}}\right)\\
&= 4\sum_{u=1}^{N}\left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}-\frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)\left(\sum_{l=u+1}^{u+N-2}(-k_{ly})\left[2a_{y(u+\ldots+(l-1))}+a_{yl}\right]\right.\\
&\quad\left.+a_{uy}k_{uy}+a_{y(u-1)}k_{(u-1)y}\right)\\
&= 4\sum_{u=1}^{N}\left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}-\frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)\left(\sum_{l=u}^{u+N-2}a_{ly}k_{ly}+\sum_{l=u+1}^{u+N-2}2a_{(u+\ldots+(l-1))y}k_{ly}+a_{y(u-1)}k_{(u-1)y}\right)\\
&= 4\sum_{u=1}^{N}\left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}-\frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)\left(\sum_{l=u}^{u+N-1}a_{ly}k_{ly}+\sum_{l=u+1}^{u+N}2a_{(u+\ldots+(l-1))y}k_{ly}\right).
\end{aligned}
$$

Die beiden Terme mit den unterschiedlichen Summen über $l$ werden getrennt berechnet:

$$
\begin{aligned}
&4\sum_{u=1}^{N}\left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}-\frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)\sum_{l=u}^{u+N-1}a_{ly}k_{ly}=4\sum_{u=1}^{N}\sum_{l=0}^{N-1}\left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}-\frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)a_{(l+u)y}k_{(l+u)y}\\
&=4\sum_{u=1}^{N}\sum_{l=0}^{N-1}\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}\left(a_{(l+u)y}k_{(l+u)y}-a_{(l+u-1)y}k_{(l+u-1)y}\right)\\
&=4\sum_{u=1}^{N}\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}\underbrace{\left(\sum_{l=1}^{N}a_{(l+u-1)y}k_{(l+u-1)y}-\sum_{l=0}^{N-1}a_{(l+u-1)y}k_{(l+u-1)y}\right)}_{=0}=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&8\sum_{u=1}^{N}\left(\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}-\frac{k_{u(u+1)}}{a_{u(u+1)}}\right)\sum_{l=u+1}^{u+N}a_{(u+\ldots+(l-1))y}k_{ly}\\
&=8\sum_{u=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}\left(a_{(u+\ldots+(u+l-1))y}k_{(u+l)y}-a_{((u-1)+\ldots+(u+l-2))y}k_{(u+l-1)y}\right)\\
&=8\sum_{u=1}^{N}\frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}}\left(\sum_{l=2}^{N+1}a_{(u+\ldots+(u+l-2))y}k_{(u+l-1)y}-\sum_{l=1}^{N}a_{((u-1)+\ldots+(u+l-2))y}k_{(u+l-1)y}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 8 \sum_{u=1}^{N} \frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}} \sum_{l=1}^{N} \Big( a_{(u+\ldots+(u+l-2))y} k_{(u+l-1)y} - a_{((u-1)+\ldots+(u+l-2))y} k_{(u+l-1)y} \Big) \\
&= 8 \sum_{u=1}^{N} \frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}} \sum_{l=1}^{N} a_{(u-1)y} k_{(l+u-1)y} = 8 \sum_{u=1}^{N} \frac{k_{(u-1)u}}{a_{(u-1)u}} (-) a_{(u-1)y} k_{yy} \\
&= 8 \sum_{u=1}^{N} \frac{k_{(u-1)y}}{a_{(u-1)y}} (-) a_{(u-1)y} k_{yy} = 8 \sum_{u=1}^{N} (-) k_{(u-1)y} k_{yy} = 8 (k_{yy})^2 = 2 k_y^4.
\end{aligned}
$$

Also ist $M = 2k_y^4$ und die Formel für $\mathcal{L}$ lautet falls $k_y$ off-shell ist:

$$
\mathcal{L}^{AB\ldots N,y}_{y off-shell} = \frac{a_{AB} a_{BC} a_{CD} \cdots a_{(N-1)N} a_{NA}}{s_{A+B} s_{B+C} s_{C+D} \cdots s_{(N-1)+N} s_{N+A}} k_y^4.
$$

Dies ist on-shell Null, also verschwinden alle tree-level Amplituden mit N Gluonen (N>2) und einem Graviton. Aus der Stringtheorie ist nur die Amplitude $< 3+1 >$ (siehe Kap. 5.1.) bekannt. Nach dem Ergebnis der Feldtheorie kann vermutet werden, daß alle tree-niveau Streuamplituden mit N offenen Strings und einem geschlossenen String verschwinden.
Für die Feldtheorie steht noch die Berechnung aller tree-level Amplituden mit mehr als einem Graviton und N Gluonen aus. Dafür wären allerdings unendlich viele Rekursionsformeln nötig, diese Methode ist also zur Berechnung *aller* gemischten Amplituden nicht geeignet.

# 6 Loop Amplituden von SDG und SDYM

Die mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren quantisierten Theorien von SDYM und SDG haben wegen der Helizitäten der Felder keine Streudiagramme mit mehr als einem Loop. Die Zwei- und Dreipunktfunktionen auf Einloop Niveau werden im folgenden explizit berechnet. Darüberhinaus sind für SDYM [20],[16],[21],[22] und für SDG [23] mit Hilfe von Rekursionsformeln alle Einloop Graphen mit mindestens vier Beinen berechnet worden und es zeigt sich, daß keine Divergenzen auftreten. Für die gemischte Theorie ist bisher kein Ergebnis bekannt.

## 6.1 SDYM

### 6.1.1 Einloop Zweipunktfunktion

Die Ein-Loop-Zweipunktfunktion der Leznov-Felder $\phi_{--}$ mit den äußeren Impulsen $k_A$ und $-k_A$ und dem im Loop umlaufenden Impuls $p$ lautet

$$< 2 >_{1-Loop} \;=\; g^2 f^{PAX} f^{XBP} \int d^4p \frac{-(a_{PA})^2}{p^2(k_A+p)^2}.$$

Zur Auswertung des Integrals werden Feynman-Parameter eingeführt. Die allgemeine Formel dazu ist (siehe Anhang)

$$\frac{1}{D_1^{a_1}\dots D_l^{a_l}} \;=\; \frac{\Gamma(\sum_n a_n)}{\prod_n \Gamma(a_n)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_l \frac{\delta(1-\sum_n x_n)\prod_n x_n^{a_n-1}}{(D_1x_1+\dots+D_lx_l)^{(\sum_n a_n)}},$$

mit $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Wegen der Deltafunktion kann eine Integration sofort ausgeführt werden und das obige Integral ergibt

$$< 2 >_{1-Loop} \;=\; -f^{PAX} f^{XBP} g^2 \int d^4p \int_0^1 dx \frac{(a_{PA})^2}{(p^2+2pk_A(1-x)+k_A^2(1-x))^2}.$$

Durch eine Substitution der Impulsvariable $p$ kann das Integral auf eine Form gebracht werden, dessen Lösung bekannt ist. Damit eine solche Substitution erlaubt ist, muß das Integral konvergent sein, in vier Dimensionen ist dies offensichtlich für große Werte von $p$ nicht der Fall. Ein übliches Verfahren, um dieses Problem zu umgehen ist dimensionale Reduktion [19]. Dabei wird das Integral nicht in vier, sondern in (2w)-Dimensionen gelöst, wobei der Parameter w so gewählt wird, daß das Integral für große Impulse $p$ konvergiert. Aus dimensionalen Gründen wird für die Kopplungekonstante $g \to g\mu^{2(2-w)}$ eingesetzt. Damit das Integral auch für sehr kleine Impulse endlich ist, wird angenommen, daß der äußere Impuls $k_A$ off-shell ist.
Nun wird die Substitution $p^m = p'^m + k_A^m(1+x)$ durchgeführt (die Indizes $m$ sind Vektorindizes, es wird nicht wie in den vorherigen Kapiteln Spinorschreibweise benutzt):

$$\begin{aligned} < 2 >_{1-Loop} \;=\; & -f^{PAX} f^{XBP} g^2 \mu^{2(2-w)} \\ & \int d^{2w}p' \int_0^1 dx \frac{(a_{P'A})^2}{(p'^2+2p'k_A+k_A^2(1-x-x^2))^2} \end{aligned}$$

Dieses Integral hat in 2w-dimensionalen (euklidischen) Kugelkoordinaten aufgeschrieben eine bekannte Lösung[19]. Als nächstes ist also eine Wickrotation der beiden Zeitkomponenten der Impulsvariable $p$ nötig, damit das Impulsquadrat euklidisch und damit positiv definit ist. Die rotierten Variablen sind

$$(\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3) \quad = \quad (ip'_0, p'_1, ip'_2, p'_3).$$

Die Impulsintegration kann jetzt ausgeführt werden mit der Formel

$$\begin{aligned} \int d^{2w}\hat{p} \frac{\hat{p}^m \hat{p}^n}{(\hat{p}^2 + 2\hat{p}l + M^2)^A} &= \frac{\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}} \Big( \Gamma(A-w) l^m l^n \\ &\quad + \frac{(-1)^{|n|+1}}{2} \delta^{mn} \Gamma(A-1-w) M^2 \Big), \end{aligned}$$

diese Form gilt nur in 2+2 Dimensionen, in 4+0 Dimensionen würde beispielsweise der Ausdruck $(-1)^{n+1}$ durch eine Eins ersetzt. Mit $A = 2$ und $M^2 = k_A^2(x - x^2)$ lautet das Integral

$$\begin{aligned} \int d^{2w}\hat{p} \frac{(a_{\hat{P}A})^2}{(\hat{p}^2 + 2\hat{p}k_A + k_A^2(1 - x - x^2))^2} &= \frac{\pi^w}{(k_A^2(x - x^2))^{2-w}} \Big( \Gamma(2-w)(a_{AA})^2 \\ + \frac{1}{2}\Gamma(1-w) k_A^2 (x - x^2) \Big( (k_{A+\dot{-}})^2 - (k_{A+\dot{-}})^2 &+ (k_{A+\dot{+}})^2 - (k_{A+\dot{+}})^2 \Big) = 0. \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet wegen $a_{AA} = k_{A+\dot{+}} k_{A+\dot{-}} - k_{A+\dot{-}} k_{A+\dot{+}} = 0$. Der zweite Term tritt nur auf, wenn auf der linken Seite der Gleichung im Zähler etwas $\propto \hat{p}^m \hat{p}^m$ steht (keine Summation über $m$!). Mit

$$\begin{aligned} (a_{\hat{P}A})^2 &= (\hat{p}_0 + \hat{p}_3)^2 (k_{A+\dot{-}})^2 + (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)^2 (k_{A+\dot{+}})^2 \\ &\quad + 2(\hat{p}_0 + \hat{p}_3)(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) k_{A+\dot{-}} k_{A+\dot{+}} \end{aligned}$$

erhält man wegen des Terms $(-1)^{n+1}$ gerade unterschiedliche Vorzeichen für $(\hat{p}_0)^2$ und $(\hat{p}_3)^2$ bzw. $(\hat{p}_1)^2$ und $(\hat{p}_2)^2$ bei sonst gleichem Vorfaktor. Also ist auch der zweite Term Null und die Einloop Zweipunktfunktion verschwindet:

$$< 2 >_{1-Loop} = 0.$$

Die Einloop Zweipunktfunktion offener Strings verschwindet ebenfalls. In der Stringtheorie ist nur eine Berechnung von on-shell Amplituden möglich. Eine Zweipunktfunktion hat daher wegen der Masselosigkeit der Anregung des Strings einen verschwindenden Vorfaktor.

### 6.1.2 Einloop Dreipunktfunktion

Die Einloop Dreipunktfunktion setzt sich aus zwei Graphen zusammen, der im Loop umlaufende Impuls heißt wieder $p$, die äußeren Beine haben die Impulse $k_A, k_B$ und $k_C$:

$$\begin{aligned} < 3 >_{1-Loop} &= g^3 f^{PAX} f^{XBY} f^{YCP} \int d^4p \frac{a_{PA} a_{(P+A)B} a_{PC}}{p^2 (p + k_A)^2 (p - k_C)^2} \\ &\quad + g^3 f^{PAX} f^{XCY} f^{YBP} \int d^4p \frac{a_{PA} a_{(P+A)C} a_{PB}}{p^2 (p + k_A)^2 (p - k_B)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g^3 f^{PAX} f^{XBY} f^{YCP} \int d^4p \left[ \frac{a_{PA} a_{(P+A)B} a_{PC}}{p^2(p+k_A)^2(p-k_C)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_{PA} a_{(P+A)C} a_{PB}}{p^2(p+k_A)^2(p-k_B)^2} \right] \\
&=: f^{PAX} f^{XBY} f^{YCP} (A_1 + A_2)
\end{aligned}
$$

Zunächst wird der erste Ausdruck $A_1$ berechnet. Dazu werden wie bei der Zweipunktfunktion Feynmanparameter eingeführt. Der Nenner von $A_1$ lautet

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p^2(p+k_A)^2(p-k_C)^2} &= 2\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \frac{\delta(1-x_1-x_2-x_3)}{(p^2x_1 + (p+k_A)^2x_2 + (p-k_C)^2x_3)^3} \\
&= 2\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{1}{(p^2+2p(k_Ax_2 - k_C(1-x_1-x_2)) + k_A^2x_2 + k_C^2(1-x_1-x_2))^3}.
\end{aligned}
$$

Um als nächstes eine Substitution der Impulsvariable durchführen zu können muß das Integral an beiden Impulsenden konvergieren, daher wird wieder Anzahl der Raumzeitdimensionen von vier auf 2w geändert. Für sehr kleine Impulse $p$ ist das Integral noch divergent, falls alle äußeren Impulse on-shell sind. Für off-shell Werte dieser Impulse bekommt das Integral aber eine sehr komplizierte Form. Daher werden zur Vereinfachung in den folgenden Rechnungen alle Beine on-shell gesetzt und im Nenner des Integrals wird eine "Masse" $m^2$ addiert, die am Ende der Rechnungen gegen Null gesetzt wird. Nun kann die Impulsvariable substituiert werden, mit

$$
p = p' + k_A(1-x_2) + k_C(1-x_1-x_2)
$$

hat das zu berechnende Integral die Form

$$
\begin{aligned}
A_1 &= g^3\mu^{3(2-w)} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int d^{2w}p' \frac{(a_{P'A} + a_{AB}(1-x_1-x_2))}{(p'^2 + 2p'k_A + m^2)^3} \\
&\quad \times (a_{P'B} + a_{AB}(1+x_1))(a_{P'C} - a_{AB}(1-x_2)).
\end{aligned}
$$

Ausmultipliziert hat das Integral acht Summanden, die nun einzeln berechnet werden. Zur Integration über den Impuls wird wieder eine Wickrotation $p'^m \to \hat{p}^m$ durchgeführt.

Zunächst wird der Summand mit dem Zähler $\propto \hat{p}^3 : a_{\hat{P}A} a_{\hat{P}B} a_{\hat{P}C}$ betrachtet. Die allgemeine Lösung eines Integrals dieser Form lautet

$$
\begin{aligned}
\int d^{2w}\hat{p} \frac{\hat{p}^m \hat{p}^n \hat{p}^k}{(\hat{p}^2 + 2\hat{p}l + l^2 + M^2)^A} &= -\frac{\pi^w}{\Gamma(A)} \left[ l^m l^n l^k \frac{\Gamma(A-w)}{(M^2)^{A-w}} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(A-1-w)}{(M^2)^{A-1-w}} \Big( (-1)^{|k|+1} \delta^{km} l^n \\
&\quad \left. + (-1)^{|k|+1} \delta^{kn} l^m + (-1)^{|n|+1} \delta^{mn} l^k \Big) \right].
\end{aligned}
$$

Der erste Term auf der rechten Seite liefert einen verschwindenden Beitrag, da der Ausdruck $\propto a_{AA}$ ist. Um den Rest zu berechnen wird zunächst der Zähler des Integrals explizit aufgeschrieben:

$$\begin{aligned}
a_{\hat{P}A}a_{\hat{P}B}a_{\hat{P}C} &= ((\hat{p}_0+\hat{p}_3)k_{A\dot{+}-} - (\hat{p}_1+\hat{p}_2)k_{A\dot{+}+}) \\
&\quad ((\hat{p}_0+\hat{p}_3)k_{B\dot{+}-} - (\hat{p}_1+\hat{p}_2)k_{B\dot{+}+}) \\
&\quad ((\hat{p}_0+\hat{p}_3)k_{C\dot{+}-} - (\hat{p}_1+\hat{p}_2)k_{C\dot{+}+}) \\
&= (\hat{p}_0+\hat{p}_3)^3 k_{A\dot{+}-}k_{B\dot{+}-}k_{C\dot{+}-} - (\hat{p}_1+\hat{p}_2)^3 k_{A\dot{+}+}k_{B\dot{+}+}k_{C\dot{+}+} \\
&\quad -(\hat{p}_0+\hat{p}_3)^2(\hat{p}_1+\hat{p}_2)\Big[k_{A\dot{+}-}k_{B\dot{+}-}k_{C\dot{+}+} + k_{A\dot{+}-}k_{C\dot{+}-}k_{B\dot{+}+} \\
&\quad +k_{C\dot{+}-}k_{B\dot{+}-}k_{A\dot{+}+}\Big] \\
&\quad +(\hat{p}_1+\hat{p}_1)^2(\hat{p}_0+\hat{p}_3)\Big[k_{A\dot{+}+}k_{B\dot{+}+}k_{C\dot{+}-} + k_{A\dot{+}+}k_{C\dot{+}+}k_{B\dot{+}-} \\
&\quad +k_{C\dot{+}+}k_{B\dot{+}+}k_{A\dot{+}-}\Big].
\end{aligned}$$

Zu jedem Term $\propto (\hat{p}_0)^3$ existiert ein Term $\propto (\hat{p}_3)^3$ mit anderem Vorzeichen und sonst gleichem Vorfaktor, so daß diese Terme sich wegheben. Das gleiche gilt für die Ausdrücke $\propto (\hat{p}_1)^3$ und $(\hat{p}_2)^3$. Es bleiben noch die Terme, die quadratisch in den Impulsen sind. Dort gilt aber das gleiche wie bei den kubischen Termen und das ganze Integral verschwindet.
Als nächstes sind die Ausdrücke mit einem Zähler $\propto \hat{p}^2$ an der Reihe, das sind die drei Terme $\propto a_{\hat{P}A}a_{\hat{P}B}a_{AB}(1-x_x); a_{\hat{P}B}a_{\hat{P}C}a_{AB}(1-x_1-x_2);$
$a_{\hat{P}A}a_{\hat{P}C}a_{AB}(1+x_1)$. Diese Integrale lassen sich mit der Formel, die schon zur Berechnung der Zweipunktfunktion benutzt wurde, lösen. Der erste und der dritte Term verschwinden, da beide $\propto a_{AA}$ sind. Übrig bleibt der zweite Ausdruck, die Impulsintegration ergibt

$$-g^3\mu^{3(2-w)}(a_{AB})^3\pi^w\Gamma(3-w)\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\frac{(1-x_1-x_2)}{(m^2)^{3-w}}.$$

Nach der Integration über die Feynman-Parameter ist auch dieser Term Null.
Es gibt drei Summanden $\propto p: -a_{\hat{P}A}(a_{AB})^2(1+x_1)(1-x_2); -a_{\hat{P}B}(a_{AB})^2(1-x_1-x_2)(1-x_2)$ und $a_{\hat{P}C}(a_{AB})^2(1+x_1)(1-x_1-x_2)$. Die Integrale lassen sich lösen mit der Formel

$$\int d^{2w}p\frac{\hat{p}^m}{(\hat{p}^2+2\hat{p}l+l^2+M^2)^A} = -\frac{\pi^w\Gamma(A-w)}{(M^2)^{A-w}\Gamma(A)}l^m.$$

Der erste der drei obigen Terme ergibt Null, da $\propto a_{AA}$. Die anderen zwei Ausdrücke verschwinden zunächst nicht, die Integration ergibt

$$g^3\mu^{3(2-w)}(a_{AB})^3\pi^w\Gamma(3-w)\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\frac{(1-x_1-x_2)[(1-x_2)+(1+x_1)]}{(m^2)^{3-w}},$$

nach Ausführen der verbleibenden Integrationen ist auch dieser Term Null.
Das letzte verbleibende Integral ist $\propto -(a_{AB})^3(1-x_1-x_2)(1+x_1)(1-x_2)$, zur Berechnung wurde die Formel

$$\int d^{2w}\hat{p}\frac{1}{(\hat{p}^2+M^2)^A} = \frac{\pi^w\Gamma(A-w)}{(M^2)^{A-w}\Gamma(A)}$$

benutzt. Damit bleibt übrig:

$$g^3\mu^{3(2-w)}(a_{AB})^3\pi^w\Gamma(3-w)\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\frac{(1-x_1-x_2)(1-x_2)(1+x_1)}{(m^2)^{3-w}}.$$

Da der Ausdruck für vier Raumzeitdimensionen, also für $w=2$, endlich ist, kann dieser Wert einfach wieder eingesetzt werden. Nach der Integration über $x_1$ und $x_2$ lautet das Ergebnis für den Einloop Graphen

$$A_1 \quad = \quad g^3(a_{AB})^3\frac{\pi^2}{12}\frac{1}{m^2}.$$

Der zweite Graph $A_2$, der noch für die gesamte Dreipunktfunktion dazuaddiert werden muß ist der gleiche mit den Impulsen $k_A$ und $k_B$ vertauscht. Dies gibt das gleiche Ergebnis mit anderem Vorzeichen. Da in der Dreipunktfunktion dieser Graph mit einem $(-)$-Zeichen beiträgt, ist die Einloop Dreipunktfunktion zweimal der obige Ausdruck:

$$<3>_{1-Loop} \quad = \quad f^{PAX}f^{XBY}f^{YCP}g^3(a_{AB})^3\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{m^2}.$$

Diese Amplitude divergiert für $m^2\to 0$, solche IR-Divergenzen können nicht wie UV-Divergenzen renormiert werden. Ein Vergleich mit der Stringtheorie ist nicht möglich, da die Einloop Dreipunktfunktion offener Strings bisher nicht bekannt ist.

## 6.2 SDG

### 6.2.1 Einloop Zweipunktfunktion

Die Berechnung der SDG Einloop Zweipunktfunktion erfolgt analog zur Rechnung der entsprechenden SDYM Amplitude. Der im Loop umlaufende Impuls ist wieder $p$, das äußere Bein hat Impuls $k_A$. Die Amlitude lautet

$$<2>_{1-Loop} \quad = \quad g^4\int d^4p\frac{(a_{AP})^4}{p^2(p+k_A)^2}.$$

Es wird wie im vorherigen Kapitel ein Feynman-Parameter eingeführt und die Anzahl der Raumzeitdimensionen $d=2w$ eingesetzt. Der Impuls $k_A$ wird wieder als off-shell-Impuls betrachtet.

$$<2>_{1-Loop} \quad = \quad \kappa^2\mu^{2(2-w)}\int d^{2w}p\int_0^1 dx\frac{(a_{PA})^4}{(p^2+2pk_A(1-x)+k_A^2(1-x))^2}.$$

Wie zur Berechnung der SDYM Amplitude wird die Impulsvariable durch $p^m = p'^u + k_A^m(1+x)$ substituiert. Als erstes wird dann die Integration über die wickrotierte Impulsvariable $\hat{p}$ durchgeführt, das zu berechnende Integral ist

$$<2>_{1-Loop} \quad = \quad \kappa^2\mu^{2(2-w)}\int d^{2w}\hat{p}\frac{(a_{\hat{P}A})^4}{(\hat{p}^2+2\hat{p}k_A+k_A^2(1-x-x^2))^2}.$$

Die Integration erfolgt mithilfe der Formel

$$\int d^{2w}\hat{p}\frac{\hat{p}^m\hat{p}^n\hat{p}^k\hat{p}^r}{(\hat{p}^2+2\hat{p}l+l^2+M^2)^A} = \frac{\pi^w}{\Gamma(A)}\Bigg[\frac{\Gamma(A-w)}{(M^2)^{A-w}}l^m l^n l^k l^r$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\Gamma(A-1-w)}{(M^2)^{A-1-w}}\Big((-1)^{|k|+1}\delta^{km}l^n l^r + (-1)^{|k|+1}\delta^{kn}l^m l^r + (-1)^{|n|+1}\delta^{mn}l^k l^r$$
$$+(-1)^{|k|+1}\delta^{rn}l^m l^k + (-1)^{|r|+1}\delta^{rk}l^m l^n + (-1)^{|k|+1}\delta^{km}l^n l^r\Big)$$
$$+\frac{1}{4}\frac{\Gamma(A-2-w)}{(M^2)^{A-2-w}}\Big((-1)^{|k|+|r|+2}\delta^{km}\delta^{rn} + (-1)^{|k|+|r|+2}\delta^{kn}\delta^{rm}$$
$$+(-1)^{|m|+|r|+2}\delta^{mn}\delta^{rk}\Big)\Bigg].$$

Der Teil $\propto \Gamma(A-w)$ verschwindet, da er mit dem Impulsfaktor $(a_{AA})^4 = 0$ multipliziert wird. Auch die restlichen Terme sind wegen der Form des Vertex $a_{A\hat{P}}$ Null.

$$\begin{aligned}(a_{A\hat{P}})^4 &= (\hat{p}_0+\hat{p}_3)^4(k_{A+\dot{-}})^4 - 4(\hat{p}_0+\hat{p}_3)^3(\hat{p}_1+\hat{p}_2)(k_{A+\dot{-}})^3 k_{A+\dot{+}} \\ &+ 6(\hat{p}_0+\hat{p}_3)^2(\hat{p}_1+\hat{p}_2)^2(k_{A+\dot{-}})^2(k_{A+\dot{+}})^2 \\ &- 4(\hat{p}_0+\hat{p}_3)(\hat{p}_1+\hat{p}_2)^3 k_{A+\dot{-}}(k_{A+\dot{+}})^3 + (\hat{p}_1+\hat{p}_2)^4(k_{A+\dot{+}})^4\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch in den Impulskomponenten $\hat{p}_0$ und $\hat{p}_3$, dadurch ergeben sich immer zwei identische Terme mit unterschiedlichem Vorzeichen. Das gleiche gilt fuer die Impulskomponemten $\hat{p}_1$ und $\hat{p}_2$. Die Einloop Zweipunktfunktion verschwindet also,

$$<2>_{1-Loop} = 0.$$

Die Einloop Zweipunktfunktion geschlossener Strings ist (aufgrund der gleichen Begründung wie für die Einloop Zweipunktfunktion offener Strings) ebenfalls Null.

### 6.2.2 Einloop Dreipunktfunktion

Die Einloop Dreipunktfunktion lautet

$$\begin{aligned}<3>_{1-Loop} &= \kappa^3\int d^4p\Bigg[\frac{(a_{PA})^2(a_{(P+A)B})^2(a_{PC})^2}{p^2(p+k_A)^2(p-k_C)^2} \\ &\quad+\frac{(a_{PA})^2(a_{(P+A)C})^2(a_{PB})^2}{p^2(p+k_A)^2(p-k_B)^2}\Bigg] \\ &=: B_1+B_2.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist im Zähler das Quadrat der entsprechenden SDYM Amplitude, sonst sind die Amplituden gleich. Es wird zunächst $B_1$ berechnet. Nach Einführung von Feynman Parametern, Ersetzen der Dimension durch $2w$, Substitution $p = p'+k_A(1-x_2)+k_C(1-x_1-x_2)$ und Wickrotation hat der Ausdruck mit allen äußeren Impulsen on-shell (analog zur SDYM Amplitude)

$$\begin{aligned} B_1 &= \kappa^3\mu^{3(2-w)}\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\int d^{2w}p'\frac{(a_{P'A}+a_{AB}(1-x_1-x_2))^2}{(p'^2+2\hat{p}k_A+m^2)^3} \\ &\quad\times(a_{P'B}+a_{AB}(1+x_1))^2(a_{P'C}-a_{AB}(1-x_2))^2. \end{aligned}$$

Der Zähler hat 27 Summanden, eine explizite Berechnung der Integrale sehr umständlich und auch nicht nötig. Es werden nun die verschiedenen Potenzen von $\hat{p}$ des Zählers getrennt betrachtet. Die benötigten Formeln sind bis zu $\propto \hat{p}^4$ bekannt, es bleibt für jedes Impulsintegral jeweils nur der Term $\propto \Gamma(3-w)$ übrig, alle anderen sind Null.

In der Ordnung $\propto \hat{p}^0$ erhält man nach einsetzen in die entsprechende Formel

$$\kappa^3\mu^{3(2-w)}(a_{AB})^6\pi^w\Gamma(3-w)\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\frac{(1-x_1-x_2)^2(1-x_2)^2(1+x_1)^2}{(m^2)^{3-w}}.$$

Die Summanden mit einem Zähler $\propto \hat{p}$ ergeben die nichtverschwindenden Beiträge

$$\kappa^3\mu^{3(2-w)}(a_{AB})^6\pi^w\Gamma(3-w)\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\left[\frac{-2(1-x_1-x_2)^2(1-x_2)^2(1+x_1)}{(m^2)^{3-w}}\right.$$
$$\left.-\frac{2(1-x_1-x_2)^2(1-x_2)(1+x_1)^2}{(m^2)^{3-w}}\right].$$

Die Summanden mit einem Zähler $\propto \hat{p}^2$ liefern

$$\kappa^3\mu^{3(2-w)}(a_{AB})^6\pi^w\Gamma(3-w)\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\left[\frac{4(1+x_1)(1-x_2)(1-x_1-x_2)^2}{(m^2)^{3-w}}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-x_1-x_2)^2(1-x_2)^2+(1-x_1+x_2)^2(1+x_1)^2}{(m^2)^{3-w}}\right].$$

Die Terme mit einem Zähler $\propto \hat{p}^3$ liefern

$$\kappa^3\mu^{3(2-w)}(a_{AB})^6\pi^w\Gamma(3-w)\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\left[\frac{-2(1-x_1-x_2)^2(1+x_1)}{(m^2)^{3-w}}\right.$$
$$\left.-\frac{2(1-x_1-x_2)^2(1-x_2)}{(m^2)^{3-w}}\right].$$

Schliesslich bleiben noch die Beiträge $\propto \hat{p}^4$ :

$$\kappa^3\mu^{3(2-w)}(a_{AB})^6\pi^w\Gamma(3-w)\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\frac{(1-x_1-x_2)^2}{(m^2)^{3-w}}.$$

Für die Terme $\propto (\hat{p})^5, (\hat{p})^6$ lassen sich wie für die anderen Potenzen die entsprechenden Formeln herleiten. Auch hier bleiben nach der Impulsintegration nur die Anteile $\propto \Gamma(3-w)$ übrig, diese werden aber immer mit $a_{AA}$ multipliziert und sind daher Null. Die Integration über die Variablen $x_1, x_2$ liefert den Wert $\frac{13}{360}$ und das Ergebnis lautet mit $w = 2$ :

$$B_1 \;=\; \kappa(a_{AB})^6 \pi^2 \frac{13}{360} \frac{1}{m^2}.$$

Das gleiche Ergebnis erhält man für den anderen Graphen $B_2$ und die Einloop Dreipunktfunktion ist

$$< 3 >_{1-Loop} \;=\; \kappa(a_{AB})^6 \pi^2 \frac{13}{180} \frac{1}{m^2}.$$

Die Einloop Stringamplitude von drei geschlossenen Strings hat denselben kinematischen Vorfaktor $(a_{AB})^6$ und ist ebenfalls IR-divergent [5].

# 7 Ergebnisse

In Kapitel 3 konnte bewiesen werden, daß auf tree-niveau alle SDYM Streuamplituden mit mehr als drei Beinen verschwinden. Dazu wurde zunächst explizit die “farbgeordnete” Amplitude $\mathcal{X}^{XABC}$ mit vier off-shell Beinen berechnet. Darauf aufbauend wurde eine Formel für alle farbgeordneten Amplituden $\mathcal{X}^{XAB...N}$ mit einem Bein off-shell postuliert und durch vollständige Induktion bewiesen. Werden alle Impulse on-shell gesetzt, so verschwinden die Funktionen $\mathcal{X}^{XAB...N}$. Dies bedeutet Verschwinden aller Streuamplituden von SDYM. Der Vergleich mit dem offenen N=2 String [4] zeigt eine Übereinstimmung aller tree-level Amplituden. SDYM ist also erwartungsgemäß die effektive Feldtheorie des offenen N=2 Strings.

In Kapitel 4 wurde gezeigt, daß der Beweis für die verschwindenden SDYM Streuamplituden mit nur geringen Änderungen auf SDG übertragbar ist. So konnte fast ohne neue Rechnungen gezeigt werden, daß auf tree-niveau auch die SDG Streuamplituden verschwinden. Die tree-level Amplituden des geschlossenen N=2 Strings verschwinden ebenfalls [4]. SDG ist damit die effektive Feldtheorie des geschlossenen N=2 Strings.

Einige gemischte Streuamplituden wurden in Kapitel 5 betrachtet. Es wurden alle gemischten Vierpunktfunktionen explizit berechnet, und für die Streuung von N Gluonen (N>2) mit einem Graviton konnte eine Rekursionsformel für die farbgeordneten Amplituden gefunden werden. Es ist allerdings nicht ratsam, die gemischten Amplituden vollständig mit Rekursionsformeln zu berechnen, da unendlich viele solcher Formeln dazu nötig wären. Alle bisher bekannten tree-level Amplituden der gemischten Stringtheorie [3] stimmen mit den berechneten gemischten Feldtheorie Amplituden überein. Es deutet alles darauf hin, daß auch die bisher unbekannten Amplituden gleich sind und SDG gekoppelt an SDYM somit die effektive Feldtheorie der gemischten N=2 Stringtheorie ist.

In Kapitel 6 wurden Streugraphen von SDG und SDYM mit einem Loop berechnet. Die jeweiligen Zweipunktfunktionen verschwinden, was mit dem Resultat der Stringtheorie übereinstimmt. Die Einloop Dreipunktfunktion von SDG und geschlossener Stringtheorie sind IR-divergent [5]. Die Ergebnisse von String- und Feldtheorie sind also zumindest für diese beiden Einloop Amplituden ähnlich. Es bleibt abzuwarten, ob die Einloop Diagramme geschlossener Strings mit mehr als vier Beinen mit denen der SDG vergleichbar sind. Da für offene Strings bisher keine Loop Amplituden bekannt sind, steht der Vergleich mit den SDYM Loop Amplituden noch aus.

# A Zerlegung des Riemanntensors

Der Riemanntensor wird in seine irreduziblen Teile aufgespalten, dies sind genau die Beiträge, die in den gepunkteten und in den ungepunkteten Spinorindizes symmetrisch sind. Der selbstduale und antiselbstduale Anteil des Riemanntensors sind antisymmetrisch in den letzten beiden (Vektor-) Indizes und können deshalb zerlegt werden in [11],[13]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)}{}^{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}\Gamma_{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta} &= \left(\varepsilon^{\delta\gamma}\mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)}{}^{(\dot\gamma\dot\delta)} + \varepsilon^{\dot\delta\dot\gamma}\mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)}{}^{(\gamma\delta)}\right)\Gamma_{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta} \\
&= 2\left(\mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)}{}^{(\dot\gamma\dot\delta)}\Gamma_{\dot\gamma\dot\delta} + \mathcal{R}_{(\dot\alpha\dot\beta)}{}^{(\gamma\delta)}\Gamma_{\gamma\delta}\right) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{(\alpha\beta)}{}^{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}\Gamma_{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta} &= \left(\varepsilon^{\delta\gamma}\mathcal{R}_{(\alpha\beta)}{}^{(\dot\gamma\dot\delta)} + \varepsilon^{\dot\delta\dot\gamma}\mathcal{R}_{(\alpha\beta)}{}^{(\gamma\delta)}\right)\Gamma_{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta} \\
&= 2\left(\mathcal{R}_{(\alpha\beta)}{}^{(\dot\gamma\dot\delta)}\Gamma_{\dot\gamma\dot\delta} + \mathcal{R}_{(\alpha\beta)}{}^{(\gamma\delta)}\Gamma_{\gamma\delta}\right) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{mit}\quad \mathcal{R}_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{\dot\gamma\dot\delta} &= \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{\varepsilon\dot\gamma}{}_{\varepsilon}{}^{\dot\delta} = -\varepsilon^{\dot\delta\dot\lambda}\bar\sigma_{cd}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\lambda}\mathcal{R}_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{cd}, \\
\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{\dot\gamma\dot\delta} &= \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon\dot\gamma}{}_{\varepsilon}{}^{\dot\delta} = -\varepsilon^{\dot\delta\dot\lambda}\bar\sigma_{cd}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\lambda}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{cd}, \\
\mathcal{R}_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{\gamma\delta} &= \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{\gamma\dot\varepsilon\delta}{}_{\dot\varepsilon} = \varepsilon^{\delta\lambda}\sigma_{cd\delta}{}^{\lambda}\mathcal{R}_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{cd}, \\
\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} &= \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\dot\varepsilon\delta}{}_{\dot\varepsilon} = \varepsilon^{\delta\lambda}\sigma_{cd\delta}{}^{\lambda}\mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{cd}
\end{aligned}
$$

und den äquivalenten Ausdrücken für die Lorentzgeneratoren:

$$
\Gamma_{\gamma}{}^{\delta} = \sigma_{cd\gamma}{}^{\delta}\Gamma_{cd\gamma}{}^{\delta} \quad , \quad \Gamma^{\dot\gamma}{}_{\dot\delta} = -\bar\sigma_{cd}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\delta}\Gamma_{cd}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\delta} \quad \text{u.s.w.}
$$

Die Matrizen $\Gamma^{\dot\gamma}{}_{\dot\delta}$ und $\Gamma_{\gamma}{}^{\delta}$ bilden eine Basis der Lorentzalgebra und wirken jeweils auf Spinoren mit gepunkteten bzw. ungepunkteten Indizes [11]. Der zweite Term des selbstdualen Anteils und der erste des antiselbstdualen Anteils sind bereits irreduzible Anteile des Riemanntensors. Wegen der Symmetrie

$$
\mathcal{R}_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta} = \mathcal{R}_{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}
$$

des Riemanntensors sind die beiden Ausdrücke bis auf die Reihenfolge der Indizes gleich:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{(\alpha\beta)(\dot\gamma\dot\delta)} &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}\left(\varepsilon^{\dot\rho\dot\lambda}\varepsilon^{\sigma\kappa}\mathcal{R}_{(\alpha\dot\lambda\beta)\dot\rho\kappa(\dot\gamma\sigma\dot\delta)}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon\gamma\delta\left(\varepsilon^{\dot\rho\dot\lambda}\varepsilon^{\sigma\kappa}\mathcal{R}_{\kappa(\dot\gamma\sigma\dot\delta)(\alpha\dot\lambda\beta)\dot\rho}\right) \\
&= \mathcal{R}_{(\gamma\delta)(\dot\alpha\dot\beta)}.
\end{aligned}
$$

Der erste Term des selbstdualen Anteils (11) des Riemanntensors muß noch weiter in seine irreduziblen Teile zerlegt werden. Wegen der oben schon erwähnten Symmetrie des Riemanntensors in den ersten und letzten beiden
(Vektor-)Indizes ist der betrachtete Ausdruck symmetrisch unter Vertauschung

der ersten und letzten beiden Spinorindizes. Die irreduziblen Anteile lauten dann

$$\left(\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}+\varepsilon_{\dot\alpha\dot\delta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\right)\mathcal{R} \quad := \quad \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}+\varepsilon_{\dot\alpha\dot\delta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\right)\mathcal{R}^{(\dot\epsilon\dot\lambda)}{}_{\dot\epsilon\dot\lambda} \quad \text{und} \quad C_{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)},$$

der rechte Term ist der in allen Indizes symmetrisierte Anteil des Tensors. Äquivalent dazu wird der zweite Summand des antiselbstdualen Anteils (12) zerlegt:

$$\left(\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}+\varepsilon_{\alpha\delta}\varepsilon_{\beta\gamma}\right)\bar{\mathcal{R}} \quad := \quad \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}+\varepsilon_{\alpha\delta}\varepsilon_{\beta\gamma}\right)\mathcal{R}^{(\epsilon\lambda)}{}_{\epsilon\lambda} \quad \text{und} \quad C_{(\alpha\beta\gamma\delta)}.$$

Als nächstes wird gezeigt, daß die beiden Ausdrücke $\mathcal{R}$ und $\bar{\mathcal{R}}$ gleich sind. Dazu wird die Symmetrie

$$\mathcal{R}_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}+zykl.(\beta\dot\beta,\gamma\dot\gamma,\delta\dot\delta)=0$$

des Riemanntensors benutzt. Diese Gleichung in den ersten obigen Term eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\varepsilon_{\alpha\delta}\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\mathcal{R}^{(\kappa\lambda)}{}_{\kappa\lambda}-\mathcal{R}^{(\dot\kappa\dot\lambda)}{}_{\dot\kappa\dot\lambda}-\mathcal{R}^{\kappa\dot\kappa\lambda\dot\lambda}{}_{\kappa\dot\lambda\lambda\dot\kappa}+\mathcal{R}^{\kappa\dot\kappa\lambda}{}_{\dot\kappa\kappa}{}^{\dot\lambda}{}_{\lambda\dot\lambda}\right) &= 0,\\
\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}\left(\mathcal{R}^{(\kappa\lambda)}{}_{\kappa\lambda}-\mathcal{R}^{(\dot\kappa\dot\lambda)}{}_{\dot\kappa\dot\lambda}+\mathcal{R}^{\kappa\dot\kappa\lambda\dot\lambda}{}_{\kappa\dot\lambda\lambda\dot\kappa}-\mathcal{R}^{\kappa\dot\kappa\lambda}{}_{\dot\kappa\kappa}{}^{\dot\lambda}{}_{\lambda\dot\lambda}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Aus Addition der beiden Gleichungen folgt $\mathcal{R}=\bar{\mathcal{R}}$.
Der Riemanntensor lautet nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta}\Gamma^{\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta} \quad = \quad & \varepsilon_{\alpha\beta}\left(C_{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)}\Gamma^{\dot\gamma\dot\delta}+R_{(\gamma\delta)(\dot\alpha\dot\beta)}\Gamma^{\gamma\delta}+R\Gamma_{\dot\alpha\dot\beta}\right)\\
&+\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\left(C_{(\alpha\beta\gamma\delta)}\Gamma^{\gamma\delta}+R_{(\alpha\beta)(\dot\gamma\dot\delta)}\Gamma^{\dot\gamma\dot\delta}+R\Gamma_{\alpha\beta}\right).
\end{aligned}$$

# B Loop-Integration

Die benötigten Formeln zum Lösen der Impulsintegrale der Loopgraphen lassen sich alle Ableiten aus der Gleichung [19]

$$\int d^{2w}p\frac{1}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} \quad = \quad \frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}.$$

Diese Lösung gilt nur für eine Impulsvariable $p$ mit euklidischem Impulsquadrat. In 2+2 Dimensionen ist also eine Wickrotation der zwei Zeitkomponenten von $p^m$ nötig.
1) Durch Ableiten der linken Seite nach $l^m$ erält man die Formel:

$$\int d^{2w}p\frac{p^m}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} \quad = \quad -l^m\frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}.$$

Herleitung:

$$\frac{\partial}{\partial l^m}\left(\frac{1}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^{A-1}}\right) \quad = \quad (1-A)\frac{(-1)^{|m|+1}2\left(p^m+l^m\right)+2\frac{\partial M}{\partial l^m}}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A},$$

also gilt

$$
\begin{aligned}
&\int d^{2w}p\frac{p^m}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} = -\int d^{2w}p\frac{l^m}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} \\
&-\int d^{2w}p\frac{(-1)^{|m|+1}\frac{\partial M}{\partial l^m}}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} \\
&-\frac{(-1)^{|m|+1}}{2(A-1)}\frac{\partial}{\partial l^m}\left(\int d^{2w}p\frac{1}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^{A-1}}\right) \\
= \;& -l^m\frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}} - (-1)^{|m|+1}\frac{\partial M}{\partial l^m}\frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}} \\
&-\frac{(-1)^{|m|+1}}{2(A-1)}\frac{\partial}{\partial l^m}\left(\frac{\Gamma(A-1-w)\pi^w}{\Gamma(A-1)(M^2)^{A-1-w}}\right) \\
= \;& \frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\left(-l^m-(-1)^{|m|+1}\frac{\partial M}{\partial l^m}\right)+\frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}(-1)^{|m|+1}\frac{\partial M}{\partial l^m} \\
= \;& -l^m\frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}.
\end{aligned}
$$

2) Durch Ableiten nach $l^n$ der linken Seite der gerade hergeleiteten Gleichung läßt sich folgender Ausdruck berechnen:

$$
\begin{aligned}
\int d^{2w}p\frac{p^m p^n}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} &= \frac{\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\Bigg(l^m l^n\Gamma(A-w) \\
&+\frac{(-1)^{|n|+1}}{2}\delta^{mn}\Gamma(A-1-w)M^2\Bigg).
\end{aligned}
$$

Herleitung:

$$
\frac{\partial}{\partial l^n}\left(\frac{p^m}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^{A-1}}\right) = p^m(1-A)\frac{(-1)^{|n|+1}2\,(p^n+l^n)+2\frac{\partial M}{\partial l^n}}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A},
$$

also gilt

$$
\begin{aligned}
&\int d^{2w}p\frac{p^m p^n}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} = -\int d^{2w}p\frac{l^n p^m}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} \\
&-\int d^{2w}p\frac{(-1)^{|n|+1}\frac{\partial M}{\partial l^n}p^m}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} \\
&-\frac{(-1)^{|n|+1}}{2(A-1)}\frac{\partial}{\partial l^n}\left(\int d^{2w}p\frac{p^m}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^{A-1}}\right) \\
= \;& l^n l^m\frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}} + (-1)^{|n|+1}\frac{\partial M}{\partial l^n}l^m\frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}} \\
&-\frac{(-1)^{|n|+1}}{2(A-1)}\frac{\partial}{\partial l^n}\left(\frac{(-l^m)\Gamma(A-1-w)\pi^w}{\Gamma(A-1)(M^2)^{A-1-w}}\right) \\
= \;& \frac{\Gamma(A-w)\pi^w l^m}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\left(l^n+(-1)^{|n|+1}\frac{\partial M}{\partial l^n}\right)-\frac{\Gamma(A-w)\pi^w l^m}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}(-1)^{|n|+1}\frac{\partial M}{\partial l^n} \\
&+\frac{(-1)^{|n|+1}}{2}\delta^{mn}\frac{\Gamma(A-1-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-1-w}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\left(l^m l^n \Gamma(A-w) + \frac{(-1)^{|n|+1}}{2}\delta^{mn}\Gamma(A-1-w)M^2\right).$$

3) Genauso läßt sich wieder durch Ableiten der linken Seite der gerade hergleiteten Gleichung nach $l^k$ die Formel

$$\begin{aligned}\int d^{2w}p\frac{p^m p^n p^k}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} &= -\frac{\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\Big[l^m l^n l^k \Gamma(A-w)\\ &+\frac{1}{2}\Big((-1)^{|n|+1}\delta^{mn}l^k + (-1)^{|m|+1}\delta^{nk}l^m\\ &+(-1)^{|k|+1}\delta^{mk}l^n\Gamma(A-1-w)M^2\Big)\\ &\Gamma(A-1-w)M^2\Big]\end{aligned}$$

berechnen.
Herleitung:

$$\frac{\partial}{\partial l^k}\left(\frac{p^m p^n}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^{A-1}}\right) = p^m p^n (1-A)\frac{(-1)^{|k|+1}2\left(p^k+l^k\right)+2\frac{\partial M}{\partial l^k}}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A},$$

also gilt

$$\begin{aligned}&\int d^{2w}p\frac{p^m p^n p^k}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} = -\int d^{2w}p\frac{l^k p^m p^n}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A}\\ &-\int d^{2w}p\frac{(-1)^{|k|+1}\frac{\partial M}{\partial l^k}p^m p^n}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A}\\ &-\frac{(-1)^{|k|+1}}{2(A-1)}\frac{\partial}{\partial l^k}\left(\int d^{2w}p\frac{p^m p^n}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^{A-1}}\right)\\ =\ &-\left(l^k+(-1)^{|k|+1}\frac{\partial M}{\partial l^k}\right)\frac{\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\\ &\left(l^m l^n\Gamma(A-w)+\frac{(-1)^{|n|+1}}{2}\delta^{mn}\Gamma(A-1-w)M^2\right)\\ &-\frac{(-1)^{|k|+1}}{2(A-1)}\frac{\partial}{\partial l^k}\left[\frac{\pi^w}{\Gamma(A-1)(M^2)^{A-1-w}}\left(l^m l^n\Gamma(A-1-w)\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{(-1)^{|n|+1}}{2}\delta^{mn}\Gamma(A-2-w)M^2\right)\right]\\ =\ &-\left(l^k+(-1)^{|k|+1}\frac{\partial M}{\partial l^k}\right)\frac{\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\\ &\left(l^m l^n\Gamma(A-w)+\frac{(-1)^{|n|+1}}{2}\delta^{mn}\Gamma(A-1-w)M^2\right)\\ &-\frac{(-1)^{|k|+1}}{2(A-1)}\left[\left(\delta^{km}l^n+\delta^{kn}l^m\right)\frac{\Gamma(A-w-1)\pi^w}{\Gamma(A-1)(M^2)^{A-1-w}}\right.\\ &-2l^m l^n(A-1-w)\frac{\partial M}{\partial l^k}\frac{\Gamma(A-1-w)\pi^w}{\Gamma(A-1)(M^2)^{A-1-w}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -(-1)^{|n|+1}\delta^{mn}(A-2-w)\frac{\partial M}{\partial l^k}\frac{\Gamma(A-2-w)\pi^w}{\Gamma(A-1)(M^2)^{A-1-w}}\Bigg] \\
= \quad & -\frac{\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\Bigg[l^m l^n l^k \Gamma(A-w)+\frac{1}{2}\Big((-1)^{|n|+1}\delta^{mn}l^k+(-1)^{|m|+1}\delta^{nk}l^m \\
& +(-1)^{|k|+1}\delta^{mk}l^n\Gamma(A-1-w)M^2\Big)\Gamma(A-1-w)M^2\Bigg] \\
& +\delta^{mn}(A-2-w)\frac{\partial M}{\partial l^k}\frac{\Gamma(A-1-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-1-w}}\left((-1)^{k+n+2}-(-1)^{k+n+2}\right) \\
& +(-1)^{|n|+1}l^m l^n\frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\left(\frac{\partial M}{\partial l^k}-\frac{\partial M}{\partial l^k}\right) \\
= \quad & -\frac{\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}\Bigg[l^m l^n l^k \Gamma(A-w)+\frac{1}{2}\Big((-1)^{|n|+1}\delta^{mn}l^k+(-1)^{|m|+1}\delta^{nk}l^m \\
& +(-1)^{|k|+1}\delta^{mk}l^n\Big)\Gamma(A-1-w)M^2\Bigg].
\end{aligned}
$$

4) Die entsprechende Formel mit vier Impulsen $p^m p^n p^k p^r$ im Zähler läßt sich ebenso herleiten wie die bisherigen Formel, daher wird nur das Ergebnis angegeben:

$$
\begin{aligned}
& \int d^{2w}p\frac{p^m p^n p^k p^r}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A}=\frac{\pi^w}{\Gamma(A)}\Bigg[\frac{\Gamma(A-w)}{(M^2)^{A-w}}l^m l^n l^k l^r \\
& +\frac{1}{2}\frac{\Gamma(A-1-w)}{(M^2)^{A-1-w}}\Big((-1)^{|k|+1}\delta^{km}l^n l^r+(-1)^{|k|+1}\delta^{kn}l^m l^r+(-1)^{|n|+1}\delta^{mn}l^k l^r \\
& \qquad +(-1)^{|k|+1}\delta^{rn}l^m l^k+(-1)^{|r|+1}\delta^{rk}l^m l^n+(-1)^{|k|+1}\delta^{km}l^n l^r\Big) \\
& +\frac{1}{4}\frac{\Gamma(A-2-w)}{(M^2)^{A-2-w}}\Big((-1)^{|k|+|r|}\delta^{km}\delta^{rn}+(-1)^{|k|+|r|}\delta^{kn}\delta^{rm}+(-1)^{|m|+|r|}\delta^{mn}\delta^{rk}\Big)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Weitere Formeln mit mehr als vier Impulsn im Zähler werden hier nicht explizit angegeben. Aus den Rechnungen für die Loop Graphen wird deutlich, daß jeweils nur die Terme $\propto \Gamma(A-w)$ nicht verschwinden. Dies liegt daran, daß im Zähler nur Potenzen von Vertizes $a_{PA}$ stehen. Diese Ausdrücke sind symmetrisch in den Impulskomponenten $p^0$ und $p^3$ bzw. $p^1$ und $p^2$. Alle Anteile der Lösung, die Terme der Form $(-1)^{|m|+1}$ enthalten, werden mit zwei identischen Ausdrücken unterschiedlichen Vorzeichens multipliziert und verschwinden. Die für die Rechnungen benötigten nichtverschwindenden Anteile der Impulsintegration lauten dann also

$$
\begin{aligned}
\int d^{2w}p\frac{p^m p^n p^k p^r\dots p^s}{(p^2+2pl+l^2+M^2)^A} \quad = \quad & \pm\frac{\Gamma(A-w)\pi^w}{\Gamma(A)(M^2)^{A-w}}l^m l^n l^k l^r\dots p^s \\
& +0.
\end{aligned}
$$

Das Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung ist positiv für eine gerade Anzahl von Impulsen $p^m p^n p^k p^r \dots p^s$ und negativ für eine ungerade Anzahl.

# Literatur

[1] N. Marcus, A tour through N=2 strings, Tel-Aviv preprint TAUP 2002-92, Nov.92, hep-th/9211059;
The N=2 open string, Nucl. Phys.B387 (1992) 263

[2] H. Ooguri, C. Vafa, Geometry of N=2 strings, Nucl.Phys.B361 (1991) 496

[3] C. Devchand , O.Lechtenfeld, String-induced Yang-Mills coupling to self-dual gravity, Nucl.Phys.B59 (1999) 309, hep-th/9808053

[4] R. Hippmann, Tree-Level Amplituden des N=2 String, Diplomarbeit ITP Hannover, September 1997, http://www.itp.uni-hannover.de/~lechtenf/Theses/hippmann.ps

[5] M. Bonini, E. Gava, R. Iengo, Amplitudes in the N=2 String, Phys.Lett. A, Vol.6, No.9 (1991) 795

[6] T. Eguchi, P. Gilkey, A.J. Hanson, Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry, Phys. Rep. 66 (1980) 213

[7] A.N. Leznov, On equivalence of four-dimensional selfduality eqations to continual analog of the main chiral field problem Theor.Math. Phys. 73 (1988) 1233; A.N. Leznov and M.A. Mukhtarov, Deformation of algebras and solutins of selfduality equation, J.Math.Phys. 28 (1987) 2547

[8] A. Parkes, A cubic action for SDYM, Phys.Lett.B286 (1992) 477, hep-th/9203074

[9] J.F. Plebanski, J. Math. Phys. 16 (1975) 2395

[10] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Wiley, 1972

[11] S. Kuzenko, I.L. Buchbinder, Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity, IOP Publishing, 1995

[12] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, Superstring theory 2, Camebridge University Press, 1987

[13] C. Devchand, V. Ogievetsky, Self-dual gravity revisited, Class.Quant.Grav. 13 (1996) 2515

[14] G. Chalmers, W. Siegel, The self-dual sector of QCD-Amplitudes, Phys.Rev.D54 (1996) 7628, hep-th/9606061

[15] Z. Bern, String-based perturbative methods for gauge theories, Lectutes presented at TASI 1992, hep-ph/9304249

[16] Z. Bern, L. Dixon, D. Kosower, Progress in one-loop QCD calculations, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 46 (1996) 109, hep-ph/9602280

[17] F.A. Berends und W.T. Giele, Recursive calculation for processes with n gluons, Nucl.Phys.B306 (1988) 759

[18] D.A. Kosower, Light-cone recurrence relations for QCD amplitudes, Nucl.Phys.B335 (1990) 23

[19] P.Ramond, Field theory: A modern primer, Addison-Wesley (1989)

[20] Z. Bern, G. Chalmers, L. Dixon, D. Kosower, Phys.Rev.Lett.72 (1994) 2134

[21] G. Mahlon, Phys.Rev.D49 (1994) 4438

[22] D. Cangemi, Self-dual Yang-Mills theory and one-loop maximally helicity violating multi-gluon amplitudes, hep-th/9605208 published..

[23] Z. Bern, L. Dixon, M. Perelstein, J.S. Rozowski, One-loop n-point helicity amplitudes in (self-dual) gravity, hep-th/9809160

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof.Dr. Olaf Lechtenfeld für die Vergabe und Betreuung meiner Diplomarbeit. Zu großem Dank verpflichtet bin ich weiterhin Dr. Jürgen Schulze für die Betreuung und Zusammenarbeit bei der Berechnung der tree-level Amplituden. Des weiteren bedanke ich mich bei Klaus Jünemann für hilfreiche Diskussionen und bei Bernd Niemeyer für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

## Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.