N=2 Strings
und
selbstduale Feldtheorien

Dem Fachbereich Physik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
vorgelegte Dissertation
von

Bernd Niemeyer
geboren am 1. Mai 1973 in Varel

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

Bei der Untersuchung von hadronischen Resonanzen wurde in den 1960er Jahren ein Zusammenhang zwischen dem Spin J und dem Massenquadrat eines Teilchens beobachtet. Das Massenquadrat des leichtesten Hadrons vom Spin J wird mit diesem Spin über die sogenannte Regge-Steigung α' durch $m^2 = J/\alpha'$ in Beziehung gesetzt. Dieses Verhalten wird von den Amplituden der dualen Modelle [148] reproduziert. Duale Modelle zeichnen sich dadurch aus, daß die Entwicklung einer Amplitude um Pole im s-Kanal dieselben Koeffizienten besitzt, wie die Entwicklung der Amplitude um Pole im t-Kanal. Die dualen Modelle besitzen also eine *Crossing*-Symmetrie, sie sind invariant unter Vertauschung der Mandelstam-Variablen. Obwohl diese Modelle ursprünglich zur Beschreibung von Hadronen-Amplituden konstruiert worden sind, konnten sie das Verhalten der starken Wechselwirkung nicht vollständig beschreiben und wurden um 1973 herum durch die QCD verdrängt.

Ein Problem der dualen Modelle war, daß ihr Spektrum Zustände von beliebig hohem Spin enthält. Dies erwies sich jedoch als Vorteil als sie 1974 als Stringtheorie interpretiert wurden [98]. Die Schwingungsanregungen eines in die D-dimensionale Raumzeit eingebetteten eindimensionalen Objektes entsprechen den durch die dualen Modelle beschriebenen Zuständen. Insbesondere beschreibt die Stringtheorie einen masselosen Spin 2 Zustand, der sich in der Raumzeit wie ein Graviton verhält [134]. Auf diese Weise ist die ursprünglich durch die starke Wechselwirkung motivierte Stringtheorie ein Modell, das alle fundamentalen Wechselwirkungen einschließlich der Gravitation enthält.

Bereits 1976 wurde der $N{=}2$ String von Ademollo et al. als Erweiterung dieses fundamentalen Stringmodells untersucht [2, 3, 4]. Das Ziel dieser Arbeiten war, die Stringtheorie um eine die Farbladungen der Quarks repräsentierende $U(1)$ Symmetrie zu ergänzen. 1977 wurde von Brink und Schwarz die Weltflächenwirkung dieser lokal $N{=}2$ supersymmetrischen Stringtheorie konstruiert [43]. Die Symmetrien einer Stringtheorie legen die Dimension des Targetraums in den der String eingebettet wird fest. Im Fall des $N{=}2$ Strings schien diese Dimension zunächst zwei zu sein. Erst 1987 konnten D'Adda und Lizzi zeigen, daß die Raumzeit des $N{=}2$ Strings aus zwei *komplexen* oder vier reellen Dimensionen besteht. Diese vier Dimensionen bestehen jedoch aus zwei Zeit- und zwei Raumrichtungen. Im Gegensatz zu anderen Stringtheorien enthält das Spektrum den $N{=}2$ Strings keine angeregten Zustände mit beliebig hohen Spins und Massen. Es beschreibt lediglich ein einziges masseloses Skalarfeld, das der Schwerpunktsbewegung des Strings entspricht. Aus diesem Grund und aufgrund der ungewöhnlichen Signatur seines Targetraums ist der $N{=}2$ String anders als etwa der Superstring, der mit einer lokalen $N{=}1$ Supersymmetrie auf der Weltfläche konstruiert wird, phänomenologisch wenig interessant.

Das Interesse für den $N{=}2$ String nahm jedoch wieder zu, als Ooguri und Vafa 1990 zeigten, daß der einzige Freiheitsgrad im Spektrum des geschlossenen Strings die Deformation einer Ricci-flachen Kähler-Metrik beschreibt [113]. Das Verschwinden fast aller Tree-Level-Amplituden des $N{=}2$ Strings konnte so auf die Symmetrien der im Targetraum beschriebenen selbstdualen Gravitation zurückgeführt werden. Der offene Sektor des $N{=}2$ Strings beschreibt eine selbstduale Yang-Mills Theorie im Targetraum [114, 115]. Diese Äquivalenz zwischen $N{=}2$ String und selbstdualen Feldtheorien ist besonders interessant im Hinblick auf die Vermutung, daß alle integrablen Modelle aus der selbstdualen Yang-Mills Theorie abgeleitet werden können.

Im folgenden wurden mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen [19, 116] und durch die Einbettung des $N{=}2$ Strings in eine $N{=}4$ Stringtheorie [20] weitreichende Aussagen über die Amplituden des $N{=}2$ Strings gemacht. Insbesondere wurde vermutet, daß sämtliche Ein-Loop-Amplituden verschwinden. Dies konnte jedoch bisher nicht durch konkrete Berechnungen der Amplituden bestätigt werden.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Streuamplituden des geschlossenen und des offenen $N{=}2$ Strings auf Ein-Loop-Niveau, d.h. auf dem Torus und auf dem Zylinder, zu berechnen und mit den Amplituden der entsprechenden effektiven Feldtheorien zu vergleichen. In Kapitel II wird zunächst ein umfassender Überblick über wichtigsten Eigenschaften der $N{=}2$ Stringtheorie gegeben. In Kapitel III wird die Pfadintegralquantisierung und das Vorgehen bei der störungstheoretischen Konstruktion von Streuamplituden einer Stringtheorie dargestellt. Die dabei entwickelten Methoden werden in Kapitel IV zur Berechnung der Tree-Niveau-Amplituden des geschlossenen und des offenen $N{=}2$ Strings angewendet. Es zeigt sich, daß lediglich die Drei-Punkt-Amplituden ein nicht verschwindendes Ergebnis liefern. Diese Amplituden werden von den in Abschnitt IV.2 vorgestellten selbstdualen Feldtheorien im Targetraum reproduziert. In Abschnitt IV.3 wird gezeigt, daß die Amplituden selbstdualer Feldtheorien MHV Struktur besitzen. Diese Amplituden sind auf Ein-Loop-Niveau vollständig bekannt. In Kapitel V werden schließlich die Ein-Loop-Amplituden des $N{=}2$ Strings konstruiert und im Feldtheorie-Grenzwert $\alpha' \to 0$ berechnet. Dabei stellt sich heraus, daß die Stringamplituden ebenso wie die Amplituden der effektiven Feldtheorie eine MHV Struktur bestizen. Allerdings erlaubt die Stringhteorie eine Interpretation des Ergebnisses in zwei Dimensionen mit verschwindenden Amplituden oder in vier Dimensionen mit endlichen, nicht verschwindenden Amplituden. In den Anhängen A bis F werden die verwendete Notation und einige grundlegende mathematische Eigenschaften der in dieser Arbeit verwendeten Objekte dargestellt.

II. Der N=2 String

In diesem einleitenden Kapitel soll zunächst ein Überblick über die Grundlagen der N=2 Stringtheorie gegeben werden, die im Laufe dieser Arbeit eingehender untersucht wird. Im Abschnitt II.1 wird die Weltflächenwirkung des N=2 Strings, die erstmals 1977 von Brink und Schwarz [43] hergeleitet wurde, motiviert und erläutert. Weiterhin werden in Abschnitt II.2 die 1981 erstmals von Fradkin und Tseytlin [70] vollständig angegebenen Symmetrien dieser Wirkung untersucht und zur Darstellung der Wirkung in der superkonformen Eichung ausgenutzt. In dieser superkonformen Eichung werden dann in Abschnitt II.3 die Bewegungsgleichungen der Materiefelder aufgestellt, und unter Berücksichtigung der möglichen Rand- oder Periodizitätsbedingungen gelöst. In Abschnitt II.4 werden schließlich die Bewegungsgleichungen der Eichfelder der Brink-Schwarz-Wirkung gelöst. Sie liefern klassisch verschwindende Symmetrieströme, aus denen eine Algebra von Zwangsbedingungen an die physikalischen Zustände der Theorie abgeleitet werden kann. Im letzten Abschnitt II.5 wird dann ein kurzer Überblick über die BRST Quantisierung des N=2 Strings gegeben. Mit den Techniken der BRST Quantisierung können die kritische Dimension und das Spektrum der Theorie bestimmt und die zur Berechnung der Amplituden benötigten Vertexoperatoren konstruiert werden.

II.1 Die Weltflächenwirkung des N=2 Strings

Ebenso wie der Superstring (in der NSR Formulierung [112, 126]) eine Verallgemeinerung des bosonischen Strings mit einer lokalen N=1 Supersymmetrie auf der Weltfläche ist, kann der N=2 String als eine Verallgemeinerung des bosonischen Strings mit einer lokalen N=2 Supersymmetrie auf der Weltfläche betrachtet werden. Der Ausgangspunkt der nun folgenden Betrachtungen ist also die Wirkung des bosonischen Strings in der Polyakov-Formulierung [124],

$$S_{\text{bos}} = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \, \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \, \eta_{\mu\nu} \, . \tag{II.1}$$

Diese Wirkung beschreibt einen Satz unabhängiger bosonischer Felder $X^\mu(\sigma^0, \sigma^1)$, die an eine zweidimensionale Gravitation auf der durch die Eigenzeit σ^0 und die Position entlang des Strings σ^1 parametrisierten Weltfläche koppeln. Die bosonischen Felder $X^\mu(\sigma^0, \sigma^1)$ mit $\mu = 0, 1, \ldots, D$ beschreiben die Einbettung der Weltfläche des Strings in die D-dimensionale Raumzeit, die als flach angenommen werden soll. Die Raumzeit-Metrik ist also gegeben durch[1] $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$. $h_{\alpha\beta}$ ist die gekrümmte Metrik auf der Weltfläche, $h^{\alpha\beta}$ ist ihr Inverses, und h ihre (negative)

[1]Eine Einbettung in einen nicht trivialen Hintergrund $g_{\mu\nu}(X)$ führt zur Theorie nichtlinearer σ-Modelle (siehe etwa [81]) und ist ebenso möglich wie eine Kopplung der bosonischen Felder an ein antisymmetrisches B-Feld [144]. Diese Fälle sollen hier aber nicht betrachtet werden.

Determinante. Der Parameter T in Gleichung (II.1) ist die Stringspannung. Sie hängt mit der Regge-Steigung α' der dualen Modelle [142, 148, 152] durch die Beziehung $T = (2\pi\alpha')^{-1}$ zusammen. Üblicherweise wird bei der Betrachtung geschlossener Strings $\alpha' = 2$ und bei der Betrachtung offener Strings $\alpha' = \frac{1}{2}$ gesetzt. Zur einfacheren Identifizierung der Beiträge der einzelnen Ordnungen in der Störungsentwicklung in den folgenden Kapiteln soll der Parameter T bzw. α' hier jedoch weitestgehend mitgeführt werden.

Um nun eine N=2 supersymmetrische Verallgemeinerung der Polyakov Wirkung zu finden, ist es sinnvoll, zunächst die eichfixierte Wirkung zu betrachten. Die daraus zu konstruierende eichfixierte global N=2 supersymmetrische Wirkung kann dann etwa mittels der Noether Methode wieder um die entsprechenden lokalen Symmetrien erweitert werden. Die Wirkung (II.1) ist invariant unter Reparametrisierungen der Weltfläche $\sigma^\alpha \to \sigma^\alpha + \xi^\alpha(\sigma)$ und unter Weyltransformationen[2]. Man hat also drei lokale Transformationsparameter, die ausreichen, um die drei Freiheitsgrade der Metrik $h_{\alpha\beta}$, eines symmetrischen Tensors vom Rang zwei, auf einen beliebigen Wert zu setzen[3]. Man kann also insbesondere wählen $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. In dieser konformen Eichung beschreibt die Polyakov Wirkung D masselose freie Bosonen in zwei Dimensionen,

$$S^{\text{fix}}_{\text{bos}} = -\frac{1}{4\pi\,\alpha'} \int d^2\sigma\, \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu\,. \tag{II.2}$$

Die naheliegende Erweiterung dieser Wirkung (II.2) auf eine globale N=2 Supersymmetrie erhält man durch Hinzufügen eines zweiten Satzes von D bosonischen Feldern $Y^\mu(\sigma)$ und eines $SO(2)$ Dubletts von Majoranaspinoren auf der Weltfläche $\Psi^\mu_i(\sigma)$, mit $i = 1, 2$. Die Weltflächenfermionen tragen ebenso wie die Weltflächenbosonen einen Vektorindex in der Raumzeit, damit on-shell die gleiche Anzahl an bosonischen und fermionischen Freiheitsgraden auf der Weltfläche vorliegen. Man erhält so eine Theorie mit jeweils zwei Sätzen von D reellen masselosen freien Bosonen und Fermionen in zwei Dimensionen,

$$S^{\text{fix}}_{N=2} = -\frac{1}{8\pi} \int d^2\sigma \left(\tfrac{2}{\alpha'}\, \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu + \tfrac{2}{\alpha'}\, \partial_\alpha Y^\mu \partial^\alpha Y_\mu - i\, \bar\Psi^\mu_i\, \rho^\alpha \partial_\alpha \Psi_{\mu i} \right). \tag{II.3}$$

Im Gegensatz zu den bosonischen Termen tragen die fermionischen Terme keinen Vorfaktor $\frac{1}{\alpha'}$. Die Regge-Steigung α' ist vom Weltflächenstandpunkt aus gesehen ein dimensionsloser Skalar. Im Targetraum trägt α' jedoch die Dimension Masse^{-2}, bzw. Länge^2. Dadurch müssen, um eine insgesamt dimensionslose Wirkung zu erhalten, die bosonischen Felder in der Raumzeit die Längendimension 1 haben. Die Weltflächenfermionen hingegen sollen in der Raumzeit dimensionslose Felder sein [122, Kapitel 12]. Die ρ^α sind hier die Gamma-Matrizen in zwei flachen Dimensionen, die die Clifford-Algebra

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = -2\,\eta^{\alpha\beta} \qquad \text{mit} \qquad \eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(-,+)$$

[2] Weyltransformationen sind Koordinatentransformationen, unter denen sich die Metrik nur um einen ortsabhängigen Faktor ändert, $h_{\alpha\beta} \to \exp(2\Lambda(\sigma))\, h_{\alpha\beta}$.

[3] Dies ist zumindest lokal immer möglich. Global treten insbesondere bei nichttrivialen Topologien der Weltfläche einige Probleme auf, auf die im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch ausführlich eingegangen wird.

erfüllen. Eine geeignete Wahl dieser Matrizen ist[4]

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \tag{II.4}$$

Man kann leicht überprüfen, daß die Wirkung (II.3) invariant unter der globalen Supersymmetrietransformation ist,

$$\delta X^\mu = \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\, \bar\epsilon_i\, \Psi^\mu_i \tag{II.5a}$$

$$\delta Y^\mu = \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\, \varepsilon_{ij}\, \bar\epsilon_i\, \Psi^\mu_j \tag{II.5b}$$

$$\delta \Psi^\mu_i = -i\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\, \rho^\alpha \epsilon_i\, \partial_\alpha X^\mu + i\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\, \varepsilon_{ij}\, \rho^\alpha \partial_\alpha Y^\mu\, \epsilon_j\, . \tag{II.5c}$$

Die ϵ_i bilden dabei ein Dublett von globalen, d.h. koordinatenunabhängigen Majoranaspinoren auf der Weltfläche, während ε_{ij} der total antisymmetrische Tensor vom Rang zwei ist, mit $\varepsilon_{01} = 1$. Zur Vereinfachung der Notation ist es sinnvoll, durch $Z^\mu = X^\mu + i\, Y^\mu$ und $\Psi^{+\mu} = \Psi^\mu_1 + i\, \Psi^\mu_2$ komplexe Felder auf der Weltfläche zu definieren. Das komplex Konjugierte dieser Felder wird dann durch $\bar Z^{\bar\mu} = (Z^\mu)^*$ und $\Psi^{-\bar\mu} = (\Psi^{+\mu})^*$ bezeichnet. Die flache Metrik im Targetraum nimmt in dieser komplexen Notation die Form an[5] $\eta_{\mu\bar\nu} = \mathrm{diag}(-,+)$. Dies führt zur folgenden Form der eichfixierten Wirkung

$$S^{\mathrm{fix}}_{N=2} = -\tfrac{1}{8\pi} \int d^2\sigma \left(\tfrac{2}{\alpha'}\, \partial_\alpha Z^\mu \partial^\alpha \bar Z^{\bar\mu} - i\, \bar\Psi^{+\mu}\, \rho^\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \Psi^{-\bar\nu} \right) \eta_{\mu\bar\nu}\, . \tag{II.6}$$

Dabei ist die Ableitung $\overleftrightarrow{\partial}_\alpha$ definiert als $\overleftrightarrow{\partial}_\alpha = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\partial}_\alpha - \overleftarrow{\partial}_\alpha)$. Diese Wirkung (II.6) ist offensichtlich invariant unter der komplexem Supersymmetrietransformation

$$\delta Z^\mu = \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\, \bar\epsilon^-\, \Psi^{+\mu} \tag{II.7a}$$

$$\delta \Psi^{+\mu} = -i\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\, \rho^\alpha\, \epsilon^+\, \partial_\alpha Z^\mu\, . \tag{II.7b}$$

Der Transformationsparameter ϵ^+ ist dabei ein globaler Diracspinor auf der Weltfläche, der aus den Parametern der Supersymmetrietransformation (II.5a) bis (II.5c) durch $\epsilon^+ = \epsilon_1 + i\, \epsilon_2$, mit dem komplex Konjugierten $\epsilon^- = (\epsilon^+)^*$, folgt.

Mit Gleichung (II.6) hat man nun eine global supersymmetrische Wirkung vorliegen, gesucht ist jedoch eine Wirkung, die die üblichen lokalen Symmetrien einer Stringtheorie besitzt. Um dieses Ziel zu erreichen, ist es sinnvoll, (II.6) als Ausgangspunkt für die Anwendung der Noether Methode zu nehmen. Dazu werden zunächst alle Weltflächenindizes mit der Metrik $h_{\alpha\beta}$ kontrahiert, und das Integrationsmaß wird durch das invariante Volumenelement $d^2\sigma\, \sqrt{-h}$ ersetzt. Prinzipiell müßten auch noch sämtliche Ableitungen ∂_α durch kovariante Ableitungen ∇_α ersetzt werden. Jedoch wirken kovariante Ableitungen auf Skalare X^μ genau so wie normale Ableitungen. Auch im fermionischen Term von (II.6) ist die Wirkung einer kovarianten Ableitung identisch mit der einer normalen Ableitung. Der Beitrag der

[4] Zur Notation siehe auch Anhang A.

[5] Daß der Targetraum zwei komplexe Dimensionen hat, wird in Abschnitt II.5 näher erläutert.

Spinkonnektion verschwindet in zwei Dimensionen aufgrund der Antisymmetrie der Fermionen. Ausgangspunkt der Anwendung der Noether Methode ist also

$$S_0 = -\tfrac{1}{8\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \left(\tfrac{2}{\alpha'} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha Z^\mu \partial_\beta \bar{Z}^{\bar{\nu}} - i \bar{\Psi}^{+\mu} \rho^\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \Psi^{-\bar{\nu}} \right) \eta_{\mu\bar{\nu}} \,. \tag{II.8}$$

Wendet man auf die Wirkung S_0 (II.7a) und (II.7b) als lokale Supersymmetrietransformationen an, d.h. mit einem von den Weltflächenkoordinaten abhängenden Transformationeparameter $\epsilon^+(\sigma)$, so ist S_0 natürlich nicht invariant. Man erhält eine Variation der Form[6] $\delta S_0 = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \left((\nabla_\alpha \bar{\epsilon}^- F^{+\alpha} + \bar{F}^{-\alpha} (\nabla_\alpha \epsilon^+) \right)$. Dabei ist $F^{+\alpha}$ der Superstrom

$$F^{+\alpha} = \rho^\beta \rho^\alpha \Psi^{+\mu} \partial_\beta \bar{Z}^{\bar{\nu}} \eta_{\mu\bar{\nu}} \,. \tag{II.9}$$

Um das Auftreten dieses Superstromes bei einer lokalen Supersymmetrietransformation der Wirkung S_0 zu kompensieren, ist es notwendig, ein komplexes Gravitino $\chi_\alpha^\pm$ mit dem Transformationsgesetz $\delta\chi_\alpha^\pm = \nabla_\alpha \epsilon^\pm$ einzuführen. Dieses Gravitino ist ein komplexer Spinor und trägt gleichzeitig einen Vektorindex auf der Weltfläche. Es stellt also ein Spin 3/2 Teilchen dar, den Superpartner des Gravitons $h_{\alpha\beta}$. Koppelt man das Gravitino $\chi_\alpha^\pm$ an den Superstrom $F^{\mp\alpha}$, erhält man den Korrekturterm zur Wirkung S_0 aus (II.8),

$$S_1 = -\tfrac{1}{4\pi}\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \left(\partial_\beta \bar{Z}^{\bar{\mu}} \bar{\chi}_\alpha^- \rho^\beta \rho^\alpha \Psi^{+\nu} + \partial_\beta Z^\nu \bar{\Psi}^{-\bar{\mu}} \rho^\alpha \rho^\beta \chi_\alpha^+ \right) \eta_{\bar{\mu}\nu} \,. \tag{II.10}$$

Eine lokale Supersymmetrietransformation der Z^μ bzw. $\bar{Z}^{\bar{\mu}}$ Felder in der Wirkung S_1 aus (II.10) führt zu weiteren von der kovarianten Ableitung des Tranformationsparameters $\nabla_\alpha \epsilon^\pm$ abhängenden Termen der Form $\bar{\Psi}^{-\bar{\mu}} \nabla_\beta \epsilon^+ \bar{\chi}_\alpha^- \rho^\beta \rho^\alpha \Psi^{+\nu} \eta_{\bar{\mu}\nu}$ bzw. $\nabla_\beta \bar{\epsilon}^- \Psi^{+\mu} \bar{\Psi}^{-\bar{\nu}} \rho^\alpha \rho^\beta \chi_\alpha^+ \eta_{\mu\bar{\nu}}$. Diese Terme können wiederum durch Kopplung an Gravitinos $\chi_\alpha^\pm$ absorbiert werden, so daß sich ein zweiter Korrekturterm zur Wirkung ergibt,

$$S_2 = -\tfrac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \left(\bar{\Psi}^{-\bar{\mu}} \chi_\beta^+ \bar{\chi}_\alpha^- \rho^\beta \rho^\alpha \Psi^{+\nu} + \bar{\chi}_\beta^- \Psi^{+\nu} \bar{\Psi}^{-\bar{\mu}} \rho^\alpha \rho^\beta \chi_\alpha^+ \right) \eta_{\bar{\mu}\nu} \,. \tag{II.11}$$

Man stellt fest, daß bei weiterer Variation der Wirkung $S_0 + S_1 + S_2$ keine neuen Terme außer den in den Gleichungen (II.8), (II.10) und (II.11) enthaltenen mehr auftauchen. Um die vollständige unter lokalen N=2 Supersymmetrietransformationen invariante Wirkung in zwei Dimensionen zu erhalten, müssen also lediglich die Transformationen der einzelnen Felder modifiziert werden, um die bei der Variation der Wirkung entstehenden Terme zu eliminieren. Insbesondere muß ein Transformationsgesetz für die Metrik[7] $h_{\alpha\beta}$ gefunden werden. Dabei stellt sich heraus, daß der bisher eingeführte Feldinhalt nicht ausreicht, um eine vollständige lokale Supersymmetrie der Wirkung sicherzustellen. Es ist notwendig, noch ein $U(1)$ Eichfeld, ein

[6] Es ist anzumerken, daß man es im Fall des N=2 Strings mit komplexen Feldern auf der Weltfläche zu tun hat. Daher sind einige Identitäten die für Majoranaspinoren in zwei Dimensionen gelten, und die die Ergebnisse der entsprechenden Superstringrechnungen vereinfachen, hier nicht anwendbar. Für komplexe Spinoren in zwei Dimensionen gilt etwa in der Regel nicht $\bar{\chi}\psi = \bar{\psi}\chi$.

[7] Bzw. für das Zweibein $e_\alpha{}^a$, das mit der Metrik über $h_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \eta_{ab}$ zusammenhängt. Dabei ist $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-,+)$ die flache Minkowski-Metrik im Tangentialraum an die Weltfläche des Strings.

Vektorfeld A_α, das lediglich an die Fermionen koppelt und keinen eigenen kinetischen Term besitzt, einzuführen. Damit ergibt sich der letzte Korrekturterm zur Wirkung,

$$S_3 = -\tfrac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h}\, A_\alpha \bar{\Psi}^{-\bar{\mu}} \rho^\alpha \Psi^{+\nu} \eta_{\bar{\mu}\nu} \,. \tag{II.12}$$

Man erhält so die vollständige Weltflächenwirkung des N=2 Strings, die bereits 1977 von Brink und Schwarz [43] (mit der Wahl $\alpha' = 2$ und einer etwas anderen Normierung der Felder) vorgestellt wurde, und die die Grundlage für alle weiteren in dieser Arbeit präsentierten Untersuchungen bildet,

$$\begin{aligned} S_{N=2} \;=\; & -\tfrac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \Big(\tfrac{1}{\alpha'} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha Z^\mu \partial_\beta \bar{Z}^{\bar{\nu}} - \tfrac{i}{2} \bar{\Psi}^{-\bar{\nu}} \rho^\alpha \overleftrightarrow{\nabla}_\alpha \Psi^{+\mu} \\ & + A_\alpha \bar{\Psi}^{-\bar{\nu}} \rho^\alpha \Psi^{+\mu} + \Big(\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\, \partial_\alpha Z^\mu + \bar{\chi}^-_\alpha \Psi^{+\mu} \Big) \bar{\Psi}^{-\bar{\nu}} \rho^\beta \rho^\alpha \chi^+_\beta \\ & + \Big(\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\, \partial_\alpha \bar{Z}^{\bar{\nu}} + \bar{\Psi}^{-\bar{\nu}} \chi^+_\alpha \Big) \bar{\chi}^-_\beta \rho^\alpha \rho^\beta \Psi^{+\mu} \Big) \eta_{\mu\bar{\nu}} \,. \end{aligned} \tag{II.13}$$

Um zu verdeutlichen, daß diese Wirkung tatsächlich on-shell supersymmetrisch ist, sollen nun die bosonischen und die fermionischen Freiheitsgrade gezählt werden. Im Materiesektor enthält die Wirkung D bosonische Felder Z^μ und $2^{[d/2]} D = 2D$ fermionische Felder $\Psi^{+\mu}$; dabei ist D die Dimension der Raumzeit, und d=2 ist die Dimension der Weltfläche. On-shell, d.h. wenn die Bewegungsgleichungen erfüllt sind, verschwindet die Hälfte der fermionischen Freiheitsgrade, man hat dann also D bosonische und D fermionische Materiefreiheitsgrade. Um eine off-shell Supersymmetrie zu erreichen, muß man noch D bosonische Hilfsfelder F^μ zur Wirkung hinzufügen. Der Beitrag der Hilfsfelder zur Wirkung ist jedoch von der Form $\int d^2\sigma\, F^\mu \bar{F}^{\bar{\nu}} \eta_{\mu\bar{\nu}}$ und kann ausintegriert werden. Auch das Supergravitationsmultiplett in dieser Wirkung ist nur on-shell supersymmetrisch. Eine Zählung der Freiheitsgrade unter Berücksichtigung der lokalen Symmetrien der Wirkung zeigt, daß off-shell ein bosonischer und vier fermionische Freiheitsgrade vorliegen. Zum Erreichen einer off-shell Supersymmetrie muß dann ein symmetrischer Tensor vom Rang zwei auf der Weltfläche hinzugefügt werden [4], der ebenso wie das bosonische Hilfsfeld im Materiesektor in der Wirkung ausintegriert werden kann. Diese Zählung der Supergravitationsfreiheitsgrade wird nach der Diskussion der Symmetrien der Brink-Schwarz-Wirkung im nächsten Abschnitt durchgeführt.

Nach der Formulierung der Weltflächenwirkung gilt es noch der Laufbereich des Vektorindex $\mu = 0, 1, \ldots, D$ im Targetraum, d.h. die kritische Dimension der Raumzeit des N=2 Strings zu klären. Dies hat zu Beginn des wissenschaftlichen Interesses für den N=2 String zu einiger Verwirrung geführt. Erst 1987 — zehn Jahre nach der Formulierung der Wirkung durch Brink und Schwarz — haben D'Adda und Lizzi [55] durch eine genaue Analyse der Generatoren der Algebra der Zwangsbedingungen gezeigt, daß der N=2 String in zwei komplexen Dimensionen oder vier reellen Dimensionen mit Kleinscher Signatur $(+\,+\,-\,-)$ anomaliefrei quantisierbar ist. Die reelle Raumzeitdimension ist also vier, wie in Abschnitt II.5 noch genauer dargestellt werden wird. Aufgrund der komplexen Struktur, die die lokale N=2 Weltflächensupersymmetrie im Targetraum fordert [6], hat die Raumzeit-Metrik jedoch die Signatur $(2, 2)$ oder $(4, 0)$. Der euklidische Fall $(4, 0)$ ist phänomenologisch uninteressant, da das Spektrum des N=2 Strings lediglich einen masselosen Skalar enthält, der in $4+0$

Dimensionen on-shell die Bedingung $k^\mu = 0$ erfüllen müßte. Es wird im folgenden also eine Theorie betrachtet, die in $2+2$ Dimensionen lebt. Als Lorentzgruppe der Raumzeittheorie sollte man also $SO(2,2)$ bzw. $Spin(2,2)$ erwarten. Jedoch erkennt man an der Form der Brink-Schwarz-Wirkung (II.13), daß diese nicht lorentzinvariant in $2+2$ Dimensionen ist. Auch beim Betrachten der Streuamplituden wird sich herausstellen, daß diese keine volle Lorentzsymmetrie im Targetraum besitzen. Aufgrund der komplexen Struktur wird ein Teil der Lorentzgruppe gebrochen,

$$Spin(2,2) \cong SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})' \to U(1) \times SL(2,\mathbb{R})' \cong U(1,1)\,.$$

Erst durch Summieren über die verschiedenen Instantonsektoren der Theorie, die später noch näher erläutert werden, kann die volle $SO(2,2)$ Lorentzsymmetrie im Targetraum wiederhergestellt werden [39, 15].

II.2 Die Symmetrien der Brink-Schwarz-Wirkung

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die Brink-Schwarz-Wirkung des N=2 Strings hergeleitet worden ist, sollen nun die zahlreichen Symmetrien dieser Wirkung (II.13) vorgestellt werden. Diese wurden erstmals 1981 von Fradkin und Tseytlin [70] vollständig angegeben. Mit einigem algebraischen Aufwand läßt sich zeigen, daß die Wirkung $S_{N=2}$ aus (II.13) invariant unter den folgenden Transformationen ist:

- Diffeomorphismen auf der Weltfläche:

$$\delta Z^\mu = \xi^\gamma \partial_\gamma Z^\mu \tag{II.14a}$$
$$\delta \Psi^{+\mu} = \xi^\gamma \partial_\gamma \Psi^{+\mu} \tag{II.14b}$$
$$\delta e_\alpha{}^a = \xi^\gamma \partial_\gamma e_\alpha{}^a + e_\gamma{}^a \partial_\alpha \xi^\gamma \tag{II.14c}$$
$$\delta \chi^+_\alpha = \xi^\gamma \partial_\gamma \chi^+_\alpha + \chi^+_\gamma \partial_\alpha \xi^\gamma \tag{II.14d}$$
$$\delta A_\alpha = \xi^\gamma \partial_\gamma A_\alpha + A_\gamma \partial_\alpha \xi^\gamma \tag{II.14e}$$

  Durch ihre Konstruktion ist die Brink-Schwarz-Wirkung invariant unter Reparametrisierungen der Koordinaten auf der Weltfläche $\sigma^\alpha \to \sigma^\alpha + \xi^\alpha(\sigma)$. Dabei transformieren die Materiefelder Z^μ und $\Psi^{+\mu}$ wie Skalare, während die Felder des N=2 Supergravitationsmultipletts ihrer Indexstruktur entsprechend als Vektoren auf der Weltfläche transformieren. Die übliche Transformation der Metrik als Tensor vom Rang zwei unter Diffeomorphismen folgt aus (II.14c) und $h_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \eta_{ab}$.

- N=2 Supersymmetrie:

$$\delta Z^\mu = \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\, \bar{\epsilon}^- \, \Psi^{+\mu} \tag{II.15a}$$
$$\delta \Psi^\mu = -i\, \rho^\gamma \epsilon^+ \left(\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\, \partial_\gamma Z^\mu + 2\,(\bar{\chi}^-_\gamma \, \Psi^{+\mu}) \right) \tag{II.15b}$$
$$\delta e_\alpha{}^a = 2i \left(\bar{\chi}^-_\alpha \, \rho^a \, \epsilon^+ - \bar{\epsilon}^- \, \rho^a \, \chi^+_\alpha \right) \tag{II.15c}$$
$$\delta \chi^+_\alpha = \mathcal{D}_\alpha \epsilon^+ \tag{II.15d}$$
$$\delta A_\alpha = \varepsilon^{\gamma\lambda} \left(\bar{\epsilon}^- \, \bar{\rho} \rho_\alpha \mathcal{D}_\gamma \chi^+_\lambda + \mathcal{D}_\gamma \bar{\chi}^-_\lambda \, \rho_\alpha \bar{\rho}\, \epsilon^+ \right) \tag{II.15e}$$

Ziel der Konstruktion in Abschnitt II.1 war eine lokal $N{=}2$ supersymmetrische Wirkung, die unter den obigen Transformationen invariant ist. Dabei ist der Transformationsparameter $\epsilon^+(\sigma)$ ein koordinatenabhängiger komplexer Spinor auf der Weltfläche. $\mathcal{D}_\alpha$ bezeichnet die $U(1)$ kovariante Ableitung, die auf den unter der $U(1)$ geladenen Feldern $\Psi^{+\mu}$, χ^+_α und ϵ^+ definiert ist durch $\mathcal{D}_\alpha = \nabla_\alpha - i\,A_\alpha$. Dabei ist ∇_α die übliche kovariante Ableitung mit Torsion auf der Weltfläche, deren Wirkung auf einen Spinor gegeben ist durch $\nabla_\alpha\epsilon^+ = \partial_\alpha\epsilon^+ + \frac{1}{2}\omega_\alpha\,\bar\rho\,\epsilon^+$ mit $\omega_\alpha = \omega_\alpha(e) + \frac{i}{4}\,\bar\chi^-_\alpha\,\bar\rho\rho^\beta\chi^+_\beta$. Hier ist $\omega_\alpha(e) = e^{-1}\,e_{\alpha a}\varepsilon^{\beta\gamma}\partial_\beta e_\gamma{}^a$ die torsionsfreie Spinkonnektion auf der Weltfläche[8]. Die ρ^a in (II.15c) sind die Gamma-Matrizen im Tangentialraum an die Weltfläche, welche die Clifford-Algebra $\{\rho^a,\rho^b\} = -2\,\eta^{ab}$ erfüllen.

Neben diesen beiden lokalen Symmetrien, welche die Brink-Schwarz-Wirkung schon per Konstruktion besitzt, lassen sich noch einige weitere lokale Symmetrietransformationen der Wirkung finden:

- bosonische Weyl-Transformationen:

$$\begin{aligned} \delta Z^\mu &= 0 && \text{(II.16a)}\\ \delta\Psi^{+\mu} &= -\tfrac{1}{2}\,\Lambda\Psi^{+\mu} && \text{(II.16b)}\\ \delta e_\alpha{}^a &= \Lambda e_\alpha{}^a && \text{(II.16c)}\\ \delta\chi^+_\alpha &= \tfrac{1}{2}\,\Lambda\chi^+_\alpha && \text{(II.16d)}\\ \delta A_\alpha &= 0 && \text{(II.16e)} \end{aligned}$$

Diese Symmetrie ist typisch für skaleninvariante konforme Feldtheorien in zwei Dimensionen und taucht auch beim bosonischen String auf. Die koordinatenabhängige Funktion $\Lambda(\sigma)$ ist der Skalierungsfaktor der Metrik, der für den Fall des bosonischen Strings schon in Fußnote 2 erwähnt wurde.

- $N{=}2$ superkonforme Transformationen:

$$\begin{aligned} \delta Z^\mu &= 0 && \text{(II.17a)}\\ \delta\Psi^{+\mu} &= 0 && \text{(II.17b)}\\ \delta e_\alpha{}^a &= 0 && \text{(II.17c)}\\ \delta\chi^+_\alpha &= \rho_\alpha\,\eta^+ && \text{(II.17d)}\\ \delta A_\alpha &= \bar\chi^-_\beta\,\rho_\alpha\rho^\beta\eta^+ + \bar\eta^-\,\rho^\beta\rho_\alpha\chi^+_\beta && \text{(II.17e)} \end{aligned}$$

Die superkonformen Transformationen, oder auch Super-Weyl-Transformationen, sind das fermionische Äquivalent der (bosonischen) Weyl-Transformationen. $\eta^+(\sigma)$ ist hier ein koordinatenabhängiger komplexer Spinor auf der Weltfläche.

[8] Siehe auch Anhang A zur Notation.

- zweidimensionale lokale Lorentztransformationen:

$$\delta Z^{\mu} = 0 \tag{II.18a}$$
$$\delta \Psi^{+\mu} = -\tfrac{1}{2}\,\ell\,\bar{\rho}\,\Psi^{+\mu} \tag{II.18b}$$
$$\delta e_{\alpha}{}^{a} = \ell\,\varepsilon^{ab}\,e_{\alpha\,b} \tag{II.18c}$$
$$\delta \chi_{\alpha}^{+} = -\tfrac{1}{2}\,\ell\,\bar{\rho}\,\chi_{\alpha}^{+} \tag{II.18d}$$
$$\delta A_{\alpha} = 0 \tag{II.18e}$$

$\ell(\sigma)$ ist dabei eine skalare Funktion der Weltflächenkoordinaten. Die lokale Lorentzinvarianz auf der Weltfläche entsteht durch die Verwendung des Zweibeinformalismus. Durch die Einführung des Zweibeins $e_{\alpha}{}^{a}$ wird an jedem Punkt der gekrümmten Weltfläche ein flacher Tangentialraum konstruiert. Die Wahl des Koordinatensystems in jedem dieser Tangentialräume kann nun durch Lorentztransformationen verändert werden. Somit kompensiert die lokale Lorentzinvarianz die zusätzlichen Freiheitsgrade, die durch die Einführung des Zweibeins aus der Metrik entstanden sind. Dementsprechend transformiert das Zweibein $e_{\alpha}{}^{a}$ wie ein Tangentialraumvektor unter lokalen Lorentztransformationen, während $\Psi^{+\mu}$ und χ_{α}^{+} wie Spinoren im Tangentialraum transformieren.

- vektorielle $U(1)_V$ Transformationen:

$$\delta Z^{\mu} = 0 \tag{II.19a}$$
$$\delta \Psi^{+\mu} = i\,\lambda \Psi^{+\mu} \tag{II.19b}$$
$$\delta e_{\alpha}{}^{a} = 0 \tag{II.19c}$$
$$\delta \chi_{\alpha}^{+} = i\,\lambda \chi_{\alpha}^{+} \tag{II.19d}$$
$$\delta A_{\alpha} = \partial_{\alpha}\lambda \tag{II.19e}$$

Dabei ist $\lambda(\sigma)$ der Eichparameter des $U(1)$ Feldes A_{α}.

- axiale $U(1)_A$ Transformationen:

$$\delta Z^{\mu} = 0 \tag{II.20a}$$
$$\delta \Psi^{+\mu} = i\,\lambda'\bar{\rho}\,\Psi^{+\mu} \tag{II.20b}$$
$$\delta e_{\alpha}{}^{a} = 0 \tag{II.20c}$$
$$\delta \chi_{\alpha}^{+} = -i\,\lambda'\bar{\rho}\,\chi_{\alpha}^{+} \tag{II.20d}$$
$$\delta A_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\,\partial^{\beta}\lambda' \tag{II.20e}$$

$\lambda'(\sigma)$ ist der Eichparameter der axialen Transformation des $U(1)$ Feldes A_{α}.

Es ist anzumerken, daß die beiden Eichtransformationen der $U(1)_V$ und der $U(1)_A$ durch ein einziges Eichfeld A_{α} erzeugt werden. Die selbstduale und die antiselbstduale Komponente von A_{α}, d.h. $A_{\alpha}^{\pm} = A_{\alpha} \pm \varepsilon_{\alpha\beta}A^{\beta}$, wirken als unabhängige Eichfelder einer linkslaufenden und einer rechtslaufenden $U(1)$ Gruppe. Dies gilt hier aufgrund der aus der zweidimensionalen Clifford-Algebra folgenden Relation $\bar{\rho}\rho_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\,\rho^{\beta}$.

Es wird nun die Anzahl der Symmetrieparameter mit der Anzahl der Freiheitsgrade der Felder des N=2 Supergravitationsmultipletts verglichen, um zu bestimmen, wie viele Komponenten der Multiplettfelder durch eine entsprechende Eichfixierung eliminiert werden können. Dieser naive Vergleich der Anzahlen der Parameter ist natürlich nur lokal möglich. Global ergeben sich insbesondere auf Riemann-Flächen von höherem Genus die bereits angesprochenen Probleme. Hier ist dann eine genauere Untersuchung der Moduliräume nötig, die in Kapitel III durchgeführt wird. Zur Zählung der Eichparameter kann auf die obige Liste der Symmetrien der Brink-Schwarz-Wirkung zurückgegriffen werden. Man erkennt, daß vier reelle skalare Paremeter Λ, ℓ, λ und λ' aus den Weyl-Transformationen, den lokalen Lorentz-Transformationen und den vektoriellen sowie den axialen $U(1)$ Transformationen vorliegen. Weiterhin zählt man zwei komplexe Spinoren ϵ^+ und η^+ aus den Supersymmetrie- und den Super-Weyl-Transformationen. In $d{=}2$ Dimensionen sind dies gerade acht reelle Parameter. Außerdem liegt noch ein Vektor ξ^γ als Parameter der Diffeomorphismen vor, der in zwei Dimensionen zwei reelle Komponenten hat. Insgesamt liegen also 14 reelle Eichparameter vor. Zum Vergleich sind nun die Freiheitsgrade des $N{=}2$ Supergravitationsmultipletts zu zählen. Das Zweibein ${e_\alpha}^a$ hat in d Dimensionen d^2 Komponenten, trägt also in zwei Dimensionen vier Freiheitsgrade bei. Das Gravitino χ_α^+ ist ein komplexer Spinor, der zusätzlich einen Vektorindex trägt, es liefert also $2 \cdot 2^{[d/2]}\, d$, d.h. in zwei Dimensionen acht reelle Freiheitsgrade. Der Vektor A_α liefert weitere zwei reelle Freiheitsgrade in $d{=}2$. Insgesamt liegen also 14 Freiheitsgrade vor, die aufgrund der Symmetrien vollständig eliminiert werden können. Insbesondere ist es nach der Zählung der Freiheitsgrade möglich, die superkonforme Eichung mit

$$ {e_\alpha}^a = \delta_\alpha^a \qquad\qquad A_\alpha = \chi_\alpha^+ = 0 \tag{II.21} $$

zu wählen.

Um zu zeigen, daß dies tatsächlich erreicht werden kann, ist nun die Wirkung der lokalen Transformationen auf die Felder des $N{=}2$ Supergravitationsmultipletts zu untersuchen. Zunächst kann das Gravitino χ_α^+ mit Hilfe der Supersymmetrietransformationen δ_ϵ aus (II.15d) eliminiert werden. Das Spin $3/2$ Gravitino läßt sich zerlegen in einen Helizität $\pm 3/2$ und einen Helizität $\pm 1/2$ Anteil[9], die mit dem Skalarprodukt $(\phi, \chi) = \int d^2\sigma \bar{\phi}^\alpha \chi_\alpha$ orthogonal zueinander sind,

$$ \begin{aligned} \chi_\alpha^+ &= \left({h_\alpha}^\beta - \tfrac{1}{2}\,\rho_\alpha\rho^\beta\right)\chi_\beta^+ + \tfrac{1}{2}\,\rho_\alpha\rho^\beta\,\chi_\beta^+ \\ &= \tfrac{1}{2}\,\rho^\beta\rho_\alpha\,\chi_\beta^+ + \tfrac{1}{2}\,\rho_\alpha\rho^\beta\,\chi_\beta^+ \\ &\equiv \tilde{\chi}_\alpha^+ + \rho_\alpha\,\omega^+ \,. \end{aligned} \tag{II.22} $$

Dabei ist $\tilde{\chi}_\alpha^+ = \frac{1}{2}\,\rho^\beta\rho_\alpha\,\chi_\beta^+$ ein ρ-spurfreies Spin $3/2$ Feld, $\rho\cdot\tilde{\chi}_\alpha^+ = 0$, und $\omega^+ = \frac{1}{2}\,\rho^\beta\,\chi_\beta^+$. Ebenso wie das Gravitinofeld läßt sich auch die Supersymmetrietransformation des Gravitinos zerlegen,

$$ \delta_\epsilon\chi_\alpha^+ = \mathcal{D}_\alpha\,\epsilon^+ = (\mathcal{P}_{1/2}\epsilon)_\alpha^+ + \tfrac{1}{2}\,\rho_\alpha\rho^\beta\mathcal{D}_\beta\,\epsilon\,, \tag{II.23} $$

mit $(\mathcal{P}_{1/2}\epsilon)_\alpha^+ = \frac{1}{2}\,\rho^\beta\rho_\alpha\,\mathcal{D}_\beta\,\epsilon^+$. Das ρ-spurfreie Gravitino kann zumindest lokal als $\tilde{\chi}_\alpha^+ = \frac{1}{2}\,\rho^\beta\rho_\alpha\,\kappa^+$ für einen Spinor κ^+ geschrieben werden. Dieses κ^+ kann nun mit Hilfe einer entsprechenden Supersymmetrietransformation (II.23) eliminiert werden, so daß das Gravitino in die Form $\chi_\alpha^+ = \rho_\alpha\,\omega^+$ gebracht wird. Global kann es natürlich Helizität $\pm 3/2$ Felder τ_α^+ geben, die sich nicht in der Form $\tau_\alpha^+ = (\mathcal{P}_{1/2}\epsilon)_\alpha^+$ dastellen

[9]Siehe Anhang A für Spinoridentitäten auf der Weltfläche.

lassen. Diese Felder treten immer dann auf, wenn der adjungierte Operator $\mathcal{P}_{1/2}^{\dagger}$ Nullmoden hat, wenn also Moduli vorliegen. Moduli und konforme Killing-Spinoren, d.h. Nullmoden des Operators $\mathcal{P}_{1/2}$, werden in Abschnitt III.3 im Rahmen der Pfadintegralquantisierung der N=2 Stringtheorie genauer untersucht.

Mit Hilfe der Diffeomorphismen läßt sich das Zweibein auf die Identitätsabbildung zwischen Weltfläche und Tangentialraum zurückführen, bzw. eine flache Metrik auf der Weltfläche wählen. Aus (II.14c) und (II.18c) mit $\ell = -\xi^{\alpha}\omega_{\alpha}(e)$ erhält man die Transformation der Metrik $h_{\alpha\beta} = e_{\alpha}{}^{a}e_{\beta}{}^{b}\,\eta_{ab}$ unter Diffeomorphismen,

$$\begin{aligned} \delta_{\xi}h_{\alpha\beta} &= \hat{\nabla}_{\alpha}\xi_{\beta} + \hat{\nabla}_{\beta}\xi_{\alpha} \\ &\equiv \big(P_1\xi\big)_{\alpha\beta} + \Lambda h_{\alpha\beta}\,, \end{aligned} \tag{II.24}$$

wobei $(P_1\xi)_{\alpha\beta} = \hat{\nabla}_{\alpha}\xi_{\beta} + \hat{\nabla}_{\beta}\xi_{\alpha} - (\hat{\nabla}^{\gamma}\xi_{\gamma})\,h_{\alpha\beta}$ Vektoren ξ^{α} auf spurfreie symmetrische Tensoren vom Rang zwei abbildet. Dabei ist $\Lambda = \hat{\nabla}^{\gamma}\xi_{\gamma}$, und $\hat{\nabla}_{\alpha}$ ist die kovariante Ableitung ohne Torsion auf der Weltfläche. Spurfreier Anteil und Spur sind mit dem Skalarprodukt $(t^{(1)}, t^{(2)}) = \int d^2\sigma h^{\alpha\beta}h^{\delta\gamma}t^{(1)}_{\alpha\delta}t^{(2)}_{\beta\gamma}$ senkrecht zueinander. Zumindest lokal kann die Metrik so bis auf ihren Spuranteil eliminiert werden, $h_{\alpha\beta} = e^{\phi}\,\eta_{\alpha\beta}$. Global können Moduli, d.h. Nullmoden des adjungierten Operators $\mathcal{P}_1^{\dagger}$, existieren, die dies verhindern. Die Diffeomorphismen wirken natürlich auch gemäß Gleichung (II.14d) auf die Gravitinos χ_{α}^{+}, jedoch wird dadurch zum ρ-spurfreien Teil kein Spurteil mehr hinzugefügt. Das eichfixierte Gravitino $\chi_{\alpha}^{+} = \rho_{\alpha}(\sigma)\,\omega^{+}(\sigma)$ transformiert unter Reparametrisierungen $\sigma^{\alpha} \to \tilde{\sigma}^{\alpha}(\sigma)$ zu $\tilde{\rho}_{\alpha}(\sigma)\,\tilde{\omega}^{+}(\sigma) = \frac{\partial\tilde{\sigma}^{\beta}}{\partial\tilde{\sigma}^{\alpha}}\,\rho_{\beta}(\tilde{\sigma})\,\omega^{+}(\tilde{\sigma})$, die einmal durch die Supersymmetrietransformationen gewählte Eichung der Gravitinos wird durch Reparametrisierungen lediglich um einen Spurteil geändert.

Die $U(1)$ Transformationen des Eichfeldes A_{α} lassen sich nach (II.19e) und (II.20e) schreiben als

$$\delta_{\lambda,\lambda'}A_{\alpha} = \partial_{\alpha}\lambda + \varepsilon_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\lambda' = (P_0\lambda)_{\alpha} + (P_0'\lambda')_{\alpha}\,, \tag{II.25}$$

mit $(P_0\lambda)_{\alpha} = \partial_{\alpha}\lambda$ und $(P_0'\lambda')_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\lambda'$. Lokal können damit die beiden Komponenten des Eichfeldes A_{α} zu Null gesetzt werden. Der vektorielle und der axiale Anteil des Eichfeldes sind natürlich mit dem üblichen Skalarprodukt orthogonal zueinander. Die in nichttrivialen Topologien auftretenden Moduli (Nullmoden von $\mathcal{P}_0^{\dagger}$ bzw. $\mathcal{P}_0'^{\dagger}$) und konformen Killing-Skalare (Nullmoden von $\mathcal{P}_0$ bzw. $\mathcal{P}_0'$) werden im Abschnitt III.3 untersucht. Offensichtlich wirken die $U(1)$ Eichtransformationen weder auf die Metrik noch auf den ρ-spurfreien Teil der eichfixierten Gravitinos, damit hat die Fixierung des Eichfeldes $A_{\alpha} = 0$ keinen Einfluß auf die Wahl der Eichfixierungen der anderen Felder.

Die Spuranteile der eichfixierten Metrik und des Gravitinos können nun noch durch Weyl- bzw. Super-Weyl-Tranformationen eliminiert werden. Allerdings werden diese klassischen Symmetrien der Wirkung in der quantisierten Theorie außerhalb der kritischen Dimension anomal [70], ebenso wie die axiale $U(1)$ Symmetrie, so daß hier nur die Eichbedingungen

$$e_{\alpha}{}^{a} = e^{\phi}\,\delta_{\alpha}^{a} \qquad \chi_{\alpha}^{+} = \rho_{\alpha}\,\omega^{+} \qquad A_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\lambda' \tag{II.26}$$

gewählt werden können. In beiden Fällen der superkonformen Eichung (II.21) oder (II.26) nimmt die Brink-Schwarz-Wirkung (II.13) wieder die Form (II.6) an, die als

Verallgemeinerung der eichfixierten Wirkung des bosonischen Strings Ausgangspunkt der obigen Untersuchungen war,

$$S_{N=2}^{\text{fix}} = -\tfrac{1}{8\pi} \int d^2\sigma \left(\tfrac{2}{\alpha'}\, \partial_\alpha Z^\mu \partial^\alpha \bar{Z}^{\bar{\nu}} - i\, \bar{\Psi}^{-\bar{\nu}}\, \rho^\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \Psi^{+\mu} \right) \eta_{\mu\bar{\nu}} \,. \qquad \text{(II.27)}$$

II.3 Die Bewegungsgleichungen

Bevor die von den Symmetrien der Brink-Schwarz-Wirkung erzeugten Ströme im Abschnitt II.4 näher untersucht werden, sollen zunächst einmal die Bewegungsgleichungen der Materiefelder aus der eichfixierten Wirkung ermittelt und gelöst werden. Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen der Wirkung $S_{N=2}^{\text{fix}}$ aus (II.27) ist es sinnvoll, die Spinorkomponenten

$$\Psi^{+\mu} = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow^{+\mu} \\ \psi_\downarrow^{+\mu} \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der speziellen Wahl der Gamma-Matrizen ρ^α aus (II.4) auszuschreiben. Die Wirkung nimmt dann die folgende Form an

$$\begin{aligned} S_{N=2}^{\text{fix}} = -\tfrac{1}{8\pi} \int \quad d^2\sigma \quad & \Big(\tfrac{2}{\alpha'}\, \partial_\alpha Z^\mu \partial^\alpha \bar{Z}^{\bar{\nu}} - i\, \psi_\downarrow^{-\bar{\nu}} \,(\overleftrightarrow{\partial}_0 - \overleftrightarrow{\partial}_1)\, \psi_\downarrow^{+\mu} \\ & -i\, \psi_\uparrow^{-\bar{\nu}}\, (\overleftrightarrow{\partial}_0 + \overleftrightarrow{\partial}_1)\, \psi_\uparrow^{\mu} \Big)\, \eta_{\mu\bar{\nu}} \,. \end{aligned} \qquad \text{(II.28)}$$

Aus dieser Wirkung lassen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen, die Bewegungsgleichungen der Materiefelder, einfach ablesen. Man erhält mit den zweidimensionalen Lichtkegelkoordinaten $\sigma^\pm = \sigma^0 \pm \sigma^1$ und $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$,

$$(-\partial_0^2 + \partial_1^2)\, Z^\mu = -4\, \partial_+ \partial_-\, Z^\mu \;=\; 0 \qquad \text{(II.29a)}$$

$$(\partial_0 - \partial_1)\, \psi_\downarrow^{+\mu} = 2\, \partial_-\, \psi_\downarrow^{+\mu} \;=\; 0 \qquad \text{(II.29b)}$$

$$(\partial_0 + \partial_1)\, \psi_\uparrow^{+\mu} = 2\, \partial_+\, \psi_\uparrow^{+\mu} \;=\; 0\,. \qquad \text{(II.29c)}$$

Aus diesen Bewegungsgleichungen erkennt man unmittelbar, daß sich die Materiefelder in einen linkslaufenden (von $\sigma^+ = \sigma^0 + \sigma^1$ abhängenden) und einen rechtslaufenden (von $\sigma^- = \sigma^0 - \sigma^1$ abhängenden) Anteil zerlegen lassen. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen (II.29a) bis (II.29c) haben folglich die allgemeine Form

$$Z^\mu(\sigma^0, \sigma^1) \;=\; Z_L^\mu(\sigma^+) + Z_R^\mu(\sigma^-) \qquad \text{(II.30a)}$$

$$\psi_\downarrow^{+\mu}(\sigma^0, \sigma^1) \;=\; \psi_\downarrow^{+\mu}(\sigma^+) \qquad \text{(II.30b)}$$

$$\psi_\uparrow^{+\mu}(\sigma^0, \sigma^1) \;=\; \psi_\uparrow^{+\mu}(\sigma^-)\,. \qquad \text{(II.30c)}$$

II.3.1 Randbedingungen

Bei der Variation der Wirkung (II.28) zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen treten Randterme aus der partiellen Integration der kinetischen Terme auf. Diese müssen durch eine entsprechende Wahl von Rand- oder Periodizitätsbedingungen der Materiefelder zum Verschwinden gebracht werden[10]. Die unterschiedlichen Bedingungen an die Felder, die man für offene und für geschlossene Strings erhält,

[10] Die Weltfläche des Strings bzw. deren Ränder liegen nicht im Unendlichen. Daher genügt es hier, im Gegensatz zum Fall üblicher Feldtheorien, nicht, einfach zu verlangen, daß alle Felder im Unendlichen hinreichend schnell abfallen.

erlauben es dann, eine funktionale Form der Lösungen der Bewegungsgleichungen anzugeben.

Die Randbedingungen des geschlossenen Strings

Betrachtet man zunächst geschlossene Strings, so müssen die bosonischen Felder $Z^\mu(\sigma)$ die Bedingung erfüllen $\eta_{\mu\bar\nu}\,\delta Z^\mu\,\partial_1\bar Z^{\bar\nu}|^{2\pi}_{\sigma^1=0}=0$. Diese Bedingung ist genau dann für Links- und für Rechtsläufer unabhängig voneinander erfüllt, wenn das komplexe Feld Z^μ bei einmaligem Transport um den geschlossenen String, d.h. für $\sigma^1\to\sigma^1+2\pi$ nur eine beliebige Phase als Vorfaktor annimmt [105]. Es muß also gelten

$$
\begin{aligned}
Z^\mu_{R/L}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) &= e^{2\pi i\,\lambda_{R/L}}\,Z^\mu_{R/L}(\sigma^0,\sigma^1) && \text{(II.31a)}\\
&\text{oder}\\
Z^\mu_{R/L}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) &= e^{2\pi i\,\lambda_{R/L}}\,\bar Z^{\bar\mu}_{R/L}(\sigma^0,\sigma^1)\,, && \text{(II.31b)}
\end{aligned}
$$

wobei Gleichung (II.31b) den sogenannten getwisteten Fall beschreibt. $\lambda_{R/L}$ sind die jeweiligen Perioden für die Rechts- und Linksläufer. Diese Periodizitätsbedingungen unterscheiden sich deutlich von denen des bosonischen Strings oder denen des N=1 Superstrings, was auf die Komplexität der Materiefelder des N=2 Strings zurückzuführen ist. Komplexe Felder können in entsprechenden Produkten beliebige Phasen annehmen, während reelle Felder sich allenfalls um ein Vorzeichen ändern können.

Die fermionischen Felder müssen die Bedingung $\eta_{\mu\bar\nu}\,(\psi_\uparrow^{-\bar\nu}\delta\psi_\uparrow^\mu-\psi_\downarrow^{-\bar\nu}\delta\psi_\downarrow^\mu)|^{2\pi}_{\sigma^1=0}=0$ erfüllen. Daraus ergeben sich wie für die bosonischen Felder unabhängige Periodizitätsbedingungen für Links- und für Rechtsläufer. Man erhält

$$
\begin{aligned}
\psi^{+\mu}_{\uparrow/\downarrow}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) &= e^{2\pi i\,\rho_{\uparrow/\downarrow}}\,\psi^{+\mu}_{\uparrow/\downarrow}(\sigma^0,\sigma^1) && \text{(II.32a)}\\
&\text{oder}\\
\psi^{+\mu}_{\uparrow/\downarrow}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) &= e^{2\pi i\,\rho_{\uparrow/\downarrow}}\,\psi^{-\bar\mu}_{\uparrow/\downarrow}(\sigma^0,\sigma^1)\,. && \text{(II.32b)}
\end{aligned}
$$

Gleichung (II.32b) gibt wieder den getwisteten Fall an. Ebenso wie die bosonischen Felder Z^μ können auch die Fermionen beim Umlauf um den geschlossenen String eine beliebige Phase $\rho_\uparrow$ für Rechtsläufer und $\rho_\downarrow$ für Linksläufer annehmen. Die Möglichkeit einer kontinuierlichen Phase bei periodischem Umlauf um den String hängt eng mit der Präsenz des $U(1)$ Eichfeldes auf der Weltfläche zusammen [106]. Der Kopplungsterm zwischen dem Eichfeld $A_\pm=A_0\pm A_1$ und dem fermionischen Materiefeld $\psi^\mp$ läßt sich mit den beiden beliebigen Konstanten $B_\pm$ schreiben als

$$
\begin{aligned}
\big(\partial_+-i\,A_+\big)\,\psi^- &= e^{i\,(A_+\sigma^++B_-\sigma^-)}\,\partial_+\big(e^{-i\,(A_+\sigma^++B_-\sigma^-)}\,\psi^-\big)\\
&\equiv e^{i\,(A_+\sigma^++B_-\sigma^-)}\,\tilde\psi^- && \text{(II.33a)}\\
\big(\partial_--i\,A_-\big)\,\psi^+ &= e^{i\,(A_-\sigma^-+B_+\sigma^+)}\,\partial_-\big(e^{-i\,(A_-\sigma^-+B_+\sigma^+)}\,\psi^+\big)\\
&\equiv e^{i\,(A_-\sigma^-+B_+\sigma^+)}\,\tilde\psi^+\,. && \text{(II.33b)}
\end{aligned}
$$

Durch eine entsprechende Wahl des Eichfeldes $A_\pm$ und der Konstanten $B_\pm$ lassen sich nun beliebige unabhängige Rand- oder Periodizitätsbedingungen für das fermionische Feld $\tilde\psi^\pm$ in beiden Richtungen σ^0 und σ^1 erreichen[11]. Es ist also möglich,

[11] Die Randbedingungen in der Zeitrichtung σ^0 auf der Weltfläche spielen allerdings erst auf Riemann-Flächen von höherem Genus, etwa bei der Berechnung der Zustandssumme auf dem Torus, eine Rolle.

durch eine Redifinition der Fermionen $\psi^{+\mu}$ und der an diese Fermionen koppelnden Gravitinos χ_α^+, das Eichfeld zum Verschwinden zu bringen, und stattdessen kontinuierliche Randbedingungen an diese unter der $U(1)$ Eichgruppe geladenen Felder zu erhalten. Am Ende von Abschnitt II.4 wird zudem noch gezeigt, wie der die verschiedenen Randbedingungen ineinander überführende Spektralflußoperator SFO(Θ) aus der Nullmode des zur $U(1)$ Eichsymmetrie gehörenden Stromes konstruiert werden kann.

Verlangt man nicht nur, daß die Randterme bei Variation der Wirkung verschwinden, sondern fordert zudem noch die Einwertigkeit des Integranden der nicht eichfixierten Wirkung (II.13) auf der Weltfläche, liefern die beiden obigen Periodizitätsbedingungen für die Materiefelder entsprechende Bedingungen für die Felder des $N=2$ Supergravitationsmultipletts aus den Korrekturtermen zu $S^{\text{fix}}_{N=2}$. Man erhält für das Gravitino

$$\chi^+_{\uparrow/\downarrow\,\alpha}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) = e^{2\pi i\,(\rho_{\uparrow/\downarrow}-\lambda_{R/L})}\,\chi^+_{\uparrow/\downarrow\,\alpha}(\sigma^0,\sigma^1) \tag{II.34a}$$

und

$$\chi^+_{\uparrow/\downarrow\,\alpha}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) = e^{2\pi i\,(\rho_{\uparrow/\downarrow}-\lambda_{R/L})}\,\chi^-_{\uparrow/\downarrow\,\alpha}(\sigma^0,\sigma^1)\,, \tag{II.34b}$$

und für das $U(1)$ Eichfeld

$$A_\alpha(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) = A_\alpha(\sigma^0,\sigma^1) \tag{II.35a}$$

und

$$A_\alpha(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) = -A_\alpha(\sigma^0,\sigma^1)\,, \tag{II.35b}$$

wobei die Gleichungen (a) jeweils den ungetwisteten und die Gleichungen (b) den getwisteten Fall angeben. Die Metrik bzw. das Zweibein $e_\alpha{}^a$ bleibt von den Periodizitätsbedingungen der anderen Felder unbeeinflußt. Verlangt man, daß das $U(1)$ Eichfeld A_α auf der Weltfläche des Strings einwertig ist, muß der getwistete Fall wegen Gleichung (II.35b) ausgeschlossen werden. Weiterhin ist es eine sinnvolle Forderung, daß die bosonischen Materiefelder $Z^\mu(\sigma)$, die die Einbettung des Strings in die Raumzeit beschreiben, einwertig sein sollen, daß also gilt $\lambda_R=\lambda_L=0$. Nur die unter der $U(1)$ geladenen Fermionen $\psi^{+\mu}$ und χ^+_α behalten so ihre nichttrivialen Periodizitätsbedingungen

$$\psi^{+\mu}_{\uparrow/\downarrow}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) = e^{2\pi i\,\rho_{\uparrow/\downarrow}}\,\psi^{+\mu}_{\uparrow/\downarrow}(\sigma^0,\sigma^1) \tag{II.36a}$$

$$\chi^+_{\uparrow/\downarrow\,\alpha}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) = e^{2\pi i\,\rho_{\uparrow/\downarrow}}\,\chi^+_{\uparrow/\downarrow\,\alpha}(\sigma^0,\sigma^1)\,. \tag{II.36b}$$

Dementsprechend sind die Randbedingungen für die konjugierten Richtungen im Targetraum $\Psi^{-\bar\mu}$ und χ^-_α,

$$\psi^{-\bar\mu}_{\uparrow/\downarrow}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) = e^{-2\pi i\,\rho_{\uparrow/\downarrow}}\,\psi^{-\bar\mu}_{\uparrow/\downarrow}(\sigma^0,\sigma^1) \tag{II.37a}$$

$$\chi^-_{\uparrow/\downarrow\,\alpha}(\sigma^0,\sigma^1+2\pi) = e^{-2\pi i\,\rho_{\uparrow/\downarrow}}\,\chi^-_{\uparrow/\downarrow\,\alpha}(\sigma^0,\sigma^1)\,. \tag{II.37b}$$

Die Randbedingungen des offenen Strings

Der offene String hat zwei freie Enden, die bei einer Variation der Wirkung Randterme erzeugen. Aus der Forderung, daß diese Randterme verschwinden sollen, ergeben sich an Stelle der Periodizitätsbedingungen des geschlossenen Strings Randbedingungen an die auf der Weltfläche definierten Felder. Aus diesem Grund ergeben sich auch für die bosonischen Materiefelder $Z^\mu(\sigma)$ unter der Forderung, daß diese auf der Weltfläche des Strings einwertig sein sollen, nichttriviale Randbedingungen. Der getwistete Fall, der hier wie beim geschlossenen String auftauchen kann, soll nicht weiter untersucht werden. Anders als beim geschlossenen String wird die Länge des offenen Strings üblicherweise von $\sigma^1 = 0$ bis $\sigma^1 = \pi$ parametrisiert. Damit hat der Randterm der bosonischen Felder die Form $\eta_{\mu\bar\nu}\,\delta Z^\mu\,\partial_1 \bar Z^{\bar\nu}|_{\sigma^1=0}^{\pi}$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten, diesen Randterm zum Verschwinden zu bringen,

$$\partial_1 Z^\mu = 0 \qquad \text{für } \sigma^1 = 0, \pi, \tag{II.38a}$$

oder

$$\delta Z^\mu = 0 \qquad \text{für } \sigma^1 = 0, \pi. \tag{II.38b}$$

Die zweite Gleichung (II.38b) beschreibt den Fall, in dem die Enden des offenen Strings im Targetraum fest liegen. Diese Dirichlet-Randbedingungen führen zur Beschreibung von D-Branes [121] und sollen hier nicht weiter berücksichtigt werden[12]. Es wird im folgenden also nur noch der Fall der Neumann-Randbedingungen (II.38a) betrachtet, d.h. die Normalenableitung des bosonischen Feldes Z^μ verschwindet am Rand des offenen Strings. Dies führt dazu, daß Links- und Rechtsläufer am Rand reflektiert werden und in offenen Stringtheorien nicht mehr unabhängig voneinander sind.

Die Variation des fermionischen Termes der Wirkung (II.28) liefert die Randterme $\eta_{\mu\bar\nu}\,(\psi_\uparrow^{-\bar\nu}\delta\psi_\uparrow^{+\mu} - \psi_\downarrow^{-\bar\nu}\delta\psi_\downarrow^{+\mu})|_{\sigma^1=0}^{\pi}$. Die Forderung nach dem Verschwinden der Randterme liefert hier im Prinzip zwei unabhängige Beziehungen zwischen den linkslaufenden und den rechtslaufenden Fermionen, eine für $\sigma^1 = 0$ und eine für $\sigma^1 = \pi$. Jedoch kann eine beliebige globale Phase durch eine entsprechende Redefinition der Felder absorbiert werden. Man setzt also im folgenden $\psi_\uparrow^{+\mu}(\sigma^0, 0) = \psi_\downarrow^{+\mu}(\sigma^0, 0)$ und $\psi_\uparrow^{-\bar\mu}(\sigma^0, 0) = \psi_\downarrow^{-\bar\mu}(\sigma^0, 0)$ und betrachtet nur noch die Randbedingungen für $\sigma^1 = \pi$. Hier gilt dann

$$\psi_\uparrow^{+\mu}(\sigma^0, \pi) = e^{2\pi i\,\rho}\,\psi_\downarrow^{+\mu}(\sigma^0, \pi) \tag{II.39a}$$

$$\psi_\uparrow^{-\bar\mu}(\sigma^0, \pi) = e^{-2\pi i\,\rho}\,\psi_\downarrow^{-\bar\mu}(\sigma^0, \pi)\,. \tag{II.39b}$$

Die an einem Rand gleichgesetzten links- und rechtslaufenden Fermionen $\psi_\downarrow^{+\mu}(\sigma)$ und $\psi_\uparrow^{+\mu}(\sigma)$ unterscheiden sich also am anderen Rand des offenen N=2 Strings um eine beliebige Phase. Wie schon für den geschlossenen String erläutert, unterscheidet sich der N=2 String durch die Komplexität seiner Felder von N=1 Superstring, bei dem sich links- und rechtslaufende Fermionen lediglich um ein Vorzeichen unterscheiden dürfen.

Anders als im Fall des geschlossenen Strings liefert die Untersuchung der Randbedingungen der Materiefelder des offenen N=2 Strings keine Einschränkungen an die Felder des Supergravitationsmultipletts. Das Zweibein $e_\alpha{}^a$, das Gravitino χ_α^+ und das $U(1)$ Eichfeld A_α sind hier völlig frei wählbar.

[12]Zur Beschreibung von D-Branes im Rahmen der N=2 Stringtheorie siehe etwa [144].

II.3.2 OSZILLATORENTWICKLUNGEN

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten die Bewegungsgleichungen (II.29a) bis (II.29c) und die Periodizitäts- bzw. Randbedingungen (II.36a) bzw. (II.38a) und (II.39a) hergeleitet wurden, können diese Gleichungen nun gelöst werden. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für Links- und Rechtsläufer besteht aus der Schwerpunktsbewegung des Strings[13] und einer Entwicklung in Oszillatormoden, welche die entsprechenden Randbedingungen erfüllt.

DIE OSZILLATORENTWICKLUNG FÜR GESCHLOSSENE STRINGS

Die allgemeine Lösung der zweidimensionalen Laplace-Gleichung mit den Periodizitätsbedingungen des geschlossenen Strings läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned} Z^\mu_L(\sigma^+) &= \tfrac{1}{2}\,q^\mu + \tfrac{\alpha'}{2}\,p^\mu\,\sigma^+ + i\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\tfrac{1}{n}\,\alpha^\mu_n\,e^{-i\,n\,\sigma^+} && \text{(II.40a)}\\ Z^\mu_R(\sigma^-) &= \tfrac{1}{2}\,q^\mu + \tfrac{\alpha'}{2}\,p^\mu\,\sigma^- + i\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\tfrac{1}{n}\,\tilde\alpha^\mu_n\,e^{-i\,n\,\sigma^-} && \text{(II.40b)}\\ \psi^{+\mu}_\downarrow(\sigma^+) &= \sqrt{i}\sum_{r\in\mathbb{Z}-\rho_\downarrow} b^{+\mu}_{\downarrow r}\,e^{-i\,r\,\sigma^+} && \text{(II.40c)}\\ \psi^{+\mu}_\uparrow(\sigma^-) &= \sqrt{i}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho_\uparrow} b^{+\mu}_{\uparrow r}\,e^{-i\,r\,\sigma^-}\;. && \text{(II.40d)} \end{aligned}$$

Insbesondere um Ausdrücke der Form ∂Z kompakter darstellen zu können, ist es sinnvoll, die Nullmoden der bosonischen Oszillatoren durch $\alpha^\mu_0 = \sqrt{\alpha'/2}\,p^\mu$ zu definieren. Bei der Entwicklung der Lösung für die konjugierten Richtungen der fermionischen Felder ist zu beachten, daß der Laufbereich des Summationsindex für $\psi^{-\bar\mu}_\downarrow(\sigma^+)$ in $r \in \mathbb{Z} + \rho_\downarrow$ liegt, während für $\psi^{-\bar\mu}_\uparrow(\sigma^-)$ gilt $r \in \mathbb{Z} - \rho_\uparrow$. Man erhält also

$$\begin{aligned} \psi^{-\bar\mu}_\downarrow(\sigma^+) &= \sqrt{i}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho_\downarrow} b^{-\bar\mu}_{\downarrow r}\,e^{-i\,r\,\sigma^+} && \text{(II.41a)}\\ \psi^{-\bar\mu}_\uparrow(\sigma^-) &= \sqrt{i}\sum_{r\in\mathbb{Z}-\rho_\uparrow} b^{-\bar\mu}_{\uparrow r}\,e^{-i\,r\,\sigma^-}\;. && \text{(II.41b)} \end{aligned}$$

Die Moden mit negativem Index $n < 0$ oder $r < 0$ gehören zu positiven Frequenzen und werden bei der Quantisierung zu Erzeugern, während die zu negativen Frequenzen gehörenden Moden mit positivem Index $n > 0$ oder $r > 0$ zu Vernichtern werden. Die Nullmoden der bosonischen Felder q^μ und p^μ sind Schwerpunktskoordinate und Schwerpunktsimpuls des Strings, die zu gleichen Teilen zwischen Links- und Rechtsläufern aufgeteilt sind. Sie verlangen ebenso wie die im Fall $\rho = 0$ auftretenden Nullmoden der fermionischen Felder besondere Aufmerksamkeit bei der Quantisierung. Für die fermionischen Felder $\psi^{+\mu}_{\uparrow/\downarrow}$ findet man für bestimmte Werte der Phase ρ die Ergebnisse des $N{=}1$ Superstrings wieder. So reproduziert $\rho = 0$ den periodischen Ramond-Sektor des Superstrings, mit seinen zusätzlichen Nullmoden, während $\rho = \frac{1}{2}$ den antiperiodischen Neveu-Schwarz-Sektor wiedergibt.

[13] Die Schwerpunktsbewegung des Strings wird durch die Nullmoden des Laplace-Operators auf der Weltfläche beschrieben.

Aus der Forderung, daß die bosonischen und fermionischen Weltflächenfelder $Z^\mu(\sigma)$ und $\Psi^{+\mu}(\sigma)$ hermitesch sein sollen, erhält man folgendes Verhalten der Oszillatormoden unter hermitescher Konjugation

$$\left(\alpha_n^\mu\right)^\dagger = \bar{\alpha}_{-n}^{\bar{\mu}} \tag{II.42a}$$
$$\left(\tilde{\alpha}_n^\mu\right)^\dagger = \bar{\tilde{\alpha}}_{-n}^{\bar{\mu}} \tag{II.42b}$$
$$\left(b_{\uparrow/\downarrow r}^{+\mu}\right)^\dagger = b_{\uparrow/\downarrow -r}^{-\bar{\mu}} \,. \tag{II.42c}$$

Die Oszillatorentwicklung für offene Strings

Mit den Randbedingungen des offenen Strings hat die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen die Form

$$Z^\mu(\sigma^0,\sigma^1) = q^\mu + \alpha' p^\mu \sigma^0 + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \tfrac{1}{n}\, \alpha_n^\mu\, e^{-in\sigma^0} \cos(n\,\sigma^1) \tag{II.43a}$$
$$\psi_\downarrow^{+\mu}(\sigma^+) = \sqrt{i} \sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho} b_r^{+\mu}\, e^{-ir\sigma^+} \tag{II.43b}$$
$$\psi_\uparrow^{+\mu}(\sigma^-) = \sqrt{i} \sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho} b_r^{+\mu}\, e^{-ir\sigma^-} \,. \tag{II.43c}$$

Auch hier ergibt sich, wie im Fall des geschlossenen Strings, die Entwicklung für die konjugierten Richtungen durch Summation der entsprechenden Oszillatormoden über $r \in \mathbb{Z} - \rho$. Die Nullmoden der bosonischen Oszillatoren haben mit der Normierung des offenen Strings die Form $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}\,p^\mu$. Man erkennt im Vergleich mit den Lösungen des geschlossenen Strings, daß hier nur noch jeweils ein Satz bosonischer und fermionischer Oszillatormoden α_n^μ bzw. $b_r^{+\mu}$ vorliegt. Durch die Randbedingungen des offenen Strings wird die Hälfte der Operatorfreiheitsgrade eliminiert. Diese Beobachtung, daß der offene String in gewissem Sinne "die Hälfte" des geschlossenen Strings ist[14], wird auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit immer wieder auftauchen.

Einführung komplexer Koordinaten auf der Weltfläche

Für das folgende Vorgehen ist es sinnvoll, nach den Lichtkegelkoordinaten auf der Weltfläche $\sigma^\pm$ auch noch die Beschreibung durch Koordinaten in der komplexen Ebene einzuführen. Dazu wird zunächst eine Wick-Rotation $\sigma^0 \to -i\,\sigma^0$ durchgeführt, so daß gilt $\sigma^\pm \to -i\,(\sigma^0 \pm i\,\sigma^1)$. Diese Wick-Rotation beschreibt die Einführung von komplexen Koordinaten $z' = \sigma^0 - i\,\sigma^1$ und $\bar{z}' = \sigma^0 + i\,\sigma^1$ auf dem durch die Weltfläche des geschlossenen Strings beschriebenen Zylinder, wie in Abbildung II.1 (a) und (b) dargestellt. Der zweite Schritt besteht nun in einer konformen Abbildung der komplexen Koordinaten auf die komplexe Ebene durch

$$z = e^{z'} = e^{\sigma^0 - i\,\sigma^1} \tag{II.44a}$$
$$\bar{z} = e^{\bar{z}'} = e^{\sigma^0 + i\,\sigma^1} \,. \tag{II.44b}$$

Dies entspricht dem Übergang zu Abbildung II.1 (c). In der komplexen Ebene wirken Translationen in σ^1 Richtung entlang des Strings als Rotationen um den

[14] Auf dieser Beobachtung beruht auch das KLT Theorem [85], das einen Zusammenhang zwischen den Amplituden offener und geschlossener Strings herstellt.

Ursprung, während Zeittranslationen in σ^0 Richtung zu Dilatationen in der Ebene werden. Entsprechend ist bei der Quantisierung die übliche Zeitordnung durch eine Radialordnung zu ersetzen, Kommutatoren zu gleicher Zeit entprechen Kommutatoren bei gleichen Radius [72, 133]. Der Zeitpunkt $\sigma^0 = -\infty$ wird dabei auf den Ursprung abgebildet, während der Zeitpunkt $\sigma^0 = +\infty$ im Unendlichen liegt.

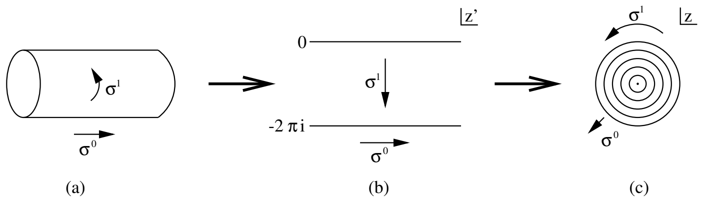

Abbildung II.1 - *Abbildung der Weltfläche des geschlossenen Strings auf die komplexe Ebene.*

Im Fall des offenen Strings ist der Laufbereich der Koordinate σ^1 entlang des Strings auf den Bereich $\sigma^1 \in [0, \pi]$ eingeschränkt. Auch in diesem Fall lassen sich durch Gleichung (II.44a) und (II.44b) Koordinaten auf der komplexen Ebene definieren. Jedoch liegt z jetzt nur in der oberen komplexen Halbebene, während $\bar{z}$ in der unteren Halbebene liegt, wie in Abbildung II.2 dargestellt wird. Auch hier liegt der Zeitpunkt $\sigma^0 = -\infty$ im Ursprung, während $\sigma^0 = +\infty$ im Unendlichen liegt. Punkte gleicher Weltflächenzeit liegen auf konzentrischen Halbkreisen um den Ursprung. Da der offene String zwei ausgezeichnete Punkte hat, die beiden Stringenden, läßt eine Translation entlang der Stringrichtung σ^1 die Weltfläche nicht invariant. Ebenso ist die obere komplexe Halbebene nicht invariant unter Rotationen um den Ursprung. Die beiden Stringenden werden auf den positiven bzw. auf den negativen Teil der reellen Achse abgebildet. Felder, die an die Enden des offenen Strings koppeln, werden also auf der reellen Achse definiert. Zur Vereinfachung der Rechung mit offenen Strings behilft man sich häufig des Verdopplungstricks. Ist ein holomorphes Feld $\phi(z)$ auf der oberen Halbebene definiert, und die entsprechende antiholomorphe Hälfte $\bar{\phi}(\bar{z})$ dieses Feldes auf der unteren Halbebene, dann kann man $\phi(z)$ durch die folgende Definition auf die gesamte komplexe Ebene fortsetzen,

$$\phi(z) \equiv \bar{\phi}(\bar{z}') \qquad \text{für} \qquad \mathrm{Im}\ z < 0\,.$$

Dabei ist $z' \equiv \bar{z}$.

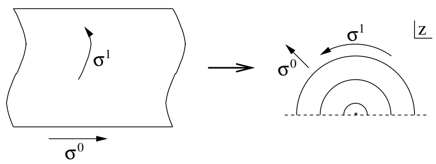

Abbildung II.2 - *Abbildung der Weltfläche des offenen Strings auf die obere komplexe Halbebene.*

Auch ohne den Übergang zu einer euklidischen Metrik auf der Weltfläche, d.h. auch ohne Durchführung der Wick-Rotation, kann man die komplexen Koordinaten definieren durch

$$z = e^{i\,(\sigma^0-\sigma^1)} = e^{i\,\sigma^-} \qquad \text{und} \qquad \bar{z} = e^{i\,(\sigma^0+\sigma^1)} = e^{i\,\sigma^+}\,. \tag{II.45}$$

In diesem Fall sind z und $\bar{z}$ jedoch nicht komplex konjugiert zueinander.

Die Modenentwicklungen der Felder Z^μ und $\Psi^{+\mu}$ auf der Weltfläche lassen sich nun in den Koordinaten z und $\bar{z}$ auf der komplexen Ebene angeben. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Fermionen $\Psi^{+\mu}$ konforme Felder vom Gewicht[15] $1/2$ sind. Bei der Koordinatentransformation $z = e^{i\,\sigma^-}$ und $\bar{z} = e^{i\,\sigma^+}$ taucht also in der Modenentwicklung ein zusätzlicher Fraktor $\sqrt{i}\,z^{-1/2}$ bzw. $\sqrt{i}\,\bar{z}^{-1/2}$ auf. Man erhält so die Modenentwicklungen für den geschlossenen String[16]

$$\begin{aligned} Z^\mu(z) &= \tfrac{1}{2}\,q^\mu - i\,\tfrac{\alpha'}{2}\,p^\mu\,\ln z + i\,\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\tfrac{1}{n}\,\tilde{\alpha}^\mu_n\,z^{-n} && \text{(II.46a)}\\ Z^\mu(\bar{z}) &= \tfrac{1}{2}\,q^\mu - i\,\tfrac{\alpha'}{2}\,p^\mu\,\ln \bar{z} + i\,\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\tfrac{1}{n}\,\alpha^\mu_n\,\bar{z}^{-n} && \text{(II.46b)}\\ \psi^{+\mu}_\uparrow(z) &= i\sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho_\uparrow} b^{+\mu}_{\uparrow r}\,z^{-r-1/2} && \text{(II.46c)}\\ \psi^{+\mu}_\downarrow(\bar{z}) &= i\sum_{r\in\mathbb{Z}-\rho_\downarrow} b^{+\mu}_{\downarrow r}\,\bar{z}^{-r-1/2}\,. && \text{(II.46d)} \end{aligned}$$

Für den offenen String erhält man entsprechend die Oszillatorentwicklung

$$\begin{aligned} Z^\mu(z,\bar{z}) &= q^\mu - i\,\alpha'\,p^\mu\,\ln z\bar{z} + i\,\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\tfrac{1}{n}\,\alpha^\mu_n\left(z^{-n} + \bar{z}^{-n}\right) && \text{(II.47a)}\\ \psi^{+\mu}_\uparrow(z) &= i\sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho} b^{+\mu}_{r}\,z^{-r-1/2} && \text{(II.47b)}\\ \psi^{+\mu}_\downarrow(\bar{z}) &= i\sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho} b^{+\mu}_{r}\,\bar{z}^{-r-1/2}\,. && \text{(II.47c)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Modenentwicklungen in den komplexen Koordinaten können nun im folgenden die Propagatoren bzw. die fundamentalen Operatorproduktentwicklungen der durch die Weltflächenwirkung definierten konformen Feldtheorie bestimmt werden.

II.3.3 Kanonische Quantisierung

Bei der kanonischen Quantisierung einer Stringtheorie nutzt man die in der Quantenmechanik üblichen Vertauschungsrelationen zwischen einer Koordinate und dem dazu kanonisch konjugierten Impuls aus, $[X,\Pi_X] = i\,\hbar$, mit $\Pi_X = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 X)}$. Im Fall des N=2 Strings erhält man so eine Kommutator- bzw. Antikommutatorbeziehung zu einer festen Zeit bzw. für gleichen Abstand für die bosonischen und die fermionischen Materiefelder Z^μ und ψ^μ. Aus der eichfixierten Wirkung (II.28) erhält man die konjugierten Impulse $\Pi^\mu_Z(z) = \frac{1}{2\pi\,\alpha'}\,\partial_z\bar{Z}^{\bar{\mu}}(z)$ bzw. $\Pi^{+\mu}_{\psi_{\uparrow/\downarrow}}(z) = -\frac{i}{4\pi}\,\psi^{-\bar{\mu}}_{\uparrow/\downarrow}(z)$. Damit ergibt sich für die bosonischen Felder die fundamentale Vertauschungsrelation[17]

$$\left[Z^\mu(z),\bar{Z}^{\bar{\nu}}(w)\right]\Big|_{|z|=|w|} = 2\pi i\,\alpha'\,\eta^{\mu\bar{\nu}}\,\delta(z-w)\,. \qquad \text{(II.48)}$$

[15] Ein konformes Feld $\phi(z)$ vom Gewicht h transformiert unter einer Reparametrisierung $z \to z'(z)$ wie

$$\phi(z) \to \phi'(z) = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^h \phi(z'(z))\,.$$

[16] Auf die explizite Kennzeichnung von Links- und Rechtsläufern $Z_L(\bar{z})$ und $Z_R(z)$ wird von nun an verzichtet, da dies aus der Abhängigkeit des Feldes von z bzw. von $\bar{z}$ unmittelbar klar wird.

[17] Hier wie auch im folgenden wird zur Vereinfachung der Notation $\hbar = 1$ gesetzt.

Setzt man in diese Vertauschungsrelation die Modenentwicklungen der Felder $Z^\mu(z)$ aus (II.46b) und (II.46a) bzw. aus (II.47a) ein, lassen sich die entsprechenden Vertauschungsrelationen für die Moden α_n^μ und $\tilde{\alpha}_m^\mu$, die jetzt als Operatoren wirken, einfach ermitteln[18],

$$\begin{aligned} \left[\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^{\bar{\nu}}\right] &= m\,\delta_{m+n}\,\eta^{\mu\bar{\nu}} &\text{(II.49a)}\\ \left[\tilde{\alpha}_m^\mu, \bar{\tilde{\alpha}}_n^{\bar{\nu}}\right] &= m\,\delta_{m+n}\,\eta^{\mu\bar{\nu}} &\text{(II.49b)}\\ \left[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^{\nu}\right] &= 0\,. &\text{(II.49c)} \end{aligned}$$

Man erkennt, daß linkslaufende und rechtslaufende Moden α_m^μ und $\tilde{\alpha}_m^\mu$ unabhängig voneinander sind. Für den offenen String, bei dem nicht zwischen Links- und Rechtsläufern unterschieden werden kann, erhält man natürlich nur eine Kommutatorrelation (II.49a). Für die bosonischen Nullmoden q^μ und p^μ ergibt sich auf diese Weise der übliche Zusammenhang zwischen Ort und konjugiertem Impuls

$$\left[q^\mu, \bar{p}^{\bar{\nu}}\right] = i\,\eta^{\mu\bar{\nu}}\,. \tag{II.50}$$

Definiert man nun ein Vakuum[19] $|0\rangle$, das von allen Moden mit negativer Frequenz vernichtet wird, d.h. $\alpha_m^\mu\,|0\rangle = 0$ für $m > 0$, so kann man mit der Relation $(\alpha_{-m}\alpha_m)\,\alpha_{\pm m} = \alpha_{\pm m}\,(\alpha_{-m}\alpha_m \mp m)$ diese Operatoren α_m^μ in Erzeuger und Vernichter unterteilen. Insbesondere läßt sich der entsprechende Anzahloperator für die m Moden durch $N_m =: \alpha_m\alpha_{-m}:$ definieren[20]. Für $m > 0$ sind also die Operatoren α_{-m} Erzeuger, sie spannen durch ihre Wirkung auf das Vakuum den bosonischen Fockraum der Zustände auf, während die Operatoren α_m Vernichter sind. Es ist zu beachten, daß wegen des negativen Vorzeichens der Zeitkomponenten der Minkowski-Metrik im Targetraum, $\eta^{00} = \eta^{22} = -1$, Zustände der Form $\alpha_{-m}^0\,|0\rangle$ oder $\alpha_{-m}^2\,|0\rangle$ eine negative Norm haben, und somit unphysikalisch sind. Diese Zustände müssen durch Zwangsbedingungen, die im nächsten Abschnitt untersucht werden, aus dem Spektrum des Strings eliminiert werden.

Für die fermionischen Felder erhält man die Antivertauschungsrelation zu konstanter Zeit

$$\left\{\psi_{\uparrow/\downarrow}^{+\mu}(z), \psi_{\uparrow/\downarrow}^{-\bar{\nu}}(w)\right\}\Big|_{|z|=|w|} = 4\pi\,\eta^{\mu\bar{\nu}}\,\delta(z-w)\,. \tag{II.51}$$

Auch in diese Relation kann man wie schon im bosonischen Fall die Modenentwicklungen der Felder aus (II.46d) und (II.46c) bzw. aus (II.47c) und (II.47b) einsetzen. Damit ergeben sich die folgenden Antivertauschungsrelationen für die Moden $b_{\uparrow r}^{+\mu}$ und $b_{\downarrow r}^{+\mu}$

$$\begin{aligned} \left\{b_{\downarrow r}^{+\mu}, b_{\downarrow s}^{-\bar{\nu}}\right\} &= \delta_{r+s}\,\eta^{\mu\bar{\nu}} &\text{(II.52a)}\\ \left\{b_{\uparrow r}^{+\mu}, b_{\uparrow s}^{-\bar{\nu}}\right\} &= \delta_{r+s}\,\eta^{\mu\bar{\nu}} &\text{(II.52b)}\\ \left\{b_{\uparrow r}^{+\mu}, b_{\downarrow s}^{-\bar{\nu}}\right\} &= 0\,. &\text{(II.52c)} \end{aligned}$$

[18] Durch eine Reskalierung der Operatoren $a_m^\mu = 1/\sqrt{m}\,\alpha_m^\mu$ für $m > 0$ und $a_m^{\mu\,\dagger} = 1/\sqrt{m}\,\alpha_{-m}^\mu$ für $m > 0$ erhält man die bekannten Erzeuger und Vernichter des harmonischen Oszillators, mit der Vertauschungsrelation $[a_m^\mu, a_n^{\nu\,\dagger}] = \delta_{m,n}\,\eta^{\mu\nu}$.

[19] Strenggenommen gibt es unendlich viele Vakua $|0, p^\mu\rangle$ mit verschiedenen Eigenwerten des Impulsoperators p^μ, die diese Bedingung erfüllen. Da dieser Schwerpunktimpuls aber bei der Diskussion der Oszillatormoden keine Rolle spielt, kann man hier etwa ein translationsinvariantes Vakuum mit $p^\mu\,|0\rangle = 0$ wählen.

[20] Die Normalordnung $:\ldots:$ ist hier wie üblich so definiert, daß Moden negativer Frequenz rechts von Moden positiver Frequenz stehen.

Auch hier sind linkslaufende und rechtslaufende Moden des geschlossenen Strings wieder unabhängig voneinander, während man für den offenen String nur eine Antikommutatorrelation (II.52a) für die Moden $b_r^{+\mu}$ erhält. Ebenso wie im bosonischen Fall kann man auch die fermionischen Moden nach Einführung eines Vakuums $|0\rangle$, das von allen Moden mit negativer Frequenz vernichtet wird, d.h. $b_r^{+\mu}\,|0\rangle = 0$ für $r > 0$, Erzeuger und Vernichter unterscheiden. Die Erzeuger $b_{-r}^{+\mu}$ mit $r > 0$ spannen durch Wirkung auf das Vakuum den Fockraum aller fermionischen Zustände auf. Ebenso wie im oben diskutierten bosonischen Fall müssen auch hier unphysikalische Zustände mit negativer Norm durch Zwangsbedingungen aus dem Spektrum der Stringtheorie entfernt werden.

Mit Hilfe der Vertauschungs- bzw. Antivertauschungsrelationen und mit der Definition des Vakuums $|0\rangle$ für bosonische und fermionische Oszillatormoden können nun die Propagatoren der Felder Z^μ und $\Psi^{+\mu}$ für kleine Abstände[21] berechnet werden. Man erhält für $\rho_{\uparrow/\downarrow} \neq 0$

$$\begin{aligned}
\langle 0|Z^\mu(z)\,\bar{Z}^{\bar\nu}(w)|0\rangle &= -\tfrac{\alpha'}{2}\,\eta^{\mu\bar\nu}\,\ln(z-w) && \text{(II.53a)}\\
\langle 0|Z^\mu(\bar z)\,\bar{Z}^{\bar\nu}(\bar w)|0\rangle &= -\tfrac{\alpha'}{2}\,\eta^{\mu\bar\nu}\,\ln(\bar z-\bar w) && \text{(II.53b)}\\
\langle 0|\psi_\uparrow^{+\mu}(z)\,\psi_\uparrow^{-\bar\nu}(w)|0\rangle &= -\eta^{\mu\bar\nu}\left(\frac{z}{w}\right)^{\rho_\uparrow-1/2}\frac{1}{z-w} && \text{(II.53c)}\\
\langle 0|\psi_\downarrow^{+\mu}(\bar z)\,\psi_\downarrow^{-\bar\nu}(\bar w)|0\rangle &= -\eta^{\mu\bar\nu}\left(\frac{\bar z}{\bar w}\right)^{\rho_\downarrow-1/2}\frac{1}{\bar z-\bar w}\,. && \text{(II.53d)}
\end{aligned}$$

Im Fall antiperiodischer Randbedingungen, d.h. für $\rho_{\uparrow/\downarrow} = \frac{1}{2}$ nehmen die fermionischen Propagatoren die besonders einfache Form $\sim (z-w)^{-1}$ bzw. $\sim (\bar z - \bar w)^{-1}$ an. Dies entspricht dem Neveu-Schwarz-Sektor des Superstrings. Für die spezielle Wahl der Randbedingungen der fermionischen Felder auf der Weltfläche $\rho_{\uparrow/\downarrow} = 0$, die dem Ramond-Sektor des Superstrings entspricht, existieren Nullmoden der fermionischen Oszillatoren $b^{+\mu}_{\uparrow/\downarrow\,0}$. Aus den Antivertauschungsrelationen (II.52a) und (II.52b) folgt, daß diese Nullmoden (bis auf Normierung) eine Clifford-Algebra erfüllen, $\{b_0^{+\mu}, b_0^{-\bar\nu}\} = \eta^{\mu\bar\nu}$. Daher können die Nullmoden der fermionischen Felder $\Psi^{+\mu}$ als Gamma-Matrizen im Targetraum $\Gamma^{+\mu}$ betrachtet werden, die auf das Vakuum im Ramond-Sektor $|0\rangle_R$ wirken. Dieses Ramond-Vakuum muß also einen Index der Spinordarstellung der Lorentzgruppe der Raumzeit tragen, auf den die fermionischen Nullmoden wie folgt wirken[22] [23]

$$b_0^{+\mu}|\alpha\rangle_R = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma^{+\mu}\right)_\alpha^{\ \beta}|\beta\rangle_R\,. \qquad \text{(II.54)}$$

Damit läßt sich nun auch der Propagator der fermionischen Felder $\psi^{+\mu}_{\uparrow/\downarrow}$ im Ramond-

[21] Diese Propagatoren entsprechen den Operatorproduktentwicklungen der durch die Felder Z^μ und $\Psi^{+\mu}$ gebildeten konformen Feldtheorie. Bei der Bestimmung des Stringpropagators spielen für größere Abstände $z \not\to w$ auch globale topologische Eigenschaften der Weltfläche eine Rolle, die in den nachfolgenden Kapiteln noch eingehend untersucht werden.

[22] Das Ramond-Vakuum mit Spinorindex $|\alpha\rangle_R$ entsteht durch Wirkung eines Spinfeldes $S_\alpha(0)$ auf das übliche Stringvakuum, $|\alpha\rangle_R = S_\alpha(0)\,|0\rangle$.

[23] Die Gamma-Matrizen im Targetraum erfüllen die übliche Clifford-Algebra, $\{\Gamma^{+\mu}, \Gamma^{-\bar\nu}\} = -2\,\eta^{\mu\bar\nu}$.

Sektor mit $\rho_{\uparrow/\downarrow} = 0$ berechnen

$$
\begin{aligned}
{}_R\langle 0|\psi_\uparrow^{+\mu}(z)\,\psi_\uparrow^{-\bar\nu}(w)|0\rangle_R &= -\frac{\eta^{\mu\bar\nu}}{2}\left(\left(\frac{z}{w}\right)^{1/2}+\left(\frac{w}{z}\right)^{1/2}\right)\frac{1}{z-w} && \text{(II.55a)}\\
{}_R\langle 0|\psi_\downarrow^{+\mu}(\bar z)\,\psi_\downarrow^{-\bar\nu}(\bar w)|0\rangle_R &= -\frac{\eta^{\mu\bar\nu}}{2}\left(\left(\frac{\bar z}{\bar w}\right)^{1/2}+\left(\frac{\bar w}{\bar z}\right)^{1/2}\right)\frac{1}{\bar z-\bar w}\,. && \text{(II.55b)}
\end{aligned}
$$

Man stellt fest, daß der fermionische Propagator von der Wahl der kontinuierlichen Randbedingungen für die Felder abhängt. Diese Abhängigkeit verschwindet jedoch für kleine Abstände $z \sim w$. Betrachtet man nun die fundamentalen Operatorproduktentwicklungen (OPE) der Felder Z^μ und $\Psi^{+\mu}$ als den singulären Anteil der Laurent-Entwicklungen der Propagatoren, erhält man die von den Randbedingungen $\rho_{\uparrow/\downarrow}$ unabhängigen Ergebnisse

$$
\begin{aligned}
Z^\mu(z)\,\bar Z^{\bar\nu}(w) &\sim -\tfrac{\alpha'}{2}\,\eta^{\mu\bar\nu}\,\ln(z-w) && \text{(II.56a)}\\
Z^\mu(\bar z)\,\bar Z^{\bar\nu}(\bar w) &\sim -\tfrac{\alpha'}{2}\,\eta^{\mu\bar\nu}\,\ln(\bar z-\bar w) && \text{(II.56b)}\\
\psi_\uparrow^{+\mu}(z)\,\psi_\uparrow^{-\bar\nu}(w) &\sim -\frac{\eta^{\mu\bar\nu}}{z-w} && \text{(II.56c)}\\
\psi_\downarrow^{+\mu}(\bar z)\,\psi_\downarrow^{-\bar\nu}(\bar w) &\sim -\frac{\eta^{\mu\bar\nu}}{\bar z-\bar w}\,. && \text{(II.56d)}
\end{aligned}
$$

Später wird sich zudem noch herausstellen, daß alle im Rahmen der $N{=}2$ Stringtheorie berechneten physikalischen Größen, insbesondere die Amplituden, aufgrund des Spektralflusses unabhängig von der Wahl der Randbedingungen für die unter der $U(1)$ geladenen fermionischen Felder sind. Insbesondere wird in Abschnitt II.4 gezeigt, daß der Spektralfluß ein innerer Automorphismus der Constraint-Algebra des $N{=}2$ Strings ist, der verschiedene Sektoren der kontinuierlichen Randbedingungen aufeinander abbildet.

Im Fall des offenen Strings sind Linksläufer und Rechtsläufer nicht unabhängig voneinander. Dadurch existieren weitere nicht verschwindende Propagatoren, die z und $\bar w$ Koordinaten mischen, wie zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
\langle 0|Z^\mu(z,\bar z)\,\bar Z^{\bar\nu}(w,\bar w)|0\rangle &= -\tfrac{\alpha'}{2}\,\eta^{\mu\bar\nu}\,\big(\ \ln(z-w)+\ln(\bar z-\bar w) && \text{(II.57a)}\\
&\qquad\qquad +\ln(z-\bar w)+\ln(z-\bar w)\ \big)\\
\langle 0|\psi_\uparrow^{+\mu}(z)\,\psi_\downarrow^{-\nu}(\bar w)|0\rangle &= -\frac{\eta^{\mu\bar\nu}}{z-\bar w}\,. && \text{(II.57b)}
\end{aligned}
$$

Jedoch liegen die Koordinaten z im Fall des offenen Strings nur in der oberen komplexen Halbebene, d.h. Terme wie $\ln(z-\bar w)$ oder $(z-\bar w)^{-1}$ werden nicht singulär[24], und tragen damit nicht zu den OPE bei. Für die Singularitäten der Operatorprodukte gilt auch im Fall des offenen Strings

$$
\psi_\uparrow^{+\mu}(z)\,\psi_\downarrow^{-\nu}(\bar w) \sim 0\,.
$$

Mit Hilfe der in diesem Abschnitt berechneten fundamentalen Operatorproduktentwicklungen lassen sich im folgenden auch die OPE aller anderen zusammengesetzten Objekte in der $N{=}2$ Stringtheorie berechnen.

[24] Der Fall, in dem beide Felder auf der reellen Achse liegen, wo also gilt $z = \bar z$ und $w = \bar w$, liefert natürlich auch einen singulären Beitrag. Diese δ-Funktionsbeiträge zu den Operatorprodukten sollen hier aber zuächst noch nicht betrachtet werden.

II.4 Die Symmetrieströme

Im vorangegangenen Abschnitt II.3 wurden die Materiefelder $Z^\mu(z)$ und $\Psi^{+\mu}(z)$ des $N{=}2$ Strings ausführlich untersucht. Jedoch enthält die vollständige Wirkung $S_{N=2}$ aus (II.13) neben diesen schon untersuchten Feldern auch noch die Felder des $N{=}2$ Supergravitationsmultipletts, das Zweibein ${e_\alpha}^a$, das Gravitino χ_α und das $U(1)$ Eichfeld A_α. Diese Felder besitzen in der Wirkung $S_{N=2}$ keine kinetischen Terme, d.h. ihre Bewegungsgleichungen liefern klassisch verschwindende Symmetrieströme. Die aus den Bewegungsgleichungen erhaltenen Beziehungen müssen als Zwangsbedingungen für die Lösungen der Bewegungsgleichungen der Materiefelder gelten. In der klassischen Theorie beschreiben die Zwangsbedingungen Hyperflächen im Phasenraum, auf denen zu physikalischen Lösungen gehörende Trajektorien liegen müssen. Bei einer Quantisierung der Theorie müssen diese Zwangsbedingungen weiterhin gelten. Allerdings wäre es eine zu starke Forderung, das Verschwinden aller Operatormoden der Symmetrieströme zu verlangen. Das Auftreten von Normalordnungskonstanten in der quantisierten Theorie würde dann zu Inkonsistenzen führen. Um das Verschwinden sämtlicher Matrixelemente physikalischer Zustände mit diesen Symmetrieströmen sicherzustellen, genügt es, auch die Operatormoden der Ströme wieder in Erzeuger und Vernichter bezüglich ihrer Wirkung auf physikalische Zustände aufzuteilen. Dadruch können dann unphysikalische Zustände mit negativer Norm aus dem Spektrum des Strings eliminiert werden.

Die Symmetrieströme als Lösungen der Bewegungsgleichungen der Felder des $N{=}2$ Supergravitationsmultipletts sind definiert als die Variation der Wirkung unter der Variation eines Feldes, $\delta S = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\,\sqrt{-h}\,\delta\phi\, J_\phi$, wobei ϕ für das entsprechende bei der lokalen Eichfixierung zu Null gesetzte Feld des Supergravitationsmultipletts steht. Im Fall des $N{=}2$ Strings erhält man so den durch Diffeomorphismen erzeugten Energie-Impuls-Tensor $T_{\alpha\beta}$, zwei komplexe durch Supersymmetrietransformationen erzeugte Supersymmetrieströme $G^\pm_\alpha$ und einen durch die Eichtransformationen erzeugten $U(1)$ Strom J_α,

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{\sqrt{-h}}\frac{\delta S_{N=2}}{\delta h^{\alpha\beta}} \tag{II.58a}$$

$$G^\pm_\alpha = -\frac{1}{4\sqrt{-h}}\frac{\delta S_{N=2}}{\delta \chi^{\mp\alpha}} \tag{II.58b}$$

$$J_\alpha = \frac{i}{4\sqrt{-h}}\frac{\delta S_{N=2}}{\delta A^{\alpha}}\,. \tag{II.58c}$$

In der superkonformen Eichung (II.21) mit ${e_\alpha}^a = \delta^a_\alpha$ und $\chi^\pm_\alpha = A_\alpha = 0$ nehmen diese Symmetrieströme eine besonders einfache Form an. In den oben eingeführten komplexen Koordinaten auf der Weltfläche erhält man für die holomorphe Hälfte der Ströme

$$T_{zz} = -\Big(\tfrac{1}{\alpha'} :\partial_z\bar{Z}^{\bar\nu}\,\partial_z Z^\mu: +\tfrac{1}{4} :\partial_z\psi_\uparrow^{-\bar\nu}\,\psi_\uparrow^{+\mu}: +\tfrac{1}{4} :\partial_z\psi_\uparrow^{+\mu}\,\psi_\uparrow^{-\bar\nu}:\Big)\,\eta_{\mu\bar\nu} \tag{II.59a}$$

$$G^+_{\uparrow z} = \sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\; :\partial_z\bar{Z}^{\bar\nu}\,\psi_\uparrow^{+\mu}:\;\eta_{\mu\bar\nu} \tag{II.59b}$$

$$G^-_{\uparrow z} = \sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\; :\partial_z Z^{\mu}\,\psi_\uparrow^{-\bar\nu}:\;\eta_{\mu\bar\nu} \tag{II.59c}$$

$$J_z = \tfrac{1}{2} :\psi_\uparrow^{-\bar\nu}\,\psi_\uparrow^{+\mu}:\;\eta_{\mu\bar\nu}\,. \tag{II.59d}$$

Dabei wird bei Produkten von Feldern am gleichen Ort die oben definierte Normalordnung angewendet. Die antiholomorphen Hälften der Symmetrieströme, $T_{\bar{z}\bar{z}}$, $G^{\pm}_{\downarrow\bar{z}}$ und $J_{\bar{z}}$, erhält man durch die Ersetzungen $\partial_z \to \partial_{\bar{z}}$ und $\psi_\uparrow \to \psi_\downarrow$. Für offene Strings sind die holomorphe und die antiholomorphe Hälfte der Ströme nicht unabhängig voneinander, da es hier jeweils nur einen Satz bosonischer und fermionischer Oszillatormoden gibt.

Da die fundamentalen Operatorproduktentwicklungen zwischen den Materiefeldern des $N{=}2$ Strings aus den Gleichungen (II.56a) und (II.56c) bekannt sind, können nun auch die singulären Anteile der OPE der Symmetrieströme berechnet werden. Diese OPE bilden die Constraint-Algebra des $N{=}2$ Strings. Man erhält für die holomorphe Hälfte des geschlossenen Strings[25]

$$\begin{aligned}
T(z)\,T(w) &\sim \tfrac{c}{2}\,(z-w)^{-4} + 2\,(z-w)^{-2}\,T(w) + (z-w)^{-1}\,\partial_w T(w) && \text{(II.60a)}\\
T(z)\,G^{\pm}(w) &\sim \tfrac{3}{2}\,(z-w)^{-2}\,G^{\pm}(w) + (z-w)^{-1}\,\partial_w G^{\pm}(w) && \text{(II.60b)}\\
T(z)\,J(w) &\sim (z-w)^{-2}\,J(w) + (z-w)^{-1}\,\partial_w J(w) && \text{(II.60c)}\\
G^{+}(z)\,G^{-}(w) &\sim \tfrac{4c}{3}\,(z-w)^{-3} - 4\,(z-w)^{-2}\,J(w) && \text{(II.60d)}\\
&\qquad +4\,(z-w)^{-1}\big(T(w) - \tfrac{1}{2}\,\partial_w J(w)\big) &&\\
G^{\pm}(z)\,G^{\pm}(w) &\sim 0 && \text{(II.60e)}\\
J(z)\,G^{\pm}(w) &\sim \pm(z-w)^{-1}\,G^{\pm}(w) && \text{(II.60f)}\\
J(z)\,J(w) &\sim \tfrac{c}{3}\,(z-w)^{-2}\,. && \text{(II.60g)}
\end{aligned}$$

Dabei gilt im vierdimensionalen Targetraum $c = 6$. Diese OPE bilden gerade die $N{=}2$ superkonforme Algebra mit zentraler Ladung c [91]. Vernachlässigt man den Term mit zentraler Ladung in (II.60a), kann man aus den Gleichungen (II.60a) bis (II.60c) ablesen, daß die Symmetrieströme $T(z)$, $G^{\pm}(z)$ und $J(z)$ konforme Felder vom Gewicht[26] 2, 3/2 und 1 sind. Dementsprechend lassen sich die Laurent-Entwicklungen dieser Symmetrieströme angeben. Für den geschlossenen String erhält man unter Berücksichtigung der durch die Fermionen $\psi^{+\mu}_{\uparrow}(z)$ vorgegebenen Randbedingungen der Supersymmetrieströme $G^{\pm}(z)$

$$\begin{aligned}
T(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n\, z^{-n-2} && \text{(II.61a)}\\
G^{\pm}(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}\pm\rho} G^{\pm}_r\, z^{-r-3/2} && \text{(II.61b)}\\
J(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n\, z^{-n-1}\,. && \text{(II.61c)}
\end{aligned}$$

Entsprechende Laurent-Entwicklungen für die antiholomorphen Symmetrieströme $\bar{T}(\bar{z})$, $\bar{G}^{\pm}(\bar{z})$ und $\bar{J}(\bar{z})$ liefern die Koeffizienten $\tilde{L}_n$, $\tilde{G}^{\pm}_r$ und $\tilde{J}_n$. Mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Formel[27] lassen sich diese Gleichungen invertieren. Damit können die ein-

[25]Zur Vereinfachung der Notation wird hier $T(z) = T_{zz}$, $G^{\pm}(z) = G^{\pm}_{\uparrow z}$ und $J(z) = J_z$ gesetzt.

[26]Das konforme Gewicht h eines Primärfeldes $\phi(z)$ (siehe dazu auch Fußnote 15) kann man aus seiner OPE mit dem Energie-Impuls-Tensor $T(z)$ ablesen:

$$T(z)\,\phi(w) \sim h\,(z-w)^{-2}\,\phi(w) + (z-w)^{-1}\,\partial_w\phi(w)\,.$$

[27]Es ist $\oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i}\,\frac{f(z)}{(z-w)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^{n-1} f(w)$, wobei C_w eine beliebige geschlossene Kontur um den Punkt w auf der komplexen Ebene ist, die keine weiteren Pole einschließt.

zelnen Moden wie folgt aus den Symmetrieströmen berechnet werden

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1}\, T(z) \tag{II.62a}$$

$$G_r^{\pm} = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{r+1/2}\, G^{\pm}(z) \tag{II.62b}$$

$$J_n = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n}\, J(z)\,. \tag{II.62c}$$

Ersetzt man nun in (II.62a) bis (II.62c) die holomorphen Hälften der Ströme gemäß der Definitionen aus Gleichungen (II.59a) bis (II.59d) durch die Materiefelder Z^μ und $\psi_\uparrow^{+\mu}$, und drückt man dann die Materiefelder durch ihre Modenentwicklungen (II.46a) und (II.46c) aus, lassen sich die Laurent-Moden der Symmetrieströme als Funktionen der Oszillatormoden α_m^μ und $b_{\uparrow r}^{+\mu}$ der Materiefelder angeben. Man erhält

$$L_n = \Big(\tfrac{1}{\alpha'} \sum_{m\in\mathbb{Z}} :\bar{\alpha}_{n-m}^{\bar{\nu}}\, \alpha_m^\mu : - \tfrac{1}{4} \sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho_\uparrow} r : \big(b_r^{-\bar{\nu}}\, b_{n-r}^{+\mu} + b_r^{+\mu}\, b_{n-r}^{-\bar{\nu}} \big) : \Big)\, \eta_{\mu\bar{\nu}} \tag{II.63a}$$

$$G_r^{+} = -\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \bar{\alpha}_m^{\bar{\nu}}\, b_{r-m}^{+\mu}\, \eta_{\mu\bar{\nu}} \tag{II.63b}$$

$$G_r^{-} = -\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_m^{\mu}\, b_{r-m}^{-\bar{\nu}}\, \eta_{\mu\bar{\nu}} \tag{II.63c}$$

$$J_n = -\tfrac{1}{2} \sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho} : b_{n-r}^{-\bar{\nu}}\, b_r^{+\mu} :\, \eta_{\mu\bar{\nu}}\,. \tag{II.63d}$$

Dabei ist die Normalordnung $:\ldots:$ wie üblich durch die Vorschrift definiert, daß Erzeuger links von Vernichtern stehen. Im Fall der Nullmode des Energie-Impuls-Tensors L_0 aus (II.63a) und des $U(1)$ Stroms J_0 aus (II.63d) ergibt sich das Problem, daß aus der Normalordnung der bosonischen bzw. der fermionischen Operatormoden beliebige Normalordnungskonstanten A bzw. B entstehen können. Daher ist L_0 in allen Ausdrücken durch $L_0 - A$ zu ersetzen, und J_0 durch $J_0 - B$. Später wird sich herausstellen, daß für den anomaliefreien N=2 String in der kritischen Dimension $A = 0$ und $B = 0$ gelten muß. Durch hermitesche Konjugation der Gleichungen (II.63a) bis (II.63d) ergeben sich die Beziehungen

$$L_n^\dagger = L_{-n}\,, \qquad G_r^{\pm\,\dagger} = G_{-r}^{\mp}\,, \qquad \text{und} \qquad J_n^\dagger = J_{-n}\,. \tag{II.64}$$

In Gleichungen (II.63a) bis (II.63d) wurden die Moden der Constraint-Algebra in Abhängigkeit von den Oszillatormoden der Materiefelder angegeben. Da die Algebra der Oszillatormoden aus den Gleichungen (II.49a) bis (II.49c) bzw. (II.52a) bis (II.52c) bekannt ist, läßt sich nun auch die N=2 superkonforme Algebra der Moden berechnen

$$[L_m, L_n] = (m-n)\, L_{m+n} + \tfrac{c}{12}\,(m^3 - m)\, \delta_{m+n} \tag{II.65a}$$

$$[L_m, G_r^{\pm}] = \big(\tfrac{1}{2}m - r\big)\, G_{m+r}^{\pm} \tag{II.65b}$$

$$[L_m, J_n] = -n\, J_{m+n} \tag{II.65c}$$

$$\{G_r^+, G_s^-\} = \tfrac{2c}{3}\,\big(r^2 - \tfrac{1}{4}\big)\, \delta_{r+s} - 2\,(r-s)\, J_{r+s} + 4\, L_{r+s} \tag{II.65d}$$

$$[J_m, G_r^{\pm}] = \pm G_{m+r}^{\pm} \tag{II.65e}$$

$$[J_m, J_n] = \tfrac{c}{3}\, m\, \delta_{m+n}\,. \tag{II.65f}$$

Dabei ist die zentrale Ladung in der vierdimensionalen Raumzeit wieder $c = 6$. Im Fall des geschlossenen Strings kann man die Laurent-Moden der antiholomorphen Hälfte der Symmetrieströme, $\tilde{L}_n$, $\tilde{G}_r^{\pm}$ und $\tilde{J}_n$, ebenso als Funktionen der antiholomorphen Materieoszillatoren $\tilde{\alpha}_m^{\mu}$ und $b_{\downarrow r}^{+\mu}$ ausdrücken und erhält die gleiche $N{=}2$ superkonforme Algebra (II.65a) bis (II.65f) für die antiholomorphen Moden. Holomorphe und antiholomorphe Moden kommutieren (bzw. antikommutieren im Fall der $G_r^{\pm}$) miteinander.

Im Fall des offenen $N{=}2$ Strings sind der holomorphe und der antiholomorphe Anteil der Symmetrieströme nicht unabhängig voneinander. Daher erhält man nur *eine* superkonforme Algebra für die Moden L_n, $G_r^{\pm}$ und J_n. Da die komplexen Koordinaten z hier nur auf der oberen Halbebene definiert sind, bilden die $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ kein vollständiges Funktionensystem. Erst wenn man auch noch die auf der unteren Halbebene definierten $\{\bar{z}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ hinzufügt, kann man die Symmetrieströme in Laurent-Moden entwickeln. Es gilt dann

$$L_n = \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_C \big(dz\, z^{n+1}\, T(z) + d\bar{z}\, \bar{z}^{n+1}\, \bar{T}(\bar{z})\big) \qquad \text{(II.66a)}$$

$$G_r^{\pm} = \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_C \big(dz\, z^{r+1/2}\, G^{\pm}(z) + d\bar{z}\, \bar{z}^{r-1/2}\, \bar{G}^{\pm}(\bar{z})\big) \qquad \text{(II.66b)}$$

$$J_n = \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_C \big(dz\, z^{n}\, J(z) + d\bar{z}\, \bar{z}^{n}\, \bar{J}(\bar{z})\big)\,. \qquad \text{(II.66c)}$$

Dabei ist der Integrationsweg C ein Halbkreis um den Ursprung in der oberen komplexen Halbebene. Durch Anwendung des in Abschnitt II.3.2 beschriebenen Verdoppelungstricks kann man die Ströme in der gesamten komplexen Ebene definieren und die Berechnung der Laurent-Moden in der Form (II.62a) bis (II.62c) darstellen. Die Moden des offenen Strings erfüllen ebenso wie die holomorphen Moden des geschlossenen Strings die $N{=}2$ superkonforme Algebra (II.65a) bis (II.65f).

An den Gleichungen der Moden-Algebra (II.65a) bis (II.65f) erkennt man, daß die simple Umsetzung des klassischen Verschwindens der Symmetrieströme in die Forderung an die Quantentheorie, daß alle Operatormoden physikalische Zustände vernichten, zu widersprüchlichen Aussagen aufgrund der Terme mit zentraler Ladung in der Algebra führen. Stattdessen sollen nur die Moden mit positivem Index physikalische Zustände vernichten

$$\begin{aligned}
L_n|\text{phys}\rangle &= 0 \qquad \text{für} \qquad n > 0 && \text{(II.67a)}\\
(L_0 - A)|\text{phys}\rangle &= 0 && \text{(II.67b)}\\
G_r^{\pm}|\text{phys}\rangle &= 0 \qquad \text{für} \qquad r \geq 0 && \text{(II.67c)}\\
J_n|\text{phys}\rangle &= 0 \qquad \text{für} \qquad n > 0 && \text{(II.67d)}\\
(J_0 - B)|\text{phys}\rangle &= 0\,. && \text{(II.67e)}
\end{aligned}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese Forderungen ausreichen, um das Verschwinden aller Matrixelemente der Symmetrieströme zwischen zwei physikalischen Zuständen sicherzustellen. Für den geschlossenen String erhält man einen zweiten identischen Satz Bedingungen für die antiholomorphen Moden. Außerdem soll für die Moden des geschlossenen Strings noch die sogenannte level-matching Bedingung $(L_0 - \tilde{L}_0)|\text{phys}\rangle = 0$ gefordert werden, die aus der Invarianz der Theorie unter Translationen entlang des Strings folgt[28]. Insbesondere die Bedingung (II.67b) wird sich im folgenden als sehr wichtig bei der Bestimmung des Massenspektrums der N=2 Stringtheorie erweisen.

Konstruiert man aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ der Brink-Schwarz-Wirkung (II.13) die zugehörige Hamilton-Funktion durch $\mathcal{H} = \int d\sigma \left(\sum_\phi \partial_0\phi\, \Pi_\phi - \mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha\phi) \right)$, wobei ϕ sämtliche in der Wirkung vorkommende Felder bezeichnet, und Π_ϕ den dazu kanonische konjugierten Impuls, erkennt man, daß klassisch gilt[29] $\mathcal{H} = L_0$. Diese Beziehung gilt auch nach Quantisierung der Theorie weiter, allerdings muß dabei dann auf eventuelle Normalordnungskonstanten geachtet werden. Damit gilt für die quantisierte Stringtheorie $\mathcal{H} = L_0 - A$. Die Nullmode des Energie-Impuls-Tensors erzeugt also die Zeitentwicklung der physikalischen Zustände.

Spektralfluss

Im Abschnitt II.3.1 wurden die kontinuierlichen Rand- bzw. Periodizitätsbedingungen der fermionischen Materiefelder $\Psi^{+\mu}$ des N=2 Strings untersucht. Bei der Berechnung der fermionischen Propagatoren im Abschnitt II.3.3 wurde gezeigt, daß sich die Wahl der Randbedingungen zwar in den Propagatoren widerspiegelt, aber keinen Einfluß auf die singulären Anteile der Operatorproduktentwicklungen hat. Dennoch spielt die Wahl der Rand- bzw. Periodizitätsbedingungen auch in der Constraint-Algebra des N=2 Strings eine Rolle. Sie bestimmt die Randbedingungen des Supersymmetriestromes $G^\pm(z)$, und damit auch den Laufbereich der Indizes der entsprechenden Laurent-Moden $G^\pm_r$, $r \in \mathbb{Z} \pm \rho$. Die verschiedenen Wahlen der Randbedingungen sind jedoch zueinander äquivalent, die physikalischen Ergebnisse nicht von ihnen abhängen. Der Grund dafür ist ein innerer Automorphismus der Constraint-Algebra (II.65a) bis (II.65f), der sogenannte Spektralfluß [91, 139], der die Algebren für verschiedene Randbedingungen ρ aufeinander abbildet.

Der Spektralfluß wirkt wie folgt auf die Laurent-Moden der Symmetrieströme

$$L_n \;\to\; L_n + \Theta\, J_n + \tfrac{c}{6}\,\Theta^2\,\delta_n \tag{II.68a}$$
$$G^\pm_r \;\to\; G^\pm_{r\pm\Theta} \tag{II.68b}$$
$$J_n \;\to\; J_n + \tfrac{c}{3}\,\Theta\,\delta_n\,. \tag{II.68c}$$

Dabei handelt es sich offensichtlich um eine Verschiebung des Index der Laurent-Moden des Supersymmetriestromes $G^\pm(z)$, für den nun gilt $r \in \mathbb{Z} \pm \rho \pm \Theta$. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß auch die verschobenen Laurent-Moden die N=2 superkonforme Algebra (II.65a) bis (II.65f) erfüllen. Es ist also insbesondere möglich, durch Anwendung des Spektralflusses in den Neveu-Schwarz-Sektor mit $\rho = \frac{1}{2}$ zu gelangen, in dem die meisten Ausdrücke eine besonders einfache Form annehmen. Im Fall des geschlossenen Strings gibt es einen zweiten, unabhängigen, Spektralfluß für die antiholomorphe Hälfte der Constraint-Algebra.

Von besonderem Interesse für das weitere Vorgehen ist nun noch die Frage, wie der Spektralfluß auf konformen Feldern realisiert wird. Die Wirkung des Spektralflusses

[28] Der unitäre Operator $U_\delta = e^{i\,\delta\,(L_0 - \bar{L}_0)}$ erzeugt Translationen entlang des Strings. Unter diesen muß die Theorie invariant sein, da es auf dem geschlossenen String keine ausgezeichneten Punkte gibt.

[29] Im Fall des geschlossenen Strings sind natürlich Rechts- und Linksläufer zu berücksichtigen, dann gilt $\mathcal{H} = L_0 + \bar{L}_0$.

auf solche Felder soll durch einen auf der Weltfläche definierten Operator SFO(Θ) erzeugt werden. Dieser Operator erzeugt auf den Laurent-Moden der Symmetrieströme durch $\mathrm{SFO}(\Theta)\, L_n\, \mathrm{SFO}(\Theta)^{-1}$ usw. . gerade die Verschiebungen (II.68a) bis (II.68c). Mit dem Ansatz $\mathrm{SFO}(\Theta) = e^{\Theta\,\Omega}$, woraus folgt $\mathrm{SFO}(\Theta)^{-1} = e^{-\Theta\,\Omega}$, läßt sich die Wirkung des Spektralflußoperators auf eine Laurent-Mode X entwickeln

$$\mathrm{SFO}(\Theta)\, X\, \mathrm{SFO}(\Theta)^{-1} = X + \Theta\, [\Omega, X] + \tfrac{\Theta^2}{2}\, [\Omega, [\Omega, X]] + \ldots\,. \tag{II.69}$$

Durch Einsetzen von (II.68a) und (II.68c) in diese Entwicklung erhält man die Wirkung des Operators Ω auf die Moden des Energie-Impuls-Tensors und des $U(1)$ Stromes,

$$[\Omega, L_n] = J_n\,, \qquad\qquad [\Omega, J_n] = \tfrac{c}{3}\, \delta_n\,. \tag{II.70}$$

Außerdem muß gelten $G^\pm_{r\pm\Theta} = \Theta\,[\Omega, G^\pm_r] + \ldots$. Dabei kann man für kleine Parameter Θ entwickeln,

$$G^\pm_{r\pm\Theta} = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{r\pm\Theta+1/2}\, G^\pm(z) = G^\pm_r \pm \Theta \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{r+1/2}\, \ln z\, G^\pm(z)\,.$$

Ersetzt man nun den Supersymmetriestrom $G^\pm(z)$ durch seine Laurent-Entwicklung aus (II.61b), erhält man

$$G^\pm_{r\pm\Theta} = G^\pm_r \pm \Theta \oint \frac{dz}{2\pi i} \sum_s z^{r-s-1}\, \ln z\, G^\pm_s = G^\pm_r \pm \Theta \sum_n \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{-n-1}\, \ln z\, G^\pm_{r+n}\,,$$

mit $n = s - r \in \mathbb{Z}$. Aus der Beziehung (II.65e) der $N{=}2$ superkonformen Algebra, $[J_n, G^\pm_r] = \pm G^\pm_{r+n}$, ergibt sich dann mit $c_n \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{-n-1}\, \ln z$

$$G^\pm_{r\pm\Theta} = G^\pm_r + \Theta \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, [J_n, G^\pm_r] \stackrel{!}{=} G^\pm_r + \Theta\, [\Omega, G^\pm_r]\,.$$

Daraus läßt sich die Definition des Operators Ω nun ablesen,

$$\Omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{-n-1}\, \ln z\, J_n = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \ln z\, J(z)\,.$$

Man überprüft leicht, daß das so definierte Ω auch die anderen Beziehungen aus (II.70) erfüllt, wenn gilt $\oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{-n-1}\, \ln z = \frac{1}{n}\, \delta_n$. Diese Identität läßt sich in der Tat einfach beweisen[30]. Damit ergibt sich die Definition des Spektralflußoperators

$$\mathrm{SFO}(\Theta) = \exp\Big(\Theta \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \ln z\, J(z)\Big)\,. \tag{II.71}$$

Diese Definition ist eher formal als aufeinanderfolgende Anwendung der Operatorprodukte zu verstehen, die sich aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ergeben. Für die antiholomorphe Hälfte des geschlossenen Strings erhält man einen entsprechenden Spektralflußoperator $\bar{\mathrm{SFO}}(\Theta)$ aus $\bar{J}(\bar{z})$. Im Fall des offenen $N{=}2$ Strings müssen die beiden Hälften wieder zu einem vollständigen $SFO(\Theta)$ zusammengesetzt werden.

[30] Es ist mit partieller Integration $\oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{-n-1}\, \ln z = -\oint \frac{dz}{2\pi i}\, \frac{1}{n}\, \partial_z(z^{-n})\, \ln z = \frac{1}{n} \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{-n-1} = \frac{1}{n}\, \delta_n$. Siehe dazu auch [38, Anhang B].

Die Anwendung des SFO(Θ) auf die Symmetrieströme kann nun berechnet werden

$$\begin{aligned} T(z) &\rightarrow \mathrm{SFO}(\Theta)\, T(z)\, \mathrm{SFO}(\Theta)^{-1} = T(z) + \tfrac{\Theta}{z}\, J(z) + \tfrac{c}{6}\, \tfrac{\Theta^2}{z^2} && \text{(II.72a)} \\ G^{\pm}(z) &\rightarrow \mathrm{SFO}(\Theta)\, G^{\pm}(z)\, \mathrm{SFO}(\Theta)^{-1} = z^{\pm\Theta}\, G^{\pm}(z) && \text{(II.72b)} \\ J(z) &\rightarrow \mathrm{SFO}(\Theta)\, J(z)\, \mathrm{SFO}(\Theta)^{-1} = J(z) + \tfrac{c}{3}\, \tfrac{\Theta}{z}\, . && \text{(II.72c)} \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß dieses Ergebnis mit demjenigen übereinstimmt, das man durch Aufsummieren der Ausdrücke aus (II.68a) bis (II.68c) und durch Anwendung der Definitionen der Laurent-Entwicklungen der Symmetrieströme (II.61a) bis (II.61c) erhält. Auch auf allen anderen Feldern läßt sich die Wirkung des Spektralflußoperators mit Hilfe der fundamentalen Operatorproduktentwicklungen berechnen.

II.5 Spektrum und kritische Dimension

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten die grundlegenden Bestandteile der N=2 Stringtheorie definiert und erläutert worden sind, sind noch einige wichtige Fragen, insbesondere die nach dem Spektrum und der kritischen Dimension der Theorie, zu klären, bevor im nächsten Kapitel die Störungsentwicklung des N=2 Strings genauer untersucht wird. Von besondere Bedeutung ist die BRST Quantisierung [14, 147]. Diese wurde für den N=2 String bereits ausgiebig untersucht [34, 35, 37, 40, 73, 82, 83, 95, 105] und soll im folgenden noch einmal kurz dargestellt werden.

II.5.1 BRST Quantisierung

Die BRST Quantisierung kann angewendet werden, wenn man ein physikalisches System mit einem Satz von Symmtrien G_a untersucht, die eine Lie-Algebra G bilden, $[G_a, G_a] = f_{ab}{}^{c} G_c$. Man kann Antigeister b^a einführen, die in der adjungierten Darstellung dieser Lie-Algebra G liegen, und Geister c_a in der dazu dualen Darstellung. Geister und Antigeister erfüllen die kanonischen Antivertauschungsrelationen $\{c^a, b_b\} = \delta^a_b$. Konstruiert man den nilpotenten[31] BRST-Operator $Q = c^a G_a - \frac{1}{2} f_{ab}{}^{c} c^a c^b b_c$ und den Geistzahl-Operator $U = \sum_a c^a b_a$, kann man physikalische Zustände dadurch charakterisieren, daß sie in der Geistzahl-null-Kohomologie der Symmetrie-Algebra G liegen; d.h. physikalische Zustände $|\mathrm{phys}\rangle$ werden vom BRST-Operator vernichtet, $Q|\mathrm{phys}\rangle = 0$, können aber ihrerseits nicht durch die Wirkung des BRST-Operators auf einen anderen Zustand[32] erzeugt werden, $|\mathrm{phys}\rangle \neq Q|\lambda\rangle$. Insbesondere kann man an den Definitionen von Q und U ablesen, daß man durch diese Vorschrift gerade diejenigen Zustände $|\mathrm{phys}\rangle$ erhält, die keine Geister enthalten und die invariant unter der Symmetrie-Algebra G sind. Weiterhin ist anzumerken, daß die Algebra der Symmetrien mit Hilfe des BRST-Operators und der Geister bzw. Antigeister modifiziert werden kann, $\hat{G}_a = \{Q, b_a\} = G_a + f_{ab}{}^{c} c^b b_c$. Die $\hat{G}_A$ erfüllen offensichtlich die

[31] D.h. es gilt $Q^2 = 0$. Dies ist mit Hilfe der Jacobi-Identität der Lie-Algebra G leicht zu überprüfen.

[32] Da der BRST-Operator die Geistzahl eins hat, müsste der Zustand $|\lambda\rangle$ in diesem Fall die Geistzahl minus eins haben. Solche Zustände existieren nicht.

gleiche Algebra wie die G_A und sind BRST invariant. Außerdem verschwinden die Anomalien, d.h. die Terme mit zentraler Ladung, in der modifizierten Algebra [138].

Im Fall des $N{=}2$ Strings ist die Symmetrie-Algebra G durch die $N{=}2$ superkonforme Algebra aus den Gleichungen (II.65a) bis (II.65f) gegeben. Dabei handelt es sich um eine Super-Lie-Algebra mit bosonischen und fermionischen Basiselementen T_a und F_α die sowohl Vertauschungs- als auch Antivertauschungsrelationen enthält

$$\begin{aligned}
[T_a, T_b] &= f_{ab}{}^c T_c \\
[T_a, F_\beta] &= f_{ab}{}^\gamma F_\gamma \\
\{F_\alpha, F_\beta\} &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma F_\gamma \,.
\end{aligned}$$

Den Generatoren werden in diesem Fall Geister c^a bzw. γ^α und Antigeister b_a bzw. β_α zugeordnet, die die entgegengesetzte Statistik wie die Generatoren erfüllen, mit den kanonischen Vertauschungs- bzw. Antivertauschungsrelationen

$$\{c^a, b_b\} = \delta^a_b \qquad \text{und} \qquad [\gamma^\alpha, \beta_\beta] = \delta^\alpha_\beta \,.$$

Der BRST-Operator wird in diesem Fall wie folgt definiert

$$Q = c^a T_a + \gamma^\alpha F_\alpha - \tfrac{1}{2} f_{ab}{}^c c^a c^b b_c - f_{a\beta}{}^\gamma c^a \gamma^\beta \beta_\gamma - \tfrac{1}{2} f_{\alpha\beta}{}^c \gamma^\alpha \gamma^\beta b_c \,.$$

Die Nilpotenz dieses Operators läßt sich auch hier mit Hilfe der Jacobi-Identitäten der Super-Lie-Algebra leicht überprüfen. Aus dem Antikommutator des BRST-Operators mit den Antigeistern erhält man wie im rein bosonischen Fall die Geistanteile der Generatoren der Symmetrie-Algebra

$$\begin{aligned}
\hat{T}_a &= \{Q, b_a\} = T_a + T^{gh}_a && \text{mit} \quad T^{gh}_a = -f_{ab}{}^c - f_{a\beta}{}^\gamma \gamma^\beta \beta_\gamma \\
\hat{F}_\alpha &= \{Q, \beta_\alpha\} = F_\alpha + F^{gh}_\alpha && \text{mit} \quad F^{gh}_\alpha = -f_{b\alpha}{}^\gamma c^b \beta_\gamma - f_{\beta\alpha}{}^c \gamma^\beta b_c \,.
\end{aligned}$$

Die geisterweiterten Generatoren $\hat{T}_a$ und $\hat{F}_\alpha$ erfüllen wieder die Super-Lie-Algebra ohne Terme mit zentraler Ladung.

Die holomorphe Hälfte[33] der $N{=}2$ superkonformen Algebra wird von den bosonischen Generatoren L_n und J_n sowie von den fermionischen Generatoren G^+_r und G^-_r erzeugt. Dementsprechend sind zwei fermionische Geist- und Antigeistmodenpaare (c_m, b_n) und (c'_m, b'_n) einzuführen, die aus der Reparametrisierungs- bzw. aus der $U(1)$-Symmetrie der Brink-Schwarz-Wirkung entstehen und zwei aus der $N{=}2$ Supersymmetrie entstehende bosonische Geist- und Antigeistmodenpaare $(\gamma^\pm_r, \beta^\mp_s)$. Die BRST Geister sind identisch mit den Geistern, die bei der Eichfixierung im Pfadintegral nach der Fadeev-Popov-Methode entstehen, die in Abschnitt III.2 noch genauer erläutert wird. Diese Geist- und Antigeistmoden erfüllen gemäß der obigen Diskussion der BRST Quantisierung die Vertauschungsrelationen[34]

$$\{c_m, b_n\} = \delta_{m+n} \tag{II.73a}$$

$$[\gamma^\pm_r, \beta^\mp_s] = \delta_{r+s} \tag{II.73b}$$

$$\{c'_m, b'_n\} = \delta_{m+n} \,. \tag{II.73c}$$

[33] Im Fall des geschlossenen $N{=}2$ Strings gilt die gesamte folgende Argumentation auch für die antiholomorphe Hälfte.

[34] Diese Vertauschungsrelationen entsprechen nicht ganz den kanonischen Vertauschungsrelationen zwischen Geist- und Antigeistmoden, wie sie oben definiert wurden, können aber durch eine einfache Redefinition der Geistmoden wieder in diese überführt werden.

Aufgrund ihrer Definition in der adjungierten Darstellung der Symmetriegruppe haben die Antigeister dieselbe konforme Dimension wie die Generatoren dieser Symmetriegruppe, während aus den kanonischen Vertauschungsrelationen folgt, daß die Summe der konformen Gewichte von Geist und Antigeist eins sein muß. Das (c,b) System hat also das Gewicht $(-1,2)$, das $(\gamma^\pm,\beta^\mp)$ System hat das Gewicht $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ und das (c',b') System hat das Gewicht $(0,1)$. Mit Hilfe dieser Informationen lassen sich nun aus den in (II.73a) bis (II.73c) eingeführten Geistmoden die entsprechenden Geistfelder definieren,

$$c(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, z^{-n+1} \qquad b(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\, z^{-n-2} \tag{II.74a}$$

$$\gamma^\pm(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}\pm\rho} \gamma_r^\pm\, z^{-r+1/2} \qquad \beta^\mp(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}\mp\rho} \beta_r^\mp\, z^{-r-3/2} \tag{II.74b}$$

$$c'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c'_n\, z^{-n} \qquad b'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b'_n\, z^{-n-1}\,. \tag{II.74c}$$

Durch die Definition eines Vakuums für die Geister und Antigeister lassen sich die Moden in Erzeuger und Vernichter aufteilen. Für die fermionischen Geistsysteme ist diese Wahl aufgrund der Antikommutatorrelation beliebig, es stellt sich als sinnvoll heraus zu definieren[35]

$$c_n|0\rangle_f = 0 \quad \text{für} \quad n>1 \tag{II.75a}$$

$$b_n|0\rangle_f = 0 \quad \text{für} \quad n>-2 \tag{II.75b}$$

$$c'_n|0\rangle_f = 0 \quad \text{für} \quad n>0 \tag{II.75c}$$

$$b'_n|0\rangle_f = 0 \quad \text{für} \quad n>-1\,. \tag{II.75d}$$

Dieses Vakuum ist ein Höchstgewichtszustand der Algebra der Moden der Symmetrieströme, jedoch nicht der (c,b) bzw. (c',b') Algebra [71], da z.B. gilt $c_1|0\rangle_f \neq 0$. Aus diesem Grund müssen einige Geistnullmoden in das fundamentale Skalarprodukt mit einbezogen werden

$${}_f\langle 0|0\rangle_f = 0 \qquad {}_f\langle 0|c_1 c_0 c_{-1} c'_0|0\rangle_f \neq 0\,. \tag{II.76}$$

Das Auftreten von Geistnullmoden im Skalarprodukt beschreibt die Existenz von konformen Killing-Vektoren auf der Sphäre, während Antigeistnullmoden auf die Existenz von Moduli hinweisen. Diese Fragen werden in Kapitel III bei der Diskussion der Stringstörungstheorie noch genauer untersucht. Die Wahl des richtigen Vakuums für die bosonischen Geister ist nicht so einfach, hier gibt es unendlich viele verschiedene $|\pi^+,\pi^-\rangle_b$, die durch die beiden Bildladungen $\pi^+,\pi^- \in \mathbb{Z}\pm\rho$ charakterisiert werden können [71], so daß gilt

$$\gamma_r^\pm|\pi^+,\pi^-\rangle_b = 0 \quad \text{für} \quad r\geq \pi^\pm+\tfrac{3}{2} \tag{II.77a}$$

$$\beta_r^\pm|\pi^+,\pi^-\rangle_b = 0 \quad \text{für} \quad r\geq -\pi^\pm-\tfrac{1}{2}\,. \tag{II.77b}$$

Diese Vakua sind anders als im fermionischen Fall nicht äquivalent zueinander, d.h. man kann nicht durch die Anwendung endlich vieler Operatoren von einem Vakuum zu einem anderen gelangen [151]. Die Bildladungen werden im Abschnitt II.5.2

[35]Diese Wahl des Vakuums für die fermionischen Geistsysteme erhält insbesondere die am Ende dieses Abschnitts diskutierte $SL(2,\mathbb{C})$ Invarianz des Grundzustandes.

im Rahmen der Diskussion der Bosonisierung näher untersucht. Hier soll lediglich festgehalten werden, daß das korrekte Vakuum bezüglich dessen die Normalordnung der bosonischen Geister definiert sein soll, das Vakuum $|0,0\rangle_b$ mit $\pi^{\pm} = 0$ ist [82, Abschnitt 2.2]. Unter hermitescher Konjugation verhalten sich die Geist- und Antigeistmoden wie folgt

$$\begin{array}{lll} c_n^{\dagger}{=}c_{-n} & \gamma_r^{\pm\dagger}{=}\gamma_{-r}^{\mp} & c'^{\dagger}_n{=}c'_{-n} \\ b_n^{\dagger}{=}b_{-n} & \beta_r^{\pm\dagger}{=}\beta_{-r}^{\mp} & b'^{\dagger}_n{=}b'_{-n}\,. \end{array} \tag{II.78}$$

Es wird sich herausstellen, daß dieses Verhalten mit der Hermitiziät der geisterweiterten Symmetrieströme kompatibel ist. Damit lassen sich nun auch die Operatorproduktentwicklungen der Geistfelder berechnen,

$$b(z)\,c(w) \sim \frac{1}{z-w} \tag{II.79a}$$

$$\beta^{\pm}(z)\,\gamma^{\mp}(w) \sim \frac{-1}{z-w} \tag{II.79b}$$

$$b'(z)\,c'(w) \sim \frac{1}{z-w}\,. \tag{II.79c}$$

Die Eigenschaft, daß die OPE aller Geistsysteme von der Form $(z-w)^{-1}$ sind, spiegelt die Tatsache wider, daß die Summe der konformen Gewichte von Geist und Antigeist in allen drei Systemen eins ist.

Mit der nun festgelegten Definition der Normalordnung $:\ldots:$ auch für die Geistmoden läßt sich nun der BRST-Operator entsprechend der oben dargestellten Vorschrift konstruieren

$$\begin{aligned} Q \;=\; & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(c_{-n}L_n + c'_{-n}J_n\right) + \sum_{r\in\mathbb{Z}-\rho} \left(\gamma^+_{-r}G^-_r + \gamma^-_r G^+_{-r}\right) \\ & - \tfrac{1}{2} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left((m-n) : c_{-m}c_{-n}b_{m+n} : - m : c'_{-m}c_{-n}b'_{m+n} : \right) \\ & + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{s\in\mathbb{Z}+\rho} \left(\tfrac{n}{2}\, c_{-n} : \left(\gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s} + \gamma^+_s\beta^-_{n-s}\right) : - \left(c'_{-n} + s\, c_{-n}\right) : \left(\gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s} - \gamma^+_s\beta^-_{n-s}\right) : \right) \\ & - 2 \sum_{r\in\mathbb{Z}-\rho} \sum_{s\in\mathbb{Z}+\rho} \left(2\,\gamma^-_{-s}\gamma^+_{-r}b_{r+s} + (s-r)\,\gamma^-_{-s}\gamma^+_{-r}b'_{r+s}\right) - A\,c_0 - B\,c'_0\,. \end{aligned} \tag{II.80}$$

Dabei sind A und B die in Abschnitt II.4 eingeführten Normalordnungskonstanten. Außerdem erhält man die Geistbeiträge zu den Laurent-Moden der Symmetrieströme

$$\begin{aligned} L^{gh}_n \;=\; & \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left((m-n) : c_{-m}b_{m+n} : + m : c'_{-m}b'_{m+n}\right) \\ & + \sum_{r\in\mathbb{Z}+\rho} \left(\tfrac{n}{2} : \gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s} + \gamma^+_s\beta^-_{n-s} : - s : \gamma^-_{-s}\beta^+_{n+s} - \gamma^+_s\beta^-_{n-s} : \right) \end{aligned} \tag{II.81a}$$

$$\begin{aligned} G^{gh,\pm}_r \;=\; & -2 \sum_{s\in\mathbb{Z}\mp\rho} \left(2\,\gamma^{\pm}_{-s}b_{r+s} \pm (r-s)\,\gamma^{\pm}_{-s}b'_{r+s}\right) \\ & + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left((\tfrac{1}{2}\,m - r)\,c_{-m}\beta^{\pm}_{m+r} \pm c'_{-m}\beta^{\pm}_{m+r}\right) \end{aligned} \tag{II.81b}$$

$$J^{gh}_n \;=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} n\,c_{-m}b'_{m+n} + \sum_{s\in\mathbb{Z}-\rho} : \gamma^+_{-s}\beta^-_{n+s} - \gamma^-_s\beta^+_{n-s} : \,. \tag{II.81c}$$

Das Vakuum der $N{=}2$ superkonformen Algebra kann nun durch die Forderung definiert werden, daß alle konformen Felder $\Phi(z)$ der Theorie bei Anwendung auf das Vakuum einen für $z = 0$, d.h. für Zeiten $\sigma^0 \to -\infty$, regulären Ausdruck liefern, $\Phi(0)|0\rangle \sim 0$. Diese Forderung übersetzt sich in die Wirkung der Operatormoden auf das Vakuum

$$\begin{aligned} \hat{L}_n|0\rangle &= 0 \qquad \text{für} \quad n \geq -1 && \text{(II.82a)} \\ \hat{G}_r^{\pm}|0\rangle &= 0 \qquad \text{für} \quad r \geq -\tfrac{1}{2} && \text{(II.82b)} \\ \hat{J}_n|0\rangle &= 0 \qquad \text{für} \quad n \geq 0\,. && \text{(II.82c)} \end{aligned}$$

Die oben aufgeführten Laurent-Moden der Symmetrieströme erzeugen also im Ursprung reguläre superkonforme Transformationen. Eine Bedingung an die Wirkung von rechts auf das auslaufende Vakuum $\langle 0|$ erhält man aus der Forderung der Regularität für unendliche Zeiten $\sigma^0 \to +\infty$, d.h. auf der komplexen Ebene für $z \to \infty$. Dieser Punkt kann mittels der konformen Transformation $w = -1/z$ auf den Ursprung abgebildet werden. Aus der Modenentwicklung der transformierten Symmetrieströme kann man ablesen[36]

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{L}_n &= 0 \qquad \text{für} \quad n \leq 1 && \text{(II.83a)} \\ \langle 0|\hat{G}_r^{\pm} &= 0 \qquad \text{für} \quad r \leq \tfrac{1}{2} && \text{(II.83b)} \\ \langle 0|\hat{J}_n &= 0 \qquad \text{für} \quad n \leq 0\,. && \text{(II.83c)} \end{aligned}$$

Damit zeigt sich, daß das Vakuum $|0\rangle$ invariant unter Transformationen der $SL(2,\mathbb{C})$ ist, die von den Generatoren $\hat{L}_0$ und $\hat{L}_{\pm 1}$ aufgespannt wird. Weiterhin ist $|0\rangle$ invariant unter den durch $\hat{J}_0$ erzeugten $U(1)$ Eichtransformationen.

Kritische Dimension und Normalordnungskonstanten

Die zentrale Ladung der aus den Generatormoden der Geister L_n^{gh}, $G_r^{gh,\pm}$ und J_n^{gh} gebildeten $N{=}2$ superkonformen Algebra ist $c^{gh} = -6$. Damit die aus den geisterweiterten Moden $\hat{L}_n = L_n + L_n^{gh}$, $\hat{G}_r^{\pm} = G_r^{\pm} + G_r^{gh,\pm}$ und $\hat{J}_n = J_n + J_n^{gh}$ gebildete Algebra anomaliefrei ist, müssen sich die zentralen Ladungen des Materiebeitrages und des Geistbeitrages gerade wegheben. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Algebra der aus den Oszillatormoden der Materiefelder konstruierten Generatoren, wie schon in Abschnitt II.4 vorweggenommen, die zentrale Ladung $c = 6$ hat. Nun trägt ein komplexer bosonischer Materiefreiheitsgrad gerade zwei zur zentralen Ladung bei, während der Beitrag eines komplexen fermionischen Freiheitsgrades eins ist. Aufgrund der Supersymmetrie der Brink-Schwarz-Wirkung müssen genau so viele bosonische wie fermionische Freiheitsgrade vorliegen, also enthält der Materiesektor der Theorie zwei Bosonen und zwei Fermionen. Da die entsprechenden Targetraumvektoren jedoch komplex sind, ist die Raumzeit der kritischen $N{=}2$ Stringtheorie im Reellen vierdimensional.

Alternativ kann man zur Bestimmung der kritischen Dimension D der $N{=}2$ Stringtheorie und zur Bestimmung der Normalordnungskonstanten A und B die

[36] Allgemein folgt für ein primäres Feld $\phi(z)$ von konformem Gewicht h aus der Forderung der Regularität für $z = 0$ und für $z = \infty$, $\phi_n|0\rangle = 0$ für $n \geq 1 - h$ und $\langle 0|\phi_n = 0$ für $n \leq h - 1$.

möglichen Beiträge zu Anomalien der geisterweiterten Constraint-Algebra untersuchen [105]. Einen Term mit zentraler Ladung können die Kommutatoren $[\hat{L}_m, \hat{L}_n]$ und $[\hat{J}_m, \hat{J}_n]$, sowie der Antikommutator $\{\hat{G}^+_r, \hat{G}^-_s\}$ enthalten. Betrachtet man zunächst den zu m^3 proportionalen Term im Kommutator der Laurent-Moden des Energie-Impuls-Tensors, erhält man im geisterweiterten Sektor $((D-2)/4)\, m^3\, \delta_{m+n}$. Dieser Beitrag verschwindet, wenn der Targetraum der Theorie zwei komplexe Dimensionen besitzt, $D=2$. Betrachtet man für $D=2$ den in m linearen Term der Anomalie, so nimmt dieser die Form an, $[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = \ldots + 2\, m\, A\, \delta_{m+n}$. Soll die zentrale Ladung in dieser Kommutatorrelation verschwinden, muß also gelten $A=0$. Der Term mit zentraler Ladung im Antikommutator der Laurent-Moden der Supersymmetriegeneratoren nimmt für $D=2$ und $A=0$ die Form an, $\{\hat{G}^+_r, \hat{G}^-_s\} = \ldots + (4\,\rho\, B + 4\, B\, r^2)\, \delta_{r+s}$. Also muß auch gelten $B=0$. Damit ist gezeigt, daß in der kritischen Dimension $D=2$ die beiden Normalordnungskonstanten aus den Nullmoden der bosonischen Symmetrieströme verschwinden müssen[37]. Der Kommutator $[\hat{J}_m, \hat{J}_n]$ der Laurent-Moden des $U(1)$ Stromes ist zu diesen Bedingungen kompatibel.

Spektrum

Zur Bestimmung des Spektrums des $N{=}2$ Strings ist die BRST-Kohomologie zu untersuchen, d.h. die Äquivalenzklassen $\ker Q/\mathrm{im}\ Q$. Zusätzlich ist zu bemerken, daß die Nullmoden der Reparametrisierungsgeister und -antigeister c_0 und b_0 mit dem Hamiltonoperator der Theorie $\hat{L}_0$ kommutieren. Das bedeutet, daß das Spektrum des Strings zweifach entartet ist. Es gelten die Antivertauschungsrelationen $c_0^2 = b_0^2 = 0$ und $\{c_0, b_0\} = 1$. Insbesondere der Grundzustand des Geistsystems muß eine Darstellung dieser Algebra tragen. Die kleinstmögliche Darstellung besteht aus zwei Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle = b_0|\uparrow\rangle$ für die gilt,

$$\begin{aligned} c_0|\uparrow\rangle &= 0 \qquad & b_0|\downarrow\rangle &= 0 \\ b_0|\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle \qquad & c_0|\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle\ . \end{aligned} \tag{II.84}$$

Das gleiche gilt natürlich auch für das fermionische $U(1)$ Geistsystem. Um die Entartung des Spektrums aufzuheben, fordert man nun, daß alle physikalischen Zustände von den fermionischen Antigeistnullmoden vernichtet werden, $b_0|\mathrm{phys}\rangle = b'_0|\mathrm{phys}\rangle = 0$. Man betrachtet also im folgenden lediglich die relative Kohomologie [83]. Dies soll hier für die niedrigsten Anregungszustände vorgeführt werden. Der physikalische Grundzustand ist durch das Vakuum mit Impuls p^μ gegeben, $|0, p^\mu\rangle$. Die Massenschalenbedingung erhält man aus der Forderung, daß dieses Vakuum vom BRST-Operator Q vernichtet wird,

$$0 = Q|0, p^\mu\rangle = c_0\, |p|^2\, |0, p^\mu\rangle\ . \tag{II.85}$$

[37] Für auf der Weltfläche des Strings nicht einwertige Bosonen, d.h. für Periodizitätsbedingungen (II.31a) mit $\lambda_{R/L} \neq 0$, kann man auch für eine nicht verschwindende Normalordnungskonstante B der Nullmode des $U(1)$ Stromes J_0 eine Anomalie freie Constraint-Algebra erhalten [105]. Da der Fall nicht trivialer Randbedingungen für die bosonischen Felder hier nicht betrachtet wird, spielt auch der Fall $B \neq 0$ hier keine Rolle.

Daraus folgt die Bedingung $|p|^2 = 0$, der Grundzustand muß also masselos sein[38]. Außerhalb des Ramond-Sektors, also für $\rho \neq 0$, wird das niedrigste angeregte Niveau von den folgenden Zuständen aufgespannt

$$\begin{array}{ccc} b^{+\mu}_{\rho-1}|0,p^\mu\rangle & \gamma^{+}_{\rho-1}|0,p^\mu\rangle & \beta^{+}_{\rho-1}|0,p^\mu\rangle \\ b^{-\bar{\mu}}_{-\rho}|0,p^\mu\rangle & \gamma^{-}_{-\rho}|0,p^\mu\rangle & \beta^{+}_{-\rho}|0,p^\mu\rangle\,. \end{array} \tag{II.86}$$

Man kann leicht überprüfen, daß keiner dieser Zustände von Q vernichtet wird. Alle diese Zustände (II.86) tragen eine nicht verschwindende $U(1)$ Ladung[39], BRST invariante Zustände müssen jedoch $U(1)$ Singuletts sein. Auf dem niedrigsten angeregten Niveau gibt es also keine physikalischen Zustände. In der nächsthöheren Anregung lassen sich $U(1)$ Singuletts konstruieren, diese spannen den Fock-Raum der möglichen physikalischen Zustände auf

$$\begin{array}{cccc} \alpha^{\mu}_{-1}|0,p^\mu\rangle & b^{+\mu}_{\rho-1}b^{-\bar{\nu}}_{-\rho}|0,p^\mu\rangle & & \\ c_{-1}|0,p^\mu\rangle & b_{-1}|0,p^\mu\rangle & c'_{-1}|0,p^\mu\rangle & b'_{-1}|0,p^\mu\rangle \\ \gamma^{+}_{\rho-1}\gamma^{-}_{-\rho}|0,p^\mu\rangle & \beta^{+}_{\rho-1}\beta^{-}_{-\rho}|0,p^\mu\rangle & \gamma^{+}_{\rho-1}\beta^{-}_{-\rho}|0,p^\mu\rangle & \gamma^{-}_{-\rho}\beta^{+}_{\rho-1}|0,p^\mu\rangle\,. \end{array} \tag{II.87}$$

Aus diesen Zuständen können allerdings nur zwei BRST-invariante Linearkombinationen gebildet werden. $p\cdot\alpha_{-1}|0,p^\mu\rangle$ und $(\gamma^{+}_{\rho-1}\beta^{-}_{-\rho} - \gamma^{-}_{-\rho}\beta^{+}_{\rho-1})\,|0,p^\mu\rangle$ werden vom BRST-Operator Q vernichtet. Diese beiden Zustände sind jedoch BRST-trivial, sie lassen sich schlreiben als $p\cdot\alpha_{-1}|0,p^\mu\rangle = Q\,c_1|0,p^\mu\rangle$ und $(\gamma^{+}_{\rho-1}\beta^{-}_{-\rho} - \gamma^{-}_{-\rho}\beta^{+}_{\rho-1})\,|0\rangle = Q\,b'_{-1}|0\rangle$, und gehören somit nicht zum Spektrum der N=2 Stringtheorie. Auch für noch höhere Anregungen läßt sich zeigen, daß es außer dem Grundzustand keine weiteren Anregungen im Targetraum-Spektrum gibt [34]. Dies ist anschaulich nicht weiter überraschend, da bereits festgestellt wurde, daß es sich beim kritischen N=2 String im Prinzip um eine komplexe Theorie in zwei (komplexen) Dimensionen handelt. In zwei Dimensionen gibt es keine transversalen Richtungen, in denen physikalische Oszillationen stattfinden könnten, also ist die Schwerpunktsbewegung des Strings der einzige mögliche physikalische Freiheitsgrad. Daß dieser Freiheitsgrad in der kritischen Dimension masselos sein muß, folgt auch aus der allgemeinen Beobachtung [42], daß zwischen der Masse des Grundzustandes m_0 und der kritischen Dimension D einer Stringtheorie der Zusammenhang $\alpha'\,m_0^2 = -\frac{1}{24}\,(D-2)\,(\#_{\text{bose}} - \frac{1}{2}\,\#_{\text{fermi}})$ besteht.

Im Ramond-Sektor mit $\rho = 0$ trägt das Vakuum eine Spinordarstellung der Lorentz-Gruppe im Targetraum. Dadurch ist das Vakuum $|0,p^\mu\rangle$ entartet, es lassen sich durch Anwendung der Nullmoden des fermionischen Materiefeldes $b_0^{+\mu}$ insgesamt zwei skalare und ein vektorielles Vakuum erzeugen

$$\begin{aligned} |0,p^\mu\rangle^{+\mu} &= b_0^{+\mu}|0,p^\mu\rangle \\ |0,p^\mu\rangle' &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\bar{\nu}}\,b_0^{+\mu}b_0^{-\bar{\nu}}|0,p^\mu\rangle\,. \end{aligned}$$

[38] Dies gilt bereits aufgrund des Verschwindens der Normalordnungskonstante $A = 0$ der Nullmoden des Energie-Impuls-Tensors L_0.

[39] Die $U(1)$ Ladung eines Zustandes wird mit der Nullmode des Geist erweiterten $U(1)$ Stromes $\hat{J}_0 = J_0 + \sum_{s\in\mathbb{Z}-\rho} :\gamma^{+}_{-s}\beta^{-}_{s} - \gamma^{-}_{s}\beta^{+}_{-s}:$ gemessen.

Insgesamt hat der physikalische Grundzustand des N=2 Strings im Ramond-Sektor also die Struktur

$$|\phi\rangle = \left(\xi|0,p^\mu\rangle + \xi'|0,p^\mu\rangle' + \xi^-_\mu|0,p^\mu\rangle^{+\mu}\right) . \tag{II.88}$$

Aus der Forderung $Q|\phi\rangle = 0$ folgt dann für die Koeffizienten

$$\xi = \xi' = 0\,, \qquad \xi^{+\mu} = p^\mu\,, \qquad |p|^2 = 0\,. \tag{II.89}$$

Das bedeutet, daß auch im Ramond-Sektor im Grundzustand lediglich ein masseloser bosonischer Freiheitsgrad vorliegt. Ebenso läßt sich zeigen, daß auch im Ramond-Sektor alle höheren Anregungen unphysikalisch sind.

Eine alternative Möglichkeit, das Spektrum des N=2 Strings zu bestimmen, ist die Berechnung der Zustandssumme [40]. Die Zustandssumme einer Stringtheorie ist die auf dem Torus berechnete Vakuumamplitude. Das Vorgehen zur Berechnung solcher Amplituden wird in Kapitel III ausführlich beschrieben, daher soll hier nur das Ergebnis zur Bestimmung des Spektrums angegeben werden. Auf dem Massenlevel N gebe $T_D(N)$ die Anzahl der propagierenden Zustände an. Dann wird $T_D(N)$ generiert durch die Funktion[40]

$$f_D(q) = \sum_{N=0}^{\infty} q^{2N}\,. \tag{II.90}$$

Dabei ist der Massenlevel N gegeben durch die Eigenwerte des Operators[41]

$$\begin{aligned} N \;=\; & \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\bar\alpha^{\bar\nu}_{-n}\alpha^\mu_n\,\eta_{\mu\bar\nu} + \alpha^\mu_n\bar\alpha^{\bar\nu}_{-n}\,\eta_{\mu\bar\nu} + n\,c_{-n}b_n + n\,b_{-n}c_n + n\,c'_{-n}b'_n + n\,b'_{-n}c'_n\right) \\ & + \sum_{r\in\mathbb{N}+\rho} r\left(b^{-\bar\nu}_{-r}b^{+\mu}_r\,\eta_{\mu\bar\nu} + \beta^-_{-r}\gamma^+_r - \gamma^-_{-r}\beta^+_r\right) \\ & + \sum_{r\in\mathbb{Z}_+-\rho} r\left(b^{+\mu}_{-r}b^{-\bar\nu}_r\,\eta_{\mu\bar\nu} + \beta^+_{-r}\gamma^-_r - \gamma^+_{-r}\beta^-_r\right) . \end{aligned} \tag{II.91}$$

Man erhält daraus das Ergebnis in D komplexen Dimensionen

$$f_D(q) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^{2\,(D-2)} . \tag{II.92}$$

Damit gilt insbesondere in der kritischen Dimension $f_{D=2}(q) = 1$, in zwei komplexen Dimensionen trägt also kein Massenlevel mit $N \geq 1$ zum physikalischen Spektrum des N=2 Strings bei. Sieht man von den Nullmoden einmal ab, werden die bosonischen Oszillatoren der Z^μ von den fermionischen Geistern (c,b) und (c',b') kompensiert, während die fermionischen Materiefelder $\psi^{+\mu}$ durch die bosonischen Geister $(\gamma^\pm,\beta^\mp)$ eliminiert werden. Dies Ergebnis entspricht dem durch die Analyse der BRST-Kohomologie für die niedrigsten Anregungen erhaltenen.

[40]Der Parameter $q = e^{2\pi i\,\tau}$ ist durch die Moduliparameter des Torus auf dem die Zustandssumme berechnet wird gegeben. Näheres dazu in Abschnitt III.3.

[41]$\mathbb{Z}_+$ bezeichnet hier die Menge der positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_+ = \{1,2,3,\dots\}$, während $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null beschreibt, $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

II.5.2 BOSONISIERUNG UND VERTEXOPERATOREN

Zur Vereinfachung der Konstruktion der Vertexoperatoren, die zur Berechnung der Amplituden benötigt werden, ist es sinnvoll, die auf der Weltfläche des Strings definierten Felder zu bosonisieren [54, 100]. Bei der Bosonisierung, die nur für konforme Felder in zwei Dimensionen anwendbar ist, werden zwei nichtkompakte fermionische Felder durch ein bosonisches Feld ausgedrückt, das die gleichen Bewegungsgleichungen erfüllt [71]. Die Bosonisierung der kommutierenden Supersymmetriegeister $(\gamma^{\pm}, \beta^{\mp})$ führt zu einer Entartung der physikalischen Zustände, die die bereits im Rahmen der BRST-Quantisierung eingeführten Bildladungen widerspiegelt [149].

Für den $N{=}2$ String sollen zunächst die zu den Diffeomorphismen bzw. zu den $U(1)$ Eichtransformationen gehörenden antikommutierenden Geister (c, b) und (c', b') bosonisiert werden. Die OPE dieser Geistsysteme haben die Form $b(z)\,c(w) \sim (z-w)^{-1}$ bzw. $b'(z)\,c'(w) \sim (z-w)^{-1}$. Diese OPE werden für die Reparametrisierungsgeister durch die Bosonisierungsvorschrift

$$c(z) \equiv\, : e^{+\sigma(z)} : \qquad\qquad b(z) \equiv\, : e^{-\sigma(z)} : \;, \tag{II.93}$$

mit der Korrelationsfunktion $\sigma(z)\,\sigma(w) \sim \ln(z{-}w)$ reproduziert. Für die $U(1)$ Geister erhält man analog dazu

$$c'(z) \equiv\, : e^{+\sigma'(z)} : \qquad\qquad b'(z) \equiv\, : e^{-\sigma'(z)} : \;, \tag{II.94}$$

mit $\sigma'(z)\,\sigma'(w) \sim \ln(z-w)$. Auch die fermionischen Materiefelder lassen sich nach der Einführung von Lichtkegelkoordinaten[42] $\psi^{\pm +} = \psi^{\pm 0} + \psi^{\pm 1}$ und $\psi^{\pm -} = \psi^{\pm 0} - \psi^{\pm 1}$ einfach bosonisieren. Die Operatorproduktentwicklung der Fermionen in Lichtkegelkoordinaten hat die Form $\psi^{\pm +}(z)\,\psi^{\mp -}(w) \sim 2\,(z{-}w)^{-1}$. Mit $\Phi^{\pm}(z)\,\Phi^{\pm}(w) \sim \ln(z{-}w)$ ergibt sich die Bosonisierungsvorschrift

$$\psi^{\pm +} \equiv\, \sqrt{2}\, C^{\pm}\; : e^{+\Phi^{\pm}} : \qquad\qquad \psi^{\pm -} \equiv\, \sqrt{2}\, C^{\mp}\; : e^{-\Phi^{\mp}} : \;. \tag{II.95}$$

Die $C^{\pm}$ sind dabei die sogenannten Kozykelfaktoren, die dafür sorgen, daß die bosonisierten Ausdrücke die richtigen Vertauschungsrelationen erfüllen. Es muß gelten $(C^{\pm})^2 = 1$ und $\{C^+, C^-\} = 0$.

Auch die zu den Supersymmetrietransformationen gehörenden bosonischen Geistsysteme $(\gamma^{\pm}, \beta^{\mp})$ mit $\beta^{\pm}(z)\,\gamma^{\mp}(w) \sim -(z-w)^{-1}$ lassen sich bosonisieren. Hier erhält man

$$\gamma^{\pm} \equiv\, \eta^{\pm}\; : e^{+\varphi^{\pm}} : \qquad\qquad \beta^{\pm} \equiv\, : e^{-\varphi^{\mp}} : \; \partial_z \xi^{\pm} \;, \tag{II.96}$$

mit den OPE $\varphi^{\pm}(z)\,\varphi^{\pm}(w) \sim -\ln(z{-}w)$ und $\xi^{\mp}(z)\,\eta^{\pm}(w) \sim (z{-}w)^{-1}$. Die Einführung der Hilfsfelder $\xi^{\mp}$ und $\eta^{\pm}$, bei denen es sich um zueinander konjugierte Fermionen vom konformen Gewicht null bzw. eins handelt, ist dabei nötig, um sicherzustellen, daß die durch das Geistsystem $(\gamma^{\pm}, \beta^{\mp})$ und die durch die Bosonen $\varphi^{\pm}$ und die Fermionen $\eta^{\pm}$ und $\xi^{\mp}$ beschriebenen konformen Feldtheorien die gleiche zentrale Ladung haben[43]

[42] Siehe dazu auch Anhang A.

[43] Auch in Gleichung (II.96) muß man die bosonisierten Felder mit den schon bei den fermionischen Materiefeldern beschriebenen Kozykelfaktoren $C^{\pm}$ ausstatten, damit sie die richtige Statistik erfüllen [82, Abschnitt 2.3], diese Kozykelfaktoren spielen jedoch im folgenden keine Rolle, und werden daher nicht mitgeschrieben.

[71]. Die Hilfsfelder $\eta^\pm$ und $\xi^\mp$ lassen sich nun ebenfalls durch

$$\eta^\pm \equiv :e^{-\chi^\pm}: \qquad\qquad \xi^\pm \equiv :e^{+\chi^\mp}: \;, \tag{II.97}$$

bosonisieren, mit der fundamentalen Operatorproduktentwicklung $\chi^\pm(z)\,\chi^\pm(w) \sim \ln(z-w)$. In allen hier betrachteten Fällen stimmen mit den Operatorproduktentwicklungen auch die Korrelationsfunktionen auf der Sphäre für das bosonisierte System und für das Ausgangssystem überein. Einen weiteren Hinweis darauf, daß beide Formulierungen dasselbe physikalische System beschreiben, erhält man aus der Berechnung der verschiedenen Zustandssummen, die jeweils übereinstimmen [146, Anhang A]. Allerdings beschreibt die aus der Bosonisierung der Geistsysteme gewonnene Feldtheorie keine freien Bosonen. Betrachtet man etwa die bosonisierte Form des Geistanteils des Energie-Impuls-Tensors

$$T^{gh}(z) = -\tfrac{1}{2} :\partial_z\varphi^+\partial_z\varphi^+: - \partial_z^2\varphi^+ - \tfrac{1}{2} :\partial_z\varphi^-\partial_z\varphi^-: - \partial_z^2\varphi^- - :\eta^+\partial_z\xi^-: - :\eta^-\partial_z\xi^+: ,$$

so erkennt man, daß es sich dabei um den Symmetriestrom einer Theorie handelt, bei der die Bosonen $\varphi^\pm$ an den Krümmungsskalar $R^{(2)}$ der zugrundeliegenden Riemann-Fläche koppeln,

$$S^\pm = -\tfrac{1}{2\pi} \int d^2z\,\sqrt{-h}\,\Big(h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi^\pm\partial_\beta\varphi^\pm - \tfrac{i}{2}\,QR^{(2)}\varphi^\pm\Big)\,. \tag{II.98}$$

Dabei ist die Hintergrundladung Q durch das konforme Gewicht λ des bosonisierten Antigeistes gegeben, $Q = \pm(1-2\lambda)$ [71, 149]. Das positive Vorzeichen ist hier im Fall antivertauschender Geister zu verwenden, das negative Vorzeichen im Fall vertauschender Geister.

Durch die Einführung der Bosonen $\varphi^\pm$ und der Hilfsfelder $\eta^\pm$ und $\xi^\mp$ ist der Fockraum des bosonischen Geistsystems stark vergrößert worden. In der Tat taucht in der Beschreibung des $(\gamma^\pm,\beta^\mp)$ Systems durch die Bosonen $\varphi^\pm$ und $\chi^\pm$ stets nur die Differenz der beiden Felder, $\varphi-\chi$, auf. Die dazu linear unabhängige Kombination $\varphi+\chi$ sorgt für eine Entartung der Beschreibung physikalischer Zustände. Nach der Bosonisierung durch (II.96) und (II.97) liegt eine direkte Summe von $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ Kopien des ursprünglichen Fockraumes des $(\gamma^\pm,\beta^\mp)$ Systems vor. Jede dieser Kopien des Ausgangsraumes kann durch zwei Zahlen, die Bildladungen (π^+,π^-), gekennzeichnet werden, die als Eigenwerte des Bildladungsoperators

$$\Pi^\pm = \oint \frac{dz}{2\pi i}\big(-\partial_z\varphi^\pm + \partial_z\chi^\pm\big) = \oint \frac{dz}{2\pi i}\big(-\partial_z\varphi^\pm + \eta^\pm\xi^\mp\big) \tag{II.99}$$

bestimmt werden können. Bei dieser Bildentartung handelt es sich um die schon während der Diskussion der BRST-Quantisierung bei der Festlegung des Vakuums der kommutierenden Supersymmetriegeister aufgetretene Wahlfreiheit. Man erkennt, daß Kombinationen der Form $e^{\varphi^\pm-\chi^\pm}$ eine verschwindende Bildladung haben, während ein Term der Form $e^{q^\mp\varphi^\pm}$ einen Beitrag von $q^\mp$ zur Bildladung liefert. Insbesondere läßt sich ein Vakuum des kommutierenden Geistsystems mit beliebiger Bildladung, $|\pi^+,\pi^-\rangle_b$, aus dem Vakuum mit verschwindender Bildladung, $|0,0\rangle_b$, konstruieren,

$$|\pi^+,\pi^-\rangle_b = e^{\pi^-\varphi^+ + \pi^+\varphi^-}\,|0,0\rangle_b\,. \tag{II.100}$$

Es ist zu bemerken, daß der vergrößerte Fockraum des bosonisierten Geistsystems die Nullmoden des Hilfsfeldes $\xi^\pm$ nicht enthält, da dieses nur über seine Ableitung $\partial_z\xi^\pm$ auftaucht. Man kann nun einen Bildwechseloperator PCO$^\pm$ definieren, der die Bildladung eines Zustandes ändert. Dabei muß es sich um einen BRST-invarianten aber nicht BRST-trivialen Operator handeln, d.h. $Q\,\mathrm{PCO}^\pm \sim 0$ aber $\mathrm{PCO}^\pm \not\sim Q\,\mathcal{O}$ für irgendeinen Operator $\mathcal{O}$, damit physikalische Zustände durch Anwendung des Bildwechseloperators auf andere physikalische Zustände abgebildet werden. Der Bildwechseloperator wird üblicherweise definiert durch

$$\mathrm{PCO}^\pm = \{Q, \xi^\pm\} = -c\partial_z\xi^\pm + e^{+\varphi^\mp}\left(G^\pm - 4\,\gamma^\pm b \pm 4\,\partial_z\gamma^\pm b' \pm 2\,\gamma^\pm\partial_z b'\right). \qquad \text{(II.101)}$$

Es ist leicht zu überprüfen, daß die Anwendung des Operators PCO$^\pm$ auf einen Zustand den $\Pi^\pm$ Eigenwert dieses Zustandes um eins erhöht. Der Bildwechseloperator liefert die Möglichkeit des Übergangs zwischen verschiedenen Kopien des ursprünglichen Fockraumes. Man kann nun also ausgehend von einem einfachen Vertexoperator in einem kanonischen Bild durch Anwendung des Bildwechseloperators weitere Vertexoperatoren zu Erzeugung physikalischer Zustände in höheren Bildladungen konstruieren. Der Übergang von höheren zu niedrigeren Bildladungen ist nicht so einfach möglich. Die Konstruktion eines Inversen zum Operator PCO$^\pm$ ist nur bis auf BRST-triviale Terme möglich [21, 83]. Die explizite Konstruktion [37] führt zu einer formalen, nicht lokalen Reihe, die hier nicht weiter betrachtet werden soll.

Neben den Bildwechseloperatoren PCO$^\pm$ beschreibt auch der in Gleichung (II.71) definierte Spektralflußoperator SFO eine Möglichkeit des Überganges zwischen verschiedenen Kopien des Fockraumes des bosonisierten $(\gamma^\pm, \beta^\mp)$ Geistsystems [39]. Angewendet auf einen Zustand ändert der Operator SFO(Θ) die $\Pi^\pm$ Eigenwerte dieses Zustandes in $(\pi^+, \pi^-) \to (\pi^+ + \Theta, \pi^- - \Theta)$. Dies erlaubt es, aus dem Neveu-Schwarz-Sektor der Theorie, in dem die Bildladungen $\pi^\pm \in \mathbb{Z}$ ganzzahlig sind, in jeden anderen Sektor mit Randbedingungen ρ und entsprechend gemodeten Bildladungen zu wechseln. Man kann also aufgrund der Spektralflußsymmetrie der N=2 superkonformen Algebra in den anderen Sektoren keine neuen physikalischen Zustände erwarten. Daher ist es möglich, sich zur Vereinfachung der durchzuführenden Rechnungen auf den Neveu-Schwarz-Sektor mit Rand- bzw. Periodizitätsbedingungen $\rho = \frac{1}{2}$ zu beschränken. Die Ergebnisse für alle anderen Sektoren können dann aus diesem durch Anwendung des Spektralflußoperators gewonnen werden.

Vertexoperatoren

Die ein- und auslaufenden Stringzustände bei der Berechnung von Streuamplituden sind durch festgelegte Konfigurationen an den Rändern der Weltfläche definiert. Aufgrund der in Abschnitt II.2 beschriebenen Weyl-Symmetrie der Brink-Schwarz-Wirkung können diese Randkonfigurationen durch eine geschickte Wahl des Skalierungsfaktors der Metrik ins Unendliche verschoben werden. Ein einlaufender Stringzustand einer Amplitude kann so durch einen halbunendlichen, durch $0 \le \mathrm{Re}\ z' \le 2\pi$ und $\mathrm{Im}\ z' \le 0$ mit $z' \sim z' + 2\pi$ parametrisierten Zylinder mit entsprechenden Randbedingungen im Unendlichen dargestellt werden[44]. Bildet man diesen halbunendlichen Zylinder nun mittels der konformen Abbildung $z = e^{-iz'}$ auf die Einheitsscheibe ab,

[44] Siehe dazu etwa Abbildung II.1 (b).

wird aus der Randbedingung im Unendlichen des Zylinders eine Randbedingung an einer Punktierung im Ursprung $z = 0$ der komplexen Ebene. Diese Randbedingung kann nun durch das Einfügen eines lokalen Operators, der alle Quantenzahlen des einlaufenden Stringzustandes trägt, implementiert werden,

$$|\phi\rangle = \phi(0)\,|0\rangle = \lim_{z,\bar{z}\to 0} \phi(z,\bar{z})\,|0\rangle\,.$$

Dabei ist der Vertexoperator $\phi(z,\bar{z})$ ein primäres Feld der durch die Wirkung des Strings auf der Weltfläche definierten konformen Feldtheorie. Es zeigt sich hier ein in radial quantisierten konformen Feldtheorien ganz allgemein gültiger Isomorphismus zwischen dem Zustandsraum der Theorie und einem Satz lokaler Operatoren [123, Abschnitt 2.8]. Auf diese Weise können sämtliche ein- und auslaufenden Stringzustände auf Vertexoperatoren in Punktierungen auf der Weltfläche abgebildet werden. Bei der Untersuchung der Streuamplituden sind also nur noch diese punktierten Riemann-Flächen zu betrachten. Eine Streuamplitude der Stringtheorie ist dann nichts anderes als die Korrelationsfunktion der Vertexoperatoren auf der Weltfläche.

Da Vertexoperatoren physikalische Zustände erzeugen, müssen für sie die gleichen Eigenschaften bezüglich des BRST Operators gelten, die auch für physikalische Zustände gelten, insbesondere $[Q,V] = 0$ und $V \neq [Q,\mathcal{O}]$. Dies legt die Struktur der Vertexoperatoren des $N{=}2$ Strings weitgehend fest [37, 63]. So beschreiben die Vertexoperatoren stets die Emission eines masselosen skalaren Zustandes, des Grundzustandes der $N{=}2$ Stringtheorie. Vertexoperatoren für verschiedene Bildladungen können durch Anwendung des Bildwechseloperators aus einander abgeleitet werden. Der fundamentale Vertexoperator des Grundzustandes des offenen $N{=}2$ Strings ist derjenige im $(-1,-1)$ Bild

$$V^{o}_{(-1,-1)}(k,z) = \,:e^{-\varphi^- - \varphi^+}\, e^{i\,k\cdot Z(z)}:\quad . \tag{II.102}$$

Dabei folgt aus der BRST Invarianz dieses Vertexoperators, daß gelten muß $k^2 = 0$, der Grundzustand ist also masselos. Ebenso folgt aus der obigen Analyse der BRST Kohomologie, daß es keine physikalischen Vertexoperatoren zur Erzeugung anderer, massiver Zustände gibt. Der Vertexoperator (II.102) muß in der Korrelationsfunktion gegebenenfalls noch mit weiteren Geistfeldern multipliziert werden, um überschüssige Nullmoden zu kompensieren, wie schon im Fall von Gleichung (II.76) diskutiert wurde. Die Bestimmung der Anzahl der zusätzlichen Geisteinsetzungen wird im Rahmen der Untersuchung der Eichfixierung im Pfadintegral in Kapitel III noch genauer erläutert. Im Fall des geschlossenen Strings hat man für die holomorphe und für die antiholomorphe Hälfte jeweils einen Ausdruck der Form (II.102), allerdings teilen sich holomorphe und antiholomorphe Hälfte dann die gemeinsame Nullmode des Exponentialterms. Daraus ergibt sich der Vertexoperator für die Emission des Grundzustandes des geschlossenen $N{=}2$ Strings im $(-1,-1)$ Bild,

$$V^{c}_{(-1,-1)}(k,z,\bar{z}) = \,:e^{-\varphi^- - \varphi^+}\, e^{-\bar{\varphi}^- - \bar{\varphi}^+}\, e^{i\,k\cdot Z(z,\bar{z})}:\quad . \tag{II.103}$$

Dabei sind $\bar{\varphi}^-$ und $\bar{\varphi}^+$ die Bosonen der antiholomorphen bosonischen Geister $(\bar{\gamma}^{\pm},\bar{\beta}^{\mp})$. Vertexoperatoren in höheren Bildern erhält man nun durch Anwendung des Bildwechseloperators aus (II.102) bzw. (II.103),

$$V_{(\pi^+,\pi^-)}(k,z) = \left(\mathrm{PCO}^+\right)^{\pi^+ + 1} \left(\mathrm{PCO}^-\right)^{\pi^- + 1} V_{(-1,-1)}(k,z)\,. \tag{II.104}$$

Damit ergibt sich für die zur Berechnung der Amplituden benötigten niedrigsten Bildladungen,

$$V^o_{(0,-1)}(k,z) \;=\; :\big(c'\,k\cdot\psi^-(z)\,e^{-\varphi^-(z)} - 2i\,\eta^-\big)\,e^{i\,k\cdot Z(z)}: \tag{II.105}$$

$$V^o_{(-1,0)}(k,z) \;=\; :\bar{k}\cdot\psi^+(z)\,e^{-\varphi^+(z)}\,e^{i\,k\cdot Z(z)}:\;. \tag{II.106}$$

Von besonderer Bedeutung für die Berechnung von 1-Loop-Amplituden in Kapitel V wird der Vertexoperator im $(0,0)$ Bild sein. Hier erhält man für die holomorphe Hälfte aus (II.104) und (II.102),

$$V^o_{(0,0)}(k,z) = :\Big(k\cdot\partial_z\bar{Z}(z) - \bar{k}\cdot\partial_z Z(z) - i\,k\cdot\psi^-(z)\,\bar{k}\cdot\psi^+(z)\Big)\,e^{i\,k\cdot Z(z)}:\;. \tag{II.107}$$

Alle weiteren Vertexoperatoren im Neveu-Schwarz-Sektor der Theorie können nun ebenso berechnet werden. Zur Konstruktion der Vertexoperatoren in anderen Sektoren, insbesondere im Ramond-Sektor, kann der Spektralflußoperator SFO(Θ) aus (II.71) auf den fundamentalen Vertexoperator aus (II.102) angewendet werden. Im Ramond-Sektor mit $\rho = 0$ sind aufgrund der zusätzlichen Nullmoden der fermionischen Materiefelder $\psi^{+\mu}$, die eine Spinorstruktur des Vakuums $|\alpha\rangle_R$ im Targetraum verlangen, Spinfelder in die Vertexoperatoren einzufügen. Da jedoch bereits gezeigt wurde, daß aufgrund des Spektralflusses alle Sektoren verschiedener kontinuierlicher Randbedingungen äquivalent sind, werden die Berechnungen der Amplituden in den folgenden Kapiteln im Never-Schwarz-Sektor vorgenommen. Eine Konstruktion der Vertexoperatoren für andere Randbedingungen ist daher hier nicht nötig. Eine vollständige Liste der Vertexoperatoren des N=2 Strings, die auch Vertexoperatoren im Ramond-Sektor der Theorie enthält, findet sich im Anhang von [37].

SUPERFELD-KONSTRUKTION

Eine andere Möglichkeit zur Konstruktion der Vertexoperatoren des N=2 Strings besteht in der Anwendung des N=2 Superfeld-Formalismus [53]. Das chirale N=2 Superfeld ist definiert durch

$$X^\mu(X,\bar{X};\theta^-,\bar{\theta}^-) = Z^\mu(X,\bar{X}) + \psi^{+\mu}_\uparrow(X,\bar{X})\,\theta^- + \psi^{+\mu}_\downarrow(X,\bar{X})\,\bar{\theta}^- + F^\mu(X,\bar{X})\,\theta^-\bar{\theta}^-\,, \tag{II.108}$$

mit den Superkoordinaten auf der Weltfläche $X = z - \theta^+\theta^-$. μ ist der Vektorindex in komplexen Lichtkegelkoordinaten. Die anderen beiden Komponenten im Targetraum, $\bar{X}^{\bar{\mu}}$, erhält man durch komplexe Konjugation von Gleichung (II.108). Mit Hilfe dieses Superfeldes kann man den Vertexoperator des masselosen Skalarfeldes konstruieren, $V(k,z,\theta) = e^{i\,(\bar{k}\cdot X + k\cdot\bar{X})}$ [114]. Es bestehen zwei Möglichkeiten, die θ-Abhängigkeit des Vertexoperators zu eliminieren, man kann alle θ-Koordinaten auf einen festen Wert setzen, etwa auf Null, und erhält den Vertexoperator (II.103) im $(-1,-1)$ Bild ohne die Geistbeiträge,

$$e^{i\,(\bar{k}\cdot X + k\cdot\bar{X})}\Big|_{\theta=0} = e^{i\,k\cdot Z} = V_{(-1,-1)}(k,z)\,, \tag{II.109}$$

oder man integriert die θ-Koordinaten aus. Da die θ fermionische Koordinaten sind, erhält man in diesem Fall die Terme der Entwicklung von $V(k,z,\theta)$, die linear in allen θ sind. Es ergibt sich so der Vertexoperator im $(0,0)$ Bild,

$$
\begin{aligned}
\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, e^{i\,(\bar{k}\cdot X + k\cdot\bar{X})} &= \big(k\cdot\partial\bar{Z} - \bar{k}\cdot\partial Z - i\,k\cdot\psi_{\uparrow}^{-}\,\bar{k}\cdot\psi_{\uparrow}^{+}\big) \\
&\quad \times\big(k\cdot\bar{\partial}\bar{Z} - \bar{k}\cdot\bar{\partial}Z - i\,k\cdot\psi_{\downarrow}^{-}\,\bar{k}\cdot\psi_{\downarrow}^{+}\big)\, e^{i\,k\cdot Z} \qquad \text{(II.110)} \\
&= V_{(0,0)}(k,z)\,.
\end{aligned}
$$

Der kanonische Vertexoperator bei der Superfeld-Konstruktion der Amplituden des $N{=}2$ Strings ist derjenige aus Gleichung (II.110) im $(0,0)$ Bild. Die konformen Killing-Skalare auf der Sphäre erlauben jedoch die Fixierung der θ-Koordinaten von zwei Vertexoperatoren, so daß diese zwei Vertexoperatoren im $(-1,-1)$ Bild vorliegen[45]. Auf diese Weise liefert der Superfeld-Formalismus zumindest auf Tree- und 1-Loop-Niveau eine anschauliche Begründung für die aus der Untersuchung des fermionischen Moduliraumes erhaltene Auswahlregel (III.30).

[45]Es ist ebenso möglich, die θ^{+}- und θ^{-}-Koordinaten verschiedener Vertexoperatoren zu fixieren, und so das $(-1,0)$ oder das $(0,-1)$ Bild zu erhalten.

III. Stringstörungstheorie

Die betrachteten Objekte bei der störungstheoretischen Untersuchung einer physikalischen Theorie sind die Streuamplituden der durch die Theorie beschriebenen Zustände[46]. In einer zweitquantisierten Quantenfeldtheorie definiert man eine Streuamplitude üblicherweise als Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes der entsprechenden Felder in der wechselwirkenden Theorie $\mathcal{A}_n(k_1, \dots, k_n) = \langle 0|T\big(\phi_{i_1}(k_1)\dots\phi_{i_n}(k_n)\big)|0\rangle$. Dieser Vakuumerwartungswert läßt sich im Pfadintegralzugang darstellen als mit der Wirkung $S[\phi_i]$ gewichtetes Funktionalintegral des Produktes des Felder über sämtliche möglichen Konfigurationen der durch die Theorie beschriebenen Felder $\{\phi_i\}_{i=1,\dots,N}$

$$\mathcal{A}_n(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{Z}\int [d\phi_1]\dots[d\phi_N]\,\phi_{i_1}(k_1)\dots\phi_{i_n}(k_n)\,e^{-S[\phi_i]}\,. \tag{III.1}$$

Z ist hier die Normierungskonstante, die benötigt wird, um ein endliches Ergebnis zu erhalten. Dabei enthält die Wirkung $S[\phi_i]$ der Feldtheorie üblicherweise neben den kinetischen Termen der Felder auch mit Kopplungskonstanten g versehene Terme, die die Wechselwirkung zwischen diesen Feldern beschreiben. Der Ausdruck in Gleichung (III.1) kann nun in Ordnungen dieser Kopplungskonstanten g entwickelt werden. Dies führt zur Beschreibung der Amplitude als Summe über Feynman-Diagramme, wobei die Anzahl der Loops im Diagramm die störungstheoretische Ordnung dieses Diagramms angibt, wie in Abbildung III.1 dargestellt wird.

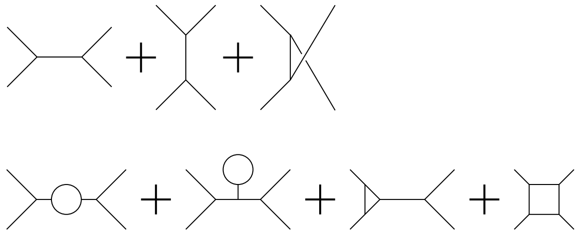

Abbildung III.1 - *Sämtliche Tree- und einige 1-Loop-Diagramme der 4-Punkt-Amplitude einer Feldtheorie mit $\frac{g}{6}\,\phi^3$ Wechselwirkungsterm.*

Eine (III.1) entsprechende Definition der Streuamplituden einer Stringtheorie ist nicht möglich. Wie man an der Wirkung (II.13) des $N{=}2$ Strings und insbesondere an ihrer eichfixierten Form (II.27) erkennt, beschreibt diese Weltflächenwirkung der Stringtheorie lediglich freie Felder ohne Wechselwirkungen. Es handelt sich also um eine erstquantisierte Theorie[47], bei der die Wechselwirkungen “von Hand”

[46] Beim Vergleich einer Theorie mit dem Experiment sind Übergangswahrscheinlichkeiten oder Wirkungsquerschnitte zu betrachten, die man aus dem Quadrat der Amplitude berechnet. Hier soll sich jedoch auf die Bestimmung der Amplituden beschränkt werden

[47] Ein zweitquantisierter Zugang zur Stringtheorie, die Stringfeldtheorie [155, 158], erfreut sich großen wissenschaftlichen Interesses und hat in letzter Zeit zu einigen interessanten (vor allem nichtperturbativen) Ergebnissen geführt [141]. Bei der Berechnung von störungstheoretischen Amplituden spielt dieser Zugang jedoch keine große Rolle und soll daher hier nicht weiter betrachtet werden.

hinzugefügt werden müssen. Wechselwirkungen zwischen Strings können etwa darin bestehen, daß zwei geschlossene Strings zu einem String verschmelzen oder sich ein String in zwei Strings aufspaltet. Betrachtet man auf diese Art wechselwirkende Strings über einen längeren Zeitraum, betrachtet man also die Weltfläche, die von den Strings überstrichen wird, erkennt man, daß Wechselwirkungen in der Stringtheorie durch verschiedene Topologien der Weltfläche implementiert werden. Daher kann man die Streuamplitude einer Stringtheorie als den Wert der Summe über alle möglichen Topologien der Weltfläche definieren. Dabei gibt die Euler-Zahl χ der Weltfläche die Ordnung in der Störungsreihe an [44, 153]. Eine n-Punkt-Amplitude in der Stringtheorie ist also gegeben durch den Ausdruck

$$\mathcal{A}_n(k_1, \dots, k_n) = \sum_{\text{Topologien } T} \kappa^{-\chi(T)} \mathcal{A}_n^T(k_1, \dots, k_n)\,. \tag{III.2}$$

Dabei ist κ die String-Kopplungskonstante, $\chi(T)$ die zur Topologie T der Weltfläche gehörende Euler-Zahl und $\mathcal{A}_n^T(k_1, \dots, k_n)$ die n-Punkt-Amplitude bei fester Topologie T. Vergleicht man die ersten beiden Ordnungen einer Vier-Punkt-Amplitude in einer orientierbaren geschlossenen Stringtheorie in Abbildung III.2 mit der entsprechenden Feldtheorie-Amplitude in Abbildung III.1, erkennt man, daß in der Stringtheorie nur jeweils ein Diagramm pro Ordnung in der Störungsreihe zu berechnen ist. Dies liegt daran, daß alle String-Weltflächen mit fester Topologie T durch die Reparametrisierungs- und Weyl-Invarianz der Theorie ineinander überführt werden können, sie sind also physikalisch äquivalent.

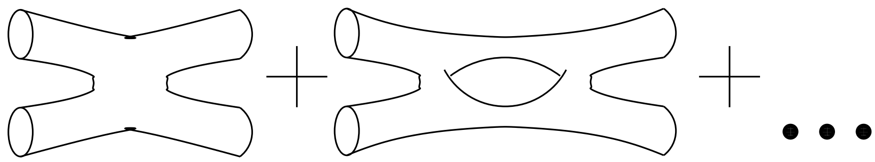

Abbildung III.2 - *Die vollständige Tree- und 1-Loop-Ordnung der 4-Punkt-Amplitude in einer orientierten geschlossenen Stringtheorie.*

Ein- und auslaufende Stringzustände werden durch die Konfigurationen an den Rändern der Weltfläche repräsentiert. Durch eine entsprechende Weyl-Transformation, d.h. durch lokale Skalierungen der Metrik, können diese äußeren Stringzustände jedoch immer auf Punktierungen auf der Weltfläche abgebildet werden. Die von den äußeren Strings getragenen Quantenzahlen werden dann durch lokale Operatoren, die in Abschnitt II.5 beschriebenen Vertexoperatoren, auf der Welfläche erzeugt. Die in Gleichung (III.2) definierte Amplitude ist also als Summe über Riemann-Flächen verschiedener Topologien T mit n Punktierungen zu verstehen.

III.1 Topologien

Nachdem im obigen Abschnitt schon eine intuitive Herleitung der Störungsamplituden einer Stringtheorie als Summe über die Topologien der Weltfläche gegeben wurde, sollen nun die im Fall des $N{=}2$ Strings möglichen Topologien genauer untersucht werden. Die Topologie der Weltfläche des $N{=}2$ Strings wird durch zwei Größen charakterisiert, die Euler-Zahl χ und die Chern-Zahl M. Die Euler-Zahl hängt eng mit der Metrik auf der Weltfläche zusammen, währen die Chern-Zahl durch die Topologie des $U(1)$ Eichbündels auf der Weltfläche bestimmt wird. Beide sind zunächst unabhängig voneinander, jedoch wird sich herausstellen, daß die möglichen Werte der Chern-Zahl M durch den Wert der Euler-Zahl χ stark eingeschränkt werden.

Die Euler-Zahl, die die Topologie der Form der Weltfläche beschreibt, ist definiert als[48] $\chi = \frac{1}{4\pi} \int R^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \sqrt{-h}\, R_{z\bar{z}}$. Die Euler-Zahl χ charakterisiert die Topologie der zweidimensionalen Weltfläche eindeutig, d.h. zwei Riemann-Flächen mit unterschiedlicher Euler-Zahl können nicht durch Homöomorphismen stetig ineinander überführt werden. Ebenso wie durch die Integration des Ricci-Tensors kann die Euler-Zahl auch durch die Triangulierung der Weltfläche bestimmt werden. Dabei gilt $\chi = f - e + v$, wobei f die Anzahl der Flächen, e die Anzahl der Kanten und v die Anzahl der Ecken der Triangulierung ist. Beginnt man mit der Riemann-Fläche mit größtmöglicher Euler-Zahl, der Sphäre mit $\chi = 2$, kann man daraus durch Hinzufügen von Henkeln, Rändern und Crosscaps[49] alle anderen Riemann-Flächen niedrigerer Euler-Zahl konstruieren. Das Hinzufügen eines Randes entspricht dem Entfernen einer Fläche f in der Triangulierung, vermindert die Euler-Zahl also um eins, ebenso wie das Hinzufügen einer Crosscap. Das Hinzufügen eines Henkels kann durch die Identifizierung zweier Dreiecke der Triangulierung realisiert werden. Dabei verschwinden die beiden Flächen f der Dreiecke, sowie die drei Kanten e und Ecken v eines der Dreiecke, da diese mit den entsprechenden Kanten und Ecken des anderen Dreiecks identifiziert werden. Insgesamt wird die Euler-Zahl durch das Hinzufügen eines Henkels also um zwei vermindert. Eine Riemann-Fläche, die topologisch äquivalent ist zu[50]

$$S^2 \oplus g\,T^2 \oplus b\,D^2 \oplus c\,RP^2 \tag{III.3}$$

hat also die Euler-Zahl $\chi = 2 - 2g - b - c$. In Tabelle III.1 sind alle Weltflächentopologien bis zur 1-Loop-Ordnung aufgeführt. In dieser Arbeit werden jedoch nur orientierte[51] Strings betrachtet, also Weltflächen, die keine Crosscaps enthalten. Daher spielen im folgenden nur die Amplituden auf der Sphäre S^2, auf der Disk D^2, auf dem Torus T^2 und auf dem Zylinder bzw. auf dem Anulus C^2 eine Rolle.

[48] Die 2-Form $R^{(2)}$ ist dabei der aus der Weltflächenmetrik $h_{z\bar{z}}$ berechnete Ricci-Tensor, $R^{(2)} = R_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$.

[49] Eine Crosscap ist ein Loch, bei dem antipodale Punkte identifiziert werden.

[50] Dabei ist S^2 die Sphäre, T^2 der Torus, D^2 die Disk und RP^2 die projektive Ebene, die man erhält, wenn man in eine Sphäre eine Crosscap einsetzt. Die Summe $\oplus$ von Riemann-Flächen erhält man dadurch, daß man aus den beiden zu addierenden Flächen jeweils eine kleine Disk entfernt, und die beiden Ränder dann identifiziert, siehe etwa [110, Kapitel 2].

[51] Auf unorientierten Riemann-Flächen ist es möglich, die relative Orientierung zweier Vektoren durch Paralleltransport entlang eines nichtkontrahierbaren Pfades umzukehren.

$\chi = 2$	Sphäre	S^2
$\chi = 1$	projektive Ebene	RP^2
	Disk	$D^2 \equiv S^2 \oplus D^2$
$\chi = 0$	Torus	$T^2 \equiv S^2 \oplus T^2$
	Zylinder	$S^2 \oplus 2\,D^2$
	Kleinsche Flasche	$2\,RP^2$
	Möbiusband	$RP^2 \oplus D^2$

TABELLE III.1 - *Zum Tree-Niveau, $\chi = 2$ und $\chi = 1$, und zum 1-Loop-Niveau, $\chi = 0$, beitragende Riemann-Flächen.*

Mit Hilfe eines Unitaritätsarguments kann nun auch noch der Beitrag der Punktierungen bzw. der Vertexoperatoren zur Ordnung einer Amplitude in der Störungsreihe bestimmt werden. Man betrachtet dazu etwa eine Weltfläche mit g Henkeln, b Rändern und c Crosscaps und der Euler-Zahl $\chi = 2 - 2g - b - c$. Wie im oberen Teil der Abbildung III.3 soll die Konfiguration der Weltfläche so sein, daß zwei Teile mit g_1, b_1 und c_1 bzw. mit g_2, b_2 und c_2 durch einen langen dünnen Zylinder voneinander getrennt sind. In dem Grenzfall, in dem der durch den Zylinder laufende Zustand on-shell geht, kann er wie im unteren Teil der Abbildung III.3 durch zwei voneinander getrennte Weltflächen mit jeweils einer zusätzlichen Einsetzung eines Vertexoperators für einen geschlossenen String ersetzt werden. Die beiden in der Abbildung dargestellten Konfigurationen müssen jedoch dieselbe Potenz in der Kopplungskonstanten liefern, es muß also gelten $\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2V_c$, mit $\chi_i = 2 - 2g_i - b_i - c_i$ für $i = 1, 2$. Dabei ist V_c der Beitrag eines Vertexoperators des geschlossenen Strings zur Potenz der Kopplungskonstanten, es muß gelten $V_c = -1$. Mit einem analogen Argument erhält man für die Vertexoperatoren des offenen Strings $V_o = -\frac{1}{2}$. Damit ist die Kopplung der Amplitude mit n_c geschlossenen und n_o offenen Strings auf einer Weltfläche mit g Henkeln, b Rändern und c Crosscaps gegeben durch

$$\kappa^{J/2} \qquad \text{mit} \qquad J = 2n_c + n_o - 4 + 4g + 2b + 2c\,. \tag{III.4}$$

Dabei ist offensichtlich $J \in \mathbb{Z}$.

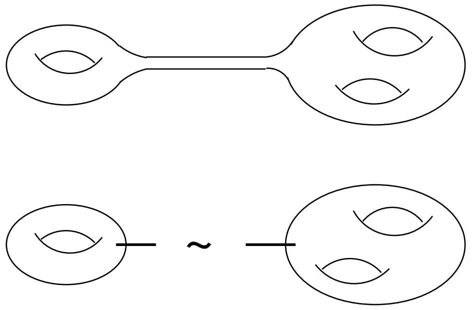

ABBILDUNG III.3 - *Wenn der durch den Zylinder zwischen dem linken und dem rechten Teil der Weltfläche laufende Stringzustand on-shell geht, kann der Zylinder durch zwei Vertexoperatoren auf den nun voneinander getrennten Weltflächen ersetzt werden.*

Das $U(1)$ Eichfeld A_α auf der Weltfläche kann als Konnektion eines Faserbündels mit der durch den String aufgespannten Riemann-Fläche als Basisraum betrachtet werden. Ein $U(1)$ Bündel auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ist ein Prinzipalbündel, d.h. die Faser ist identisch mit der Strukturgruppe des Bündels. Ein solches Faserbündel kann topologisch durch die erste Chern-Zahl c_1 charakterisiert werden, die als Integral der zur Konnektion gehörenden Feldstärke-Zweiform über den Basisraum definiert ist [110, Kapitel 11.2], $c_1 = \frac{1}{2\pi} \int F^{(2)}$, wobei die Feldstärke lokal durch $F^{(2)} = dA^{(1)}$ definiert ist. Mit den auf der Weltfläche des Strings definierten Koordinaten gilt hier

$$M \equiv c_1 = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \sqrt{-h}\, F_{z\bar{z}} \qquad \text{mit} \qquad F_{z\bar{z}} = \partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z \,. \tag{III.5}$$

Dabei gilt $M \in \mathbb{Z}$. In der Störungsentwicklung der Streuamplituden gehört zur zweiten topologischen Invarianten auch eine zweite Kopplungskonstante $e^{i\theta M}$. Bei der Untersuchung der Eichfixierung im Pfadintegral in Abschnitt III.2 wird sich herausstellen, daß nicht alle Werte von M, d.h. nicht alle zu beliebigen Chern-Zahlen gehörenden Konfigurationen des Eichfeldes, zur Amplitude beitragen. Durch das Auftreten von zusätzlichen Nullmoden des kommutierenden Geistsystems $(\beta^{\pm}, \gamma^{\mp})$ verschwindet das Pfadintegral für Chern-Zahlen mit $M > J$ [20, 116]. Die Störungsentwicklung der Streuamplituden des N=2 Strings läßt sich folglich darstellen als

$$\mathcal{A}_{(n_c,n_o)}(k_1, \ldots, k_{n_c+n_o}) = \sum_{J=2n_c+n_o-4}^{\infty} \kappa^{J/2} \sum_{M=-J}^{J} e^{i\theta M} \mathcal{A}^{J,M}_{(n_c,n_o)}(k_1, \ldots, k_{n_c+n_o}) \,. \tag{III.6}$$

Dabei ist $\mathcal{A}^{J,M}_{(n_c,n_o)}(k_1, \ldots, k_{n_c+n_o})$ die Amplitude von n_c geschlossenen und n_o offenen Strings in der durch J und M beschriebenen Topologie.

III.2 Pfadintegral und Eichfixierung

Bei gegebener Weltflächentopologie läßt sich die Amplitude $\mathcal{A}^{J,M}_n(k_1, \ldots, k_n)$ im von Polyakov vorgeschlagenen Pfadintegralformalismus [124, 125] berechnen. Dazu wird über sämtliche möglichen Konfigurationen aller Felder, nicht nur über die klassisch erlaubten Lösungen, integriert. Im Fall des N=2 Strings ist dabei das Pfadintegral zu berechnen [36, 38]

$$\mathcal{A}^{J,M}_n = \int [dZ^\mu][d\Psi^{+\mu}] \frac{[de_\alpha{}^a][d\chi^+_\alpha][dA_\alpha]}{\text{Vol}} \Big(\prod_{i=1}^{n} \int d^2z_i \sqrt{-h}\, V_i(z_i, k_i) \Big)\, e^{-S[Z,\Psi;e,\chi,A]} \,. \tag{III.7}$$

Dabei werden sowohl die Materiefelder Z^μ und $\Psi^{+\mu}$, als auch die Felder des N=2 Supergravitationsmultipletts $e_\alpha{}^a$, χ^+_α und A_α über sämtliche möglichen Konfigurationen integriert. Über die Positionen z_i der Vertexoperatoren muß ebenfalls integriert werden, da ihnen kein ausgezeichneter Punkt auf der Weltfläche zugeordnet werden kann. Gewichtet wird der Integrand, der aus dem Produkt der die ein- und auslaufenden Stringzustände repräsentierenden Vertexoperatoren an verschiedenen Positionen besteht, mit der Brink-Schwarz-Wirkung (II.13) des N=2 Strings.

Die Integrationsmaße in Gleichung (III.7) werden durch die sogenannte Ultralokalität bestimmt [120]. Dabei definiert man das Maß des Funktionalintegrals so, daß mit einer gegebenen Norm für die Felder das Gaußsche Integral seinen üblichen Wert annimmt. Mit Hilfe der Normen[52]

$$\|\delta Z\|^2 = \int d^2z\,\sqrt{-h}\,\delta Z^\mu \delta \bar{Z}^{\bar\nu}\,\eta_{\mu\bar\nu} \tag{III.8a}$$

$$\|\delta \Psi^+\|^2 = \int d^2z\,\sqrt{-h}\,\bar\Psi^{-\bar\nu}\Psi^{+\mu}\,\eta_{\mu\bar\nu} \tag{III.8b}$$

$$\|\delta h\|^2 = \int d^2z\,\sqrt{-h}\,h^{\alpha\gamma}h^{\beta\delta}\,\delta h_{\alpha\beta}\,\delta h_{\gamma\delta} \tag{III.8c}$$

$$\|\delta \chi^+\|^2 = \int d^2z\,\sqrt{-h}\,h^{\alpha\beta}\,\bar\chi^-_\alpha \chi^+_\beta \tag{III.8d}$$

$$\|\delta A\|^2 = \int d^2z\,\sqrt{-h}\,h^{\alpha\beta}\,A_\alpha A_\beta \tag{III.8e}$$

und der Forderung, daß das Gaußsche Funktionalintegral für alle Felder dasselbe Ergebnis hat, wie das Gaußsche Riemannintegral,

$$\int [d\phi]\,e^{-\|\phi\|^2} = \sqrt{\pi}\,, \tag{III.9}$$

ist das Integrationsmaß im Pfadintegral (III.7) des $N{=}2$ Strings eindeutig bestimmt.

Die Einführung des Normierungsfaktors $1/\mathrm{Vol}$ im Integral (III.7) ist aufgrund der zahlreichen in Abschnitt II.2 dargestellten Symmetrien der Wirkung nötig. Vol bezeichnet das Volumen der zu den die Wirkung invariant lassenden Transformationen gehörenden Symmetriegruppen. Da eine Symmetrietransformation eine Konfiguration der Felder in eine physikalisch äquivalente Konfiguration überführt, jede physikalisch unterschiedliche Konfiguration aber nur genau einmal im Integral berücksichtigt werden darf, muß dieses Volumen ausdividiert werden. Im allgemeinen sind die entsprechenden Symmetriegruppen jedoch nicht kompakt, so daß ein unendliches Volumen ausdividiert werden müßte. Um die damit verbundenen Schwierigkeiten zu vermeiden, führt man mit Hilfe der Faddeev-Popov-Methode [67] eine Eichfixierung im Pfadintegral durch. Dabei wird ein Variablenwechsel durchgeführt, so daß die Integration über physikalisch inäquivalente Feldkonfigurationen von der Integration über Eichorbits getrennt wird, wie in Abbildung III.4 dargestellt ist. Letztere kann dann vom Rest des Pfadintegrals abgespaltet werden, um ein endliches Ergebnis zu erhalten. Dabei ist die Jacobi-Determinante des Variablenwechsels in das Pfadintegral einzusetzen. Diese Determinante kann durch die Einführung der Faddeev-Popov-Geister, die mit den in Abschnitt II.5.1 eingeführten BRST-Geistern identisch sind, berechnet werden. Es ist anzumerken, daß die Determinante, die im Raum der Feldkonfigurationen nur sehr schwer zu bestimmen ist, stattdessen im durch die Variationen δ der Felder aufgespannten Tangentialraum an den Konfigurationsraum berechnet werden kann [110, Abschnitt 14.2.2].

[52]Die Norm im Raum der Variationen der Metrik hat im allgemeinsten Fall die Form $\|\delta h\|^2 = \int d^2z\,\sqrt{-h}\,(h^{\alpha\gamma}h^{\beta\delta} + u\,h^{\alpha\beta}h^{\gamma\delta})\,\delta h_{\alpha\beta}\,\delta h_{\gamma\delta}$. Jedoch fällt die Konstante u aus den meisten Rechnungen heraus und kann daher von vorneherein auf $u = 0$ gesetzt werden [5].

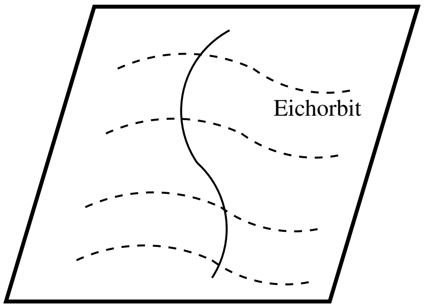

ABBILDUNG III.4 - *Zerlegung der Konfigurationen der Felder in Eichschnitte (durchgezogene Linie), die physikalisch unterschiedliche Konfigurationen verbinden und Eichorbits (gestrichelte Linien), die zu einem Punkt auf dem Eichschnitt äquivalente Konfigurationen verbinden.*

Prinzipiell werden die Symmetrien, wie schon in Abschnitt II.2 angedeutet, durch die Wirkung von Differentialoperatoren $\mathcal{P}$ auf Transformationsparameter σ erzeugt. Betrachtet man beispielhaft ein Feld ϕ im Pfadintegral $\int[d\phi]e^{-S[\phi]}$, mit einer lokalen Symmetrie der Wirkung (bezüglich des Feldes ϕ) unter den Transformationen $\delta\phi = \mathcal{P}\sigma$, läßt sich in das Pfadintegral eine Eins in der Form

$$1 = \Delta_{FP}(\phi) \int [d\sigma]\delta(\phi - \hat{\phi}^{\sigma}) \tag{III.10}$$

einfügen. Dabei ist $\Delta_{FP}(\phi)$ die Jacobi-Determinante des Variablenwechsels im Tangentialraum, $\delta\phi \to \mathcal{P}\sigma$, und $\delta(\phi - \hat{\phi}^{\sigma})$ ist eine funktionale δ-Funktion, die das Feld ϕ an jedem Punkt mit der um den Parameter σ transformierten einer Referenzkonfiguration $\hat{\phi}$ gleichsetzt. Der Beitrag des Feldes ϕ im Pfadintegral nimmt damit die Form an

$$\begin{aligned} & \int [d\phi][d\sigma]\Delta_{FP}(\phi)\,\delta(\phi - \hat{\phi}^{\sigma})e^{-S[\phi]} \\ = & \int [d\sigma]\Delta_{FP}(\hat{\phi}^{\sigma})\,e^{-S[\hat{\phi}^{\sigma}]} \\ = & \int [d\sigma]\Delta_{FP}(\hat{\phi})\,e^{-S[\hat{\phi}]}\,. \end{aligned} \tag{III.11}$$

Dabei wurde im letzten Schritt ausgenutzt, daß sowohl die Jacobi-Determinante als auch die Wirkung invariant unter den betrachteten Symmetrietransformationen sind. Der Integrand hängt nun nicht mehr vom Transformationsparameter σ ab, so daß das Funktionalintegral $\int[d\sigma]$ lediglich einen (unendlichen) Vorfaktor liefert, der ausdividiert werden kann. Das Inverse der Faddeev-Popov-Determinante $\Delta_{FP}(\hat{\phi})$ kann aus Gleichung (III.10) bestimmt werden. Dazu ist es sinnvoll, die Integraldarstellung der δ-Funktion mit einem entsprechenden Skalarprodukt $(.,.)$ im Tangentialraum zu verwenden

$$\Delta_{FP}(\hat{\phi})^{-1} = \int [d\sigma]\delta(\phi - \hat{\phi}^{\sigma}) = \int [d\sigma][d\beta]\,e^{2\pi i\,(\beta,\mathcal{P}\sigma)}\,. \tag{III.12}$$

Um die Pfadintegraldarstellung von $\Delta_{FP}(\hat{\phi})^{-1}$ zu invertieren und die gesuchte Faddeev-Popov-Determinante zu erhalten, kann man die bosonischen Felder σ und β durch Grassmann-wertige Felder ersetzen, $\sigma \to c$ und $\beta \to b$. Mit diesen Fadeev-Popov-Geistern erhält man $\Delta_{FP} = \int[db][dc]\,e^{2\pi i\,(b,\mathcal{P}c)}$ und damit den Beitrag der $\int[d\phi]$ Integration zum Pfadintegral

$$e^{-S[\hat{\phi}]} \int [db][dc]\,e^{-S_{gh}[b,c]}\,. \tag{III.13}$$

$S_{gh}[b,c] = 2\pi i\,(b, \mathcal{P}c)$ ist dabei die Geistwirkung und die Faddev-Popov-Geister entsprechen den schon in Abschnitt II.5.1 für den $N{=}2$ String diskutierten BRST-Geistern. Fermionische Symmetrieparameter führen bei der Eichfixierung entsprechend zu kommutierenden Geistern. Im Fall des $N{=}2$ Strings ist dieser Formalismus auf alle Felder des $N{=}2$ Supergravitationsmultipletts anzuwenden, es sind also die in Abschnitt II.2 definierten Differentialoperatoren $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_{1/2}$ und $\mathcal{P}_0$ zu untersuchen.

Allerdings wurde schon in Abschnitt II.2 erwähnt, daß die lokale Symmetrietransformationen erzeugende Operatoren und ihre Adjungierte Nullmoden besitzen können. Das bedeutet, daß es einerseits physikalisch unterschiedliche Transformationen geben kann, die nicht durch Eichtransformationen ineinander überführt werden können (Moduli) und andererseits Transformationen, die durch eine andere Symmetrietransformation wieder rückgängig gemacht werden können (konforme Killing-Vektoren, Spinoren oder Skalare). Abbildung III.5 zeigt die Wirkung des Differentialoperators $\mathcal{P}$ auf den Raum der Eichparameter und die Wirkung des adjungierten Operators $\mathcal{P}^\dagger$ auf den Raum der Feldvariationen. Eine allgemeine Variation eines Feldes ϕ läßt sich schreiben als [8]

$$\delta\phi = T_\alpha \delta x^\alpha + T_m \delta y^m\,, \tag{III.14}$$

wobei die δx^α die Eichparameter sind und die δy^m die Moduliparameter. Die zu den Eich- und den Modulitransformationen gehörenden Basisvektoren T_α und T_m sind paarweise orthogonal, $(T_\alpha, T_m) = 0$. Im oben beschriebenen Faddeev-Popov-Verfahren zur Eichfixierung im Pfadintegral konnten nur die Eichtransformationen δx^α eliminiert werden, über die Moduli δy^m muß weiterhin integriert werden. Allerdings sind die zu den einzelnen Symmetrietransformationen gehörenden Moduliräume, die orthogonal zu $\operatorname{im}\mathcal{P}$ liegen und damit den Kern des adjungierten Operators $\ker\mathcal{P}^\dagger$ bilden, in den hier betrachteten Fällen endlichdimensional. Die genaue Struktur der Moduliräume für die Operatoren $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_{1/2}$ und $\mathcal{P}_0$ des $N{=}2$ Strings wird im folgenden Abschnitt III.3 untersucht.

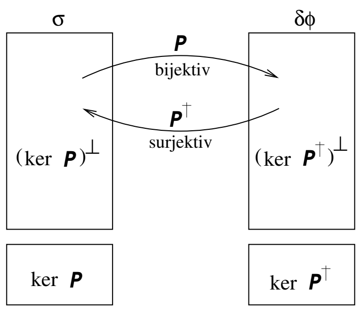

Abbildung III.5 - *Im Kern von $\mathcal{P}$ liegen die Transformationsparameter, die die Feldkonfiguration nicht ändern, $\delta\phi = 0$, während im Kern des adjungierten Operators $\mathcal{P}^\dagger$ die Feldtransformationen liegen, die nicht durch Eichtransformationen erreicht werden können.* $\operatorname{im}\mathcal{P}$ *und* $\ker\mathcal{P}^\dagger$ *sind durch die Definition des Adjungierten orthogonal zueinander.*

Im Fall des $N{=}2$ Strings sind die lokalen Symmetrietransformationen der Metrik $h_{\alpha\beta}$, des Gravitinos χ^+_α und des $U(1)$ Eichfeldes A_α zu untersuchen. Mit den in Abschnitt II.2 definierten Operatoren lassen sich diese Transformationen zerlegen in $\delta h_{\alpha\beta} = (\mathcal{P}_1\xi)_{\alpha\beta} \oplus \Lambda\, h_{\alpha\beta} \oplus \partial_{\tau^i} h_{\alpha\beta}\, \tau^i$, $\delta\chi^\pm_\alpha = (\mathcal{P}_{1/2}\epsilon)^\pm_\alpha \oplus \rho_\alpha\, \eta^\pm \oplus \partial_{\zeta^{j\pm}_\beta} \chi^\pm_\alpha\, \zeta^{j\pm}_\beta$ und $\delta A_\alpha = (\mathcal{P}_0\lambda)_\alpha \oplus (\mathcal{P}'_0\lambda')_\alpha \oplus \partial_{C^k} A_\alpha\, C^k$. Dabei parametrisieren die τ^i den metrischen Moduliraum, die $\zeta^{j\pm}_\alpha$ den Supermoduliraum und die C^k den $U(1)$ Moduliraum. Mit einer entsprechenden Redefinition der Transformationsparameter, unter Ausnutzung der lokalen Lorentz-, Weyl- und Super-Weyl-Transformationen, läßt sich die Transformation der holomorphen Hälfte der Felder des Supergravitationsmultipletts in komplexen Koordinaten kompakt schreiben, als [36, Kapitel III]

$$\begin{pmatrix} \delta h_{\bar z}{}^z \\ \delta\chi^+_{\bar z} \\ \delta\chi^-_{\bar z} \\ \delta A_{\bar z} \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \xi^z \\ \epsilon^+ \\ \epsilon^- \\ \lambda-\lambda' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{i\bar z}{}^z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu^+_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu^-_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{k\bar z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^i \\ \zeta^{j+}_{\bar z} \\ \zeta^{j-}_{\bar z} \\ C^k \end{pmatrix}, \tag{III.15}$$

mit $\mu_{i\bar z}{}^z = \partial_{\tau^i} h_{\bar z}{}^z$, $\nu^\pm_j = \partial_{\zeta^{j\pm}_{\bar z}}\chi^\pm_{\bar z}$ und $\omega_{k\bar z} = \partial_{C^k} A_{\bar z}$. Die Beltrami-Differentiale $\mu_{i\bar z}{}^z$, $\nu^\pm_j$ und $\omega_{k\bar z}$ sind Vektoren im Tangentialraum an die Feldvariationen. Sie sind damit dual zu den zur Berechnung der Jacobi-Determinante einzuführenden Antigeistern. Die holomorphe Hälfte des Transformationsoperators $\mathcal{P}$ hat die Form

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \hat\nabla_{\bar z} & 4\chi^-_{\bar z} & 4\chi^+_{\bar z} & 0 \\ \hat\nabla_z \chi^+_{\bar z} - \frac{1}{2}\chi^+_{\bar z}\hat\nabla_z & \mathcal{D}_{\bar z} & 0 & i\chi^+_{\bar z} \\ \hat\nabla_z \chi^-_{\bar z} - \frac{1}{2}\chi^-_{\bar z}\hat\nabla_z & 0 & \mathcal{D}_{\bar z} & -i\chi^-_{\bar z} \\ \hat\nabla_z A_{\bar z} & -2i\hat\nabla_z\chi^-_{\bar z} + 2i\chi^-_{\bar z}\hat\nabla_z & 2i\hat\nabla_z\chi^+_{\bar z} - 2i\chi^+_{\bar z}\hat\nabla_z & \partial_{\bar z} \end{pmatrix}. \tag{III.16}$$

Wie oben schon allgemein erklärt, läßt sich die Jacobi-Determinante, die sich aus der Eichfixierung ergibt, in Form einer Geist-Wirkung in das Pfadintegral einfügen. Dabei sind zur Invertierung der Faddeev-Popov-Determinante für bosonische Transformationsparameter fermionische Geister und für fermionische Transformationsparameter bosonische Geister einzuführen. Die Geist-Wirkung ergibt sich dann aus dem Skalarprodukt

$$S_{gh}[b,c,\beta^\mp,\gamma^\pm,b',c'] = \left(\begin{pmatrix} b \\ \beta^- \\ \beta^+ \\ b' \end{pmatrix}, \mathcal{P} \begin{pmatrix} c \\ \gamma^+ \\ \gamma^- \\ c' \end{pmatrix} \right). \tag{III.17}$$

In der superkonformen Eichung (II.21) nimmt die holomorphe Hälfte[53] der Geistwirkung die besonders einfache Form an

$$S^{\text{fix}}_{gh}[b,c,\beta^\mp,\gamma^\pm,b',c'] = \frac{1}{\pi}\int d^2z\left(b\,\partial_{\bar z}c + \beta^-\partial_{\bar z}\gamma^+ + \beta^+\partial_{\bar z}\gamma^- + b'\partial_{\bar z}c'\right). \tag{III.18}$$

Man erkennt, daß die durch diese Wirkung (III.18) beschriebenen Geist- und Antigeistfelder genau die Eigenschaften der in Abschnitt II.5.1 eingeführten BRST-Geister haben.

Bei der in Gleichung (III.12) beschriebenen Einführung der Geister zur Invertierung der Integraldarstellung der zur Eichfixierung verwendeten δ-Funktion, erhält man nun auch noch einen Beitrag des Modulitermes aus (III.15). Dieser Beitrag der Form $\int du^\alpha e^{-2\pi i\, u^\alpha\,(b,\mu_\alpha)}$ kann ausintegriert werden und liefert für fermionische Geister das Skalarprodukt von Antigeistern und Beltrami-Differentialen im Integranden und für bosonische Geister die δ-Funktion eines solchen Skalarproduktes. Diese Einsetzung von Antigeistern ist notwendig, um einen endlichen Ausdruck für das

[53] Für geschlossene Strings ergibt sich ganz analog auch die antiholomorphe Hälfte $\bar S_{gh}$.

Pfadintegral zu erhalten[54], sofern man nicht von Hand die Nullmoden der Geistfelder aus der Funktionalintegration herausnimmt.

Die Behandlung der Nullmoden des die Eichtransformationen erzeugenden Operators $\mathcal{P}$ ist einfacher als die Untersuchung der Moduli. Hier ist lediglich das Volumen der konformen Killing-Gruppe auszudividieren. Alternativ können die in $\ker \mathcal{P}$ liegenden Transformationen auch dazu genutzt werden, andere Freiheitsgrade zu eliminieren. Insbesondere die mit den Reparametrisierungen und Weyl-Transformationen zusammenhängenden konformen Killing-Vektoren ξ^α, die die konforme Killing-Gleichung $\hat{\nabla}_\alpha \xi_\beta + \hat{\nabla}_\beta \xi_\alpha - h_{\alpha\beta}\, \hat{\nabla}^\gamma \xi_\gamma = 0$ erfüllen, können verwendet werden, um die Positionen einiger Vertexoperatoreinsetzungen zu fixieren. Die Jacobi-Determinante dieser Fixierungen führt zur Einsetzung von Geistfeldern in das Pfadintegral. Da die konformen Killing-Vektoren Nullmoden der Geister entsprechen, sind diese Einsetzungen zur Konstruktion eines endlichen Pfadintegrals ebenso notwendig wie die Einsetzungen der Antigeistfelder für die Moduli, die den Nullmoden der Antigeister entsprechen. Dasselbe Ergebnis kann auch erzielt werden, indem man die Funktionalintegration über die Geistfelder auf den zu den Nullmoden orthogonalen Anteil dieser Felder beschränkt. Bei der Untersuchung des Riemann-Roch Indextheorems in Abschnitt III.3.1 wird sich jedoch zeigen, daß diese Nullmoden der Differentialoperatoren $\mathcal{P}$ nur in Topologien mit Euler-Zahl $\chi \geq 0$, also auf der Sphäre, auf der Disk, auf dem Torus und auf dem Zylinder, auftauchen können. In höheren Topologien spielt die konforme Killing-Gruppe keine Rolle mehr.

Insgesamt erhält man nach der oben beschriebenen Eichfixierung im Pfadintegral den folgenden Ausdruck für die holomorphe Hälfte der Amplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{J,M} \;=\; & \int d\tau\, d\zeta^\pm\, dC\, [dZ^\mu][d\Psi^{+\mu}][db][dc][d\beta^\mp][d\gamma^\pm][db'][dc'] \\ & \times \prod_i (b,\mu_i) \prod_j (b',\omega_j) \prod_k \delta\big((\beta^-,\nu_k^+)\big) \prod_l \delta\big((\beta^+,\nu_l^-)\big) \\ & \times \left(\prod_{i=1}^n \int d^2 z_i \sqrt{-h}\, V_i(z_i,k_i) \right) e^{-S[Z,\Psi;\tau,\zeta^\pm,C] - S_{gh}[c,b,\beta^\mp,\gamma^\pm,b',c']} \,. \end{aligned} \tag{III.19}$$

Um auch die antiholomorphe Hälfte des geschlossenen Strings zu berücksichtigen, sind in das Pfadintegral (III.19) auch die antiholomorphen Hälften der Geist- und Antigeistfelder mit der entsprechenden Wirkung einzusetzen.

Der Laufbereich der Moduliintegration und die Anzahl der Moduliparameter und der konformen Killing-Vektoren, Spinoren und Skalare ergibt sich aus der Untersuchung der Moduliräume, die im nächsten Abschnitt durchgeführt wird.

[54] Moduli entsprechen Nullmoden der Antigeister. Nullmoden antikommutierender Felder lassen das Pfadintegral verschwinden. Sei z.B. Ψ ein antikommutierendes Feld, bei dem die Nullmoden abgespaltet werden können, $\Psi(z,\bar z) = \Psi_0(z) + \Psi'(z,\bar z) = \sum_{i=1}^N \Psi_0^i \phi^i(z) + \Psi'(z,\bar z)$, wobei die $\phi^i(z)$ die Wellenfunktionen der N Nullmoden sind, $\partial_{\bar z}\phi(z) = 0$. Für die Grassmann-Variablen Ψ_0^i gelten die Integrationsregeln $\int d\Psi_0^i\, \Psi_0^i = 1$ und $\int d\Psi_0^i = 0$. Da die Wirkung $S[\Psi']$ per Definition nicht von den Nullmoden abhängt, verschwindet das Pfadintegral $\int [d\Psi] e^{-S[\Psi']} = \int d\Psi_0^i [d\Psi'] e^{-S[\Psi']} = 0$.

III.3 MODULI

Auch nach der Eichfixierung im Pfadintegral sind die Felder des $N{=}2$ Supergravitationsmultipletts in beliebigen Topologien nicht vollständig festgelegt. Die sogenannten Moduli erzeugen Transformationen der Felder, die nicht durch Eichtransformationen eliminiert werden können und damit zu physikalisch inäquivalenten Zuständen führen. Auch nach der vollständigen Fixierung aller Eichfreiheitsgrade ist also der Integrand des Pfadintegrals über die zu den verschiedenen lokalen Symmetrien gehörenden Moduliräume zu integrieren.

Da die Moduli gerade die Transformationen beschreiben, die nicht durch Eichtransformationen $\mathcal{P}\xi$ erreicht werden können, ist der Moduliraum das orthogonale Komplement des durch den die Eichtransformationen erzeugenden Differentialoperator $\mathcal{P}$ aufgespannten Raumes. Mit einem auf den entsprechenden Räumen definierten Skalarprodukt $(.,.)$ und der Definition des Adjungierten $\mathcal{P}^\dagger$ eines Operators folgt daraus, daß der Moduliraum durch den Kern $\ker\mathcal{P}^\dagger$ beschrieben wird

$$m \in \{\text{Moduli}\} \Leftrightarrow (m, \mathcal{P}\xi) = (\mathcal{P}^\dagger m, \xi) = 0 \quad \forall\xi \Leftrightarrow m \in \ker\mathcal{P}^\dagger \,. \tag{III.20}$$

Es sind nach der Eichfixierung also noch die Kerne der adjungierten Differentialoperatoren $\mathcal{P}^\dagger$ zu untersuchen, und über die in ihnen enthaltenen Transformationen der Felder zu integrieren.

III.3.1 DAS RIEMANN-ROCH INDEXTHEOREM

Das Riemann-Roch Theorem [127] kann vom allgemeinen Indextheorem für elliptische Operatoren von Atiyah und Singer [11, 10, 12] abgeleitet werden[55] [63, Abschnitt VI.C]. Es stellt über den Index eines Differentialoperators einen Zusammenhang zwischen den Dimensionen der Kerne des Operators und seines Adjungierten und dem Genus der Riemann-Fläche, auf der diese Operatoren definiert sind, her. Von besonderer Bedeutung bei der störungstheoretischen Behandlung einer Stringtheorie sind dabei die Differentialoperatoren $\mathcal{P}$, die die lokalen Symmetrietransformationen auf der Weltfläche erzeugen. Das Riemann-Roch Indextheorem gibt hier Auskunft über die Dimensionen der verschiedenen Moduliräume und der konformen Killing-Gruppen.

Da die Eichtransformationen erzeugende Differentialoperatoren $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_{1/2}$ und $\mathcal{P}_0$, welche in Abschnitt II.2 definiert wurden, mit den kovarianten Ableitungen $\nabla_z^{(n)}$ bzw. $\mathcal{D}_z^{n,q}$ oder mit symmetrisierten und spurfreien Kombinationen von diesen übereinstimmen, kann das Ergebnis des Riemann-Roch Indextheorems und der Untersuchung der Dimensionen der Kerne $\ker\mathcal{D}_z^{n,q}$ und $\ker\mathcal{D}_z^{n,q\dagger}$ aus dem Anhang C.3 direkt übernommen werden. Da die $U(1)$ kovariante Ableitung $\mathcal{D}_z^{n,q}$ nur auf die unter der $U(1)$ geladenen fermionischen Felder wirkt, d.h. nur auf die Gravitinos des $N{=}2$ Supergravitationsmultipletts, sind hier nur die Kerne der kovarianten Ableitungen $\nabla_z^{(0)}$, $\nabla_z^{(1)}$ und $\mathcal{D}_z^{1/2,1}$ sowie ihrer Adjungierten zu betrachten. Im Anhang C werden kompakte Riemann-Flächen ohne Punktierungen betrachtet. Streuamplituden von Strings enthalten jedoch ein- und auslaufende Stringzustände, die durch Vertexoperatoren in

[55] Siehe dazu auch Anhang C.3.

Punktierungen auf der Weltfläche realisiert werden[56]. Auch über die Punktierungen muß integriert werden, da es auf der Weltfläche des Strings keine ausgezeichneten Punkte gibt. Also erhöht sich die komplexe Dimension aller Moduliräume auf einer N-fach punktierten Riemann-Fläche um N. Damit kann man aus Tabelle C.2 die gesuchten Ergebnisse ablesen. Die Moduli zum Gewicht $n = 1$ entsprechen dabei den nicht durch Reparametrisierungen erzeugbaren Deformationen der Metrik. Der fermionische Moduliraum zum Gewicht $n = 1/2$ enthält die orthogonal zu den Supersymmetrietransformationen liegenden Deformationen der Gravitinos, und der $U(1)$ Moduliraum zum Gewicht $n = 0$ enthält die physikalischen $U(1)$ Transformationen, die, wie in Abschnitt II.3.1 erläutert wurde, zu Transformationen der Spinstrukturen äquivalent sind.

Auf der Sphäre mit $g = 0$ sind die Dimensionen sämtlicher Moduliräume null. Es gilt zwar $\dim\ker\mathcal{D}_z^{n,q\dagger} = q\,M$, jedoch gibt es Gravitinos $\chi^\pm$ mit positiver und mit negativer $U(1)$ Ladung, $q = \pm 1$. Da die Dimension eines Kernes nicht negativ werden darf, legt dies die Chern-Zahl M auf der Sphäre ohne Punktierungen auf $M = 0$ fest. Auf der Sphäre mit N Punktierungen ist die Dimension der Moduli zum Gewicht $n = 1$ und $n = 0$ jeweils N. Die Dimension des Moduliraumes zum Gewicht $n = 1/2$ ist nun $N + q\,M$. Da auch diese Dimension nicht negativ werden darf, ist der Bereich der möglichen Chern-Zahlen eingeschränkt auf $|M| \leq N$. Weiterhin gibt es auf der Sphäre drei komplexe konforme Killing-Vektoren, zwei komplexe konforme Killing-Spinoren und einen komplexen konformen Killing-Skalar. Diese zusätzlichen Symmetrien können ausgenutzt werden, um einige zusätzliche Freiheitsgrade, etwa die Positionen von drei der Vertexoperatoren auf der Weltfläche, zu eliminieren. Dies wird in Kapitel IV bei der Berechnung der Tree-Level Streuamplituden ausgenutzt.

Auf dem Torus, d.h. für $g = 1$, gibt es jeweils einen komplexen Killing-Vektor, Spinor und Skalar. Zum Gewicht $n = 1$ und $n = 0$ gibt es jeweils einen komplexen Moduliparameter sowie die N mit den Punktierungen zusammenhängenden Moduli. Es gibt $N + q\,M$ fermionische Moduli auf dem Torus mit N Punktierungen, was den Bereich der Möglichen Chern-Zahlen des $U(1)$ Bündels auf $|M| \leq N$ einschränkt. Die Moduli des Torus werden bei der Berechnung der Ein-Loop-Amplitude des $N{=}2$ Strings in Kapitel V noch genauer untersucht.

Auf nicht punktierten Riemann-Flächen von höherem Genus $g \geq 2$ gibt es stets einen komplexen konformen Killing-Skalar und keine konformen Killing-Vektoren oder Spinoren. Auf punktierten Riemann-Flächen mit $g \geq 2$ verschwindet auch der konforme Killing-Skalar. Die Anzahl der metrischen Moduli τ^i ist damit für $N > 0$ gegeben durch $3g-3+N$ und die der $U(1)$ Moduli C^k durch $g-1+N$. Weiterhin gibt es $2g - 2 + N + q\,M$ fermionische Moduli $\zeta_z^{j\pm}$. Da die Dimension des Moduliraumes nicht negativ werden darf, gilt hier für die erlaubten Chern-Zahlen des $U(1)$ Bündels auf der Weltfläche $|M| \leq 2g - 2 + N$. Diese Einschränkung der erlaubten Chern-Zahlen spiegelt die oben erwähnte Tatsache wider, daß bei betragsmäßig höheren Chern-Zahlen überschüssige Geistnullmoden das Pfadintegral verschwinden lassen.

Die Anzahl der Moduliparameter für offene Topologien, d.h. auf Riemann-Flächen mit Rändern erhält man wie in Anhang B.3 dargestellt mit Hilfe des Verdoppelungstricks aus der entsprechenden überdeckenden kompakten Riemann-Fläche. Dabei entspricht ein komplexer Parameter auf der kompakten Überdeckung einem reellen

[56]Siehe dazu Anhang B.2.

Parameter auf der offenen Fläche. Die Dimensionen der Moduliräume werden also halbiert. Die einfachsten Fälle offener Topologien, die Disk und der Zylinder, werden im folgenden noch genauer untersucht.

III.3.2 DIE METRISCHEN MODULI

Der metrische Moduliraum besteht aus den nicht durch Diffeomorphismen und Weyl-Transformationen ineinander überführbaren Konfigurationen der Metrik $h_{z\bar{z}}$ bei gegebener Topologie der Weltfläche. Er beschreibt also die physikalisch unterschiedlichen Formen der durch den String aufgespannten Riemann-Fläche, die bei fester Topologie noch möglich sind. Wie in Anhang B gezeigt wird, kann die Form einer Riemann-Fläche durch ihre Periodenmatrix Ω_{ij} beschrieben werden. Jedoch gehören zu zwei verschiedenen Periodenmatrizen nicht unbedingt auch zwei physikalisch inäquivalente Riemann-Flächen. Der metrische Moduliraum ist im allgemeinen sehr viel kleiner als Siegels obere Halbebene $\mathbb{H}_g$ und auf komplizierte Weise in diese eingebettet [92]. Aus $\mathcal{H}_g$ kann man zunächst den Teichmüller-Raum $\mathcal{T}$ gewinnen, der die universelle Überlagerung des Moduliraumes $\mathcal{M}$ darstellt. Den Moduliraum erhält man dann, indem man aus $\mathcal{T}$ die *mapping class group*[57] $\Gamma_g = \text{diff}/\text{diff}_0$ ausdividiert.

TORUS

Im 1-Loop-Fall, also auf dem Torus mit $g = 1$, ist Siegels obere Halbebene die obere komplexe Halbebene $\mathcal{H}_1 = \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \,|\, \text{Im}\ \tau > 0\}$ und stimmt mit dem Teichmüller-Raum überein. Ein Torus kann durch zwei komplexe Zahlen λ_1 und λ_2 mit $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}$ beschrieben werden[58], die durch die Identifizierung $z \approx z + m\lambda_1 + n\lambda_2$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ ein Gitter aus der komplexen Ebene ausdividieren, $\mathbb{C}/(\lambda_1\mathbb{Z} + \lambda_2\mathbb{Z})$. Durch konforme Drehungen und Skalierungen kann immer $\lambda_1 = \tau$ und $\lambda_2 = 1$ gewählt werden. Zudem kann gegebenenfalls durch Vertauschen der Rollen von λ_1 und λ_2 erreicht werden, daß τ in der oberen Halbebene liegt, also gilt $\text{Im}\ \tau > 0$. Wie in Abbildung III.6 dargestellt wird, kann jeder Torus durch einen Teichmüller-Parameter $\tau \in \mathbb{H}$ repräsentiert werden.

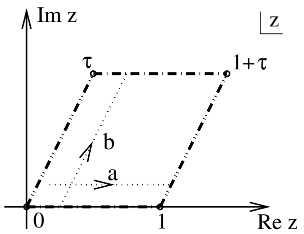

ABBILDUNG III.6 - *Definition des durch den Teichmüller-Parameter τ beschriebenen Torus in der komplexen Ebene durch die Identifizierung $z \approx z + m\,\tau + n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$. Dabei werden die gegenüberliegenden Seiten des hier skizzierten Parallelogramms identifiziert.*

Allerdings gehören nicht alle Werte von τ zu inäquivalenten Tori. Es gibt noch nicht in der Zusammenhangskomponente der Identität liegende "große" Diffeomorphismen, die sogenannten Dehn-Twists, die einen Torus in sich selbst überführen

[57] Die mapping class group ist der Quotient aller Diffeomorphismen auf der Riemann-Fläche und der in der Zusammenhangskomponente der Identität liegenden Diffeomorphismen. Auf dem Torus, d.h. für Genus $g = 1$, ist die mapping class group isomorph zur modularen Gruppe, $\Gamma_1 \cong SL(2, \mathbb{Z})$. Im allgemeinen Fall $g \geq 2$ ist sie jedoch größer, und es gilt $SL(2g, \mathbb{Z}) \subset \Gamma_g$.

[58] Wenn $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist, liegen die beiden komplexen Zahlen auf einem Strahl durch den Urprung, und das von ihnen aufgespannte Gitter entartet zu einem eindimensionalen Gitter.

und dabei den Teichmüller-Parameter τ ändern. Ein Dehn-Twist besteht darin, den Torus entlang eines Homologiezykels aufzuschneiden, die beiden Enden um 2π gegeneinander zu verdrehen, und dann wieder zusammenzukleben. Ein Dehn-Twist um den a-Zykel des Torus transformiert den Teichmüller-Parameter $\tau \to \tau + 1$, während ein Dehn-Twist um den b-Zykel nach Rotation und Reskalierung die Transformation $\tau \to \tau/(\tau + 1)$ liefert. Diese beiden Transformationen spannen die modulare Gruppe $SL(2, \mathbb{Z})$ auf,

$$\tau \to \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ , \ ad - bc = 1 \ , \tag{III.21}$$

die den durch τ bzw. τ' beschriebenen Torus invariant läßt. Im Fall des Torus ist also die mapping class group isomorph zur modularen Gruppe. Die Integration über den metrischen Moduliraum darf nur über inäquivalente Tori geführt werden, d.h. über Tori, die nicht durch eine $SL(2, \mathbb{Z})$ Transformation zusammenhängen. Man erhält den Moduliraum, wenn man den Teichmüller-Raum durch die modulare Gruppe dividiert, $\mathcal{M} = \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$. Ein Repräsentant dieser Äquivalenzklasse ist die Fundamentalregion

$$\mathcal{F} = \left\{ \tau = \tau_1 + i\tau_2 \in \mathbb{C} \ \Big| \ -\tfrac{1}{2} \leq \tau_1 \leq \tfrac{1}{2} \ , \ \tau_2 > 0 \ , \ |\tau|^2 > 1 \right\} , \tag{III.22}$$

die in Abbildung III.7 dargestellt ist. Die zwei reellen metrischen Moduliparameter auf dem Torus τ_1 und τ_2 sind also über die Region $\mathcal{F}$ in der komplexen Ebene zu integrieren.

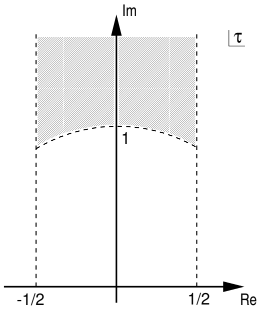

ABBILDUNG III.7 - *Die Fundamentalregion $\mathcal{F}$ aus Gleichung (III.22) ist ein Repräsentant des Quotientenraumes $\mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ und damit des metrischen Moduliraumes für den Torus.*

Der Torus in Abbildung III.6 kann durch das Einheitsquadrat (x, y) mit $x, y \in [0, 1]$ parametrisiert werden, durch $\mathrm{Re}\ z = x + y\tau_1$ und $\mathrm{Im}\ z = y\tau_2$. Dann beschreibt der Moduli-Parameter τ inäquivalente Metriken auf dem Einheitsquadrat,

$$ds^2 = dx^2 + 2\tau_1\, dxdy + |\tau|^2 dy^2 \ , \tag{III.23}$$

und die Integration über die Moduli wird zu einer Integration über inäquivalente Metriken auf dem Einheitsquadrat.

ANULUS

Der Torus ist die kompakte doppelte Überlagerung des Zylinders bzw. des dazu topologisch äquivalenten Anulus. Aus dem durch das Einheitsquadrat (x, y) parametrisierten Torus kann man durch die in Abbildung III.8 dargestellte Involution

$$f_c(x, y) = (x, 1 - y) \tag{III.24}$$

den entsprechenden Parameterbereich des Zylinders erhalten. Wie im Anhang B.3 erläutert wird, erhält man die Moduliparameter der Riemann-Fläche mit Rand gerade aus den Parametern der kompakten Überlagerung, die unter der Involution invariant sind. Die Metrik (III.23) transformiert unter f_c zu

$$ds^2 = dx^2 - 2\tau_1\, dxdy + |\tau|^2 dy^2\,. \tag{III.25}$$

Ein Vergleich der Gleichungen (III.23) und (III.25) zeigt, daß auf dem Zylinder gelten muß $\tau_1 = 0$. Der eindimensionale Moduliraum des Zylinders bzw. des Anulus wird also durch die reelle Variable t mit $t > 1$ parametrisiert, so daß für die Metrik auf dem halben Einheitsquadrat (x, y) mit $x \in [0, 1]$ und $y \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt

$$ds^2 = dx^2 + t^2\, dy^2\,. \tag{III.26}$$

Die geometrische Bedeutung des Moduliparameters t ist einfach zu erkennen. Der Anulus wird durch zwei konzentrische Kreise mit Radien r_1 und r_2 begrenzt. Durch konforme Reskalierungen kann man $r_1 = 1$ und $r_2 = t \in \mathbb{R}$ setzen, wobei man durch eventuelles Vertauschen der Rollen von r_1 und r_2 stets erreichen kann, daß gilt $t > 1$.

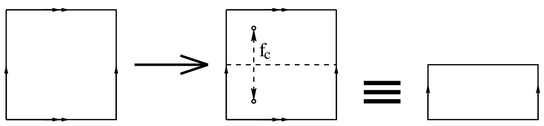

ABBILDUNG III.8 - *Durch Anwendung der Involution f_c aus (III.24) erhält man aus dem Torus den Zylinder.*

III.3.3 DIE FERMIONISCHEN MODULI

Die mit den Supersymmetrietransformationen zusammenhängenden fermionischen Moduli des N=2 Strings können nach der geschickten Wahl eines passenden Eichschnittes für die Gravitinos $\chi_{z}^{\pm}$ vollständig ausintegriert werden. Die dabei ins Pfadintegral einzusetzenden Determinanten lassen sich mit den schon in Gleichung (III.19) zur Absorption der Geistnullmoden eingesetzten δ-Funktionen der kommutierenden Antigeister zu Bildwechseloperatoren PCO$^{\pm}$ (II.101) kombinieren. Diese Bildwechseloperatoren können auf beliebige Vertexoperatoren im Integranden angewendet werden und erhöhen so deren Bildladung, ausgehend vom kanonischen $(-1, -1)$ Bild. Auf diese Weise liefert die Integration der fermionischen Moduli in gewissem Sinne Auswahlregeln für die Bildladungen der ins Pfadintegral einzusetzenden Vertexoperatoren.

Man kann die Basis des fermionischen Moduliraumes so wählen, daß der Träger der zu den Supersymmetrietransformationen orthogonalen Variationen der Gravitinos, d.h. der Modulitransformationen $\delta\chi_{\bar{z}}^{\pm}$, aus δ-Funktionen besteht [8, Abschnitt 2.4]. Es liegen also nur an diskreten Punkten auf der Weltfläche der Strings fermionische Modulitransformationen vor. Da die lokalen Symmetrietransformationen ausreichen, um die Gravitinos bis auf Modulitransformationen zu eliminieren, erhält man so für $g \geq 1$

$$\delta\chi_{\bar{z}}^{\pm} = \chi_{\bar{z}}^{\pm} = \sum_{j=1}^{2g-2+n\mp M} \zeta_{\bar{z}}^{j\,\pm}\delta^{(2)}(z - z_j^{\pm})\,, \tag{III.27}$$

wobei die Punkte $z_j^{\pm}$ auf der Weltfläche beliebig gewählt werden können[59]. Die Beltrami-Differentiale nehmen also die Form an $\nu_j^{\pm} = \delta^{(2)}(z - z_j^{\pm})$. Den Laufbereich des Summationsindex j erhält man aus der Untersuchung der Dimension des fermionischen Moduliraumes. Auf der Sphäre gibt es natürlich keine Moduli, dafür aber 2 konforme Killing-Spinoren. Auf n-fach punktierten Riemann-Flächen mit $g \geq 1$ erhält man $2g - 2 + n \mp M$ Moduli-Parameter. In der vollständigen im Pfadintegral verwendeten Wirkung des $N{=}2$ Strings (II.13) und (III.17) koppelt das Gravitino $\chi_{\bar z}^{\pm}$ an die geisterweiterten Supersymmetrieströme $\hat{G}^{\mp}$. Das Ausintegrieren der Moduli $\zeta_{\bar z}^{j\pm}$ liefert also Einsetzungen von $\hat{G}^{\pm}$ an der Stelle $z_j^{\mp}$ im Pfadintegral [150]. Da es genau so viele fermionische Moduliparameter $\zeta_{\bar z}^{j\pm}$ gibt wie $\delta(\beta^{\pm})$ Einsetzungen zur Absorption der Nullmoden im Pfadintegral, treten nach dem Ausintegrieren der fermionischen Moduli nur Kombinationen der Form

$$\delta\big(\beta^-(z_j^+)\big)\,\hat{G}^-(z_j^+) \qquad \text{oder} \qquad \delta\big(\beta^+(z_j^-)\big)\,\hat{G}^+(z_j^-) \tag{III.28}$$

auf. Mit der Definition des geisterweiterten Stromes aus dem BRST-Operator Q, $\hat{G}^{\pm} = \{Q, \beta^{\pm}\}$ und der formalen Identität [151] $\delta(\beta^{\pm}) = e^{+\varphi^{\mp}}$ sowie dem daraus folgenden Operatorprodukt $\beta^{\pm}\,\delta(\beta^{\pm}) = \xi^{\pm}$ lassen sich diese Kombinationen umformen

$$\delta\big(\beta^{\pm}\big)\,\hat{G}^{\pm} = \delta\big(\beta^{\pm}\big)\,\{Q, \beta^{\pm}\} = \{Q, \xi^{\pm}\} = \mathrm{PCO}^{\pm}\,, \tag{III.29}$$

wobei im letzten Schritt die Definition des Bildwechseloperators $\mathrm{PCO}^{\pm}$ aus (II.101) verwendet wurde. Jeder fermionische Modulus $\zeta_{\bar z}^{j\pm}$ führt also zur Einsetzung eines $\mathrm{PCO}^{\pm}$ Operators in das Pfadintegral. Im Chern-Zahl M Sektor der Theorie werden $2g{-}2{+}n{-}M$ PCO^+ Operatoren und $2g{-}2{+}n{+}M$ PCO^- Operatoren in das Pfadintegral eingesetzt. Da die Ableitung der Bildwechseloperatoren $\partial_z\mathrm{PCO}^{\pm}$ BRST exakt ist, können diese Operatoren frei auf der Weltfläche des Strings verschoben, und auf beliebige Vertexoperatoren angewendet werden. Ausdrücke, die sich lediglich um Ableitungen der Bildwechseloperatoren unterscheiden, sind physikalisch äquivalent. Im Ausgangspunkt (III.7) wurden n Vertexoperatoren im kanonischen $(-1,-1)$ Bild in das Pfadintegral eingesetzt. Wendet man auf diese Vertexoperatoren die Bildwechseloperatoren an, erhält man die Summen der Bildladungen aller Vertexoperatoren nach Integration über die fermionischen Moduli,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i^+, \sum_{i=1}^{n} \pi_i^-\Big) = \big(2g - 2 - M, 2g - 2 + M\big)\,. \tag{III.30}$$

Dieses Ergebnis ist zumindest auf der Sphäre und dem Torus konsistent mit der Superfeld-Betrachtung am Ende von Abschnitt II.5.2. Dort war das "natürliche" Objekt der Vertexoperator im $(0,0)$ Bild, und mit der residuellen Symmetrie der konformen Killing-Spinoren konnten die θ-Koordinaten von Vertexoperatoren fixiert werden, was zu einer Darstellung im $(-1,-1)$ Bild führte.

Da das Ergebnis der Integration über die fermionischen Moduli die Auswahlregel (III.30) ist, kann man diese Moduli bei der Konstruktion des Pfadintegrals von vorneherein vernachlässigen und nur Vertexoperatoren mit den richtigen Bildladungen

[59] Insbesondere ist es sinnvoll, unterschiedliche Trägerpunkte z_j^+ und z_j^- für $\chi_{\bar z}^+$ und $\chi_{\bar z}^-$ zu wählen, da sich so die nicht eichfixierte Geistwirkung (III.17) deutlich vereinfacht [38].

in den Integranden einsetzen. Insbesondere spielt es keine Rolle, wie man die Bildladungen auf die einzelnen Vertexoperatoren verteilt, so lange die Auswahlregel erfüllt bleibt.

Da die obige Argumentation, die letztendlich zur Auswahlregel (III.30) geführt hat, nur von der Anzahl der Moduliparameter abhängt, gilt das Ergebnis ebenso für offene Strings. Wie in Anhang C.3 gezeigt wird, liefert die Bestimmung der Dimension der Kerne der kovarianten Ableitungen sowohl für kompakte Riemann-Flächen als auch für Riemann-Flächen mit Rand dasselbe (von der Topologie der Fläche abhängende) Ergebnis. Dementsprechend kann (III.30) mit halbzahligem Genus $g = 1 - \chi/2$ auch für Streuamplituden offener Strings angewendet werden.

III.3.4 DIE $U(1)$ MODULI

Die $U(1)$ Moduli beschreiben die physikalischen Transformationen des Eichfeldes A_z auf der Weltfläche des N=2 Strings, d.h. der Konnektion des $U(1)$ Prinzipalbündels auf der Riemann-Fläche. Das $U(1)$ Bündel ist topologisch durch die in Gleichung (III.5) definierte Chern-Zahl $c_1 = \frac{1}{2\pi}\int F^{(2)}$ charakterisiert, wobei $F^{(2)}$ die entsprechende Feldstärke 2-Form ist, für die zumindest lokal gilt $F^{(2)} = dA^{(1)}$. Der Raum der $U(1)$ Konnektionen ist ein affiner Raum, d.h. es ist möglich, die Konnektion in ein festes Hintergrundfeld $A^{(1)}_{c_1}$, das die Chern-Zahl liefert, und einen Anteil an Fluktuationen $A^{(1)}_0$ mit Chern-Zahl Null aufzuspalten

$$A^{(1)} = A^{(1)}_{c_1} + A^{(1)}_0 \qquad \text{mit} \quad \frac{1}{2\pi}\int F^{(2)}_{c_1} = c_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\int F^{(2)}_0 = 0\,. \tag{III.31}$$

Diese Aufspaltung ist nicht eindeutig, allerdings ist die Wahl des Hintergrundfeldes $A^{(1)}_{c_1}$ beliebig, da die Differenz zweier Hintergrundfelder mit Chern-Zahl c_1 immer eine Chern-Zahl Null Fluktuation $A^{(1)}_0$ ist. Im folgenden können also das $U(1)$ Hintergrundfeld und die Fluktuationen getrennt voneinander betrachtet werden. Die Fluktuationen werden dabei zu einer Integration über die nichttrivialen Monodromien der Felder entlang der Homologiezykel der Weltfläche führen, während das Ausintegrieren des Hintergrundes zur Einsetzung eines Spektralflußoperators in das Pfadintegral führt.

DIE FLUKTUATIONEN DER $U(1)$ MODULI

Die $U(1)$ Konnektion $A^{(1)}_0$ mit verschwindender Chern-Zahl beschreibt ein sogenanntes triviales Bündel, das durch eine global definierte 1-Form beschrieben werden kann. Eine global definierte 1-Form kann nach dem Hodge-Theorem [110, Abschnitt 7.9] zerlegt werden in einen exakten, einen koexakten und einen harmonischen Anteil,

$$A^{(1)}_0 = d\lambda + i \, * d\lambda' + h^{(1)}\,. \tag{III.32}$$

Mit den beiden Eichtransformationen $U(1)_V$ aus (II.19e) und $U(1)_A$ aus (II.20e) können der exakte und der koexakte Anteil eliminiert werden

$$A^{(1)^\lambda} \;=\; e^{-i\lambda}\big(A^{(1)} + i\,d\big)\,e^{i\lambda} = A^{(1)} - d\lambda \tag{III.33a}$$

$$A^{(1)^{\lambda'}} \;=\; e^{-i\lambda'}\big(A^{(1)} - *d\big)\,e^{i\lambda'} = A^{(1)} - i * d\lambda'\,. \tag{III.33b}$$

Durch eine entsprechende Wahl der Eichparameter λ und λ' kann man also im trivialen Bündel stets erreichen, daß gilt $A_0^{(1)} = h^{(1)}$. Die harmonische 1-Form erfüllt dann die Gleichungen $F_0^{(2)} = dA_0^{(1)} = 0$ und $d * A_0^{(1)} = 0$, man erhält also eine flache Konnektion in der Lorentz-Eichung.

Eine allgemeine harmonische 1-Form auf einer Riemann-Fläche mit g Henkeln, b Rändern und n Punktierungen hat die Form

$$h = 2\pi i \left(A^i \alpha_i + B^i \beta_i + G^j \gamma_j + D^j \delta_j + E^k \varepsilon_k \right). \tag{III.34}$$

Dabei sind α_i und β_i mit $i = 1, \dots, g$ die zu den kanonischen Homologiezykeln dualen reellen harmonischen 1-Formen aus Gleichung (B.2). γ_j und δ_j mit $j = 1, \dots, n-1$ sind die zu den Zykeln zwischen den Punktierungen und um die Punktierungen dualen harmonischen 1-Formen, die man mittels (B.4) aus den in Anhang B.2 definierten meromorphen 1-Formen konstruieren kann. Die ε_k mit $k = 1, \dots, b$ sind die zu den Zykeln um die Löcher dualen 1-Formen, die man mit der Involution (B.10) aus der Basis der harmonischen 1-Formen der doppelten Überlagerung erhält.

Die Koeffizienten der Entwicklung (III.34) können beliebige reelle Werte annehmen, $A^i, B^i, G^j, C^j, E^k \in \mathbb{R}$. Wenn jedoch alle Koeffizienten ganzzahlig sind, ist $g(z) = e^{\int_p^z h}$ einwertig auf der Weltfläche des Strings[60]. Dann erzeugt $g(z)$ "große" Eichtransformationen, die nicht in der Zusammenhangskomponente der Identität liegen, und die eine ähnliche Rolle spielen, wie die Dehn-Twists im Fall der metrischen Moduli. Durch das Ausdividieren der großen Eichtransformationen mit ganzzahligen Parametern kompaktifiziert man den $U(1)$ Moduliraum auf $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2(g+n-1)+b} = [0,1]^{2(g+n-1)+b}$. Wie in den Gleichungen (II.33a) und (II.33b) gezeigt wurde, kann eine Transformation des Eichfeldes in die kontinuierlichen Randbedingungen der unter der $U(1)$ geladenen Fermionen absorbiert werden. Die Integration über die Fluktuationen des $U(1)$ Moduliraumes führt also zu einer Integration über die Monodromien der fermionischen Felder entlang der Homologiezykel der Weltfläche.

Die Monodromien der Felder an den Punktierungen der Weltfläche können in Spektralflußoperatoren SFO(Θ) absorbiert werden, so daß die entsprechenden Vertexoperatoren in den Neveu-Schwarz-Sektor transformiert werden [38]. Da die Ableitung des Spektralflußoperators ∂_zSFO(Θ) BRST-trivial ist[61], können diese Operatoren frei auf der Weltfläche des Strings verschoben werden. Insbesondere können die von den Monodromien der Punktierungen erzeugten SFO(Θ_i) an einem Punkt der Weltfläche zusammengeführt werden, so daß dort gilt $\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{SFO}(\Theta_i) = \mathrm{SFO}(\sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i)$. Die durch diesen so zusammengefassten Spektralfluß bedingten nichttrivialen Periodizitätsbedingungen wirken auf die unter der $U(1)$ geladenen Felder bei Transport entlang eines Weges, der aus allen zu den Punktierungen gehörenden Wegen c_j, d_j mit $j = 1, \dots, n-1$, zusammengesetzt ist. Dieser Weg ist aber stets homotop zu einem aus den Zykeln um die Henkel a_i, b_i mit $i = 1, \dots, g$ und um die Löcher e_k mit $k = 1, \dots, b$ zusammengesetzten Weg. Damit führt die Integration über die zu den Punktierungen gehörenden $U(1)$ Moduli lediglich zu einer Verschiebung der Monodromien um die a_i, b_i und e_k Zykel der Weltfläche. Da diese jedoch zyklisch auf dem Intervall $[0,1]$ sind, fällt die Integration über die $U(1)$ Moduli

[60] p ist dabei ein beliebiger Referenzpunkt auf der Riemann-Fläche, der aus allen physikalischen Ergebnissen herausfällt.

[61] Es ist $\partial_z \mathrm{SFO}(\Theta) = -\Theta\, J\, \mathrm{SFO}(\Theta) = -\Theta\, \{Q, b'\}\, \mathrm{SFO}(\Theta) = -\Theta\, \{Q, b'\, \mathrm{SFO}(\Theta)\}$.

der Punktierungen einfach heraus, und liefert nur des Volumen des Moduliraumes, das gleich eins ist, als Faktor im Integranden. Übrig bleibt eine Integration über die Rand- oder Periodizitätsbedingungen entlang der Basiselemente der Homologiegruppe der nicht punktierten Riemann-Fläche, die sich in einer Integration über die Spinstrukturen der fermionischen Propagatoren widerspiegelt.

DAS $U(1)$ HINTERGRUNDFELD

Ein $U(1)$ Bündel mit nicht verschwindender Chern-Zahl ist nichttrivial, d.h. auf der Riemann-Fläche muß mehr als nur eine einzige globale Koordinatenumgebung gewählt werden, um die 1-Form $A^{(1)}_{c_1}$ definieren zu können. Die Übergangsfunktionen des $U(1)_V$ Bündels in den Überlappungen der Koordinatenumgebungen sollen dabei nichttrivial sein. Prinzipiell wären auch nichttriviale Übergangsfunktionen für das $U(1)_A$ Bündel möglich, was zu zwei unterschiedlichen Chern-Zahlen für Linksläufer und Rechtsläufer führen würde [19, 39, 116]. Um eine global wohldefinierte Chern-Zahl zu erhalten, muß der $U(1)_A$ Eichparameter λ' global definiert sein. Nur dann ist sein Beitrag zur Chern-Zahl eine totale Ableitung

$$c = \tfrac{1}{2\pi}\int {F^{(2)}}^{\lambda'} = \tfrac{1}{2\pi}\int \left(F^{(2)} - *\Delta\lambda'\right). \tag{III.35}$$

Eine sinnvolle Wahl des festen Hintergrundfeldes zur Chern-Zahl c_1 besteht in der Konstruktion einer δ-verteilten Feldstärke 2-Form[62] [38]. Damit die Feldstärke die Form einer δ-Funktion annimmt, muß die Konnektion einen einfachen Pol haben, für den gilt

$$\partial_{\bar z}\frac{1}{z} = \partial_z\frac{1}{\bar z} = 2\pi\,\delta^{(2)}(z)\,. \tag{III.36}$$

Es sind also meromorphe Differentialformen zur Konstruktion der Konnektion zu verwenden. Die Summe der Residuen einer global definierten meromorphen 1-Form verschwindet, daher sind zur Definition einer Konnektion die zu einer δ-verteilten Feldstärke führt mindestens zwei verschiedene Differentialformen auf verschiedenen sich überlappenden Koordinatenumgebungen zu verwenden. Sei etwa ω_{PQ} eine wie in Gleichung (B.6) definierte meromorphe 1-Form mit $P \in \mathcal{U}$ und $Q \in \Sigma\setminus\mathcal{U}$, wobei $\mathcal{U}$ eine Umgebung auf der Riemann-Fläche Σ ist. Nun definiert man die $U(1)$ Konnektion

$$\begin{aligned} A^{(1)}_{c_1} &= \tfrac{c_1}{2i}\left(\omega_{PQ} - \bar\omega_{PQ}\right) && \text{auf}\quad \mathcal{U} \\ {A^{(1)}_{c_1}}' &= \left(\omega + \bar\omega\right) && \text{auf}\quad \Sigma\setminus\mathcal{U}\ . \end{aligned} \tag{III.37}$$

Die Transitionsfunktion, die diese beiden Definitionen verbindet, ist eine $U(1)$ Transformation $d\Lambda = i\,g^{-1}dg$, welche die Kozykelbedingung

$$\tfrac{1}{2\pi}\oint_P d\Lambda = \tfrac{1}{2\pi}\oint \left(A^{(1)}_{c_1} - {A^{(1)}_{c_1}}'\right) = c_1 \tag{III.38}$$

[62] Es ist genau so möglich, die Chern-Zahl c_1 gleichmäßig über die Weltfläche zu verteilen und eine Konnektion zu konstruieren, die zu einer konstanten Feldstärke führt. Hier soll jedoch nur die Möglichkeit vorgestellt werden, die Konnektion so zu konstruieren, daß die gesamte Feldstärke in einem Punkt auf der Weltfläche konzentriert wird. Da sich Konnektionen, die zur selben Chern-Zahl führen, nur um Fluktuationen im $U(1)$ Moduliraum unterscheiden, sind beide Varianten äquivalent.

erfüllt. Die entsprechende Feldstärke 2-Form hat dann die Form

$$F^{(2)}_{c_1} = 2\pi i \, c_1 \, \delta^{(2)}(z - z_P) \, dz \wedge d\bar{z} \, . \tag{III.39}$$

Nach der Konstruktion der Konnektion, die zur Feldstärke $F^{(2)}_{c_1}$ aus (III.39) führt, hängt die eichfixierte Wirkung des $N{=}2$ Strings noch von der Chern-Zahl c_1 des $U(1)$ Bündels ab. Diese Abhängigkeit kann jedoch abgespaltet und durch die Einsetzung eines Spektralflußoperators in das Pfadintegral ausgedrückt werden [36],

$$e^{-S[\tau,C,c_1;Z,\Psi;b,c,\beta,\gamma,b',c']} = e^{-S[\tau,C,0;Z,\Psi;b,c,\beta,\gamma,b',c']} \, \mathrm{SFO}(-c_1) \, .$$

Der Operator $\mathrm{SFO}(-c_1)$ wird zunächst an der Stelle, an der die Feldstärke ihren Träger hat, in den Integranden eingesetzt. Entsprechend der obigen Diskussion kann der Operator aber beliebig auf der Weltfläche verschoben und sogar in ein Produkt von Operatoren $\mathrm{SFO}(\Theta_i)$ zerlegt werden[63], die dann auf verschiedene Vertexoperatoren im Pfadintegral wirken. Insgesamt enthält der Integrand nach der Eichfixierung dann die Operatoren

$$\big(\mathrm{PCO}^-\big)^{2g-2+c_1+n} \, \big(\mathrm{PCO}^+\big)^{2g-2-c_1+n} \, \mathrm{SFO}(-c_1) \, .$$

Dabei stellt man fest, daß der Spektralflußoperator, der die Form $\mathrm{SFO}(c_1) \sim e^{c_1 (\varphi^+ - \varphi^-)}$ hat, gerade die Asymmetrie aufhebt, die dadurch entsteht, daß unterschiedliche Anzahlen der beiden Bildwechseloperatoren $\mathrm{PCO}^\pm \sim e^{\varphi^\mp}$ im Integranden auftauchen. Allerdings ist zu beachten, daß der Spektralfluß die unterschiedliche Wirkung der Bildwechseloperatoren nicht aufhebt. Die Wirkung von $\mathrm{SFO}(-c_1)$ ist nicht äquivalent zur Wirkung von $(\mathrm{PCO}^+/\mathrm{PCO}^-)^{-c_1}$, da der Operator SFO nicht nur auf die Bildladung der Vertexoperatoren wirkt, sondern auch auf ihre Impulsstruktur.

[63] Dabei muß natürlich gelten $\sum_i \Theta_i = -c_1$.

IV. Tree-Level Amplituden und effektive Feldtheorie

Die Tree-Niveau-Amplituden des $N{=}2$ Strings sind weitgehend bekannt [102, 103, 114]. Sowohl durch explizite Rechnung [80, 143] als auch durch Ausnutzung der Symmetrien des $N{=}2$ Strings, etwa durch die Konstruktion von Ward-Identitäten [84] oder durch die Einbettung des $N{=}2$ Strings in eine $N{=}4$ Theorie [19, 20, 116], kann gezeigt werden, daß die meisten Amplituden auf der Topologie der Sphäre oder auf der Disk verschwinden. Die effektive Feldtheorie im $2+2$ dimensionalen Targetraum, die genau dieses Verhalten der Amplituden reproduziert, ist eine selbstduale Gravitationstheorie im Fall des geschlossenen $N{=}2$ Strings [114] und eine selbstduale Yang-Mills Theorie im Fall des offenen $N{=}2$ Strings [115]. Gemischte Amplituden aus offenen und geschlossenen Strings auf der Topologie der Disk liefern eine Kopplung zwischen selbstdualer Yang-Mills und Gravitation sowie Korrekturterme zur Gravitation [56, 57].

IV.1 Strings

Die Amplituden $\mathcal{A}^{J,M}_{n_c,n_o}$ des $N{=}2$ Strings auf der Sphäre bzw. auf der Disk können mit dem in Kapitel III vorgestellten Pfadintegralformalismus berechnet werden. In beiden Fällen gibt es außer den Positionen der Punktierungen bzw. der Vertexoperatoreinsetzungen keine Moduli, das bedeutet insbesondere, daß keine Antigeistfelder zur Absorption der Nullmoden in das Pfadintegral eingesetzt werden müssen. Jedoch gibt es auf der Shäre drei komplexe konforme Killing-Vektoren, mit denen die Positionen von drei Vertexoperatoren auf der Weltfläche und auf der Disk drei reelle konforme Killing-Vektoren, mit denen die Positionen von drei Vertexoperatoren von offenen Strings am Rand der Weltfläche fixiert werden können. Da das Spektrum des $N{=}2$ Strings sowohl im offenen als auch im geschlossenen Sektor jeweils nur einen masselosen skalaren Zustand enthält, ist die Anzahl der möglichen zu berechnenden Amplituden relativ gering. Es gibt jeweils nur eine n-Punkt-Amplitude, bei der n Strings, die diesen einen Zustand repräsentieren, gestreut werden.

IV.1.1 Geschlossene Strings

Die Auswahlregel (III.30) besagt im Fall der Amplituden von geschlossenen Strings auf der Sphäre, daß für die Summe der Bildladungen der in das Pfadintegral (III.19) eingesetzten Vertexoperatoren in der holomorphen und in der antiholomorphen Hälfte jeweils gelten muß, $\pi^+ = \pi^- = -2$. Die möglichen Chern-Zahlen M des $U(1)$ Bündels auf der Weltfläche liegen für die n-Punkt-Amplitude auf der Sphäre zwischen $-n$ und n. Dabei soll im folgenden zunächst die einfachste Amplitude mit trivialem $U(1)$

Bündel, d.h. mit $M=0$, berechnet werden. Die Amplituden in allen anderen Chern-Zahl Sektoren können dann wie in Abschnitt III.3.4 beschrieben durch Anwendung des Spektralflußoperators aus dieser gewonnen werden.

Die Drei-Punkt-Amplitude

Die Drei-Punkt-Amplitude des geschlossenen $N{=}2$ Strings kann als Korrelationsfunktion der Vertexoperatoren $V_{(-1,0)}$, $V_{(0,-1)}$ und $V_{(-1,-1)}$ aus Gleichungen (II.106), (II.105) und (II.103) konstruiert werden. Die drei Positionen z_i, an denen sich die Vertexoperatoren auf der Weltfläche befinden, können aufgrund der drei konformen Killing-Vektoren auf beliebige Werte gesetzt werden. Zur Vereinfachung der Rechnung wählt man üblicherweise $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ und $z_3 = \infty$. Die konforme Killing-Gruppe besteht aus den Nullmoden der Geistfelder. Da unkompensierte Nullmoden das Pfadintegral verschwinden lassen, müssen insgesamt drei Reparametrisierungsgeister c und ein $U(1)$ Geist c' in die Korrelationsfunktion eingefügt werden. Diese Geister können zum Beispiel in die Vertexoperatoren integriert werden, so daß die holomorphe Hälfte der Drei-Punkt-Amplitude die Form annimmt

$$\mathcal{A}^{2,0}_{3,0}(k_1,k_2,k_3) = \langle \tilde{V}^c_{(-1,0)}(k_1,z_1)\, \tilde{V}^c_{(0,-1)}(k_2,z_2)\, \tilde{V}^{cc'}_{(-1,-1)}(k_3,z_3)\rangle\,, \tag{IV.1}$$

mit[64]

$$\begin{aligned} \tilde{V}^c_{(-1,0)}(k,z) &= c\bar{c}\,k\cdot\psi^-\,\bar{k}\cdot\bar{\psi}^+\,e^{-\varphi^- - \bar{\varphi}^-}\,e^{i\,k\cdot Z}(z) && \text{(IV.2a)}\\ \tilde{V}^c_{(0,-1)}(k,z) &= c\bar{c}\,\bar{k}\cdot\psi^+\,k\cdot\bar{\psi}^-\,e^{-\varphi^+ - \bar{\varphi}^+}\,e^{i\,k\cdot Z}(z) && \text{(IV.2b)}\\ \tilde{V}^{cc'}_{(-1,-1)}(k,z) &= c\bar{c}c'\bar{c}'\,e^{-\varphi^- - \varphi^+ - \bar{\varphi}^- - \bar{\varphi}^+}\,e^{i\,k\cdot Z}(z)\,. && \text{(IV.2c)} \end{aligned}$$

Die Vertexoperatoren sind hier so gewählt, daß keine Kontaktterme, d.h. keine Kontraktionen der Form $\langle \partial_z Z \partial_{\bar{z}} Z\rangle \sim \delta^{(2)}(z-\bar{z})$, auftauchen. Diese Terme sind die einzige mögliche Verbindung zwischen der holomorphen und der antiholomorphen Hälfte der Theorie und verhindern insbesondere bei Loop-Rechnungen eine einfache holomorphe Faktorisierung der Amplituden. Ohne Kontaktterme läßt sich eine Amplitude wie (IV.1) jedoch als Produkt der Korrelationsfunktion der holomorphen Hälften der Vertexoperatoren mit deren komplex Konjugiertem darstellen,

$$\mathcal{A}^{2,0}_{3,0}(k_1,k_2,k_3) = \langle V^c_{(-1,0)}(k_1,z_1)\, V^c_{(0,-1)}(k_2,z_2)\, V^{cc'}_{(-1,-1)}(k_3,z_3)\rangle \times \text{c.c.}\,, \tag{IV.3}$$

mit den holomorphen Hälften der Vertexoperatoren,

$$\begin{aligned} V^c_{(-1,0)}(k,z) &= c\,k\cdot\psi^-\,e^{-\varphi^-}\,e^{i\,k\cdot Z}(z) && \text{(IV.4a)}\\ V^c_{(0,-1)}(k,z) &= c\,\bar{k}\cdot\psi^+\,e^{-\varphi^+}\,e^{i\,k\cdot Z}(z) && \text{(IV.4b)}\\ V^{cc'}_{(-1,-1)}(k,z) &= cc'\,e^{-\varphi^- - \varphi^+}\,e^{i\,k\cdot Z}(z)\,. && \text{(IV.4c)} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Amplitude (IV.3) kann das Wick-Theorem angewendet werden. Dazu werden sämtliche Kontraktionen zwischen den Feldern in der Korrelationsfunktion gebildet und durch die entsprechenden Propagatoren ersetzt. Auf der Sphäre

[64] Produkte von Feldern am gleichen Ort sind stets als normalgeordnet zu verstehen, auch wenn die Normalordnung $:\ldots:$ hier nicht mitgeschrieben wird.

sind diese Propagatoren durch die fundamentalen Operatorproduktentwicklungen gegeben. Man erhält die Beiträge

$$\begin{aligned} \langle c(z_1)c(z_2)c(z_3)\rangle &= (z_1-z_2)\,(z_1-z_3)\,(z_2-z_3) \\ \langle c'(z_3)\rangle &= 1 \\ \langle e^{-\varphi^\pm(z_1)}\,e^{-\varphi^\pm(z_2)}\rangle &= (z_1-z_2)^{-1} \\ \langle e^{i\,k\cdot Z(z_1)}\,e^{i\,k\cdot Z(z_2)}\,e^{i\,k\cdot Z(z_3)}\rangle &= \prod_{i<j}(z_i-z_j)^{-2\,k_i\cdot k_j} \\ \langle \bar{k}_1\cdot\psi^+(z_1)\,k_2\cdot\psi^-(z_2)\rangle &= \bar{k}_1\cdot k_2\,(z_1-z_2)^{-1} \end{aligned} \tag{IV.5}$$

Aufgrund der Impulserhaltung und der Massenschalen-Bedingung erfüllen die Impulse k_i die Bedingungen

$$k_1+k_2+k_3=0 \qquad \text{und} \quad k_1^2=k_2^2=k_3^2=0\,. \tag{IV.6}$$

Daraus folgt für die Drei-Punkt-Amplitude, daß nicht nur sämtliche Impulsquadrate, sondern auch sämtliche Skalarprodukte von Impulsen verschwinden, $k_i\cdot k_j=0$ mit $i,j\in\{1,2,3\}$. Dies vereinfacht die Berechnung der Amplitude beträchtlich. Insbesondere stellt man fest, daß der Ausdruck (IV.3) unabhängig von den Positionen z_i der Vertexoperatoreinsetzungen ist[65]. Man erhält so das Ergebnis

$$\mathcal{A}_{3,0}^{2,0}(k_1,k_2,k_3)=\left(\bar{k}_1\cdot k_2-\bar{k}_2\cdot k_1\right)^2 \tag{IV.7}$$

DIE DREI-PUNKT-AMPLITUDE MIT CHERN-ZAHL $M\neq 0$

Im Fall der 3-Punkt-Amplitude auf der Sphäre muß die Chern-Zahl des $U(1)$ Bündels auf der Weltfläche in dem Bereich $M=-2,\ldots,2$ liegen. Wie am Ende von Abschnitt III.3.4 dargestellt, führt ein nichttrivialer $U(1)$ Hintergrund zu Einsetzungen von Spektralflußoperatoren in das Pfadintegral, welche die Asymmetrie der Bildladungen $\pi^\pm$, die im Fall $M\neq 0$ auftritt, gerade kompensieren. Im Fall der faktorisierbaren Amplitude (IV.1) bedeutet das, daß man in der holomorphen und in der antiholomorphen Hälfte jeweils die Operatoren SFO$(+1)$ oder SFO(-1) bzw. $\overline{\text{SFO}}(+1)$ oder $\overline{\text{SFO}}(-1)$ einsetzen kann[66]. Die Asymmetrie in den Bildwechseloperatoren führt in jeder holomorphen Hälfte zu den Modifikationen der Vertexoperatoren

$$V_{(-1,0)}(k)\to V_{(0,-1)}(k) \qquad \text{bzw.} \quad V_{(0,-1)}(k)\to V_{(-1,0)}(k)\,. \tag{IV.8}$$

Die Wirkung des entsprechenden Spektralflusses liefert dann

$$\begin{aligned} V_{(0,-1)}(k)\to \text{SFO}(+1)\,V_{(0,-1)}(k) &= h(k)\,V_{(-1,0)}(k) \\ &\text{bzw.} \\ V_{(-1,0)}(k)\to \text{SFO}(-1)\,V_{(-1,0)}(k) &= h(k)\,V_{(0,-1)}(k)\,. \end{aligned} \tag{IV.9}$$

[65] Diese Unabhängigkeit des Integranden von den metrischen Moduliparametern z_i ist nicht überraschend. Auf diese Weise manifestiert sich die residuelle Symmetrie, die aus der Existenz von drei komplexen konformen Killing-Vektoren auf der Sphäre folgt.

[66] Da hier die Konfiguration der Konnektion des Eichbündels so sein soll, daß nur eine Chern-Zahl auf der Weltfläche definiert wird, ist in beiden Hälften der selbe Spektralflußoperator einzusetzen, siehe dazu auch die Diskussion in Abschnitt III.3.4.

Man erhält also nach der Anwendung von Bildwechsel- und Spektralflußoperatoren wieder dieselben Vertexoperatoren, jedoch mit dem impulsabhängigen Vorfaktor

$$h(k) = \frac{\bar{k}^0}{k^1} = \frac{\bar{k}^1}{k^0}\,. \tag{IV.10}$$

Das bedeutet, daß die holomorphe Hälfte $\mathcal{A}^{2,M}_{3,0\,\mathrm{hol}}$ der Amplitude mit Chern-Zahl M aus der holomorphen Hälfte der Amplitude $\mathcal{A}^{2,0}_{3,0\,\mathrm{hol}} = \bar{k}_1 \cdot k_2 - \bar{k}_2 \cdot k_1$ mit Chern-Zahl $M = 0$ durch die Beziehung

$$\mathcal{A}^{2,M}_{3,0\,\mathrm{hol}} = h(k_1)^M\, \mathcal{A}^{2,0}_{3,0\,\mathrm{hol}} \tag{IV.11}$$

folgt. Die Auswirkung eines Wechsels des Chern-Zahl Sektors wird besonders deutlich, wenn man die Amplitude in der Bispinor-Notation darstellt. Dann gilt mit $k_i^+ \wedge k_j^- = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} k_i^{+\dot\alpha} k_j^{-\dot\beta}$

$$\mathcal{A}^{2,0}_{3,0\,\mathrm{hol}} = k_1^+ \wedge k_2^-\,. \tag{IV.12}$$

Für die anderen Chern-Zahlen $M = \pm 1$ erhält man dann

$$\mathcal{A}^{2,+1}_{3,0\,\mathrm{hol}} = k_1^+ \wedge k_2^+ \qquad \text{und} \quad \mathcal{A}^{2,-1}_{3,0\,\mathrm{hol}} = k_1^- \wedge k_2^-\,. \tag{IV.13}$$

Entsprechend erhält man auch aus allen anderen Amplituden im Chern-Zahl Null Sektor die Amplituden für höhere bzw. niedrigere Chern-Zahlen, indem man antisymmetrischen Impulsprodukte $k_i^+ \wedge k_j^-$ durch $k_i^+ \wedge k_j^+$ bzw. $k_i^- \wedge k_j^-$ ersetzt.

Die Vier-Punkt-Amplitude

Für die Vier-Punkt-Amplitude auf der Sphäre gelten die selben Auswahlregeln, wie für die Drei-Punkt-Amplitude. Um sie zu berechnen, muß noch ein zusätzlicher Vertexoperator so in das Pfadintegral eingesetzt werden, daß sich die gesamte Bildladung nicht erhöht. Das Ergebnis hängt nicht von der Wahl des Vertexoperators ab, jedoch vereinfacht sich die Rechnung, wenn man die Korrelationsfunktion aus zwei Vertexoperatoren im $(-1,0)$ Bild und zwei Vertexoperatoren im $(0,-1)$ Bild konstruiert. Weitere Geistfelder werden nicht benötigt, da alle auftretenden Nullmoden bereits durch die in der Drei-Punkt-Amplitude eingeführten Geisteinsetzungen absorbiert werden. Da aufgrund der konformen Killing-Vektoren lediglich die Positionen von drei Vertexoperatoreinsetzungen auf beliebige Werte fixiert werden können, ist nun die Integration über den metrischen Moduliraum durchzuführen. Die Position eines der Vertexoperatoren muß über die Weltfläche des Strings, d.h. hier über die gesamte komplexe Ebene, integriert werden. Der zu bestimmende Ausdruck ist damit für verschwindende Chern-Zahl $M = 0$ von der Form

$$\mathcal{A}^{4,0}_{4,0}(k_i) = \int d^2 z_2\, \langle \tilde{V}^{cc'}_{(-1,0)}(k_1, z_1)\, \tilde{V}_{(-1,0)}(k_2, z_2)\, \tilde{V}^{c}_{(0,-1)}(k_3, z_3)\, \tilde{V}^{c}_{(0,-1)}(k_4, z_4) \rangle\,. \tag{IV.14}$$

Da keine Kontaktterme auftreten, können die Korrelatoren der holomorphen und der antiholomorphen Hälft wieder getrennt berechnet werden. Es treten neben den in (IV.5) angegebenen keine neuen Arten von Korrelatoren auf, so daß man die Amplitude (IV.14) mit Hilfe des Wick-Theorems bis auf die $\int d^2 z_2$ Integration berechnen kann. Nach der Ausnutzung der Symmetrien der konformen Killing-Gruppe, um die Koordinaten der nicht integrierten Vertexoperatoren auf $z_1 = 0$, $z_3 = 1$ und $z_4 = \infty$ zu setzen[67], ergibt sich der Ausdruck [114]

$$\mathcal{A}_{4,0}^{4,0}(k_i) = \frac{1}{16} \int d^2 z_2 \left| \frac{1}{(1-z_2)^2} s_{14}(s_{14}+2) + \frac{c_{12}\, c_{34}}{z_2} + \frac{c_{23}\, c_{41}}{1-z} \right|^2 |z|^{-s_{12}} |1-z|^{-s_{14}} . \tag{IV.15}$$

Dabei wurden die Abkürzungen verwendet, $s_{ij} = 2\, k_i \cdot k_j = \bar{k}_i \cdot k_j + k_i \cdot \bar{k}_j$ und $c_{ij} = k_i^+ \wedge k_j^- = \bar{k}_i \cdot k_j - k_i \cdot \bar{k}_j$. Das Integral läßt sich lösen, es ist die Integraldarstellung einer hypergeometrischen Funktion ${}_pF_q(a_i, b_i; c_i; z_2)$ [1]. Damit erhält man

$$\mathcal{A}_{4,0}^{4,0}(k_i) = \pi\, F^2\, \frac{\Gamma(1-s_{12}/2)\, \Gamma(1-s_{13}/2)\, \Gamma(1-s_{14}/2)}{\Gamma(s_{12}/2)\, \Gamma(s_{13}/2)\, \Gamma(s_{14}/2)} , \tag{IV.16}$$

mit dem impulsabhängigen Vorfaktor

$$F = 1 - \frac{c_{12}\, c_{34}}{s_{12}\, s_{13}} - \frac{c_{23}\, c_{41}}{s_{14}\, s_{13}} . \tag{IV.17}$$

Die Impulse k_i mit $i = 1, \dots, 4$ müssen die Impulserhaltung $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ und die Massenschalenbedingung $k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = k_4^2 = 0$ erfüllen. Damit läßt sich zeigen, daß der Vorfaktor verschwindet, $F = 0$. Also ist auch die Vier-Punkt-Amplitude auf der Sphäre gleich Null,

$$\mathcal{A}_{4,0}^{4,0}(k_i) = 0 . \tag{IV.18}$$

Ebenso sind auch alle höheren n-Punkt-Amplituden auf der Sphäre aufgrund eines aus kinetischen Gründen verschwindenden Vorfaktors Null.

Das Verschwinden aller höheren Amplituden auf Tree-Niveau "rettet" die $N{=}2$ Stringtheorie und ist anschaulich leicht zu verstehen. Stringtheorien sind dual [75, Kapitel 1], d.h. die Entwicklung einer Amplitude nach Polen im s-Kanal liefert dasselbe Ergebnis, wie die entsprechende Entwicklung im t-Kanal. Um diese Identität zu verwirklichen, werden in den Entwicklungen jedoch unendlich viele Pole, also unendlich viele massive Anregungen im Targetraum-Spektrum des Strings, benötigt. Da der $N{=}2$ String keine massiven Anregungen besitzt, ist eine solche Reihenentwicklung im s- und im t-Kanal nicht möglich, eine nicht verschwindende 4-Punkt-Amplitude könnte auf Tree-Niveau also nicht dual sein. Erst dadurch, daß diese und alle höheren Amplituden verschwinden, besitzt der $N{=}2$ String die Dualität, die man von Stringtheorien üblicherweise erwartet.

IV.1.2 OFFENE STRINGS

Die Berechnung der Amplituden von offenen Strings unterscheidet sich auf Tree-Niveau nicht wesentlich von der Berechnung der holomorphen Hälften der Amplituden des geschlossenen Strings. Die zu betrachtende Weltfläche ist eine Disk, auf dessen Rand sich die Vertexoperatoren befinden und die auf die obere komplexe

[67] Der dabei erhaltene Ausdruck scheint wegen der Wahl $z_4 = \infty$ unendlich zu sein, unter Ausnutzung von Impulserhaltung und Massenschalenbedingung verschwinden aber Terme der Form $k_1 \cdot \bar{k}_4 + k_2 \cdot \bar{k}_4 + k_3 \cdot \bar{k}_4 = -k_4 \cdot \bar{k}_4 = 0$, und damit auch die z_4-Abhngigkeit.

Halbebene abgebildet werden kann, mit den Vertexoperatoren auf der reellen Achse. Die Dimensionen von Moduliräumen und konformen Killing-Gruppen sind für offene Strings halb so groß wie für die entsprechende geschlossene doppelte Überdeckung. Das bedeutet im wesentlichen, daß aus einem komplexen Parameter im Fall des geschlossenen Strings ein reeller Parameter im Fall des offenen Strings wird. Die Auswahlregel (III.30) verlangt, daß für die Summe der Bildladungen der Vertexoperatoren gilt $\pi^+ = \pi^- = -2$, allerdings wird jetzt nicht mehr zwischen den Bildladungen der holomorphen und der antiholomorphen Hälfte unterschieden.

Wie auch bei der oben berechneten Drei-Punkt-Amplitude auf der Sphäre, sind bei der Drei-Punkt-Amplitude auf der Disk die Positionen der Vertexoperatoren die einzigen Moduliparameter. Da offene Strings nur an den Rand der Weltfläche koppeln, sind diese Moduliparameter reell, ebenso wie die drei reellen konformen Killing-Vektoren, mit denen sie auf beliebige reelle Werte fixiert werden können. Mit den Vertexoperatoren aus (IV.4a) bis (IV.4c) nimmt die Streuamplitude von drei offenen Strings für die Chern-Zahl $M = 0$ die Form an

$$\mathcal{A}^{1,0}_{0,3}(k_1, k_2, k_3) = \langle V^c_{(-1,0)}(k_1, z_1)\, V^c_{(0,-1)}(k_2, z_2)\, V^{cc'}_{(-1,-1)}(k_3, z_3)\rangle\,. \tag{IV.19}$$

Da die Korrelatoren der Felder auf der Disk dieselbe Form haben wie die entsprechenden Korrelatoren auf der Sphäre (IV.5), mit dem einzigen Unterschied, daß die Argumente der Funktionen nun reell sind, kann man das Ergebnis der Amplitude (IV.19) aus Gleichung (IV.7) ablesen. Man erhält

$$\mathcal{A}^{1,0}_{0,3}(k_1, k_2, k_3) = \bar{k}_1 \cdot k_2 - k_1 \cdot \bar{k}_2\,. \tag{IV.20}$$

Dieses Ergebnis nimmt in der Bispinor-Notation die Form an $\mathcal{A}^{1,0}_{0,3} = k_1^+ \wedge k_2^-$. Daraus folgen die Drei-Punkt-Amplituden auf der Disk mit Chern-Zahl $M = -1$, $k_1^- \wedge k_2^-$ und $M = +1$, $k_1^+ \wedge k_2^+$.

Ebenso wie im Fall der geschlossenen $N{=}2$ Strings ist auch für offene Strings die Drei-Punkt-Amplitude auf der Disk die einzige nicht verschwindende Tree-Niveau Amplitude.

Chan-Paton-Faktoren

Im Gegensatz zu geschlossenen Strings besitzen offene Strings zwei ausgezeichnete Punkte, die beiden Enden des Strings. An diese können zusätzliche Quantenzahlen gekoppelt werden, etwa indem man Lie-Algebra-wertige Faktoren, die sogenannten Chan-Paton-Faktoren [118], an die Enden des offenen Strings hängt. Diese Quantenzahlen an den Enden von offenen Strings haben zwar keine Dynamik auf der Weltfläche, spielen aber in der Targetraumtheorie eine wichtige Rolle. Da beim Verschmelzen von zwei offenen Strings zu einem offenen String die zusammentreffenden Chan-Paton-Faktoren im Inneren des Strings zu liegen kommen, müssen sie sich wegheben. Das heißt an einem Rand der Weltfläche benachbarte Chan-Paton-Faktoren müssen in zueinander konjugierten Darstellungen der Lie-Gruppe liegen. Dies führt bei Amplituden offener Strings dazu, daß der Wert der Amplitude mit der Spur über die den äußeren Stringzuständen zugeordneten Chan-Paton-Faktoren multipliziert wird. Auf diese Weise beschreiben offene Strings dann die Wechselwirkung eine Eichtheorie im Targetraum.

In den Superstringtheorien liefern Unitaritätsbedingungen an die Amplituden Einschränkungen für die möglichen Chan-Paton-Gruppen [104]. Insbesondere liefert die Forderung der Anomaliefreiheit des Typ I Superstrings die Gruppe $SO(32)$ als Eichgruppe der Ladungen an den Stringenden [74]. Aufgrund der verschwindenden Vier-Punkt-Amplitude auf Tree-Niveau findet man im Fall des $N{=}2$ Strings keine derartigen Einschränkungen an die Chan-Paton Faktoren [102]. Hier erhält man lediglich zu den Amplituden mit zwei (IV.21) bzw. drei (IV.20) offenen Strings einen Vorfaktor der Form $\mathrm{tr}\ \lambda^A\lambda^B = k^{AB}$ bzw. $\mathrm{tr}\ \lambda^A\lambda^B\lambda^C = f^{ABC}$. Dabei sind die λ^A die Ladungen der Enden der offenen Strings. k^{AB} ist die Killing-Form der Chan-Paton-Gruppe und f^{ABC} sind deren Strukturkonstanten.

IV.1.3 Gemischte Amplituden

Da bei einer lokalen Betrachtung der Weltflächen das Verschmelzen von zwei offenen Strings zu einem offenen String (siehe Abbildung IV.1 (a)) nicht vom Verschmelzen der beiden Enden eines offenen Strings zu einem geschlossenen Strings (siehe Abbildung IV.1 (b)) zu unterscheiden ist, sind bei der Untersuchung von Theorien mit offenen Strings neben den Amplituden von nur offenen Strings aus Abschnitt IV.1.2 auch gemischte Streuamplituden von offenen und geschlossenen Strings und die Streuung von geschlossenen Strings in offenen Topologien, d.h. auf der Disk oder auf dem Zylinder, zu betrachten.

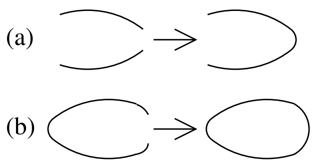

Abbildung IV.1 - *Bildung von (a) einem offenen String aus zwei offenen Strings und (b) einem geschlossenen String aus einem offenen String.*

Das führende Niveau der gemischten Amplituden in der Störungsentwicklung besteht aus Amplituden, welche die Streuung von einem oder mehreren geschlossenen Strings in der offenen Topologie einer Disk beschreiben. Diese Amplituden werden im Prinzip genau so berechnet wie die oben beschriebenen Amplituden rein offener oder rein geschlossener Strings. Auf der oberen Halbebene ist die Korrelationsfunktion von Vertexoperatoren offener und geschlossener Strings zu bestimmen.

Auch die durch die Vertexoperatoren geschlossener Strings auf der Weltfläche erzeugten Zustände müssen die Randbedingung (II.38a) des offenen Strings erfüllen, d.h. die bosonischen Felder sind nur auf der oberen Halbebene definiert, und ihre Normalenableitung muß am Rand der Weltfläche verschwinden. Diese Neumann-Randbedingung kann man am einfachsten durch die Anwendung des aus der Elektrodynamik bekannten Spiegelladungsprinzips erfüllen. Dazu wird das bosonische Feld $Z^\mu(z)$ um ein dazu spiegelbildlich zur Grenzfläche (der reellen Achse) angeordnetes Feld $Z^\mu(\bar{z})$ ergänzt. Die Summe dieser beiden Felder erfüllt dann offensichtlich die richtigen Randbedingungen, $\partial(Z^\mu(z) + Z^\mu(\bar{z}))/\partial \mathrm{Im}\ z = 0$. Der dieses zusammengesetzte Feld erzeugende Vertexoperator ist das Produkt aus der das Feld $Z^\mu(z)$ auf der Weltfläche erzeugenden holomorphen Hälfte des geschlossenen Vertexoperators $\tilde{V}(k,z)$ und der das Feld $Z^\mu(\bar{z})$ auf der unteren Halbebene erzeugenden antiholomorphen Hälfte dieses Vertexoperators. Dabei teilen sich diese Operatoren jedoch anders als im Fall der geschlossenen Strings auf der Sphäre nicht die gemeinsamen Nullmoden. Sie sind also nicht gemeinsam normalgeordnet, sondern lassen sich als Produkt der normalgeordneten holomorphen und antiholomorphen Hälften schreiben, $: V(k,z) :: V(k,\bar{z}) :$. Mit den so zerlegten Vertexoperatoren und den entsprechenden Propagatoren der Felder auf der Weltfläche kann man die gemischten Amplituden des $N{=}2$ Strings konstruieren.

GEMISCHTE DREI-PUNKT-AMPLITUDEN

Es gibt drei verschiedene gemischte Amplituden auf der Disk, mit einem (Abbildung IV.2 (a)), zwei oder drei (Abbildung IV.2 (b)) geschlossenen Strings in der oberen Halbebene. Die Summe der Bildladungen aller Vertexoperatoren muß wieder $\pi^+ = \pi^- = -2$ sein. Die konforme Killing-Gruppe erlaubt das Fixieren von drei Koordinaten. Allerdings existieren auf der Disk nur drei reelle konforme Killing-Vektoren, d.h. es können lediglich drei reelle Koordinaten fixiert werden, also die Positionen von offenen Vertexoperatoren am Rand, oder Real- oder Imaginärteil von geschlossenen Vertexoperatoren im Inneren der Weltfläche.

Die drei zu berechnenden gemischten Drei-Punkt-Amplituden sind im Chern-Zahl $M = 0$ Sektor $\mathcal{A}^{2,0}_{1,2}(k_i)$, $\mathcal{A}^{3,0}_{2,1}(k_i)$ und $\mathcal{A}^{4,0}_{3,0}(k_i)$. Die Amplitude mit nur einem offenen String verschwindet, $\mathcal{A}^{3,0}_{2,1}(k_i) = 0$. Für die anderen beiden Amplituden erhält man die Ergebnisse [102, 143],

$$\mathcal{A}^{2,0}_{1,2}(k_i) = \left(\bar{k}_1 \cdot k_2 - k_1 \cdot \bar{k}_2\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A}^{4,0}_{3,0}(k_i) = \left(\bar{k}_1 \cdot k_2 - k_1 \cdot \bar{k}_2\right)^4 . \tag{IV.21}$$

Wenn man die Potenzen der Kopplungskonstante der Drei-Punkt-Amplitude auf der Sphäre, $J = 2$, mit der der geschlossenen Drei-Punkt-Amplitude auf der Disk vergleicht, $J = 4$, erkennt man, daß die gemischte Amplitude $\mathcal{A}^{4,0}_{3,0}(k_i)$ einen Beitrag höherer Ordnung zur Störungsreihe liefert. Das Aufspalten der geschlossenen Strings zur Bildung eines Randes ist also eine Korrektur der Ordnung $\mathcal{O}(\kappa)$ zur entsprechenden Tree-Level Amplitude.

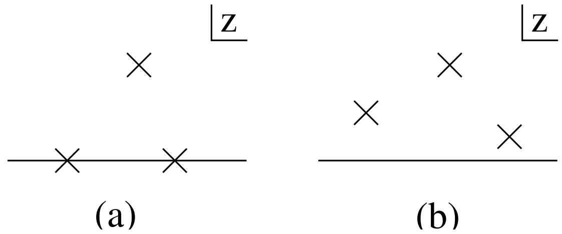

ABBILDUNG IV.2 - *Streuung von (a) geschlossenen und offenen Strings und von (b) geschlossenen Strings auf der Disk.*

HÖHERE AMPLITUDEN

Die höheren gemischten n-Punkt-Amplituden mit $n \geq 4$ können nach dem gleichen Schema wie die Drei-Punkt-Amplituden berechnet werden. Da die konforme Killing-Gruppe bei auf der oberen Halbebene berechneten Amplituden lediglich das Fixieren von drei reellen Koordinaten erlaubt, nimmt die Anzahl der zu integrierenden Moduliparameter und damit die Komplexität der Berechnung der Amplitude schnell zu. Von den gemischten Vier-Punkt-Amplituden konnte bislang lediglich explizit nachgerechnet werden, daß $\mathcal{A}^{3,M}_{1,3}(k_i)$ und $\mathcal{A}^{5,M}_{3,1}(k_i)$ verschwinden [102, 143]. Es wird jedoch angenommen, daß auch die gemischten n-Punkt-Amplituden ebenso wie die rein geschlossenen und die rein offenen Amplituden für $N \geq 4$ verschwinden.

IV.1.4 ZUSAMMENFASSUNG

Die Tree-Level Amplituden des $N{=}2$ Strings sind, wie in den obigen Abschnitten gezeigt wurde, sowohl im offenen als auch im geschlossenen Sektor des $N{=}2$ Strings praktisch vollständig bekannt. Die meisten Amplituden verschwinden, die nicht verschwindenden Amplituden auf der Disk, $\langle \ldots \rangle_D$, und auf der Sphäre, $\langle \ldots \rangle_S$ werden in Tabelle IV.1 noch einmal zusammengefaßt [90]. Dabei sind A, B, C die Indizes der Chan-Paton Faktoren, die die offenen Strings tragen. k^{AB} ist die Killing-Form der Chan-Paton Gruppe und f^{ABC} deren Strukturkonstanten.

$\langle ccc \rangle_S$	$\kappa\,(k_1^+ \wedge k_2^-)^2$
$\langle ccc \rangle_D$	$\kappa^2\,(k_1^+ \wedge k_2^-)^4$
$\langle coo \rangle_D$	$k^{AB}\,\kappa\,(k_1^+ \wedge k_2^-)^2$
$\langle ooo \rangle_D$	$f^{ABC}\,\sqrt{\kappa}\,(k_1^+ \wedge k_2^-)$

TABELLE IV.1 - *Die nicht verschwindenden Tree-Level Amplituden geschlossener c und offener o $N{=}2$ Strings.*

IV.2 EFFEKTIVE FELDTHEORIE

Nachdem in Tabelle IV.1 sämtliche nicht verschwindenden Tree-Level Amplituden des $N{=}2$ Strings dargestellt wurden, kann nun die zugehörige effektive Feldtheorie im Targetraum konstruiert werden. Die Feldinhalt der effektiven Feldtheorie besteht aus sämtlichen durch den String im Targetraum beschriebenen Zuständen[68]. Im Fall des $N{=}2$ Strings ist dies lediglich ein masseloses Skalarfeld, das im Sektor des offenen Strings noch einen Chan-Paton Index tragen kann. Aus diesen Feldern ist eine Wirkung im Targetraum zu konstruieren, die auf Tree-Niveau dieselben Amplituden besitzt, wie die Stringtheorie. Die verschiedenen Chern-Zahl Sektoren liefern unterschiedliche Ergebnisse für die nicht verschwindenden Drei-Punkt-Amplituden. Allerdings können diese Amplituden durch eine Modifikation des Impulsvorfaktors ineinander überführt werden, daher spielt es keine Rolle, zu welcher Chern-Zahl man die effektive Feldtheorie konstruiert. Es wird sich herausstellen, daß verschiedene Chern-Zahlen zur selben Feldtheorie in verschiedenen Eichfixierungen führen. Daher sollen im folgenden nur die Stringamplituden mit maximaler Chern-Zahl, also mit $M = J$ betrachtet werden. Die daraus bestimmte effektive Feldtheorie kann durch Multiplikation der äußeren Felder mit Impulsfaktoren in die Feldtheorien für andere Chern-Zahlen überführt werden.

[68] Im allgemeinen beschränkt man sich dabei auf das masselose Spektrum der Stringtheorie. Da der $N{=}2$ String keine massiven Anregungen besitzt, beschreibt hier die effektive Feldtheorie das volle Stringspektrum.

IV.2.1 Selbstduale Gravitation

Die Eigenschaften der Streuamplituden des geschlossenen $N{=}2$ Strings auf der Sphäre werden von der folgenden Wirkung im Targetraum reproduziert [113],

$$S_{\text{Plebanski}} = \int d^4x \, \big(-\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\bar{\nu}}\,\partial_\mu\phi\,\partial_{\bar{\nu}}\phi + \tfrac{\kappa}{6}\,\phi\,\varepsilon^{\mu\nu}\,\varepsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\,\partial_\mu\bar{\partial}_{\bar{\mu}}\phi\,\partial_\nu\bar{\partial}_{\bar{\nu}}\phi\big)\,. \tag{IV.22}$$

Dies ist die sogenannte Plebanski-Wirkung [119]. Ihre einzige nicht verschwindende Amplitude auf Tree-Niveau ist die Drei-Punkt-Amplitude

$$\mathcal{A}_3(k_1,k_2,k_3) = (\bar{k}_1\cdot k_2)(k_1\cdot\bar{k}_2) - (\bar{k}_1\cdot k_1)\,(\bar{k}_2\cdot k_2) = \big(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}k_1^{+\dot{\alpha}}k_2^{+\dot{\beta}}\big)^2\,. \tag{IV.23}$$

Der zweite Term im mittleren Ausdruck verschwindet on-shell, während der erste Term gerade dem Quadrat der linken Gleichung aus (IV.13) entspricht. Man erhält also wieder die Drei-Punkt-Amplitude des geschlossenen $N{=}2$ Strings für die Chern-Zahl $M = J = 2$, wobei das Feld $\phi(x)$ in der Plebanski-Wirkung (IV.22) den Grundzustand des Strings repräsentiert.

Üblicherweise beschreiben masselose Anregungen geschlossener Strings Gravitation im Targetraum. Auch der masselose Grundzustand der $N{=}2$ Strings, bzw. der masselose Freiheitsgrad ϕ der Plebanski-Gleichung können mit einer Gravitationstheorie in der $2+2$ dimensionalen Raumzeit in Verbindung gebracht werden [113]. Das Feld $\phi(x)$ parametrisiert die Deformationen einer Ricci-flachen Kähler-Metrik, die in komplexen Targetraum-Koordinaten[69] die Form hat

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \eta_{\mu\bar{\nu}} + \partial_\mu\bar{\partial}_{\bar{\nu}}\phi\,. \tag{IV.24}$$

Um zu zeigen, daß die Metrik $g_{\mu\bar{\nu}}$ aus (IV.24) tatsächlich Ricci-flach ist, wenn der Parameter ϕ die aus der Plebanski-Wirkung (IV.22) folgende Bewegungsgleichung erfüllt, muß der Ricci-Tensor konstruiert werden. Die einzigen nicht verschwindenden Christoffel-Symbole der Metrik (IV.24) sind

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} = g^{\mu\bar{\sigma}}\partial_\rho g_{\nu\bar{\sigma}} \qquad \text{und} \quad \Gamma^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\bar{\rho}} = \Gamma^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\rho}\bar{\nu}} = g^{\bar{\mu}\sigma}\bar{\partial}_{\bar{\rho}}g_{\bar{\nu}\sigma}\,. \tag{IV.25}$$

Aus der Metrik (IV.24) und den Christoffel-Symbolen (IV.25) kann man den Riemann-Tensor berechnen. Es ist

$$R^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\bar{\rho}\sigma} = -\partial_\sigma\Gamma^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\bar{\rho}} \qquad \text{und} \quad R^\mu{}_{\nu\bar{\rho}\sigma} = \bar{\partial}_{\bar{\rho}}\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\,. \tag{IV.26}$$

Alle anderen Komponenten des Riemann-Tensors verschwinden. Damit hat der Ricci-Tensor die Form

$$R_{\bar{\mu}\nu} = R^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\mu}\bar{\rho}\nu} = -\partial_\nu\Gamma^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\mu}\bar{\rho}} = -\partial_\nu\left(g^{\bar{\rho}\sigma}\bar{\partial}_{\bar{\mu}}g_{\sigma\bar{\rho}}\right)\,. \tag{IV.27}$$

Der Ausdruck in den Klammern auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die Ableitung der Spur des Logarithmus der Metrik. Die Spur des Logarithmus eines Tensors ist gleich dem Logarithmus des Betrages der Determinante dieses Tensors. Damit kann der Ricci-Tensor geschrieben werden

$$R_{\bar{\mu}\nu} = -\partial_\nu\bar{\partial}_{\bar{\mu}}\log\big|\det g_{\bar{\rho}\sigma}\big|\,. \tag{IV.28}$$

[69] Zur Definition der komplexen Targetraum-Koordinaten siehe Anhang A.

Man kann nun einfach zeigen, daß dieser Ricci-Tensor verschwindet, wenn ϕ aus der Definition der Kähler-Metrik (IV.24) die Plebanski-Gleichung erfüllt. Es ist

$$\begin{aligned} 1+\det g_{\bar\rho\sigma} &= 1+\begin{pmatrix} \partial_1\bar\partial_{\bar 1}\phi - 1 & \partial_1\bar\partial_{\bar 2}\phi \\ \partial_2\bar\partial_{\bar 1}\phi & \partial_2\bar\partial_{\bar 2}\phi + 1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_1\bar\partial_{\bar 1}\phi\,\partial_2\bar\partial_{\bar 2}\phi + (\partial_1\bar\partial_{\bar 1} - \partial_2\bar\partial_{\bar 2})\,\phi - (\partial_1\bar\partial_{\bar 2}\phi)\,(\partial_2\bar\partial_{\bar 2}\phi)\,. \end{aligned} \tag{IV.29}$$

Aus der Plebanski-Wirkung (IV.22) erhält man die Bewegungsgleichung des Feldes ϕ

$$\partial_1\bar\partial_{\bar 1}\phi\,\partial_2\bar\partial_{\bar 2}\phi + (\partial_1\bar\partial_{\bar 1} - \partial_2\bar\partial_{\bar 2})\,\phi - (\partial_1\bar\partial_{\bar 2}\phi)\,(\partial_2\bar\partial_{\bar 2}\phi) = 0\,. \tag{IV.30}$$

Damit folgt aus Gleichung (IV.29), daß die Determinante der Kählermetrik konstant ist, $\det g_{\bar\rho\sigma} = -1$. Das bedeutet wegen Gleichung (IV.28), daß der Ricci-Tensor verschwindet, $R_{\bar\mu\nu} = 0$. Der masselose Grundzustand des geschlossenen $N{=}2$ Strings beschreibt also im vierdimensionalen Targetraum eine Ricci-flache Kähler-Metrik.

Nach einem Theorem von Atiyah, Hitchin und Singer [9] ist eine Ricci-flache Kähler-Mannigfaltigkeit in vier Dimensionen selbstdual, d.h. der Riemann-Tensor erfüllt die Bedingung

$$R_{\mu\bar\nu\rho\bar\sigma} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\bar\nu}{}^{\lambda\bar\kappa}\,R_{\mu\bar\nu\lambda\bar\kappa}\,. \tag{IV.31}$$

In diesem Sinne beschreibt der einzige Freiheitsgrad im Spektrum des geschlossenen $N{=}2$ Strings eine selbstduale Gravitation im vierdimensionalen Targetraum. Die Plebanski-Wirkung (IV.22) besitzt nicht die Invarianz unter Reparametrisierungen, die man von Gravitationstheorien erwartet. Sie beschreibt lediglich die Propagation einer Helizität der selbstdualen Metrik in einer nicht kovarianten Eichung. Warum die Betrachtung einer Helizität ausreicht, um die vollen Informationen über eine selbstduale Theorie zu erhalten, wird in Abschnitt IV.3 erläutert.

IV.2.2 Selbstduale Yang-Mills Theorie

Auch der rein offene Sektor der $N{=}2$ Stringtheorie besitzt nur eine nicht verschwindende Amplitude, die Drei-Punkt-Amplitude (IV.20). Der einzige masselose Zustand im Spektrum des offenen $N{=}2$ Strings ist ebenso wie im geschlossenen Sektor ein Skalar, jedoch kann er noch den Index der Chan-Paton-Gruppe tragen, $\psi = \psi^A$. Die Wirkung, deren Amplituden das Verhalten des offenen $N{=}2$ Strings im Targetraum widerspiegeln, ist die Leznov-Wirkung [93, 94], die in Bispinor-Notation die Form hat

$$S_{\text{Leznov}} = \operatorname{tr}\int d^4x\,\big(-\tfrac{1}{2}\psi\,\Box\psi + \tfrac{\sqrt{\kappa}}{6}\,\psi\,[\partial_+{}^{\dot\alpha}\psi, \partial_{+\dot\alpha}\psi]\big)\,. \tag{IV.32}$$

Die Spur wird dabei über die Eichgruppe der Ladungen an den Enden der offenen Strings gebildet. Die Drei-Punkt-Amplitude dieser Wirkung ist von der Form $\mathcal{A}_3(k_i) = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}k_1^{+\dot\alpha}k_2^{+\dot\beta}$, während alle höheren Amplituden verschwinden. Dies entspricht den Amplituden des offenen $N{=}2$ Strings für die maximale Chern-Zahl $M = J$.

In Abschnitt IV.2.1 wurde gezeigt, daß die effektive Feldtheorie des geschlossenen $N{=}2$ Strings eine selbstduale Gravitation ist. Da offene Strings üblicherweise

Eichtheorien im Targetraum beschreiben, liegt die Vermutung nahe, daß die Leznov-Gleichung (IV.32) eine selbstduale Yang-Mills Theorie beschreibt. Diese Vermutung soll nun überprüft werden. Die Wirkung einer Yang-Mills Theorie in vier Dimensionen hat die Form

$$S_{YM} = \mathrm{tr} \int d^4x\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\,, \tag{IV.33}$$

mit dem Feldstärketensor $F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu + g\,[A^A_\mu, A^A_\nu]$. Man spricht von einer selbstdualen Yang-Mills Theorie, wenn dieser Feldstärketensor die Bedingung erfüllt

$$F^A_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} F^A_{\rho\sigma}\,. \tag{IV.34}$$

Zur Lösung dieser Bedingung ist es sinnvoll, in die Bispinor-Notation zu wechseln. Dabei wird durch Kontraktion mit den Sigma-Matrizen jeder Vektorindex in zwei Spinorindizes umgewandelt, $x^\mu \to x^{\alpha\dot\alpha} = \sigma^{\alpha\dot\alpha}{}_\mu x^\mu$. Der Feldstärketensor erhält damit die Indexstruktur[70] $F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}$. Da $F_{\mu\nu}$ antisymmetrisch in den beiden Vektorindizes ist, läßt sich seine Bispinor-Darstellung zerlegen,

$$F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} F_{\dot\alpha\dot\beta} + \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} F_{\alpha\beta}\,, \tag{IV.35}$$

mit den beiden symmetrischen Anteilen[71]

$$F_{\alpha\beta} = \partial_{(\alpha}{}^{\dot\gamma} A_{\beta)\dot\gamma} + g\,[A_\alpha{}^{\dot\gamma}, A_{\beta\dot\gamma}] \tag{IV.36a}$$
$$F_{\dot\alpha\dot\beta} = \partial^\gamma{}_{(\dot\alpha} A_{\gamma\dot\beta)} + g\,[A^\gamma{}_{\dot\alpha}, A_{\gamma\dot\beta}]\,. \tag{IV.36b}$$

Mit dieser Zerlegung des Feldstärketensors lautet die Selbstdualitätsbedingung (IV.34) $F_{\alpha\beta} = 0$. Da dieser Anteil des Tensors (IV.35) symmetrisch in den beiden Spinorindizes ist, liefert die Forderung der Selbstdualität drei Gleichungen an die Komponenten von $F_{\alpha\beta}$,

$$F_{++} = 0 \quad , \qquad F_{+-} = 0 \qquad \text{und} \qquad F_{--} = 0\,. \tag{IV.37}$$

Die Yang-Mills Theorie (IV.33) ist eichinvariant, so daß es möglich ist, das Vektorpotential $A_{\alpha\dot\alpha}$ in die Lichtkegeleichung zu transformieren, $A_{+\dot+} = 0$. Damit nimmt die erste Gleichung aus (IV.37) für die $(++)$ Komponente die Form $\partial_{+\dot+} A_{+\dot-} = 0$ an. Die Eichinvarianz der Wirkung erlaubt die Transformation einer zweiten Komponente des Vektorpotentials. Die Wahl $A_{+\dot-} = 0$ führt zusammen mit der Lichtkegeleichung zu $A_+{}^{\dot\alpha} = 0$ und löst die Selbstdualitätsbedingung für die $(++)$ Komponente des Feldstärketensors. Die zweite Gleichung aus (IV.37) beschreibt damit die Bedingung für die $(+-)$ Komponente, $\partial_+{}^{\dot\alpha} A_{-\dot\alpha} = 0$. Diese Gleichung wird durch die Einführung eines Präpotentials gelöst, $A_{-\dot\alpha} = \partial_{+\dot\alpha}\psi$. Dabei trägt das Präpotential den gleichen Index der Eichgruppe wie das Vektorpotential. Die dritte Gleichung aus (IV.37) liefert die Selbstdualitätsbedingung für die $(--)$ Komponente des Feldstärketensors $\partial_-{}^{\dot\alpha} A_{-\dot\alpha} + \frac{g}{2}\,[A_-{}^{\dot\alpha}, A_{-\dot\alpha}] = 0$. Diese Gleichung läßt sich als eine Bedingung an das Präpotential schreiben,

$$-\Box\psi + \tfrac{g}{2}\,[\partial_+{}^{\dot\alpha}\psi, \partial_{+\dot\alpha}\psi] = 0\,. \tag{IV.38}$$

[70] Der Index der Darstellung der Eichgruppe ^{A} wird im folgenden zur Vereinfachung der Notation weggelassen.

[71] Die Symmetrisierung $(\ldots)$ zweier Indizes ist definiert als $x_{(\alpha}y_{\beta)} \equiv \frac{1}{2}\,(x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\alpha)$.

Mit $g = \sqrt{\kappa}$ ist (IV.38) gerade die aus der Leznov-Wirkung (IV.32) folgende Bewegungsgleichung für das Feld ψ, das den Grundzustand des offenen $N{=}2$ Strings im Targetraum beschreibt. Damit ist gezeigt, daß der rein offene Sektor des $N{=}2$ Strings in der vierdimensionalen Raumzeit eine selbstduale Yang-Mills Theorie beschreibt.

Ebenso wie die Plebanski-Wirkung (IV.22) ist die Leznov-Wirkung (IV.32) nicht kovariant. Beide Wirkungen beschreiben das Potential einer Helizität eines selbstdualen Feldes in einer eichfixierten Version. Es gibt andere nicht kovariante Wirkungen für selbstduale Feldtheorien, etwa in der Formulierung von Yang [157], die die Tree-Niveau Amplituden des $N{=}2$ Strings in einem anderen Chern-Zahl Sektor reproduzieren. Klassisch, d.h. auf Tree-Niveau, sind diese Amplituden äquivalent, wie die Ergebnisse der Stringtheorie nahelegen. Durch Multiplikation der äußeren Beine einer Amplitude mit einem impulsabhängigen Faktor kann eine Darstellung der selbstdualen Feldtheorie in eine andere überführt werden. Ob diese Äquivalenz auch nach der Quantisierung noch gilt, ist von vorneherein nicht klar. Jedoch kann gezeigt werden [49], daß die verschiedenen Wirkungen der selbstdualen Yang-Mills Theorien zumindest auf Ein-Loop-Niveau übereinstimmen. Insbesondere sind die Wirkungen (IV.22) und (IV.32) auch äquivalent zu Lorentz-kovarianten Wirkungen mit zwei Feldern, die in der Lichtkegeleichung die Form annehmen

$$S_{\mathrm{SDG}} = \int d^4x \left(- \phi_+ \Box \phi_- + \tfrac{\kappa}{2}\, \phi_+\, \partial_+{}^{\dot\alpha} \partial_+{}^{\dot\beta} \phi_-\, \partial_{+\dot\alpha} \partial_{+\dot\beta} \phi_- \right) \tag{IV.39a}$$

$$S_{\mathrm{SDYM}} = \mathrm{tr} \int d^4x \left(- \psi_+ \Box \psi_- + \tfrac{\sqrt{\kappa}}{2}\, \psi_+ \left[\partial_+{}^{\dot\alpha} \psi, \partial_{+\dot\alpha} \psi \right] \right). \tag{IV.39b}$$

Dabei beschreiben die Felder ϕ_+ und ϕ_- bzw. ψ_+ und ψ_- die beiden Zustände extremaler Helizität eines Spin-Multipletts. Dies liefert einen Hinweis auf den Zusammenhang zwischen den Amplituden selbstdualer Feldtheorien und maximal helizitätsverletzenden Amplituden, der in Abschnitt IV.3 erläutert wird.

IV.2.3 Kopplung von selbstdualer Gravitation und selbstdualer Yang-Mills Theorie

In Abschnitt IV.1.3 wurde gezeigt, daß bei der Kopplung von offenen und geschlossenen $N{=}2$ Strings weitere nicht verschwindende Drei-Punkt-Amplituden entstehen. Damit enthält die komplette effektive Feldtheorie, die den offenen und den geschlossenen String im Targetraum beschreibt, nicht nur die Plebanski- und die Leznov-Wirkung, sondern auch noch zusätzliche Kopplungen zwischen den Feldern. Die beiden gemischten Stringamplituden aus Gleichung (IV.21) erzeugen zwei zusätzliche Wechselwirkungsterme mit drei Feldern [56, 57]. Die Amplitude $\mathcal{A}^{2,M}_{1,2}(k_i)$ von einem geschlossenen und zwei offenen Strings beschreibt die Kopplung zwischen selbstdualer Gravitation und der selbstdualen Yang-Mills Theorie. Sie führt für Chern-Zahl $M = J = 2$ in der effektiven Feldtheorie zu einem Wechselwirkungsterm der Form $\frac{\sqrt{\kappa}}{2}\, \phi\, \mathrm{tr}\ \partial_+{}^{\dot\alpha} \partial_+{}^{\dot\beta} \psi\, \partial_{+\dot\alpha} \partial_{+\dot\beta} \psi$. Die Spur wird dabei wieder über die Chan-Paton Indizes des Yang-Mills Präpotentials ψ^A gebildet. Die Amplitude $\mathcal{A}^{4,M}_{3,0}(k_i)$ von drei geschlossenen Strings auf der Sphäre, welche die achte Potenz der Impulse enthält, erzeugt im Chern-Zahl $M = J = 4$ Sektor einen Korrekturterm zur Wechselwirkung der Plebanski-Wirkung, mit insgesamt acht Impulsen. Dieser Korrekturterm hat die

Form $\frac{\kappa}{6}\,\phi\,\partial_+{}^{\dot\alpha}\partial_+{}^{\dot\beta}\partial_+{}^{\dot\gamma}\partial_+{}^{\dot\delta}\phi\,\partial_{+\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta}\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+\dot\delta}\phi$. Insgesamt ist die Wirkung der effektiven Feldtheorie des $N{=}2$ Strings also durch den Ausdruck gegeben [56, 57]

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{\alpha'}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,\big(-\tfrac12\psi\Box\psi+\tfrac{\sqrt{\kappa}}{6}\,\psi\,[\partial_+{}^{\dot\alpha}\psi,\partial_{+\dot\alpha}\psi]+\tfrac{\kappa}{2}\,\phi\,\partial_+{}^{\dot\alpha}\partial_+{}^{\dot\beta}\psi\,\partial_{+\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta}\psi\big)\\ &\quad+\tfrac{1}{\alpha'^2}\int d^4x\,\big(-\tfrac12\phi\Box\phi+\tfrac{\kappa}{6}\,\phi\,\partial_+{}^{\dot\alpha}\partial_+{}^{\dot\beta}\phi\,\partial_{+\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta}\phi+\\ &\qquad\qquad\tfrac{\alpha'^2\kappa}{6}\,\phi\,\partial_+{}^{\dot\alpha}\partial_+{}^{\dot\beta}\partial_+{}^{\dot\gamma}\partial_+{}^{\dot\delta}\phi\,\partial_{+\dot\alpha}\partial_{+\dot\beta}\partial_{+\dot\gamma}\partial_{+\dot\delta}\phi\big)\,. \end{aligned}\tag{IV.40}$$

Die Kopplungskonstante κ in dieser Wirkung ist die dimensionslose Stringkopplungskonstante aus (III.6). Vergleicht man nun die kinetischen Terme mit den Wechselwirkungstermen, erkennt man, daß die Skalarfelder ϕ und ψ^A die folgenden Längendimensionen in der Raumzeit tragen müssen, $[\phi]=\text{Länge}^1$ und $[\psi^A]=\text{Länge}^0$. Um mit diesen Dimensionen der Felder dennoch eine dimensionslose Wirkung zu erhalten, sind in Gleichung (IV.40) die Vorfaktoren $\frac{1}{\alpha'}$ bzw. $\frac{1}{\alpha'^2}$ eingefügt worden. Die Regge-Steigung α' ist proportional zum Inversen der Stringspannung T und trägt die Längendimension Länge^2. Damit erhält man eine Hierarchie der Beiträge zur effektiven Feldtheorie. Im Grenzfall unendlicher Stringspannung bzw. verschwindender Regge-Steigung $\alpha'\to 0$, beschreibt die Wirkung (IV.40) lediglich das Verhalten des geschlossenen Strings auf Tree-Niveau. Als Stringkorrektur zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha')$ kommt der offene Sektor des $N{=}2$ Strings mit der Kopplung von offenen an geschlossene Strings hinzu. Als weitere Korrektur der Dynamik des Kähler-Potentials ϕ zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha'^2)$ erhält man dann den Wechselwirkungsterm mit acht Impulsen.

Aufgrund der dimensionsbehafteten Kopplungskonstante α' ist die Wirkung (IV.40) nicht renormierbar. Da diese Wirkung lediglich die Tree-Level Amplituden des $N{=}2$ Strings beschreibt, ist das aber zunächst kein Problem. Durch die Einführung von zwei weiteren Feldern ϕ_+ für den geschlossenen String und ψ_+^A für den offenen String, wie in Gleichungen (IV.39a) und (IV.39b), kann die Kopplungskonstante in die neuen Felder absorbiert werden, so daß man eine renormierbare effektive Feldtheorie für den $N{=}2$ String erhält.

IV.3 MHV Amplituden

Die Streuamplituden selbstdualer Feldtheorien werden durch maximal helizitätsverletzende (MHV) Amplituden wiedergegeben [52, 65]. Dies kann am Beispiel einer nicht abelschen Eichtheorie leicht gezeigt werden. Dazu betrachtet man zunächst eine freie (abelsche) Theorie für das Vektorpotential $A^{(0)}$ mit der Bewegungsgleichung[72]

$$\partial^\mu F^{(0)}_{\mu\nu}=0 \qquad \text{mit} \quad F^{(0)}_{\mu\nu}=\partial_\mu A^{(0)}_\nu-\partial_\nu A^{(0)}_\mu\,. \tag{IV.41}$$

In der Strahlungseichung mit $A^{(0)}_0=0$ und $\vec\nabla\cdot\vec A^{(0)}=0$ nimmt diese Bewegungsgleichung die einfache Form an $\Box\vec A^{(0)}=0$. Das Feld läßt sich dann in Erzeuger- und

[72]Die hier vorgestellten Rechnungen werden in einer $1+3$ dimensionalen Raumzeit durchgeführt. In der für den $N{=}2$ String benötigten $2+2$ dimensionalen Raumzeit gilt die Selbstdualitätsbeziehung (IV.46) ohne das i. Die Argumentation, die zu dieser Beziehung führt kann aber genau so durchgeführt werden.

Vernichtermoden entwickeln,

$$A_\mu^{(0)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2k_0} \sum_{\lambda=1}^{2} e_\mu(k,\lambda) \left(a(k,\lambda)\, e^{-ikx} + a^\dagger(k,\lambda)\, e^{ikx} \right) . \tag{IV.42}$$

Summiert wird dabei über die beiden physikalischen Polarisationen $\lambda = 1, 2$. Die $e_\mu(k,\lambda)$ sind die Polarisationsvektoren, die gemeinsam mit dem Einheitsvektor in die räumliche Impulsrichtung $\vec{e}^k \equiv \vec{k}/|\vec{k}|$ aufgrund der Feldgleichungen ein Rechtssystem bilden müssen,

$$\vec{e}^k \times \vec{e}(k,1) = \vec{e}(k,2) \qquad \text{und} \quad \vec{e}^k \times \vec{e}(k,2) = -\vec{e}(k,1) . \tag{IV.43}$$

Man erhält Zustände mit bestimmter Helizität $\pm$ durch die Wirkung des Erzeugers $a^\dagger(k,\pm)$ auf das Vakuum. Dabei definiert man den Vernichter zur Helizität $\pm$ durch $a(k,\pm) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a(k,1) \pm i\, a(k,2))$. Analog definiert man die Polarisationsvektoren mit Helizität $\pm$ durch $e_\mu^\pm(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_\mu(k,1) \pm i\, e_\mu(k,2))$. Damit wird ein allgemeiner Helizität $\pm$ Einteilchen-Zustand mit Wellenfunktion $u_\mu(k,\pm)$ durch

$$|u\pm\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2k_0}\, e_\mu^\pm(k)\, u^\mu(k,\pm)\, a^\dagger(k,\pm)|0\rangle \tag{IV.44}$$

charakterisiert. Aus der Bedingung (IV.43) folgt, daß für die Polarisationsvektoren positiver und negativer Helizität gelten muß,

$$k_\mu e_\nu^\pm - k_\nu e_\mu^\pm = \pm\tfrac{i}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \left(k_\rho e_\sigma^\pm - k_\sigma e_\rho^\pm \right) . \tag{IV.45}$$

Damit führt das den Zustand (IV.44) erzeugende Vektorpotential $A_\mu^{(0)}(x,\pm) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2k_0}\, u_\mu(k,\pm)\, e^{-ikx}$ je nach Helizität zu einer selbstdualen oder einer antiselbstdualen Feldstärke,

$$F_{\mu\nu}^{(0)}(x,\pm) = \pm\tfrac{i}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{(0)\,\rho\sigma}(x,\pm) . \tag{IV.46}$$

Es bleibt zu überprüfen, ob diese für die freie Theorie hergeleitete Beziehung auch für wechselwirkende Yang-Mills Theorien gilt. In der nicht abelschen Theorie hat die Bewegungsgleichung der Yang-Mills Wirkung die Form $\partial^\mu F_{\mu\nu} + g\,[A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0$ mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\,[A_\mu, A_\nu]$, wobei das Vektorpotential A_μ seine Werte nun in der Lie-Algebra der Eichgruppe annimmt. Diese Bewegungsgleichung läßt sich gemeinsam mit der Bianchi-Identität $D^\mu\, {}^*\!F_{\mu\nu} = 0$ schreiben

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^\pm + g\,[A^\mu, F_{\mu\nu}^\pm] = 0 , \tag{IV.47}$$

wenn man den selbstdualen bzw. antiselbstdualen Anteil der Feldstärke durch $F_{\mu\nu}^\pm = \frac{1}{2}\,(F_{\mu\nu} + i\, {}^*\!F_{\mu\nu})$ definiert. Eine selbstduale Feldstärke löst die Gleichung (IV.47) offensichtlich. Es soll nun aus der oben konstruierten selbstdualen Lösung der freien Theorie eine selbstduale Lösung der wechselwirkenden Theorie konstruiert werden. Dazu entwickelt man das Vektorpotential und den Feldstärketensor in der Kopplungskonstanten g,

$$A_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} g^n A_\mu^{(n)} \qquad \text{und} \quad F_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} g^n F_{\mu\nu}^{(n)} . \tag{IV.48}$$

$A^{(0)}_\mu$ und $F^{(0)}_{\mu\nu}$ sind dabei die Felder der freien Theorie. Durch einen Vergleich der Koeffizienten der Potenzen von g erhält man aus der Bewegungsgleichung (IV.47)

$$\partial^\mu F^{(0)\,\pm}_{\mu\nu} = 0 \tag{IV.49a}$$
$$\partial^\mu F^{(1)\,\pm}_{\mu\nu} + [A^{(0)\,\mu}, F^{(0)\,\pm}_{\mu\nu}] = 0 \tag{IV.49b}$$
$$\partial^\mu F^{(2)\,\pm}_{\mu\nu} + [A^{(1)\,\mu}, F^{(0)\,\pm}_{\mu\nu}] + [A^{(0)\,\mu}, F^{(1)\,\pm}_{\mu\nu}] = 0\,, \tag{IV.49c}$$

und so weiter. Die Lösung der freien Theorie soll selbstdual sein, d.h. es sei $F^{(0)\,-}_{\mu\nu} = 0$. Damit folgt aus Gleichung (IV.49b), daß auch $\partial^\mu F^{(1)\,-}_{\mu\nu} = 0$ sein muß. Gelingt es nun zu zeigen, daß aus $\partial^\mu F^{(1)\,-}_{\mu\nu} = 0$ folgt $F^{(1)\,-}_{\mu\nu} = 0$, ist das Problem gelöst. Dann folgt induktiv, daß für alle $n \neq 0$ gilt $F^{(n)\,-}_{\mu\nu} = 0$ und damit auch $F^{-}_{\mu\nu} = 0$. Folglich ist dann auch die Lösung der wechselwirkenden Theorie selbstdual. Die antiselbstduale Komponente des Feldstärketensors läßt sich, wie in Gleichung (IV.36a) gezeigt wurde, in Bispinor-Notation schreiben. In dieser Notation nimmt der n-te Koeffizient in der Entwicklung nach der Kopplungskonstanten die Form an $F^{(n)\,-}_{\alpha\beta} = \partial_{(\alpha}{}^{\dot\gamma} A^{(n)}_{\beta)\dot\gamma} + H^{(n)}_{(\alpha\beta)}$, wobei im Ausdruck $H^{(n)}_{(\alpha\beta)}$ sämtliche Kommutatorterme der obigen Entwicklung zusammengefaßt sind. In der oben gewählten Strahlungseichung nimmt der Ausdruck $\partial^\mu F^{(n)\,-}_{\mu\nu} = 0$ in Bispinor-Notation die Form an $\Box A^{(n)}_{\beta\dot\beta} + 2\,\partial^\alpha{}_{\dot\beta} H^{(n)}_{(\alpha\beta)} = 0$. Diese Gleichung kann mit Hilfe der Greensfunktion für den $\Box$ Operator, $\Box\Delta_F(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)$ integriert werden. Bildet man aus dem so erhaltenen Vektorpotential $A^{(n)}_\mu$ die antiselbstduale Feldstärke, erhält man $F^{(n)\,-}_{\mu\nu} = 0$. Aus der selbstdualen Lösung der freien Feldgleichungen kann also die selbstduale Lösung der wechselwirkenden Gleichung konstruiert werden. Es gilt folglich, daß sowohl in der freien als auch in der wechselwirkenden Theorie Zustände maximaler Helizität (IV.44) durch die selbstdualen Lösungen der Feldgleichungen erzeugt werden. Das bedeutet insbesondere, daß man die Amplituden des selbstdualen Sektors einer Feldtheorie erhält, wenn man die maximal helizitätsverletzenden (MHV) Amplituden der vollen Theorie berechnet. Unter MHV Amplituden versteht man die Amplituden, bei denen alle äußeren Zustände dieselbe (auslaufend gemessene) Helizität haben.

Daß der hier für Yang-Mills Theorien bewiesene Zusammenhang zwischen dem selbstdualen Sektor der Theorie und den MHV Amplituden gilt, kann auch für andere Theorien gezeigt werden [13, 130, 140]. Insbesondere gilt auch für Gravitationstheorien, daß der selbstduale Anteil durch die entsprechenden MHV Amplituden reproduziert wird.

Berechnung von MHV Amplituden

Der Grund für das besondere Interesse an maximal helizitätsverletzenden Amplituden ist, daß diese sowohl für Gluonen, als auch für Gravitonen relativ einfach berechnet werden können [17, 22, 27, 101].

Die äußeren Zustände der Amplitude einer Yang-Mills Theorie tragen Ladungen T^a der Eichgruppe. Die vollständige Amplitude besteht aus der Summe über die Teilamplituden mit verschiedenen Permutationen dieser Farbladungen. Diese Summe kann in eichinvariante Teile zerlegt werden, die aus Feynman-Diagrammen mit einer festen zyklischen Ordnung der äußeren Linien bestehen [101]. Im Fall einer Ein-

Loop-Amplitude erhält man

$$
\begin{aligned}
A_n \;=\; & \sum_{\sigma\in S_n/S_{n;1}} N_c \operatorname{tr}\left(T^{a_{\sigma(1)}}\dots T^{a_{\sigma(n)}}\right) A_{n;1}(k_{\sigma(1)},\epsilon_{\sigma(1)};\dots;k_{\sigma(n)},\epsilon_{\sigma(n)}) \\
& + \sum_{m=2}^{[n/2]+1} \sum_{\sigma\in S_n/S_{n;m}} \operatorname{tr}\left(T^{a_{\sigma(1)}}\dots T^{a_{\sigma(m-1)}}\right) \operatorname{tr}\left(T^{a_{\sigma(m)}}\dots T^{a_{\sigma(n)}}\right) \times \\
& \qquad A_{n;m}(k_{\sigma(1)},\epsilon_{\sigma(1)};\dots;k_{\sigma(n)},\epsilon_{\sigma(n)})\,.
\end{aligned} \tag{IV.50}
$$

Dabei ist S_n die Gruppe der Permutationen der n äußeren Linien, und $S_{n;m}$ ist die Untergruppe der Permutationen S_n, welche die Struktur der zugehörigen Spuren in (IV.50) invariant läßt. Insbesondere ist $S_{n;1} = Z_n$ die Gruppe der zyklischen Permutationen der n äußeren Linien. Pole können in den Teilamplituden $A_{n;m}$ dieser Zerlegung nur in kinematischen Invarianten aus zyklischen Summen aufeinanderfolgender Impulse der Form $(k_i + k_{i+1} + \dots + k_j)^2$ auftreten. Aus dem führenden Term $A_{n;1}$ der Zerlegung der Amplitude nach Spuren über die Farbfaktoren können die anderen Beiträge $A_{n;m}$ mit $m \geq 2$ rekonstruiert werden [31]. Für die Vier-Gluonen-Amplitude einer Yang-Mills Theorie gilt zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
A_{4;3}(1,2;3,4) &= A_{4;1}(1,2,3,4) + A_{4;1}(1,3,2,4) + A_{4;1}(2,1,3,4) \\
&\quad + A_{4;1}(2,3,1,4) + A_{4;1}(3,1,2,4) + A_{4;1}(3,2,1,4)\,.
\end{aligned} \tag{IV.51}
$$

Folglich genügt es, die in der Farbzerlegung führende Teilamplitude $A_{n;1}$ zu berechnen, um die vollständige Ein-Loop-Amplitude A_n konstruieren zu können. Dadurch wird die Anzahl der zu betrachtenden Terme bei der Berechnung von Eichtheorieamplituden stark reduziert.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Konstruktion der MHV Amplituden ist der Spinorhelizitäts Formalismus [156]. Dabei wird die Bispinordarstellung der masselosen Eichbosonen $k^{\alpha\dot\alpha}$ mit $\det k^{\alpha\dot\alpha} = 0$ in zwei Weyl-Spinoren aufgespaltet, $k^{\alpha\dot\alpha} = k^\alpha k^{\dot\alpha}$. Die in Abschnitt V.3.1 untersuchte Eichfreiheit der Amplituden erlaubt es, die Polarisationsvektoren $\epsilon^{\pm}_{\alpha\dot\alpha}$ mit Hilfe eines beliebigen masselosen Bispinors $q^{\alpha\dot\alpha} = q^\alpha q^{\dot\alpha}$ durch

$$
\epsilon^{+}_{\alpha\dot\alpha} = i\,\frac{q_\alpha k_{\dot\alpha}}{q^\beta k_\beta} \qquad \text{und} \qquad \epsilon^{-}_{\alpha\dot\alpha} = -i\,\frac{q_{\dot\alpha} k_\alpha}{q^{\dot\beta} k_{\dot\beta}} \tag{IV.52}
$$

auszudrücken. Die MHV Struktur der Amplitude sorgt dafür, daß sämtliche Skalarprodukte zwischen verschiedenen Polarisationsvektoren verschwinden, wie im Fall der Vier-Punkt-Amplitude des $N{=}2$ Strings auf dem Torus ausführlich beschrieben wird. Dadurch wird die Anzahl der bei der Berechnung der vollständigen MHV Amplitude zu betrachtenden Terme weiter reduziert. Mit Hilfe der aus der Zerlegung der Bispinoren erhaltenen Weyl-Spinoren lassen sich zwei antisymmetrische Spinorprodukte definieren

$$
\langle ij\rangle = k_i^\alpha k_{j\,\alpha} \qquad \text{und} \qquad [ij] = k_i^{\dot\alpha} k_{j\,\dot\alpha}\,. \tag{IV.53}
$$

Der Zusammenhang zwischen diesen Spinorprodukten und den Mandelstam-Variablen s_{ij} ist durch

$$
s_{ij} = -2\,k_i\cdot k_j = \langle ij\rangle[ij] \tag{IV.54}
$$

gegeben. Mit diesen Abkürzungen läßt sich die Struktur der MHV Amplituden kompakt darstellen.

Durch die Beschränkung auf die führende Teilamplitude in der Zerlegung der Spuren über die Farbfaktoren und durch die Einführung des Spinorhelizitäts Formalismus lassen sich die Tree-Niveau Amplituden mit identischen Helizitäten aller oder aller bis auf einer der äußeren Linien bestimmen [77, 78],

$$A_n^{\text{tree}}(1^{\pm}, 2^{+}, \ldots, n^{+}) = 0\,. \tag{IV.55}$$

Die einfachste nicht verschwindende Amplitude ist die sogenannte Parke-Taylor-Amplitude [117] mit zwei äußeren Linien mit negativer Helizität. Das ursprünglich für die Vier-Punkt-Amplitude ermittelte Ergebnis läßt sich mit Hilfe von Rekursionsrelationen auf beliebige n-Punkt-Amplituden erweitern [16, 88]. Man erhält die allgemeine Tree-Niveau-Amplitude mit MHV Struktur

$$A_n^{\text{tree}}(1^{+}, \ldots, i^{-}, \ldots, j^{-}, \ldots, n^{+}) = i\,\frac{\langle ij\rangle^4}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\ldots\langle n1\rangle}\,, \tag{IV.56}$$

wobei die äußeren Linien i und j eine negative Helizität tragen.

Ein-Loop-Amplituden mit positiver Helizität aller äußerer Linien können durch Analytizitätsbetrachtungen [24] konstruiert werden. Im kollinearen Grenzfall, wenn zwei der äußeren Impulse parallel zueinander sind, läßt sich die Ein-Loop-Amplitude in Ein-Loop-Amplituden mit weniger äußeren Linien, Tree-Level-Amplituden und sogenannte *Split-Amplituden* faktorisieren,

$$\begin{aligned} A_n^{\text{loop}}(\ldots) \;\;\xrightarrow{i\|j}\;\; & \sum_{\lambda=\pm}\Big(\text{Split}^{\text{tree}}_{-\lambda}(i^{\lambda_i}, j^{\lambda_j})\, A^{\text{loop}}_{n-1}(\ldots, (i+j)^{\lambda}) \\ & + \text{Split}^{\text{loop}}_{-\lambda}(i^{\lambda_i}, j^{\lambda_j})\, A^{\text{tree}}_{n-1}(\ldots, (i+j)^{\lambda})\Big)\,. \end{aligned} \tag{IV.57}$$

Dabei wird über die Helizität λ der kollinearen Impulse summiert. Die Split-Amplituden enthalten die Informationen über die analytische Struktur der kollinearen Impulse und sind unabhängig von der betrachteten Amplitude [27]. Die MHV Amplituden haben eine sehr einfache analytische Struktur, ohne Schnitte in der durch die Mandelstam-Variablen beschriebenen komplexen Ebene. Ein solcher Schnitt in einem bestimmten Kanal kann durch das Phasenraumintegral über die aus dem Schnitt entstandenen Tree-Amplituden ausgedrückt werden. Wie in Abbildung IV.3 zu sehen ist, verschwindet dabei jedoch wenigstens eine der entstandenen Tree-Amplituden aufgrund von (IV.55). Damit verschwindet auch der analytische Schnitt, folglich gibt es keine logarithmischen Beiträge zu den Split-Amplituden.

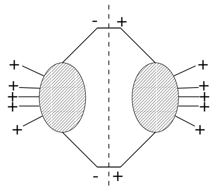

Abbildung IV.3 - *Mindestens eine der beiden Tree-Niveau-Amplituden, die den analytischen Schnitt bilden, verschwindet aufgrund der MHV Struktur der Ein-Loop-Amplitude.*

Mit den im MHV Fall relativ einfach zu konstruierenden Split-Amplituden läßt sich aus (IV.57) eine Rekursionsrelation für die Ein-Loop-Amplituden ableiten. Man erhält in vier Dimensionen die MHV Amplituden mit einem im Loop umlaufenden Gluon[73] [24, 97]

$$A_{n;1}^{[1]}(k_i^+) = -\frac{i}{48\pi^2} \sum_{1\leq i<j<k<l\leq n} \frac{\langle ij\rangle[jk]\langle kl\rangle[li]}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\ldots\langle n1\rangle}\,. \tag{IV.58}$$

Diese MHV Amplitude beschreibt die Ein-Loop-Streuung der Leznov-Wirkung (IV.32).

Aus den MHV Amplituden der Yang-Mills Theorie lassen sich die entsprechenden Amplituden der Gravitation konstruieren [28, 66]. Die vom KLT-Theorem [85] der Stringtheorie abgeleitete Konstruktion führt zum Ausdruck

$$A_4^{[2]}(k_i^{++}) = -\frac{i}{120\,(4\pi)^2} \left(\frac{s_{12}s_{23}}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 41\rangle}\right)^2 \left(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{13}^2\right) \tag{IV.59}$$

für die Ein-Loop-Amplitude der Streuung von vier Gravitonen mit Helizität $++$. Dies ist die Ein-Loop-Amplitude, die man aus der Plebanski-Wirkung (IV.22) erhält. Die MHV Amplituden (IV.58) und (IV.59) sind ebenso wie Stringamplituden dual, d.h. der erhaltene Ausdruck ist invariant unter Vertauschung zweier äußerer Linien.

Die d-dimensionale Verallgemeinerung des vierdimensionalen Yang-Mills Ergebnisses (IV.58) hat die Form [25]

$$A_{4;1}^{[1]}(k_i^+)\big|_d = \frac{-2i}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 41\rangle} \frac{(4-d)\,(2-d)}{4\,(4\pi)^2}\, s_{12}s_{23}\, I_4^{4+d}(s,t)\,, \tag{IV.60}$$

mit dem aus p in $d+4$ Dimensionen analytisch fortgesetzten Box-Integral

$$I_4^p(s,t) = \int \frac{d^p\ell}{(2\pi)^p} \frac{1}{\ell^2\,(\ell-k_1)^2\,(\ell-k_1-k_2)^2\,(\ell+k_4)^2} \tag{IV.61}$$

und mit vierdimensionalen äußeren Impulsen. In vier Dimensionen ist das achtdimensionale Box-Integral UV divergent, das Ergebnis ist jedoch endlich, da der Vorfaktor $(4-d)$ in der analytischen Fortsetzung das Residuum extrahiert [26]. Zur Berechnung der MHV Amplitude in zwei Dimensionen ist das sechsdimensionale Box-Integral zu berechnen. Dieses Integral ist sowohl im IR- als auch im UV-Bereich endlich. Durch den Vorfaktor $(2-d)$ verschwindet die MHV Amplitude in zwei Dimensionen.

Für die entsprechende MHV Amplitude der Gravitation erhält man die analytische Fortsetzung in d Dimensionen

$$A_4^{[2]}(k_i^{++})\big|_d = \frac{(4-d)\,(2-d)\,d\,(2+d)}{8}\,(4\pi)^4\,\frac{1}{\langle 12\rangle^8}\,A_4^{\mathcal{N}=32}(1^{--},2^{--},3^{++},4^{++})\big|_{d+8}\,. \tag{IV.62}$$

Dabei ist $A_4^{\mathcal{N}=32}$ die in $d+8$ Dimensionen auszuwertende Amplitude einer $\mathcal{N}=32$ (maximal) supersymmetrischen Gravitation. Der Faktor $\langle 12\rangle^{-8}$ in Gleichung (IV.62) dient dazu, den Helizitätsunterschied zwischen der MHV Amplitude auf der linken Seite und der helizitätserhaltenden Supergravitationsamplitude auf der rechten Seite auszugleichen. Zur Berechnung der zweidimensionalen MHV Amplitude der Gravitation ist die Supergravitationsamplitude in zehn Dimensionen auszuwerten. Die dabei auftretenden Divergenzen sind im Fall der Vier-Punkt-Amplitude proportional zu

$$\frac{1}{d-10}\,(s+t) + \frac{1}{d-10}\,(t+u) + \frac{1}{d-10}\,(u+s)\,. \tag{IV.63}$$

[73] Der Index $^{[J]}$ bedeutet, daß der im Loop umlaufende Zustand Spin J hat.

Dieser Ausdruck verschwindet on-shell, so daß die MHV Amplitude der Gravitation in zwei Dimensionen Null ist.

Zweidimensionale Yang-Mills und Gravitationstheorien haben keine dynamischen Freiheitsgrade. In topologisch trivialen Raumzeiten sind daher die Streuamplituden dieser Theorien trivial. Dies erklärt das Verschwinden der MHV amplituden für Vektorfelder und Gravitonen auf Ein-Loop-Niveau in zwei Dimensionen. Auch der $N{=}2$ String wird eine zweidimensionale Interpretation seiner Ein-Loop-Amplituden im Targetraum zulassen, was zum Verschwinden dieser Amplituden führt. Diese hier für Vier-Punkt-Amplituden durchgeführte Argumentation läßt sich für den Fall beliebiger n-Punkt-Amplituden in zwei Dimensionen verallgemeinern.

In supersymmetrischen Yang-Mills oder Gravitationstheorien verschwinden die MHV Amplituden, da sich die Beiträge der Zustände mit unterschiedlichem Spin im Loop eliminieren. Das Ergebnis einer MHV Amplitude mit einem bestimmten Zustand mit Spin J im Loop ist (bis auf ein Vorzeichen) unabhängig vom Spin. Es gilt die Identität [77, 78]

$$A_n^{[0]} = A_n^{[1]} = A_n^{[2]} = -A_n^{[1/2]}\,, \tag{IV.64}$$

für einen im Loop umlaufenden Skalar, ein Vektorboson, ein Graviton oder ein Weyl-Fermion, bei gleichen Zuständen an den äußeren Linien. Das bedeutet, daß die Loopintegration einer MHV Amplitude bei gegebenen äußeren Zuständen für einen beliebigen inneren Zustand im Loop durchgeführt werden kann. Diese Identität spielt eine wichtige Rolle bei der Konstruktion des Integranden der Ein-Loop-Amplitude des $N{=}2$ Strings in Abschnitt V.3.3.

V. Ein-Loop-Amplituden

Während der $N{=}2$ String auf Tree-Niveau praktisch vollständig bekannt ist, gibt es bereits auf Ein-Loop-Niveau noch eine Reihe offener Fragen. In diesem Kapitel sollen die bereits seit längerer Zeit bekannte Zustandssumme [106], also die Torus-Amplitude ohne äußere Zustände, die Drei-Punkt-Amplitude auf dem Torus [41], sowie die Vier-Punkt-Amplitude [48] untersucht werden.

V.1 Die Zustandssumme

Die Integration über die Oszillatormoden der Materie- und der Geistfelder liefert in der Zustandssumme einen Beitrag der Form

$$\mathrm{tr}'\, q^{L_0}\, \bar{q}^{\bar{L}_0}\,. \tag{V.1}$$

Dabei bedeutet das Symbol tr', daß die Spur über sämtliche Zustände der Felder außer den Nullmoden zu bilden ist. Neben der Spur über die Oszillatoren sind im Integranden des Pfadintegrals die Nullmoden der Materie- und Geistfelder zu berechnen. Der so erhaltene Ausdruck ist dann mit dem sich aus den Modulitransformationen ergebenden Maßfaktor über die entsprechenden Moduliräume zu integrieren.

V.1.1 Determinanten

Unter Vernachlässigung der Nullmoden erhält man die Determinanten[74]

$$\begin{aligned}
Z_Z(\tau,\bar\tau) &= \big|\eta(\tau)\big|^{-2d} && \text{(V.2a)}\\
Z_\psi\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](\tau,\bar\tau) &= \big|\vartheta\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](0,\tau)\big|^{d}\,\big|\eta(\tau)\big|^{-d} && \text{(V.2b)}\\
Z_{bc}(\tau,\bar\tau) &= \big|\eta(\tau)\big|^{4} && \text{(V.2c)}\\
Z_{b'c'}(\tau,\bar\tau) &= \big|\eta(\tau)\big|^{4} && \text{(V.2d)}\\
Z_{\beta\gamma}\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](\tau,\bar\tau) &= \big|\vartheta\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](0,\tau)\big|^{-4}\,\big|\eta(\tau)\big|^{4}\,. && \text{(V.2e)}
\end{aligned}$$

Dabei hängen die Determinanten der Fermionen und der durch die Supersymmetrietransformationen erzeugten Geister von den Spinstrukturen (α,β) und damit von der Wahl des $U(1)$ Eichfeldes auf der Weltfläche ab. Insgesamt ergibt sich damit der Beitrag der Oszillatormoden in d reellen Dimensionen

$$\begin{aligned}
Z_d\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](\tau,\bar\tau) &= Z_Z(\tau,\bar\tau)\, Z_\psi\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](\tau,\bar\tau)\, Z_{bc}(\tau,\bar\tau)\, Z_{b'c'}(\tau,\bar\tau)\, Z_{\beta\gamma}\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](\tau,\bar\tau)\\
&= \big|\vartheta\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](0,\tau)\big|^{d-4}\,\big|\eta(\tau)\big|^{-3\,(d-4)}\,. && \text{(V.3)}
\end{aligned}$$

[74]Zur Berechnung der Determinanten siehe Anhang D. Die fundamentalen Bausteine dieser Determinanten, die Jacobi Thetafunktionen und die Dedekind Etafunktionen, werden in Anhang F dargestellt.

In vier Dimensionen ist dieser Ausdruck gleich eins, $Z_4\left[\substack{\alpha\\\beta}\right](\tau,\bar\tau) = 1$, so daß die Spur über die Oszillatormoden (V.1) in der kritischen Dimension des $N{=}2$ Strings nicht zur Zustandssumme beiträgt. Es sind also im folgenden lediglich die Beiträge der Nullmoden im Pfadintegral und die Integrationen über die Moduliräume zu betrachten.

V.1.2 Integrationsmass und konforme Killing-Gruppe

In der superkonformen Eichung nimmt die Metrik auf der Weltfläche die Form $ds^2 = |dz|^2$ an. Eine metrische Modulitransformation deformiert die komplexe Struktur auf der Riemann-Fläche, $dz \to dz + \delta\kappa\, d\bar z$. Damit ergibt sich die folgende Modulitransformation der Metrik

$$ds^2 \to \left|dz + \delta\kappa\, d\bar z\right|^2 = \left|dz\right|^2 + \delta h_{hh}\,(dz)^2 + \delta h_{\bar z\bar z}\,(d\bar z)^2 + \mathcal{O}(\kappa^2)\,, \tag{V.4}$$

mit $\delta h_{zz} = \delta\bar\kappa$ und $\delta h_{\bar z\bar z} = \delta\kappa$. Die Norm im Raum der Variationen der Metrik ist also $\left\|\delta h\right\|^2 = \int d^2z\,\sqrt{-h}\,\left(h^{z\bar z}\right)^2 2\,\delta h_{\bar z\bar z}\delta h_{\bar z\bar z} = 8\,|\delta\kappa|^2\,\tau_2$, wobei τ_2 das Volumen des durch die Weltfläche beschriebenen Torus ist. Da der Integrationsbereich des Teichmüllerparameters τ einfacher zu bestimmen ist als derjenige der Deformationen der komplexen Struktur κ ist es sinnvoll, $\delta\kappa$ durch $\delta\tau$ auszudrücken. Die Gleichung (V.4) hat in den Koordinaten σ^α auf der Weltfläche die Form

$$ds^2 = \left| - d\sigma^0 + \tau\, d\sigma^1 - \delta\kappa\, d\sigma^0 + \delta\kappa\,\bar\tau\, d\sigma^1\right|^2 = \left|1+\delta\kappa\right|^2\,\left|-d\sigma^0 + \frac{\tau + \delta\kappa\,\bar\tau}{1+\delta\kappa}\,d\sigma^1\right|^2\,. \tag{V.5}$$

Daraus kann man ablesen, daß gilt, $\delta\tau = -2i\,\tau\,\delta\kappa$. Die Norm der Variation der Metrik ist also in Abhängigkeit von den Teichmüllertransformationen $\delta\tau$ gegeben durch den Ausdruck $\|\delta h\|^2 = 2\,|\delta\tau|^2/\tau_2$. Aus Gleichung (III.9) ergibt sich der Maßfaktor für die metrischen Moduliintegrationen

$$d\mu_\tau = 2\,\frac{d^2\tau}{\tau_2}\,. \tag{V.6}$$

Jeder der zwei (konstanten) reellen konformen Killing-Vektoren auf dem Torus liefert bei der Integration über die Weltfläche einen Volumenfaktor, der proportional zur Fläche τ_2 des Torus ist. Insgesamt ist das Volumen der metrischen konformen Killing-Gruppe also $\mathrm{Vol}\,(CKV) = \tau_2^2$. Da diese zusätzliche Symmetrie bei der Berechnung der Zustandssumme nicht zur Fixierung von Freiheitsgraden verwendet werden kann, muß der Integrand durch das Symmetrievolumen dividiert werden.

Die Norm der Variation des Eichfeldes ist $\|\delta A\| = \int d^2z\,\sqrt{-h}\,h^{z\bar z}\,\delta A_z\delta A_{\bar z} = 4\,\tau_2\,|\delta A_z|^2$. Damit ist der entsprechende Maßfaktor nach (III.9) gegeben durch $\mu_A = \tau_2\,d^2A$. Bei der Bestimmung des Integrationsbereiches ist zu berücksichtigen, daß die sogenannten "großen" Eichtransformationen[75] aus dem Raum der möglichen Konfigurationen ausdividiert werden müssen. Eine Transformation $A \to A + \gamma$ mit $\gamma\cdot\omega = 2\pi\,n$, $n \in \mathbb{Z}$ läßt die Wirkung invariant, wenn $\omega \in \Omega_\tau$ in dem Gitter liegt, das den Torus der Weltfläche des Strings durch $\mathbb{C}/\Omega_\tau$ beschreibt. Die $U(1)$ Moduli, über die integriert werden muß, liegen also in dem zur Weltfläche dualen Torus, mit

[75] Siehe dazu Abschnitt III.3.4.

dem Volumen $4\pi/\tau_2$. Da die Determinanten in der kritischen Dimension nicht von der Spinstruktur abhängen, hebt sich der Faktor τ_2 im Integrationsmaß mit dem $1/\tau_2$ im entsprechenden Integrationsvolumen gerade weg. Der $U(1)$ Moduliraum liefert also lediglich einen konstanten Vorfaktor als Beitrag zur Zustandssumme[76]. Auf dem Torus gibt es zwei reelle konforme Killing-Skalare ϕ_1 und ϕ_2, die Werte im Intervall $[0,1]$ annehmen. Aus der Norm $\|\delta\phi_i\|^2 = \int d^2z\,\sqrt{-h}\,(\delta\phi_i)^2 = \tau_2\,(\delta\phi_i)^2$ erhält man das Volumen der durch einen konformen Killing-Spinor erzeugten Symmetriegruppe, $\mathrm{Vol}\,(\phi_i) = \int_0^1 \sqrt{\tau_2}\,d\phi_i = \sqrt{\tau_2}$. Das Volumen der von den $U(1)$ Transformationen erzeugten konformen Killing-Gruppe ist also $\mathrm{Vol}\,(CKS) = \tau_2$.

Bei der in Abschnitt III.3.3 getroffenen Wahl des δ-förmigen Trägers der fermionischen Moduli kompensieren sich die konformen Killing-Spinoren und die Integration über den fermionischen Moduliraum gegenseitig [106]. Der Beitrag der entsprechenden Felder setzt sich zusammen aus einer Integration über die Nullmoden der fermionischen Materiefelder und über die Modulitransformationen der Gravitinos, sowie aus einer Integration über die Nullmoden der Supersymmetrietransformationen, die gerade das Volumen der fermionischen konformen Killing-Gruppe ergibt. In das Pfadintegral ist also der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{Pfaff}}{\mathrm{Vol}\,(CKSp)} = \left(\frac{\int [d\psi_0][d\chi]\,e^{-\tau_2^3\int\,\psi_0^+\chi^+\cdot\psi_0^-\chi^-}}{\int [d\epsilon_0]}\right)^2 \tag{V.7}$$

einzusetzen [58], mit dem aus der Brink-Schwarz-Wirkung (II.13) erhaltenen Wechselwirkungsterm aus zwei fermionischen Materiefeldern und zwei Gravitinos. Pfaff ist dabei die im Zähler auf der rechten Seite definierte Pfaffsche Form. Dieser Ausdruck liefert den Beitrag τ_2^4 im Integranden. Dieser Faktor wird durch die Nullmoden der bosonischen Geister $\gamma^\pm$ kompensiert. Die Determinante der Eichfixierung der Supersymmetrietransformationen führt zur Integration über die bosonischen Geister[77],

$$\left(\det{}'\,\mathcal{P}_{1/2}^\dagger\mathcal{P}_{1/2}\right)^{-1} = \frac{\int [d\beta^\mp][d\gamma^\pm]'\,e^{-\int\beta^-\mathcal{P}_{1/2}\gamma^+ + \beta^+\mathcal{P}_{1/2}\gamma^-}}{\int [d\beta^\mp][d\gamma^\pm]' e^{-\|\beta^+\|-\|\beta^-\|-\|\gamma^+\|-\|\gamma^-\|}}\,. \tag{V.8}$$

Der Zähler liefert die Spur über die Oszillatormoden (V.1), während der Nenner den Beitrag der Nullmoden der Geistfelder beschreibt. Insgesamt liefert Gleichung (V.8) also den Beitrag $\tau_2^{-4}\,\mathrm{tr}'\,q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}$ zum Integranden. Der Vorfaktor τ_2^{-4} wird durch Gleichung (V.7) kompensiert, so daß lediglich der Beitrag der bosonischen Geister zur Spur über die Oszillatormoden übrig bleibt.

V.1.3 NULLMODEN

Die Nullmoden der bosonischen Materiefelder $Z\mu$ liefern zusätzliche Faktoren τ_2 im Pfadintegral. Für jede Raumzeit Richtung erhält man ein Impulsintegral der Form

$$\int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\tau_2\,p^2/2} = \frac{1}{\sqrt{\tau_2}}\,. \tag{V.9}$$

[76] Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man die Wirkung der $U(1)$ Transformationen nach Gleichungen (II.33a) und (II.33b) in die Spinstrukturen der fermionischen Felder absorbiert. Das Integrationsmaß auf dem Torus der Spinstrukturen ist $d\alpha d\beta$, das Integrationsvolumen ist $\int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta = 1$.

[77] Dabei bedeutet $\det'$ und $\int[\dots]'$, daß bei der Berechnung der Determinante bzw. bei der Integration die Nullmoden der Geister und Antigeister unterdrückt werden.

Insgesamt liefern die bosonischen Materiefelder in der kritischen Dimension also den Beitrag τ_2^{-2} zum Integranden.

Die Reparametrisierungsgeister haben im holomorphen und im antiholomorphen Sektor jeweils eine Nullmode. Ihr Beitrag kann wie in Gleichung (V.8) aus der Determinante der Eichfixierung abgelesen werden,

$$\left(\det{}' \mathcal{P}_1^\dagger \mathcal{P}_1\right)^{1/2} = \frac{\int [db][dc]'\, e^{-\int b\mathcal{P}_1 c}}{\int [db][dc]'\, e^{-\|b\|^2-\|c\|^2}}\,. \qquad \text{(V.10)}$$

Wie schon im oben diskutierten fermionischen Fall liefert der Zähler den Geistbeitrag zur Spur über die Oszillatormoden, während der Nenner den Wert τ_2^{-2} liefert [120]. Der Beitrag der Nullmoden der Reparametrisierungsgeister ist also τ_2^2.

Das $U(1)$ Geistsystem (b', c') kann genau so behandelt werden wie das Reparametrisierungsgeistsystem (b, c). Seine Nullmoden tragen ebenso einen Faktor τ_2^2 zum Integranden bei. Die fermionischen Materiefelder und die bosonischen Supersymmetriegeister wurden schon im Abschnitt V.1.2 behandelt. Diese Felder liefern weder einen Beitrag zur konformen Killing-Gruppe, noch zu den Nullmoden im Pfadintegral.

V.1.4 Integration über die metrischen Moduli

Nachdem in den obigen Abschnitten alle Bestandteile der Zustandssumme des $N{=}2$ Strings berechnet wurden, kann nun der vollständige Integrand des eichfixierten Pfadintegrals konstruiert und die verbleibende Integration über den metrischen Moduliraum ausgeführt werden. Man erhält den Ausdruck

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{A}_0^{0,0} = \int d\mu_\tau\, d\mu_A\, \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(CKV)\,\mathrm{Vol}\,(CKS)} \cdot \big(Z\text{-, } c\text{- und } c'\text{-Nullmoden}\big) \\ &= \int_{\mathcal{F}} d\mu_\tau \int d\mu_A\, \tau_2^{-2}\, \tau_2^{-1}\, \tau_2^{-2}\, \tau_2^2\, \tau_2^2 = \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} = \frac{\pi}{3}\,. \end{aligned} \qquad \text{(V.11)}$$

Dabei wird τ über den Fundamentalbereich der metrischen Moduliraumes $\mathcal{F}$ aus (III.22) integriert. Die Zustandssumme des $N{=}2$ Strings ist also eine endliche Konstante. Dieses Ergebnis wurde bereits in Gleichung (II.92) verwendet, um zu zeigen, daß das Spektrum des $N{=}2$ Strings keine angeregten Zustände enthält.

Die Zustandssumme des $N{=}2$ Strings unterscheidet sich jedoch von der aus der entsprechenden effektiven Feldtheorie erhaltenen [103]. Die Amplitude des $N{=}2$ Strings auf dem Torus ohne äußere Zustäende hat in $d{=}4$ Dimensionen die Form (V.11) $Z = \int_{\mathcal{F}} d^2\tau/\tau_2^{d/2}$. Die Zustandssumme der Plebanski-Wirkung hat in d Dimensionen die Form[78]

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{SDG}} &= \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{p^2+m^2} = \int_0^\infty ds \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\, e^{-s\,(p^2+m^2)} \\ &= \frac{1}{2\,(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1+d/2}}\, e^{-sm^2}\,. \end{aligned} \qquad \text{(V.12)}$$

[78] Die Masse m wird zur Regularisierung der divergenten Integration eingeführt und kann zum Vergleich mit dem Stringtheorie Ergebnis auf Null gesetzt werden.

Dabei wurde die Schwinger-Zeit s eingeführt, die dem Parameter τ_2 in der Stringamplitude entspricht. Wie üblich ist der Integrationsbereich im Fall der Feldtheorie ein anderer als im Fall der Stringtheorie, da die modulare Invarianz der Stringtheorie eine natürliche UV-Regularisierung erzeugt [120]. Die Gleichungen (V.11) und (V.12) unterscheiden sich jedoch nicht nur im Integrationsbereich. Die Potenz von τ_2 in der Zustandssumme der Stringtheorie entspricht einer Feldtheorie in $d{=}2$ reellen Dimensionen, obwohl der Targetraum, in dem die effektive Feldtheorie definiert ist, in der kritischen Dimension reell vierdimensional ist. Diese Abweichung zwischen der kritischen Dimension der Stringtheorie und der Dimension der Feldtheorie-Interpretation ihrer Loop-Amplituden wird auch bei der Drei-Punkt- und der Vier-Punkt-Amplitude auf dem Torus wieder auftauchen.

V.2 DIE 3-PUNKT-AMPLITUDE

Die nächste nicht verschwindende Ein-Loop-Amplitude des $N{=}2$ Strings nach der Zustandssumme ist die Drei-Punkt-Amplitude auf dem Torus. Entsprechend der Diskussion in Abschnitt III.3.3 sind zur Berechnung dieser Amplitude Vertexoperatoren mit einer Gesamtbildladung $\pi^+ = \pi^- = 0$ in das Pfadintegral einzusetzen, also zum Beispiel drei Vertexoperatoren im $(0,0)$ Bild, deren holomorphe Hälfte die Form (II.107) hat,

$$V_{(0,0)\,\mathrm{hol}}(k,z) = \big(k\cdot\partial_z\bar{Z} - \bar{k}\cdot\partial_z Z - i\,k\cdot\psi^-\,\bar{k}\cdot\psi^+\big)\,e^{i\,k\cdot Z}\,. \tag{V.13}$$

Die holomorphe Hälfte der Amplitude des geschlossenen Strings ist dann durch den Ausdruck gegeben

$$F(z_1,z_2,z_3) = \langle V_{(0,0)\,\mathrm{hol}}(k_1,z_1)\,V_{(0,0)\,\mathrm{hol}}(k_1,z_1)\,V_{(0,0)\,\mathrm{hol}}(k_1,z_1)\rangle\,, \tag{V.14}$$

der über die Positionen z_i der Vertexoperatoren, über den metrischen Teichmüller-Parameter τ und über die $U(1)$ Moduli zu integrieren ist. Da der Integrand nicht von den Spinstrukturen abhängt, liefert die Integration über die $U(1)$ Moduli lediglich das auf Eins normierte Volumen der Symmetriegruppe. Zur Berechnung der Korrelationsfunktion $F(z_1,z_2,z_3)$ sind sämtliche Kontraktionen zwischen den Feldern durch die entsprechenden Propagatoren aus (F.18) und (F.23) zu ersetzen,

$$\begin{aligned}
\langle Z^\mu(z)\,\bar{Z}^{\bar\nu}(w)\rangle &= -\eta^{\mu\bar\nu}\,\ln\big|E(z-w)\big|^2 + \eta^{\mu\bar\nu}\,\frac{2\pi}{\tau_2}\,\big(\mathrm{Im}\,(z-w)\big)^2 && \text{(V.15a)}\\
&\equiv \eta^{\mu\bar\nu}\,\Delta(z,w)\\
\langle \psi^{+\mu}(z)\,\psi^{-\bar\nu}(w)\rangle &= \eta^{\mu\bar\nu}\,S\big[{\alpha \atop \beta}\big](z-w)\,. && \text{(V.15b)}
\end{aligned}$$

Die aus (V.14) erhaltenen Kontraktionen lassen sich in drei Klassen einteilen[79]. Man erhält Terme mit drei fermionischen Feldern, Terme mit zwei fermionischen Feldern und einem bosonischen Feld und Terme ohne Beiträge der Fermionen. Aufgrund der Kinematik der Drei-Punkt-Funktion[80] tragen die Koba-Nielsen-Terme der Form

[79] Diese Einteilung spielt eine wichtige Rolle bei der Berechnung der Vier-Punkt-Amplitude auf dem Torus in Abschnitt V.3 und wird dort genauer erläutert.

[80] Aus Impulserhaltung und Massenschalenbedingung folgt hier, daß sämtliche Skalarprodukte zwischen Impulsen verschwinden.

$\langle e^{i\,k_1\cdot Z(z_1)}\, e^{i\,k_2\cdot Z(z_2)}\rangle$ nicht zur Amplitude bei, und auch die möglichen Kontaktterme, d.h. Kontraktionen der Form $\langle \partial_z Z^\mu(z)\, \partial_{\bar z} \bar Z^{\bar\nu}(w)\rangle$ zwischen der holomorphen und der antiholomorphen Hälfte verschwinden. Der Integrand der vollen Amplitude ist also durch das Betragsquadrat von $F(z_1, z_2, z_3)$ gegeben.

Zur Berechnung von $F(z_1, z_2, z_3)$ sind zunächst die Singularitäten dieses Ausdrucks zu bestimmen. Für $z_1 \to z_2$ liefern die Kontraktionen zwischen zwei fermionischen Termen einen Pol zweiter Ordnung[81] z_{12}^{-2}, der jedoch aufgrund seines Impulsvorfaktors $k_1\cdot \bar k_2 + \bar k_1 \cdot k_2 = 0$ verschwindet. Die Pole erster Ordnung z_{12}^{-1} heben sich zwischen den verschiedenen bosonischen Termen gegenseitig weg, und auch der konstante Beitrag zur Amplitude z_{12}^0 verschwindet. $F(z_1, z_2, z_3)$ ist also regulär in z_1, und $\partial_{\bar z_1} F$ würde verschwinden, wenn es keine nicht holomorphen Beträge aus der Nullmode des bosonischen Propagators (V.15a) gäbe. Man erhält

$$\begin{aligned} \partial_{\bar z_1} F(z_1,z_2,z_3) &= \frac{\pi}{\tau_2}\Big(\langle V_{(0,0)\,\mathrm{hol}}(k_1,z_1)\, V_{(0,0)\,\mathrm{hol}}(k_3,z_3)\, e^{i\,k_2\cdot Z(z_2)}\rangle \\ &\quad + \langle V_{(0,0)\,\mathrm{hol}}(k_1,z_1)\, V_{(0,0)\,\mathrm{hol}}(k_2,z_2)\, e^{i\,k_3\cdot Z(z_3)}\rangle\Big)\,. \end{aligned} \tag{V.16}$$

Unter Ausnutzung der Impulsidentitäten $c_{12} = -c_{13} = c_{23}$ erhält man daraus

$$\partial_{\bar z_3}\partial_{\bar z_1} F(z_1,z_2,z_3) = -2\left(\frac{\pi}{\tau_2}\right)^2 c_{13}^3\, \partial_{z_1}\Delta(z_{13}) \tag{V.17}$$

und

$$\partial_{\bar z_2}\partial_{\bar z_3}\partial_{\bar z_1} F(z_1,z_2,z_3) = 0\,. \tag{V.18}$$

Gleichung (V.17) läßt sich mit Hilfe der bosonischen Greensfunktion $\Delta(z_{ij})$ integrieren [41],

$$F(z_1,z_2,z_3) = -\frac{2}{\tau_2^2}\sum_{i<j} c_{ij}^3 \int d^2x\, d^2y\, \partial_{z_i}\Delta(z_i - x)\, \partial_x \Delta(x-y)\, \partial_{z_j}\Delta(z_j - y)\,. \tag{V.19}$$

Mit dem Betragsquadrat des Ausdrucks (V.19) kann die Drei-Punkt-Amplitude des $N{=}2$ Strings auf dem Torus im Chern-Zahl $M = 0$ Sektor angegeben werden,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3,0}^{6,0} &= \int_{\mathcal F} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \int d^2z_1\, d^2z_2\, d^2z_3\, \big|F(z_1,z_2,z_3)\big|^2 \\ &= -12 \int_{\mathcal F} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2}\left(\frac{\pi}{\tau_2}\right)^3 c_{12}^6 \int d^2x\, d^2y\, d^2z\, \Delta(x-y)\,\Delta(y-z)\,\Delta(z-x) \end{aligned} \tag{V.20}$$

Mit der spektralen Zerlegung des Laplace-Operators

$$\Delta(z,w) = -\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \psi^*_{mn}(z)\,\frac{1}{\lambda_{mn}}\,\psi_{mn}(w) \tag{V.21}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{mn} = \frac{4\pi^2}{\tau_2^2}\,|m - n\tau|^2$ von Δ erhält man daraus das IR divergente Ergebnis

$$\mathcal{A}_{3,0}^{6,0}(k_1,k_2,k_3) = \frac{3}{16}\, c_{12}^6 \int \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{\tau_2^3}{|m-n\tau|^6}\,. \tag{V.22}$$

[81] Es ist $z_{ij} \equiv z_i - z_j$.

Die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (V.22) ist die nicht holomorphe Eisenstein-Reihe

$$E_3(\tau,\bar\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{\tau_2^3}{|m-n\tau|^6}\,, \tag{V.23}$$

welche die Bedingung $\tau_2^2\,\partial_\tau\partial_{\bar\tau}E_3(\tau,\bar\tau) = 6\,E_3(\tau,\bar\tau)$ erfüllt. Damit läßt sich das Integral in Gleichung (V.22) auswerten. Mit einer Regularisierung, die den Integrationsbereich $\mathcal{F}$ bei $\tau_2=\kappa$ abschneidet, erhält man

$$\mathcal{A}^{6,0}_{3,0}(k_1,k_2,k_3) = \frac{3}{16}\,c_{12}^6 \int d^2\tau\,\left(\partial^2_{\tau_1}+\partial^2_{\tau_2}\right)E_3(\tau,\bar\tau) = \frac{1}{32}\,c_{12}^6\,\partial_{\tau_2}E_3(\tau,\bar\tau)\big|_{\tau_2=\kappa}\,. \tag{V.24}$$

Für $\tau_2\to\infty$ hat die Eisenstein-Reihe E_3 die asymptotische Entwicklung[82]

$$E_3(\tau,\bar\tau) = 2\,\zeta(6)\,\tau_2^3 + \sqrt{\pi}\,\zeta(5)\,\Gamma(5/2)\,\tau_2^{-2} + \mathcal{O}(e^{-2\pi\,\tau_2})\,. \tag{V.25}$$

Bringt man die Impulsstruktur der Amplitude in den Chern-Zahl $M=J=6$ Sektor, nimmt der IR divergenten Anteil die Form an

$$\mathcal{A}^{6,6}_{3,0}(k_1,k_2,k_3) = \frac{1}{840}\left(\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}k_1^{+\dot\alpha}k_2^{+\dot\beta}\right)^6\tau_2^2\big|_{\tau_2=\kappa}\,. \tag{V.26}$$

Alle weiteren Beiträge zur Amplitude verschwinden im Grenzfall für $\kappa\to\infty$.

Zum Vergleich mit der Stringtheorie soll nun die Drei-Punkt-Amplitude der Plebanski-Wirkung auf Ein-Loop-Niveau berechnet werden. Aus der Drei-Punkt-Amplitude auf Tree-Niveau (IV.23) ist die Tensorstruktur der Ein-Loop-Amplitude bereits eindeutig festgelegt,

$$\mathcal{A}^{\text{1-Loop}}_{3\,\mathrm{SDG}}(k_1,k_2,k_3) = \left(\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}k_1^{+\dot\alpha}k_2^{+\dot\beta}\right)^6\bar A_{3\,\mathrm{SDG}}\,. \tag{V.27}$$

Der noch zu bestimmende Proportionalitätsfaktor $\bar A_{3\,\mathrm{SDG}}$ beschreibt ein Dreiecks-Integral der effektiven Feldtheorie, siehe Abbildung V.1.

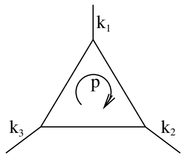

ABBILDUNG V.1 - *Das Dreiecks-Integral der Ein-Loop-Amplitude der selbstdualen Gravitation.*

Das Ein-Loop-Integral (V.27)

$$\mathcal{A}^{\text{1-Loop}}_{3\,\mathrm{SDG}}(k_1,k_2,k_3) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{(p^{+\dot\alpha}k^+_{1\,\dot\alpha})^2\,((p-k_1)^{+\dot\alpha}k^+_{2\,\dot\alpha})^2\,(p^{+\dot\alpha}k^+_{3\,\dot\alpha})^2}{p^2\,(p-k_1)^2\,(p-k_1-k_2)^2}$$

ist IR divergent, da auf der Massenschale alle Impulsquadrate verschwinden, $k_i^2 = k_i^+\!\cdot k_i^- = 0$. Damit scheint die Feldtheorieamplitude mit der Stringamplitude übereinzustimmen, allerdings findet man nach der Einführung eines natürlichen Regulators ein anderes Verhalten der Feldtheorieamplitude im Grenzfall, wenn der Regulator

[82] $\zeta(s)$ ist die Riemann-Zetafunktion mit $\zeta(6)=\pi^6/945$. Die Gammafunktion ist an der betrachteten Stelle $\Gamma(5/2)=3\sqrt{\pi}/4$.

gegen Unendlich strebt. Nach der Einführung von Feynman-Parametern a_i und der Schwinger-Zeit T erhält man für das Dreiecks-Integral den Ausdruck[83]

$$\mathcal{A}_{3\,\mathrm{SDG}}^{\text{1-Loop}}(k_1,k_2,k_3) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \int_0^1 da_1\, da_2\, da_3\, \delta\big(1-a_1-a_2-a_3\big) \int_0^\infty dT\, T^2 \times \qquad (\text{V.28})$$
$$(p^{+\dot\alpha} k^+_{1\,\dot\alpha})^2\, ((p-k_1)^{+\dot\alpha} k^+_{2\,\dot\alpha})^2\, (p^{+\dot\alpha} k^+_{3\,\dot\alpha})^2\, e^{-T\,(a_1 p^2 + a_2\,(p-k_1)^2 + a_3\,(p+k_3)^2)}\,.$$

Nach einer Verschiebung des Loop-Impulses $p \to p + a_2 k_1 - a_3 k_3$ erhält man einen Ausdruck der Form (V.27) mit dem Impulsintegral

$$\bar{A}_{3\,\mathrm{SDG}} = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dT\, T^2 \int_0^1 da_1\, da_2\, da_3\, a_1^2\, a_2^2\, a_3^2\, \delta\big(1-a_1-a_2-a_3\big)\, e^{-T\,p^2}\,. \qquad (\text{V.29})$$

Die Integration über die Loop-Impulse und über die Feynman-Parameter kann einfach ausgeführt werden. In der kritischen Dimension des $N{=}2$ Strings, $d{=}4$, erhält man

$$\bar{A}_{3\,\mathrm{SDG}} = \frac{1}{16\pi^2}\, \frac{1}{15\cdot 5!} \int_0^\infty dT\,. \qquad (\text{V.30})$$

Führt man zur Regularisierung des divergenten Integrals eine endliche obere Integrationsgrenze $T_{\max}$ ein, ergibt sich der divergente Anteil der Drei-Punkt-Amplitude der Feldtheorie auf Ein-Loop-Niveau,

$$\mathcal{A}_{3\,\mathrm{SDG}}^{\text{1-Loop}}(k_1,k_2,k_3) = \big(\varepsilon_{\dot\alpha\beta}\, k_1^{+\dot\alpha} k_2^{+\dot\beta}\big)^6\, \frac{1}{16\pi^2}\, \frac{1}{15\cdot 5!}\, T\big|_{T=T_{\max}}\,. \qquad (\text{V.31})$$

Die Amplituden der Stringtheorie (V.26) und der effektiven Feldtheorie (V.31) können (bis auf numerische Vorfaktoren) identifiziert werden, wenn man die Eigenzeit des Strings $T = \tau_2^2$ einführt und die IR Regulatoren durch $T_{\max} = \kappa^2$ zueinander in Beziehung bringt. Die beiden Loop-Integrale unterscheiden sich um einen Faktor τ_2 im Nenner. Dies entspricht, wie schon im Fall der Zustandssumme in Abschnitt V.1 erwähnt, einer Formulierung der effektiven Feldtheorie in zwei reellen Dimensionen[84] [103]. Da die Drei-Punkt-Amplitude auf Ein-Loop-Niveau sowohl in der Stringtheorie als auch in der effektiven Feldtheorie IR divergent ist, kann dieser Dimensionsunterschied in einer Redefinition des Regulators absorbiert werden. Im Fall endlicher n-Punkt-Amplituden auf 1-Loop-Niveau, für $n \geq 4$, ist eine solche Redefinition nicht möglich. Hier liefern unterschiedliche Faktoren von τ_2 im Stringintegral und im Feldtheorieintegral die Beschreibung von zwei unterschiedlichen Theorien.

V.3 Die Vier-Punkt-Amplitude

Die Vier-Punkt-Amplitude auf dem Torus ist die erste endliche, nicht verschwindende Amplitude des $N{=}2$ Strings, bei der der Dimensionsunterschied zwischen den Loop-Impulsen in der Stringtheorie und in der effektiven Feldtheorie eine Rolle spielt. Aus

[83] Zur Berechnung von n-Punkt-Amplituden einer ϕ^3-Feldtheorie durch die Einführung von Feynman-Parametern und der Schwinger-Zeit siehe Anhang E.

[84] Die Impulse der äußeren Impulse bleiben dabei vierdimensional.

der Untersuchung der Moduliräume in Abschnitt III.3 folgt, daß die Korrelationsfunktion von Vertexoperatoren im $(0,0)$ Bild über die metrischen Moduli und über die Spinstrukturen entlang der Homologiezykel des Torus zu integrieren ist. Dabei ist zum Vergleich mit der Feldtheorie der Grenzfall unendlicher Stringspannung bzw. verschwindender Regge-Steigung $\alpha' \to 0$ von besonderem Interesse. Um zu zeigen, daß das Ergebnis unabhängig davon ist, ob man den Grenzübergang vor oder nach der Moduliintegration ausführt, sollen im folgenden beide Varianten untersucht werden.

V.3.1 DIE KORRELATIONSFUNKTIONEN

Die Kinematik der Vier-Punkt-Funktion führt nicht dazu, daß sämtliche Skalarprodukte von Impulsen auf der Massenschale verschwinden. Anders als in den bisher betrachteten Fällen verschwinden deshalb Kontaktterme aus Kontraktionen der Form

$$\langle \partial_z Z^\mu(z) \partial_{\bar{w}} \bar{Z}^{\bar{\nu}}(w) \rangle = \eta^{\mu\bar{\nu}}\, \delta^{(2)}(z-w) \tag{V.32}$$

nicht mehr aufgrund von kinematischen Identitäten. Um das Auftreten von Kontakttermen dennoch zu vermeiden, ist es sinnvoll, den kanonischen Vertexoperator (II.107) im $(0,0)$ Bild[85]

$$\tilde{V}_{(0,0)}(k,z) = \left(k\cdot\partial\bar{Z} - \bar{k}\cdot\partial Z - i\,k\cdot\psi^-\,\bar{k}\cdot\psi^+\right)\left(k\cdot\bar{\partial}\bar{Z} - \bar{k}\cdot\bar{\partial}Z + i\,k\cdot\bar{\psi}^-\,\bar{k}\cdot\bar{\psi}^+\right)e^{i\,k\cdot Z} \tag{V.33}$$

in einen BRST-äquivalenten Vertexoperator ohne $\bar{\partial}Z$ Terme zu transformieren. Durch die Addition der totalen Ableitung

$$\begin{aligned}&-i\,\partial\left(\left(k\cdot\bar{\partial}\bar{Z} - \bar{k}\cdot\bar{\partial}Z + i\,k\cdot\bar{\psi}^-\,\bar{k}\cdot\bar{\psi}^+\right)e^{i\,k\cdot Z}\right)\\ &\quad -i\,\bar{\partial}\left(\left(k\cdot\partial\bar{Z} - \bar{k}\cdot\partial Z - i\,k\cdot\psi^-\,\bar{k}\cdot\psi^+\right)e^{i\,k\cdot Z}\right) - \partial\bar{\partial}\,e^{i\,k\cdot Z}\end{aligned} \tag{V.34}$$

erhält man unter Ausnutzung der Identität $\partial\, e^{i\,k\cdot Z} = (k\cdot\partial\bar{Z} + \bar{k}\cdot\partial Z)\,e^{i\,k\cdot Z}$ den Vertexoperator im $(0,0)$ Bild,

$$V(k,z) = \left(2\,k\cdot\partial\bar{Z} - i\,k\cdot\psi^-\,\bar{k}\cdot\psi^+\right)\left(2\,k\cdot\bar{\partial}\bar{Z} + i\,k\cdot\bar{\psi}^-\,\bar{k}\cdot\bar{\psi}^+\right)e^{i\,k\cdot Z}\,. \tag{V.35}$$

Dieser Vertexoperator enthält die Komponenten Z^μ des bosonischen Feldes nur im Exponenten und schließt deshalb nicht nur Kontaktterme der Form $\langle \partial Z \bar{\partial}\bar{Z}\rangle$ aus, sondern auch Kontraktionen der Form $\langle \partial Z \partial \bar{Z}\rangle$ und $\langle \bar{\partial} Z \bar{\partial}\bar{Z}\rangle$. Im Gegensatz zum Vertexoperator aus Gleichung (V.33) ist dieser Vertexoperator (V.35) nicht invariant unter komplexer Konjugation. Daher führt die mit $V(k,z)$ berechnete Amplitude nicht zu einem Ausdruck, der als Betragsquadrat einer holomorphen Hälfte geschrieben werden kann, und auch die Einführung von Loop-Impulsen zur holomorphen Faktorisierung der Amplitude [150] ist hier nicht möglich.

Es soll nun das erzeugende Funktional der n-Punkt-Amplitude in der sogenannten Koba-Nielsen-Form konstruiert werden. Der bosonische Anteil dieses Funktionals ist

$$\prod_{j=1}^{n} d\theta_j d\bar{\theta}_j \int d\mu_n\, e^{\int d^2z\, d^2z'\, J^{+\mu}(z)\, G_{\mu\bar{\nu}}(z,z')\, J^{-\bar{\nu}}(z')}\,. \tag{V.36}$$

[85] Zur Vereinfachung der Notation werden wenn keine Verwechslungsgefahr besteht die Abkürzungen $\partial = \partial_z$ und $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$ verwendet.

$G_{\mu\bar{\nu}}(z,z')$ ist der Propagator der bosonischen Felder auf der Weltfläche, während $\int d\mu_n$ die Integration über die Moduliräume der n-fach Punktierten Weltfläche beschreibt. Die Integration über die Grassmann-Variablen θ_j und $\bar{\theta}_j$ führt zu einer Exponenzierung der Vorfaktoren der Vertexoperatoren,

$$k \cdot \partial \bar{Z}\, e^{i\,k\cdot Z} = e^{i\,k\cdot Z + \theta\, k\cdot \partial \bar{Z}}\Big|_{\text{multilinear}} = \int d\theta\, d\bar{\theta}\, e^{i\,k\cdot Z+\theta\, k\cdot\partial\bar{Z}} . \tag{V.37}$$

Dabei bedeutet $|_{\text{multilinear}}$, daß von der Entwicklung des entsprechenden Ausdrucks in den Grassmann-Variablen θ_j nur der Term betrachtet wird, der linear in allen θ_j ist. Der Ausdruck (V.36) reproduziert den bosonischen Anteil der Korrelationsfunktion der Vertexoperatoren $V(k_j, z_j)$ aus (V.35), wenn die Ströme wie folgt gewählt werden[86],

$$J^{+\mu}(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(i\, k_j^\mu\, \delta^{(2)}(z-z_j) + \theta_j\, k_j^\mu\, \partial\delta^{(2)}(z-z_j) + \bar{\theta}_j\, k_j^\mu\, \bar{\partial}\delta^{(2)}(z-z_j)\right) \tag{V.38a}$$

$$J^{-\bar{\nu}}(z) = \sum_{j=1}^{n} i\, k_j^{-\bar{\nu}}\, \delta^{(2)}(z-z_j) . \tag{V.38b}$$

Das Integral im Exponenten von Gleichung (V.36) kann damit ausgewertet werden. Man erhält

$$\prod_{j=1}^{n} d\theta_j d\bar{\theta}_j \int d\mu_n \prod_{i\neq j} e^{-k_i\cdot k_j\, G_{ij} + i\,\theta_i\, k_i\cdot \bar{k}_j\, \partial_i G_{ij} + i\,\bar{\theta}_i\, k_i\cdot\bar{k}_j\, \bar{\partial}_i G_{ij}} , \tag{V.39}$$

mit der bosonischen Zwei-Punkt-Funktion auf dem Torus $G_{ij} = \langle Z(z_i,\bar{z}_i)\bar{Z}(z_j,\bar{z}_j)\rangle = -\ln|E(z_{ij})|^2 + \frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}\,(z_{ij}))^2$. Der bosonische Ausdruck (V.39) läßt sich für einen globalen $N{=}2$ Superraum verallgemeinern,

$$\prod_{j=1}^{n} d\theta_j d\bar{\theta}_j \int d\mu_n^S \prod_{i\neq j} e^{-k_i\cdot k_j\, G_{ij} + i\,\theta_i\, k_i\cdot \bar{k}_j\, D_i^+ G_{ij} + i\,\bar{\theta}_i\, k_i\cdot\bar{k}_j\, D_i^- G_{ij}} . \tag{V.40}$$

Dabei beschreibt $\int d\mu_n^S$ die Integration über die bosonischen und fermionischen Moduliräume der n-fach punktierten $N{=}2$ Super-Riemann-Fläche. Die bosonischen partiellen Ableitungen ∂ und $\bar{\partial}$ wurden durch die Ableitungen im Superraum $D_i^+ = \frac{\partial}{\partial\theta^+} + \frac{i}{2}\theta^+\,\partial$ und $D_i^- = \frac{\partial}{\partial\theta^-} + \frac{i}{2}\theta^-\,\bar{\partial}$ ersetzt, und G_{ij} ist hier der Propagator der Superfelder.

Eichinvarianz und Referenzimpulse

Die Koba-Nielsen-Darstellungen (V.36) bzw. (V.40) der Korrelationsfunktion sind wegen des unvollständigen Skalarproduktes $k_i \cdot \bar{k}_j$ im Exponenten nicht manifest $SO(2,2)$ Lorentz-invariant. Durch die Einführung von sogenannten Referenzimpulsen [18, 46, 79, 87] läßt sich die volle Kovarianz des Koba-Nielsen-Exponenten jedoch verdeutlichen. Mit Hilfe der Spinor-Helizitäts-Techniken [156] läßt sich zudem die Transversalität der Amplitude auf Niveau der Vertexoperatoren nachweisen. Damit

[86] Für die reelle, d.h. unter komplexer Konjugation invariante Form des Vertexoperators $\tilde{V}_{(0,0)}(k,z)$ aus (V.33) ist $J^{-\bar{\mu}}(z)$ das komplex Konjugierte von $J^{+\mu}(z)$.

ist es möglich, den Integrand des N=2 Strings mit demjenigen des Typ IIB Superstrings für Gravitonstreuung zu vergleichen.

Für das weitere Vorgehen ist es sinnvoll, die reelle $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})'$ Bispinor-Notation zu verwenden. Der Zusammenhang zwischen der komplexen Vektor-Notation v^μ, $\bar{v}^{\bar{\nu}}$ und der Bispinor-Notation $v^{\alpha\dot{\alpha}}$ ist der folgende,

$$v^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v^1 + \bar{v}^{\bar{1}} - i\,v^2 + i\,\bar{v}^{\bar{2}} & -i\,v^1 + i\,\bar{v}^{\bar{1}} + v^2 + \bar{v}^{\bar{2}} \\ i\,v^1 - i\,\bar{v}^{\bar{1}} + v^2 + \bar{v}^{\bar{2}} & v^1 + \bar{v}^{\bar{1}} + i\,v^2 - i\,\bar{v}^{\bar{2}} \end{pmatrix} . \tag{V.41}$$

Damit nimmt das $U(1,1)$ Skalarprodukt die Form an,

$$2\,v \cdot \bar{w} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left(v^{+\dot{\alpha}} w^{-\dot{\beta}} - v^{-\dot{\alpha}} w^{+\dot{\beta}} - i\,v^{+\dot{\alpha}} w^{+\dot{\beta}} - i\,v^{-\dot{\alpha}} w^{-\dot{\beta}} \right) . \tag{V.42}$$

Ein masseloser Bispinor $k^{\alpha\dot{\alpha}}$ mit $\det k^{\alpha\dot{\alpha}} = 0$ läßt sich in zwei Weyl-Spinoren zerlegen, $k^{\alpha\dot{\alpha}} = k^\alpha k^{\dot{\alpha}}$. Zu jedem masselosen Bispinor kann ein Spinor $q = q(k)$ definiert werden[87],

$$\begin{pmatrix} q^+ \\ q^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^+ \\ k^- \end{pmatrix} . \tag{V.43}$$

Es ist also $q^+ = -i\,q^-$. Folglich lassen sich $U(1,1)$ Skalarprodukte durch

$$k \cdot \bar{v} = -\frac{1}{2}\, q_\beta k_{\dot{\beta}}\, v^{\beta\dot{\beta}} \tag{V.44}$$

in $SO(2,2)$ kovarianter Form ausdrücken.

Die beiden physikalischen Polarisationsvektoren $\epsilon^{\pm}_{\alpha\dot{\alpha}}$ kïnen als Produkt von Spinoren durch

$$\epsilon^+_{\alpha\dot{\alpha}}(k;q) = i\,\frac{q_\alpha k_{\dot{\alpha}}}{q^\beta k_\beta} \qquad \text{und} \qquad \epsilon^-_{\alpha\dot{\alpha}}(k;q) = -i\,\frac{q_{\dot{\alpha}} k_\alpha}{q^{\dot{\beta}} k_{\dot{\beta}}} \tag{V.45}$$

dargestellt werden. Sie haben die konstanten Skalarprodukte $\epsilon^+ \cdot \epsilon^- = -1$ und $\epsilon^\pm \cdot \epsilon^\pm = 0$. Unter beliebigen Transformationen des Referenzimpulses $q \to q'$ ändern sich die Polarisationsvektoren um einen zum Impuls proportionalen Term,

$$\epsilon^\pm_{\alpha\dot{\alpha}}(k;q') = \epsilon^\pm_{\alpha\dot{\alpha}}(k;q) + f(q',q;k)\,k_{\alpha\dot{\alpha}} . \tag{V.46}$$

Da die Polarisationsvektoren in den Amplituden stets mit den entsprechenden Impulsen multipliziert werden, verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (V.46) für masselose Impulse $k^{\alpha\dot{\alpha}}$. Damit hängen die für die Amplituden erhaltenen Ausdrücke nicht von der Wahl des Referenzimpulses ab. Die Wahlfreiheit von q stellt eine Eichsymmetrie der Theorie dar. Insbesondere kann man q in einer eichinvarianten Rechnung so wählen, daß viele Kontraktionen in der Korrelationsfunktion von vorneherein verschwinden, um so die Anzahl der zu betrachtenden Terme in Zwischenschritten der Berechnung einer Amplitude zu verringern.

Bei der Berechnung von MHV Amplituden wählt man zum Beispiel die Referenzimpulse aller Polarisationsvektoren identisch, $q_i = q$ für $i = 1, \ldots, n$. Diese Wahl

[87] Die Matrix hat eine verschwindende Determinante, d.h. sie ist entartet und kann nicht durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Identität überführt werden.

eliminiert sämtliche Skalarprodukte von Polarisationsvektoren, $\epsilon^+(k_i;q)\cdot\epsilon^+(k_j;q)=0$. Da aus Dimensionsgründen jedes Diagramm mindestens ein Skalarprodukt von Polarisationsvektoren enthalten muß, folgt aus dieser Wahl der Referenzimpulse unmittelbar das Verschwinden aller MHV Amplituden auf Tree-Niveau. Aufgrund des in Abschnitt IV.3 erläuterten Zusammenhangs zwischen MHV Amplituden und dem selbstdualen Sektor von Feldtheorien folgt damit auch unmittelbar die Trivialität der klassischen Streuung in selbstdualen Feldtheorien [49]. Auf Loop-Niveau erlaubt diese Eichung den direkten Vergleich zwischen Berechnungen von Amplituden des $N{=}2$ Strings und denen der effektiven Feldtheorie. In der Koba-Nielsen Darstellung der Stringamplitude (V.36) gibt es keine Terme der Form $\partial\bar{\partial}G_{ij}$, die zu Skalarprodukten zwischen Polarisationsvektoren $\epsilon_i^+\cdot\epsilon_j^+$ führen könnten. Folglich enthält die Korrelationsfunktion des $N{=}2$ Strings ausschließlich die Terme, die auch in der entsprechenden selbstdualen Feldtheorie mit den obigen Referenzimpulsen vorkommen.

Zur besseren Vergleichbarkeit der Stringtheorie mit der effektiven Feldtheorie soll der Vertexoperator (V.35) noch mit einem impulsabhängigen Vorfaktor normiert werden,

$$V'(k_i)=\left(\frac{1}{q_i^\alpha k_{i\,\alpha}}\right)^2 V(k_i)\,, \tag{V.47}$$

wobei die q_i Gleichung (V.43) erfüllen. Vom Feldtheorie-Standpunkt aus betrachtet entspricht dies der Multiplikation aller äußerer Linien mit einem Impulsfaktor. $V'(k)$ hat die Form des Graviton-Vertexoperators in der Typ IIB Superstringtheorie,

$$V'(k,\epsilon)=\epsilon^+_{\alpha\dot\alpha}\epsilon^+_{\beta\dot\beta}\left(\partial Z^{\alpha\dot\alpha}-i\,\psi^{\alpha\dot\alpha}\,\bar{k}\cdot\psi^+\right)\left(\bar\partial Z^{\alpha\dot\alpha}+i\,\bar\psi^{\alpha\dot\alpha}\,\bar{k}\cdot\bar\psi^+\right)e^{i\,k\cdot Z}\,. \tag{V.48}$$

Dieser Vertexoperator ist aufgrund der Eichinvarianz (V.46) der Polarisationsvektoren offensichtlich Lorentz-invariant im Targetraum. Die Gravitonpolarisation in $d{=}2+2$ Dimensionen erhält man aus den in Gleichung (V.45) definierten Polarisationsvektoren durch die Identifikation

$$\epsilon^{++}_{\alpha\dot\alpha\,\beta\dot\beta}(k)\equiv\epsilon^+_{\alpha\dot\alpha}(k)\,\epsilon^+_{\beta\dot\beta}(k)\,. \tag{V.49}$$

Der Vertexoperator der $N{=}2$ Strings im $(0,0)$ Bild kann durch Multiplikation mit einem impulsabhängigen Vorfaktor aus dem Graviton-Vertexoperator des Typ IIB Superstrings mit dem durch (V.43), (V.45) und (V.49) definierten Polarisationsvektor gewonnen werden. Damit entsprechen auch die Loop-Amplituden des $N{=}2$ Strings denen der Gravitonstreuung des Typ IIB Superstrings in $2+2$ Dimensionen mit der entsprechenden Polarisation. Der obige Beweis wurde für den Vertexoperator im Chern-Zahl $M=0$ Sektor durchgeführt. Allerdings wurde schon bei der Berechnung der Tree-Level-Amplituden in Kapitel IV gezeigt, daß man den Vertexoperator im Chern-Zahl M Sektor aus dem mit verschwindender Chern-Zahl durch die Multiplikation mit einem Impulsfaktor $h(k)$ erhält, $V^M(k)=h(k)^M\,V(k)$. Folglich lassen sich sämtliche Ein-Loop-Amplituden des $N{=}2$ Strings aus denen des Typ IIB Superstrings ableiten.

Der Vertexoperator $V'(k,\epsilon)$ aus (V.48) führt zur Koba-Nielsen-Darstellung der

Gravitonstreuung des Typ IIB Superstrings. Für den bosonischen Anteil erhält man[88]

$$\int d\mu_n \prod_{i\neq j} e^{-k_i\cdot k_j\, G_{ij}} \prod_{i\neq j} \left| e^{\epsilon_{[i}\cdot k_{j]}\,\partial_i G_{ij} + \epsilon_i\cdot\epsilon_j\,\partial_i\partial_j G_{ij} + \epsilon_i\cdot\bar\epsilon_j\,\partial_i\bar\partial_j G_{ij}} \right|^2 \Big|_{\text{multilinear}} . \tag{V.50}$$

Hierbei bedeutet $|_{\text{multilinear}}$ bedeutet, daß von der Entwicklung der Exponentialfunktion nur die Terme betrachtet werden, die linear in allen Polarisationsvektoren ϵ_i und $\bar\epsilon_i$ sind. Die Amplitude des $N{=}2$ Strings unterscheidet sich von derjenigen des Superstrings darin, daß das Integral (V.50) im $d{=}2+2$ dimensionalen Targetraum auszuwerten ist, und daß die Integration $\int d\mu_n$ über den Moduliraum auch die Integration über die $U(1)$ Moduli, d.h. über die Spinstrukturen auf dem Torus, umfaßt. Die supersymmetrische Verallgemeinerung der Koba-Nielsen-Darstellung der Amplitude erhält man wie schon im Fall der Amplitude (V.36) durch die Ersetzungen

$$\partial_i G_{ij} \to D_i^+ G_{ij} \quad , \qquad \partial_i\partial_j G_{ij} \to D_i^+ D_j^+ G_{ij} \quad \text{und} \qquad \partial_i\bar\partial_j G_{ij} \to D_i^+ D_j^- G_{ij} \, . \tag{V.51}$$

Im Fall des $N{=}2$ Strings sind die Referenzimpulse gemäß Gleichung (V.43) zu wählen. Sie erfüllen die Bedingung $q_i^\alpha q_{j\,\alpha} = 0$, woraus folgt, daß alle Skalarprodukte zwischen Polarisationsvektoren verschwinden,

$$\epsilon_i \cdot \epsilon_j = 0 \quad \text{und} \qquad \epsilon_i \cdot \bar\epsilon_j = 0 \, . \tag{V.52}$$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck (V.50) beträchtlich, und man erhält wieder die Koba-Nielsen-Darstellung der n-Punkt-Amplitude des $N{=}2$ Strings aus Gleichung (V.40).

V.3.2 DER STRINGINTEGRAND

In diesem Abschnitt wird das Integrationsmaß der Vier-Punkt-Amplitude des $N{=}2$ Strings auf dem Torus untersucht und die Korrelationsfunktion der Vertexoperatoren im Pfadintegral aus Gleichung (V.40) mit Hilfe der Zwei-Punkt-Funktionen der bosonischen und fermionischen Materiefelder auf der Weltfläche angegeben.

Die Integration über den metrischen Moduliraum besteht aus der Integration des Teichmüller-Parameters τ über den Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ aus Gleichung (III.22) und aus einer Integration über die Positionen der Vertexoperatoren auf dem Torus $\mathcal{T}$. Die Integration über die fermionischen Moduli wurde bereits ausgeführt und liefert die Auswahlregel der Vertexoperatoren im $(0,0)$ Bild. Der $U(1)$ Moduliraum beschreibt die Konfiguration des $U(1)$ Eichbündels auf der Weltfläche und die Monodromien um die Positionen der Vertexoperatoreinsetzungen. Letztere können, wie schon in Abschnitt III.3.4 gezeigt wurde, mit Hilfe des Spektralflusses eliminiert werden, so daß die Integration über die $U(1)$ Moduli zu einer Integration über die Spinstrukturen (α,β) entlang der Homologiezykel der Weltfläche führt. Diese Spinstrukturen liegen auf einer Riemann-Fläche vom Genus g in der Jacobi-Varietät der Weltfläche. Für Genus $g=1$, d.h. auf dem Torus, ist diese Jacobi-Varietät jedoch isomorph zur Weltfläche, so daß man die Spinstrukturen durch eine weitere Torusvariable parametrisieren kann,

$$u = \left(\tfrac{1}{2} - \alpha\right)\tau + \left(\tfrac{1}{2} - \beta\right) . \tag{V.53}$$

[88] Die Antisymmetrisierung ist hier definiert als $v_{[i} \cdot w_{j]} = v_i \cdot w_j - v_j \cdot w_i$.

Ein modular invariantes Integrationsmaß des Moduliraumes ist gegeben durch

$$\frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2u}{\tau_2}. \tag{V.54}$$

Die Integrationen der Positionen der Vertexoperatoren über den Torus $\mathcal{T}$ sind in der Form $\int d^2z V(z,\bar{z})$ modular invariant.

Damit ist die Streuamplitude des $N{=}2$ Strings durch den Ausdruck

$$\mathcal{A}_n(k_i) = \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \int_{\mathcal{T}} \frac{d^2u}{\tau_2} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathcal{T}} d^2z_j \prod_{i<j} e^{-k_i\cdot k_j\, G_{ij}}\, K_{KN}\big(z_i,\bar{z}_i;u,\bar{u};\tau,\bar{\tau}\big) \tag{V.55}$$

gegeben. K_{KN} enthält sämtliche Kontraktionen zwischen den Feldern der Vertexoperatoren außer dem Koba-Nielsen-Term, d.h. außer der Kontraktionen ausschließlich zwischen den bosonischen Materiefeldern im Exponenten der Vertexoperatoren. Die genaue Form von K_{KN} kann aus der Entwicklung der rechten Exponentialfunktion in Gleichung (V.50) mit den entsprechenden Polarisationsvektoren abgelesen werden und wird im folgenden noch näher untersucht. Der bosonische Propagator auf dem Torus hat die Form

$$G_{ij} = -\ln E(z_i-z_j) - \ln E(\bar{z}_i-\bar{z}_j) + \frac{2\pi}{\tau_2}\big(\mathrm{Im}\ (z_i-z_j)\big)^2. \tag{V.56}$$

Vernachlässigt man die Nullmoden des bosonischen Propagators (V.56) und des fermionischen Propagators im Ramond-Sektor, lassen sich die Kontraktionen in K_{KN} als Produkt aus holomorpher und antiholomorpher Hälfte schreiben. Alle bei der Entwicklung der Korrelationsfunktion K_{KN} entstehenden Terme können dann als Differenz von bosonischen und fermionischen Propagatoren auf der Weltfläche geschrieben werden, die eventuell mit weiteren bosonischen Propagatoren multipliziert werden. Diese Eigenschaft ist eine Konsequenz der $N{=}2$ superkonformen Invarianz auf der Weltfläche und kann zum Beweis des Verschwindens der entsprechenden Tree-Level-Amplituden verwendet werden. Die verschiedenen Beiträge zur Entwicklung von K_{KN} können in drei Gruppen unterteilt werden, die in Abbildung V.2 dargestellt werden. Dabei ist zu beachten, daß die Vertexoperatoren zwei fermionische Felder enthalten. Folglich sind die fermionischen Kontraktionen stets zyklisch zwischen den Vertexoperatoren.

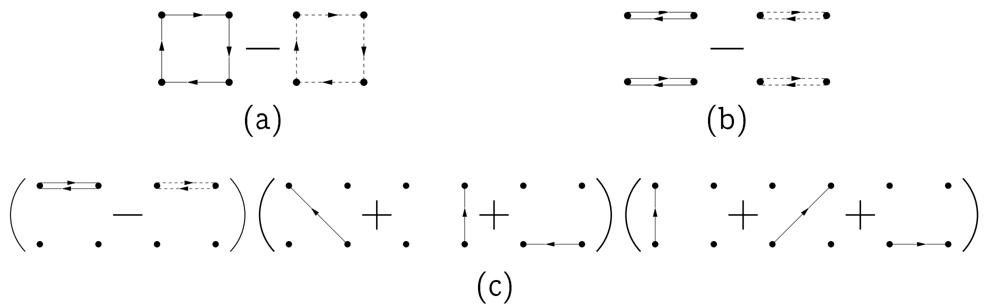

Abbildung V.2 - *Die Beiträge (a) $I^{(1234)}$, (b) $I^{(12)(34)}$ und (c) $I^{(12)}$ zur Amplitude. Die durchgezogenen Linien sind Ableitungen der bosonischen Zwei-Punkt-Funktion auf dem Torus, die unterbrochenen Linien sind holomorphe (oder anti-holomorphe) fermionische Greensfunktionen auf dem Torus.*

Die erste Gruppe von Termen in K_{KN} besteht aus zyklischen Kontraktionen zwischen vier Vertexoperatoren. Diese in Abbildung V.2 (a) dargestellten Terme haben die Form

$$\begin{aligned} I^{(1234)} &= k_1 \cdot \bar{k}_2\, k_2 \cdot \bar{k}_3\, k_3 \cdot \bar{k}_4\, k_4 \cdot \bar{k}_1 \\ &\quad \times \left(\partial_1 G_{12}\, \partial_2 G_{23}\, \partial_3 G_{34}\, \partial_4 G_{41} - S_{12}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right] S_{23}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right] S_{34}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right] S_{41}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right]\right) . \end{aligned} \tag{V.57}$$

Dabei ist $S_{ij}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right] = S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_i - z_j)$ die holomorphe Hälfte des Szegö Kerns. Die umgekehrte Ordnung der Kontraktionen liefert den Term $I^{(4321)}$, den man aus $I^{(1234)}$ durch komplexe Konjugation aller Impulse erhält, $k \leftrightarrow \bar{k}$. Damit ist $I^{(4321)}$ zu $I^{(1234)}$ komplex konjugiert. Durch Permutation der Reihenfolge der Vertexoperatoren erhält man die anderen Beiträge dieser Gruppe $I^{(1324)}$ und $I^{(1243)}$ sowie die umgekehrte Ordnung dieser Terme.

Die nächste Gruppe von Termen der Entwicklung von K_{KN} enthält jeweils zwei Paare von Kontraktionen zwischen zwei Vertexoperatoren, wie in Abbildung V.2 (b) dargestellt wird. Diese Beiträge haben die Form

$$\begin{aligned} I^{(12)(34)} &= -k_1 \cdot \bar{k}_2\, k_2 \cdot \bar{k}_1\, k_3 \cdot \bar{k}_4\, k_4 \cdot \bar{k}_3 \\ &\quad \times \left(\partial_1 G_{12}\, \partial_2 G_{21}\, \partial_3 G_{34}\, \partial_4 G_{43} - S_{12}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right] S_{21}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right] S_{34}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right] S_{43}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right]\right) . \end{aligned} \tag{V.58}$$

Es gibt insgesamt drei Beiträge dieser Form. Die anderen beiden Ordnungen $I^{(13)(24)}$ und $I^{(14)(23)}$ werden wie in Gleichung (V.58) mit entsprechend permutierten Indizes konstruiert.

Die verbleibenden Terme in K_{KN} sind von der in Abbildung V.2 (c) dargestellten Form

$$\begin{aligned} I^{(12)} &= k_1 \cdot \bar{k}_2\, k_2 \cdot \bar{k}_1 \left(\partial_1 G_{12}\, \partial_2 G_{21} - S_{12}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right] S_{21}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right]\right) \\ &\quad \times \left(k_3 \cdot \bar{k}_1\, \partial_3 G_{31} + k_3 \cdot \bar{k}_2\, \partial_3 G_{32} + k_3 \cdot \bar{k}_4\, \partial_3 G_{34}\right) \\ &\quad \times \left(k_4 \cdot \bar{k}_1\, \partial_4 G_{41} + k_4 \cdot \bar{k}_2\, \partial_4 G_{42} + k_4 \cdot \bar{k}_3\, \partial_4 G_{43}\right) . \end{aligned} \tag{V.59}$$

Hier ist jeweils nur ein Paar von Fermionen kontrahiert. Die möglichen Permutationen der Vertexoperatoren liefern die Beiträge $I^{(13)}$, $I^{(14)}$, $I^{(23)}$, $I^{(24)}$ und $I^{(34)}$. Terme mit zyklischen Kontraktionen zwischen drei Fermionenpaaren der Vertexoperatoren verschwinden, da zyklische und antizyklische Ordnung in diesem Fall entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Der eichinvariante Vertexoperator $V'(k_i)$ aus (V.48) erzeugt über die Entwicklung von (V.50) bei einer geeigneten Wahl der Referenzimpulse $q_i \equiv q$ dieselben Terme wie in (V.57) bis (V.59), jedoch mit der Ersetzung $k_i \cdot \bar{k}_j \to \epsilon_i \cdot k_j$ in allen Skalarprodukten. Dies zeigt, daß die Ein-Loop-Amplitude des geschlossenen N=2 Strings im Feldtheorie-Grenzwert $\alpha' \to 0$ die Feynman-Regeln der Ein-Loop-Amplituden einer Gravitationstheorie (des Feldtheorie-Grenzwertes des Typ IIB Superstrings) reproduziert. Allerdings liefert der N=2 String Gravitationsdiagramme ohne $\epsilon_i \cdot \epsilon_j$ oder $\epsilon_i \cdot \bar{\epsilon}_j$ Terme, d.h. mit MHV Struktur. Dies liefert einen Hinweis darauf, daß der geschlossene N=2 String auch jenseits des Tree-Niveaus eine selbstduale Gravitation beschreibt.

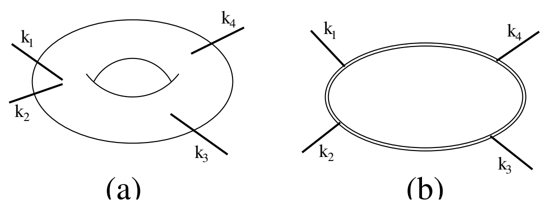

ABBILDUNG V.3 - *Singularitäten im Ein-Loop-Integral können auftreten, wenn (a) zwei Vertexoperatoren zusammenfallen, $z_i \sim z_j$ oder (b) der Torus zu einem dünnen Ring entartet, $\tau_2 \to \infty$.*

An dieser Stelle läßt sich bereits zeigen, daß die Vier-Punkt-Amplitude des $N{=}2$ Strings auf dem Torus im Gegensatz zur Drei-Punkt-Amplitude aus Abschnitt V.2 endlich ist. Singularitäten des Integranden können nur in den beiden in Abbildung V.3 dargestellten Regionen des metrischen Moduliraumes auftreten.

(a) Wenn zwei Vertexoperatoren zusammentreffen, $z_i \sim z_j$, divergieren die Propagatoren $G_{ij} \sim -\ln|z_i - z_j|^2 \to \infty$ und $S_{ij}\left[{\alpha \atop \beta}\right] \sim (z_i - z_j)^{-1} \to \infty$. Allerdings gilt in diesem Grenzfall unabhängig von der Spinstruktur $S_{ij}\left[{\alpha \atop \beta}\right] = -\partial_i G_{ij}$. Aufgrund der Struktur der Terme (V.57) bis (V.59) in K_{KN} verschwindet der Integrand in diesem Fall punktweise, es gibt keinen divergenten Beitrag dieser Konfiguration zur Amplitude.

(b) Wenn der Torus zu einem dünnen Ring entartet, also $\tau_2 \to \infty$, die Vertexoperatoren aber einen endlichen Abstand behalten, d.h. $z_i - z_j \sim \mathcal{O}(\tau)$, trägt nur die Nullmode des bosonischen Propagators zur Amplitude bei. Es gilt dann $G_{ij} \sim \frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}\,(z_i - z_j))^2 \sim \tau_2 \to \infty$. Im Grenzfall $\tau_2 \to \infty$ trägt nur die führende Ordnung der Entwicklung der Korrelatoren nach $q = e^{2\pi i\,\tau}$ zum Integranden bei. In dieser führenden Ordnung sind die fermionischen Propagatoren $S_{ij}\left[{\alpha \atop \beta}\right]$ unabhängig von der Spinstruktur (α, β), sie stimmen mit den Ableitungen der entsprechenden bosonischen Propagatoren überein und eliminieren deren Beiträge in der führenden Ordnung, es gibt keinen divergenten Beitrag zur Amplitude.

V.3.3 DER FELDTHEORIE-GRENZWERT

In diesem Abschnitt soll der Feldtheorie-Grenzwert der oben konstruierten Amplitude bestimmt und mit den aus der effektiven Feldtheorie des $N{=}2$ Strings erhaltenen Ein-Loop-Ergebnissen der selbstdualen Gravitation verglichen werden. Die Integration über die Spinstrukturen kann vor oder nach dem Grenzübergang $\alpha' \to 0$ durchgeführt werden. Da der Ramond-Sektor ein singulärer Punkt im Kontinuum der Spinstrukturen ist, ist es nicht von vorneherein klar, ob die Reihenfolge, in der Integration und Grenzübergang durchgeführt werden, eine Rolle spielt. In diesem Abschnitt wird zuerst der $\alpha' \to 0$ Grenzwert ausgeführt, wodurch die Abhängigkeit des Integranden von der Spinstruktur trivial wird. Im nächsten Abschnitt wird hingegen zunächst über die Spinstrukturen integriert. Der danach ausgeführte $\alpha' \to 0$ Grenzübergang führt wieder auf die Ergebnisse dieses Abschnitts. Der Feldtheorie-Grenzwert der Ein-Loop-Amplituden des $N{=}2$ Strings ist also unabhängig von der Reihenfolge, in der Moduliintegration und $\alpha' \to 0$ Übergang durchgeführt werden.

Mit der Wahl des modular invarianten Integrationsmaßes aus Gleichung (V.54) unterscheiden sich die Amplituden des $N{=}2$ Strings von denen der selbstdualen Gravitation in $d{=}2+2$ Dimensionen. Aufgrund der mit dem (b',c') Geistsystem zusammenhängenden $U(1)$ Symmetrie enthält der Integrand einen zusätzlichen Faktor τ_2, der zu einer Beschreibung des Loopimpulses in zwei reellen Dimensionen führt. Diese Abweichung der Dimension der effektiven Feldtheorie von der kritischen Dimension der Stringtheorie wurde bereits bei der Berechnung der Zustandssumme auf dem Torus in Abschnitt V.1 und der Drei-Punkt-Amplitude auf dem Torus in Abschnitt V.2 beobachtet. Um diesen Faktor τ_2 unterscheidet sich der Integrand des $N{=}2$ Strings auch von demjenigen des Typ IIB Superstrings im Sektor der selbstdualen Gravitation in vier Dimensionen, den man etwa durch Kompaktifizierung des nicht supersymmetrischen Sektors auf T^6 erhält. Ganz allgemein beschreibt eine Moduliintegration der Form

$$\int \frac{d^2\tau}{\tau_2}\, \tau_2^{n-d/2}\, e^{-\tau_2 f(k_i)} \tag{V.60}$$

das n-Punkt-Diagramm einer ϕ^3-Feldtheorie auf Ein-Loop-Niveau in d Dimensionen[89]. Die n zusätzlichen Faktoren τ_2 stammen von den n Vertexoperatoren im Stringintegranden. Sie entstehen durch die Abbildung der Torus-Variablen $z_i \in \mathcal{T}$ auf das Einheitsquadrat $z_i = x_i + \tau\, y_i$ mit $x_i, y_i \in [0,1]$.

Zur Berechnung des Feldtheorie-Grenzwertes der Stringamplitude werden die Welflächen-Koordinaten der Vertexoperatoren in eine Schwinger-Zeit Darstellung gebracht. Der Integrand kann im vom Teichmüller-Parameter abhängenden $q = e^{2\pi i\tau}$ entwickelt werden, wobei höhere Potenzen von q dem Austausch von massiven Moden entsprechen, die im Fall des $N{=}2$ Strings nicht existieren. Im folgenden soll die analytische Struktur des Integranden im Feldtheorie-Grenzwert untersucht werden [62]. Dazu wird der Integrationsbereich der Vertexoperatorpositionen auf dem Torus $\prod_{j=1}^4 \int_{\mathcal{T}} d^2 z_j$ in sechs Regionen unterteilt, entsprechend den sechs möglichen Ordnungen der Imaginärteile der Positionen $0 \le \mathrm{Im}\, z_1, \mathrm{Im}\, z_2, \mathrm{Im}\, z_3 \le \tau_2$. Dabei wurde die durch den komplexen konformen Killing-Vektor beschriebene Translationssymmetrie des Torus ausgenutzt, um die Position des vierten Vertexoperators auf einen festen Wert zu setzen, $z_4 = \tau \approx 0$. Die Beiträge der einzelnen Ordnungen und der dazu inversen Ordnungen zur Amplitude sind jeweils paarweise identisch, so daß man die volle Amplitude (V.55) für eine gegebene Spinstruktur (α,β) zerlegen kann[90] [61],

$$\mathcal{A}_4\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](s,t,u) = 2\,\mathcal{A}_4\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](s,t) + 2\,\mathcal{A}_4\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](t,u) + 2\,\mathcal{A}_4\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](u,s)\,. \tag{V.61}$$

Die Teilamplitude $\mathcal{A}_4\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](s,t)$ ist durch den Ausdruck

$$\mathcal{A}_4\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](s,t) = \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \prod_{j=1}^{4} \int d^2 z_j \prod_{i<j} e^{-k_i\cdot k_j\, G_{ij}}\, K_{KN}\big(z_i, \bar z_i; u, \bar u; \tau, \bar\tau\big) \tag{V.62}$$

definiert, wobei die Integrationen $\prod_{j=1}^4 \int d^2 z_j$ über die Positionen der Vertexoperatoren auf den Bereich

$$0 \le \mathrm{Im}\, z_1 \le \mathrm{Im}\, z_2 \le \mathrm{Im}\, z_3 \le \mathrm{Im}\, z_4 = \tau_2 \tag{V.63}$$

[89] Zum Beweis siehe Anhang E.

[90] Die Mandelstam-Variablen sind definiert durch $s = -(k_1+k_2)^2 = -2\,k_1\cdot k_2$, $t = -2\,k_2\cdot k_3$ und $u = -2\,k_1\cdot k_3$. Für sie gilt die Impulserhaltung $s+t+u=0$.

eingeschränkt ist. Der Wert der dritten Mandelstam-Variable ist in Gleichung (V.62) durch Impulserhaltung gegeben, $u = -s - t$. Die anderen beiden Teilamplituden $\mathcal{A}_4\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](t,u)$ und $\mathcal{A}_4\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](u,s)$ definiert man entsprechend mit den zyklischen Permutationen der Positionen der Vertexoperatoren. Aus der Berechnung einer Teilamplitude kann die vollständige Amplitude (V.55) rekonstruiert werden.

In der geordneten Region (V.63) werden die neuen Variablen

$$w_{ij} = \begin{cases} e^{2\pi i\, z_{ij}} & \text{für } \mathrm{Im}\ z_{ij} > 0 \\ q\, e^{2\pi i\, z_{ij}} & \text{für } \mathrm{Im}\ z_{ij} < 0 \end{cases} \tag{V.64}$$

mit $|w_{ij}| \leq 1$ definiert. Die Positionen der Vertexoperatoren werden durch $z_i = x_i + \tau\, y_i$ mit $x_i, y_i \in [0,1]$ auf dem Einheitsquadrat parametrisiert. Weiterhin werden die reellen Variablenpaare α_i und u_i mit $i = 1, \ldots, 4$ definiert,

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 & \alpha_1 &= 2\pi\,(x_1 + u_1\,\tau_1) \\ u_2 &= y_2 - y_1 & \alpha_2 &= 2\pi\,(x_2 - x_1 + u_2\,\tau_1) \\ u_3 &= y_3 - y_2 & \alpha_3 &= 2\pi\,(x_3 - x_2 + u_3\,\tau_1) \\ u_4 &= 1 - y_3 & \alpha_4 &= 2\pi\,\tau_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3\,. \end{aligned} \tag{V.65}$$

Dabei gilt offensichtlich $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$ und $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi\,\tau_1$. Dies kann aufgrund der Translationsinvarianz des Torus für jede Konfiguration der Positionen der Vertexoperatoren erreicht werden. Mit diesen Definitionen kann der Koba-Nielsen-Term $I_{KN} = \prod_{i<j} e^{-k_i\cdot k_j\, G_{ij}}$ aus Gleichung (V.62) vereinfacht werden. Es ist

$$I_{KN} = \prod_{i<j} \left|E(z_{ij})\right|^{-s_{ij}} \prod_{i<j} e^{\frac{\pi}{\tau_2}\, s_{ij}\,(\mathrm{Im}\ z_{ij})^2}\,. \tag{V.66}$$

Setzt man in diese Gleichung die Produktdarstellung der Primform aus (F.16) ein, erhalten die Terme, die nicht von z_{ij} abhängen, einen Exponenten der proportional zu $\sum_{i<j} s_{ij}$ ist und wegen der Impulserhaltung verschwindet. Der für den Koba-Nielsen-Term relevante Anteil der Primform ist folglich

$$e^{\pi i\, z_{ij}} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - q^m\, e^{-2\pi i\, z_{ij}}\right)\left(1 - q^{m+1}\, e^{+2\pi i\, z_{ij}}\right). \tag{V.67}$$

Definiert man

$$\mathcal{R}(w_{ij}) = \prod_{i\neq j} \prod_{m=0}^{\infty} \left|1 - w_{ij}\, q^m\right|^{-s_{ij}}, \tag{V.68}$$

so ist leicht zu überprüfen, daß $\mathcal{R}$ gerade den Teil des Koba-Nielsen-Termes reproduziert, der von dem unendlichen Produkt in der Entwicklung (V.67) der Primform stammt, $\mathcal{R}(w_{ij}) = \prod_{i<j}\prod_{m=0}^{\infty} |(1 - q^m\, e^{-2\pi i\, z_{ij}})\,(1 - q^{m+1}\, e^{+2\pi i\, z_{ij}})|^{-s_{ij}}$. Der Beitrag des verbleibenden Faktors $e^{\pi i\, z_{ij}}$ der Entwicklung der Primform kann mit dem Beitrag der Nullmoden des bosonischen Propagators zusammengefaßt werden. Diese Terme liefern den Ausdruck $e^{\pi\,\tau_2 \sum_{i<j} s_{ij}\,(y_{ij}^2 + y_{ij})} = |q|^{-(s\, u_1 u_3 + t\, u_2 u_4)}$. Damit läßt sich die Teilamplitude aus (V.62) in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](s,t) \;=\; & \int_{\mathcal{F}} d^2\tau\, \tau_2^2 \prod_{i=1}^{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha_i}{2\pi}\, \delta\big(2\pi\,\tau_1 - \sum_{j=1}^{4} \alpha_j\big) \prod_{i=1}^{4} \int_0^1 du_i\, \delta\big(1 - \sum_{j=1}^{4} u_j\big) \\ & \times |q|^{-(s\, u_1 u_3 + t\, u_2 u_4)}\, \mathcal{R}(w_{ij})\, K_{KN}\big(\alpha_i, u_i; u, \bar{u}, \tau, \bar{\tau}\big) \end{aligned} \tag{V.69}$$

darstellen. K_{KN} enthält dabei den kinematischen Faktor des MHV Sektors der Typ IIB Superstring Theorie in den neu eingeführten Koordinaten (V.65). Die Funktion $\mathcal{R}$, welche die unendlichen Produkte aus der Entwicklung der Primform enthält, kann in eine Reihe in q entwickelt werden,

$$\mathcal{R}(w_{ij}) = \prod_{i=1}^{4} \left|1 - e^{i\alpha_i}\, |q|^{u_i}\right|^{-s_i} \sum_{n_i=0}^{\infty} \sum_{|\nu_i|\leq n} P^{(4)}_{\{n_i,\nu_i\}}(s,t) \prod_{j=1}^{4} |q|^{n_i u_i}\, e^{i\,\nu_i \alpha_i}\,. \tag{V.70}$$

Dabei ist $s_i = s$ für gerade i und $s_i = t$ für ungerade i. Die $P^{(4)}_{\{n_i,\nu_i\}}(s,t)$ sind endliche Polynome in s und t, die rekursiv erzeugt werden können [62, Anhang C] mit $P^{(4)}_{\{0,0\}}(s,t) = 1$. Der Feldtheorie-Grenzwert $\alpha' \to 0$ der Amplitude (V.69) enthält nur die führende Ordnung der Entwicklung in q, d.h. nur die Terme mit den niedrigsten Potenzen[91]. Um den führenden Beitrag der Reihenentwicklung (V.70) nach der Integration über die Positionen der Vertexoperatoren (α_i, u_i) zu bestimmen, betrachtet man zunächst die Identität

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi}\, e^{i\,\eta\alpha} \left|1 - x\, e^{i\,\alpha}\right|^{-s} = x^{-r} \int_0^{\infty} d\beta\, x^{\beta}\, \varphi_{r\eta}(s;\beta)\,. \tag{V.71}$$

Dabei sind η und r beliebige reelle Konstanten, und

$$\varphi_{r\eta}(S;\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(s)\, C_{k+|\eta|}(s)\, \delta\big(2k + r + |\eta| - \beta\big) \tag{V.72}$$

ist die inverse Laplace-Transformierte einer hypergeometrischen Funktion[92] mit

$$C_k(s) = \frac{\Gamma(s/2+k)}{\Gamma(s/2)\,\Gamma(k+1)}\,. \tag{V.73}$$

Mit $x = |q|^{u_i}$ kann die Identität (V.71) ausgenutzt werden, um die Integration über die Winkelvariablen α_i auszuführen. Man erhält eine Reihe in den $C_k(s)$, multipliziert mit Potenzen von $|q|^{2k+r+|\eta|}$, deren führender Term die Form $1 - \mathcal{O}(q)$ hat. Der Feldtheorie-Grenzwert ist also äquivalent dazu, $\mathcal{R}(w_{ij}) = 1$ zu setzen, nicht triviale Korrekturen zur Funktion $\mathcal{R}$ sind von höherer Ordnung in α'. Ebenso trägt nur der $n_i = 0$ Term der Summe aus Gleichung (V.70) zum $\alpha' \to 0$ Grenzwert der Amplitude bei. Diese Analyse kann auch auf die Winkelvariablen im kinematischen Faktor K_{KN} ausgedehnt werden. Die verbleibenden Propagator-Terme in K_{KN} erzeugen für $\alpha' \to 0$ die Feynman-Parameter der Wechselwirkung der effektiven Feldtheorie. Der daraus erhaltene Ausdruck ist identisch zum kinematischen Faktor der entsprechenden Typ IIB Superstring Amplitude vor der Summation über die Spinstrukturen, mit einer

[91] Führt man die Regge-Steigung in den obigen Gleichungen wieder ein, haben die Terme der Entwicklung die Form $|q|^{-\alpha' s}$. Der Grenzübergang $\alpha' \to 0$ ist also äquivalent zum Grenzübergang $\tau_2 \to \infty$, bzw. $q \to 0$. Der Feldtheorie-Grenzwert liegt also in dem Teil des metrischen Moduliraumes, in dem die Weltfläche des Strings zu einem dünnen Ring degeneriert.

[92] Es ist [96, Seite 55]

$$x^{-r} \int_0^{\infty} d\beta\, x^{\beta}\, \varphi_{r\eta}(s;\beta) = C_{|\eta|}(s)\, x^{|\eta|}\, {}_2F_1\big(s/2, s/2+|\eta|; |\eta|+1; x^2\big)\,.$$

Wahl der Polarisationsvektoren, welche die MHV Struktur erzeugt. Das Vorgehen zum Vergleich von Amplituden der Stringtheorie mit denen der effektiven Feldtheorie wird durch die Bern-Kosower-Regeln [22, 23, 30, 32] für den Fall beliebiger n-Punkt-Amplituden von Eichtheorien auf Ein-Loop-Niveau systematisiert und kann auch auf Gravitationsamplituden verallgemeinert werden [29]. Dieses Verfahren soll im folgenden auf die Amplitude (V.69) angewendet werden.

Gäbe es nicht den nicht holomorphen Nullmodenanteil des bosonischen Propagators (V.56), würden sich die bosonischen und die fermionischen Beiträge in den Termen (V.57) bis (V.59) im Feldtheorie-Grenzwert vollständig aufheben; der Integrand der 1-Loop-Amplituden des $N{=}2$ Strings würde verschwinden. In den drei Gruppen von Differenzen von bosonischen und fermionischen Propagatoren bleiben jedoch für $\alpha' \to 0$ die Beiträge der bosonischen Nullmoden übrig. Man erhält aus der Korrelationsfunktion K_{KN} Terme, die proportional zu mindestens einem Faktor der Form $\frac{2\pi}{i\,\tau_2}\,\mathrm{Im}\, z_{ij}$ sind. Die Nullmoden brechen die Faktorisierbarkeit der Amplitude in eine holomorphe und eine antiholomorphe Hälfte. Die MHV Struktur der Amplitude kann folglich als holomorphe Anomalie im Feldtheorie-Grenzwert des $N{=}2$ Strings verstanden werden. In Gleichung (V.69) ist ein Faktor τ_2^2 multipliziert mit den Nullmodenbeiträgen aus K_{KN} über den Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ der metrischen Moduli zu integrieren. Ein Vergleich mit (V.60) zeigt, daß diese Integration zu einer Feldtheorie-Interpretation in $d = 2$ Dimensionen führt. Auch hier erkennt man also einen Unterschied zwischen der kritischen Dimension der Stringtheorie und der Dimension des Loop-Impulses der effektiven Feldtheorie [103].

In der durch die Stringtheorie inspirierten Erzeugung von Streuamplituden der Gravitation entsteht der Feldtheorie-Grenzwert $\alpha' \to 0$ an den Rändern des metrischen Moduliraumes. Man erhält die Feynman-Parameter Darstellung eines ϕ^3-Diagramms [29]

$$D = c_n \int_0^1 dx_{i_{n-1}} \int_0^{x_{i_{n-1}}} dx_{i_{n-2}} \ldots \int_0^{x_{i_2}} dx_{i_1} \, \frac{K_{\mathrm{red}}}{\left(\sum_{a<b}^{n} P_{i_a} \cdot P_{j_b}\, x_{i_a j_b}\,(1 - x_{i_a j_b})\right)^{n-d/2}}\,, \qquad \text{(V.74)}$$

wobei der Vorfaktor c_n in d Dimensionen durch den Ausdruck

$$c_n = (4\pi)^{2-d/2}\, \frac{\Gamma(n - d/2)}{16\pi^2} \qquad \text{(V.75)}$$

gegeben ist. P_i ist der Impuls der in die i-te äußere Linie des n-gon Diagramms der ϕ^3-Theorie fließt. Die x_i sind die Feynman-Parameter[93] und $x_{ij} \equiv x_i - x_j$. Bei der Konstruktion der Gravitationsamplitude sind alle Diagramme mit zyklischer Vertauschung der äußeren Linien äquivalent. Zur Konstruktion der vollständigen Amplitude ist also über alle nicht zyklischen Ordnungen der äußeren Impulse zu summieren. Der Faktor K_{red} in Gleichung (V.74) enthält den auf diese Weise entstandenen kinetischen Term, der identisch mit der Koba-Nielsen-Darstellung der Multi-Graviton Streuamplitude (V.50) des Typ IIB Superstrings ist,

$$e^{(k_i\cdot\epsilon_j - k_j\cdot\epsilon_i)\,\dot{G}_{ij} - \epsilon_i\cdot\epsilon_j\,\ddot{G}_{ij}}\; e^{(k_i\cdot\bar{\epsilon}_j - k_j\cdot\bar{\epsilon}_i)\,\dot{\bar{G}}_{ij} - \bar{\epsilon}_i\cdot\bar{\epsilon}_j\,\ddot{\bar{G}}_{ij}}\Big|_{\mathrm{multilinear}}. \qquad \text{(V.76)}$$

$\dot{G}$ bezeichnet hier die Ableitung des vollständigen Propagators[94] der betrachteten He-

[93] Diese Feynman-Parameter erhält man durch $x_i = \sum_{j=1}^{i} a_i$ aus den üblichen Feynman-Parametern a_i.

[94] D.h. einschließlich der Nullmoden.

lizität des Gravitationsfeldes nach dem Parameter der Weltlinie. Prinzipiell enthält die aus der Superstringtheorie gewonnene Koba-Nielsen-Darstellung der Gravitationsamplitude auch einen Term der Form $e^{-(\epsilon_i\cdot\bar{\epsilon}_j+\bar{\epsilon}_i\cdot\epsilon_j)\,\partial_i\bar{\partial}_j G_{ij}}$, der die holomorphe und die antiholomorphe Hälfte mischt. Mit der Wahl der Referenzimpulse für die $N{=}2$ Stringtheorie gilt jedoch $\epsilon_i\cdot\bar{\epsilon}_j$ für alle äußeren Linien i,j, so daß die MHV Struktur der Amplitude erhalten bleibt. Der Ausdruck G_{ij} in Gleichung (V.76), der dem bosonischen Propagator der Stringtheorie entspricht, erzeugt in der Feldtheoriebetrachtung die Feynman-Parameter. Seine Ableitung ist gegeben durch

$$\dot{G}_{ij} = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sign}(x_{ij}) + x_{ij}\,. \qquad \text{(V.77)}$$

Der Nutzen der Darstellung (V.76) der Amplitude besteht darin, daß der kinematische Term K_{red} aus der erstquantisierten Feldtheorie entsteht, deren Schwinger-Zeit mit dem Maßfaktor (V.54) aus der $N{=}2$ Stringtheorie über die Weltlinie integriert wird [136, 137, 145]. Durch die Abbildung des Feldtheorie-Grenzwertes der Ein-Loop-Amplitude des $N{=}2$ Strings auf die erstquantisierte Feldtheorie-Amplitude entfällt die Notwendigkeit, die Integration über den metrischen Moduliraum auszuführen, da die entsprechenden Amplituden aus der Feldtheorie bekannt sind [28]. Gleichung (V.74) mit dem Maß des metrischen Moduliraumes des $N{=}2$ Strings beschreibt die n-Punkt-Amplitude der selbstdualen Gravitation auf Ein-Loop-Niveau in $d{=}2$ Dimensionen.

DIE BERN-KOSOWER-REGELN

Zur Anwendung der Bern-Kosower-Regeln werden alle ϕ^3-Diagramme konstruiert, die man aus dem Abschnüren verschiedener Vertexoperatoren erhält. Zwei Beispiele für diese Diagramme, ein Box-Diagramm und ein Dreiecks-Diagramm, sind in Abbildung V.4 dargestellt. In diesen Diagrammen werden die Faktoren $\dot{G}_{ij}$ bzw. im Fall des geschlossenen Strings und der Gravitation die Faktoren $\dot{G}_{ij}\,\dot{\bar{G}}_{ij}$ entsprechend der Tree- und der Loop-Regeln ersetzt.

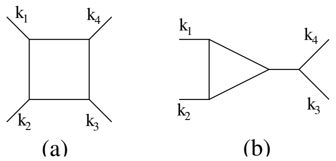

ABBILDUNG V.4 - *Beispiele der Beiträge verschiedener Ränder des Moduliraumes der String-Amplitude zum Feldtheorie-Grenzwert.*

Zunächst werden die Tree-Regeln auf die an den Loop angehängten Tree-Graphen angewendet, etwa auf den Drei-Punkt-Tree in der rechten Hälfte von Abblidung V.4 (b). In einem solchen Tree-Graph enthaltene Faktoren $\dot{G}_{ij}$ werden durch $-1/P_i\cdot P_j$ ersetzt und im verbleibenden Ausdruck wird $i=j$ gesetzt[95]. Diese Ersetzung der Erzeugenden der Feynman-Parameter in der Feldtheorie erzeugt den gesuchten kinetischen Vorfaktor des Diagramms. Vom Standpunkt der Stringtheorie aus entspricht diese Ersetzung der äußeren Tree-Diagramme dem Abschnüren eines Pols vom kinetischen Faktor aus den $e^{-k_i\cdot k_j\,G_{ij}}$ Termen durch Integration am Rand des Moduliraumes mit $z_i\sim z_j$.

[95] In Abbildung V.4 (b) entspricht dies einem Faktor $-1/k_3\cdot k_4$ mit der Identifizierung $x_3=x_4$ im verbleibenden Dreiecks-Diagramm.

Nach der Anwendung der Tree-Regeln sind die verbleibenden Faktoren $\dot{G}_{ij}$ in den Diagrammen entsprechend der Loop-Regeln zu ersetzen. Einzelne Faktoren $\dot{G}_{ij}$ entsprechen nicht zyklischen Kontraktionen und stellen den Feldtheorie-Grenzwert des bosonischen Propagators auf der Weltfläche dar. Diese Faktoren werden wie in Gleichung (V.77) durch

$$\dot{G}_{ij} \to -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sign}\, x_{ij} + x_{ij} \tag{V.78}$$

ersetzt. Zyklische Kontraktionen sind von der Form $\dot{G}_{i_1 i_2}\dot{G}_{i_2 i_3}\dots\dot{G}_{i_n i_1}$ wobei die Reihenfolge der Indizes durch die Ordnung der äußeren Linien des Loop-Diagramms vorgegeben ist. Diese Beiträge werden entsprechend der Regeln

$$\dot{G}_{ij}\dot{G}_{ji} \to 2 \tag{V.79}$$

und für $n > 2$

$$\dot{G}_{i_1 i_2}\dot{G}_{i_2 i_3}\dots\dot{G}_{i_n i_1} \to 1 \tag{V.80}$$

ersetzt. Ersetzungen der zyklischen Kontraktionen repräsentieren den Feldtheorie-Grenzwert der fermionischen Propagatoren der Stringtheorie. Diese Loop-Regeln werden im Fall der Gravitation unabhängig auf die $\dot{G}_{ij}$ und auf die $\dot{\bar{G}}_{ij}$ angewendet.

Im Fall der durch die Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{EH}[g] = \int d^4x\,\sqrt{g}\,R \tag{V.81}$$

erzeugen die Regeln (V.78) bis (V.80) die entsprechenden Ein-Loop-Amplituden mit einem Graviton als im Loop umlaufenden Zustand [29]. Dieselben Ersetzungsregeln gelten jedoch auch für Zustände mit Spin $[J \leq 1]$ im Loop [136, 137, 145]. Bei der Berechnung von MHV Amplituden vereinfachen sich die Bern-Kosower-Regeln noch weiter. Aus der Beziehung (IV.64)

$$A^{[0]} = A^{[1]} = A^{[2]} = -A^{[\frac{1}{2}]} \tag{V.82}$$

erkennt man, daß die Integration über ein Raumzeit-Graviton oder über einen komplexen Raumzeit-Skalar im Loop zum selben Ergebnis führt. Dadurch können sich die Beiträge aus den zyklischen Kontraktionen (V.79) und (V.80) gegenseitig wegheben. Insbesondere wurde gezeigt [29], daß in Gravitationsamplituden mit MHV Struktur sämtliche zyklischen Beiträge nach der Loopintegration verschwinden. Aus der Sicht der $N{=}2$ Stringtheorie bedeutet dies, daß die Weltflächen-Fermionen im Feldtheorie-Grenzwert nicht zur Amplitude beitragen. Aufgrund der Impulserhaltung verschwindet die Summe der kinetischen Vorfaktoren der fermionischen Propagatoren. Dieses Ergebnis wird auch in Abschnitt V.3.4 bestätigt, wenn zuerst das Integral über die Spinstrukturen ausgeführt wird und erst danach der Feldtheorie-Gernzwert $\alpha' \to 0$ gebildet wird.

Die q-Entwicklung der Ableitung des bosonischen Propagators hat in der führenden Ordnung die Form (F.20)

$$\partial\left(\ln\left|E(z)\right|^2 - \frac{2\pi}{\tau_2}\left(\mathrm{Im}\; z\right)^2\right) = \pi i - \frac{2\pi i}{1-e^{i\,\alpha}\,|q|^u} + \frac{2\pi i}{\tau_2}\,\mathrm{Im}\; z + \mathcal{O}(q)\,. \tag{V.83}$$

Nach der Integration über die Winkelvariable α liefert der mittlere Term den konstanten Beitrag $-2\pi i$ [47, 62]. Insgesamt ist der in α' führende Beitrag der Ableitung des bosonischen Propagators der Stringtheorie also von der Form

$$\partial \left(\ln \left|E(z)\right|^2 - \frac{2\pi}{\tau_2} \left(\mathrm{Im}\ z\right)^2 \right) \to -\pi i + \frac{2\pi i}{\tau_2} \mathrm{Im}\ z = -\pi i \left(1 - 2y\right), \tag{V.84}$$

in Übereinstimmung (bis auf den Vorfaktor πi) mit der Bern-Kosower-Ersetzungsregel (V.78). Die fermionischen Beiträge zu den Amplituden der $N{=}2$ Stringtheorie ergeben ein Produkt von Szegö Kernen $S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{ij})$ mit einer zyklischen Anordnung der Argumente z_i. Die q-Entwicklung eines solchen Ausdrucks hat nach der Integration über die Winkelvariablen α_i die Form

$$S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{i_1 i_2})\, S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{i_2 i_3}) \ldots S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{i_n i_1}) \to (\pi i)^n + \mathcal{O}(q)\,. \tag{V.85}$$

Der in α' führende Beitrag der fermionischen Propagatoren entspricht bis auf den Vorfaktor $(\pi i)^n$ der Bern-Kosower-Regel (V.80). Die Ein-Loop-Amplitude des $N{=}2$ Strings reproduziert folglich alle mit Hilfe der Bern-Kosower-Regeln aus der Gravitationsamplitude erhaltenen Terme.

V.3.4 Integration über die Spinstrukturen

Nachdem im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, daß die Integration über die Spinstrukturen im Feldtheorie-Grenzwert trivial wird und die fermionischen Propagatoren für $\alpha' \to 0$ nicht zur Amplitude des $N{=}2$ Strings beitragen, soll nun zuerst die Integration über die Spinstrukturen durchgeführt werden. Dabei wird sich herausstellen, daß die kinematischen Vorfaktoren die Beiträge der Fermionen zur Ein-Loop-Amplitude im Grenzfall $\alpha' \to 0$ eliminieren [48]. Zur Untersuchung der Vier-Punkt-Amplitude sind Produkte von bis zu vier holomorphen Szegö Kernen aus (V.57) bis (V.59) und den entsprechen antiholomorphen Szegö Kernen über den Torus der Spinstrukturen $(\alpha, \beta) \in [0,1] \times [0,1]$ auf der Weltfläche zu integrieren.

Auf dem durch den Teichmüller-Parameter τ beschriebenen Torus definiert man

$$h_n(\{z_{ij}\}; u) \equiv S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{12})\, S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{23}) \ldots S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{n1}) \tag{V.86}$$

mit der von der Spinstruktur abhängenden Nullstelle der Szegö Kerne

$$u = \left(\tfrac{1}{2} - \alpha\right) \tau + \left(\tfrac{1}{2} - \beta\right). \tag{V.87}$$

Mit Hilfe der Definition (F.23) des Szegö Kernes läßt sich h_n durch Primformen $E(z)$ ausdrücken,

$$h_n(\{z_{ij}\}; u) = \frac{E(z_{12} - u)\, E(z_{23} - u) \ldots E(z_{n1} - u)}{(E(-u))^n\, E(z_{12})\, E(z_{23}) \ldots E(z_{n1})}\,. \tag{V.88}$$

In dieser Darstellung erkennt man, daß h_n einen einzigen Pol n-ter Ordnung in u an der Stelle $u = 0$ hat. Im einfachsten Fall $n = 2$ erhält man unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften (F.15a) und (F.15b) der Primform auf dem Torus

$$h_2(z_{12}; u) = \frac{E(z_{12} - u)^2}{E(u)^2\, E(z_{12})^2} = -\wp(z_{12}) + \wp(u) = \partial^2 E(z_{12}) - \partial^2 E(u)\,. \tag{V.89}$$

Dabei ist $\wp(z)$ die in Abschnitt F.4 definierte Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Wenn zwei Punkte zusammenfallen $z_{n1} \to 0$ spaltet die Funktion h_n einen einfachen Pol an dieser Stelle ab, $h_n \to h_{n-1}/z_{n1}$.

Zur Bestimmung des fermionischen Beitrages zur Ein-Loop-Amplitude des $N{=}2$ Strings ist das Produkt von h_n und dem entsprechenden antiholomorphen Ausdruck $\bar{h}_{\bar{n}}$ mit dem korrekten Maßfaktor über den durch u parametrisierten Torus der Spinstrukturen zu integrieren. Mit $h_0 \equiv 1$ definiert man die Integrale

$$f_{n,\bar{n}}(\{z_{ij}, \bar{z}_{kl}\}) \equiv \langle h_n(\{z_{ij}\}; u)\, \bar{h}_{\bar{n}}(\{\bar{z}_{kl}\}; \bar{u})\rangle \,. \tag{V.90}$$

Das Integrationsmaß ist dabei

$$\langle \ldots \rangle \equiv \int \frac{du \wedge d\bar{u}}{-2i\,\tau_2} \ldots \,, \tag{V.91}$$

so daß die Normierung $\langle 1 \rangle = 1$ gilt. Die explizite Integration des Ausdrucks (V.90) ist aufgrund der Integrationsregel (B.5) einfach auszuführen [68]. Da $h_n(u)$ und $\bar{h}_{\bar{n}}(\bar{u})$ für $n > 1$ geschlossene 1-Formen mit verschwindendem Residuum in $u = 0$ sind, kann das Oberflächenintegral (V.91) durch zwei Wegintegrale entlang des a- und des b-Zykels des Torus ersetzt werden,

$$f_{n,\bar{n}} = \frac{i}{2\,\tau_2} \left(\oint_a du\, h_n(u) \oint_b d\bar{u}\, \bar{h}_{\bar{n}}(\bar{u}) - \oint_b du\, h_n(u) \oint_a d\bar{u}\, \bar{h}_{\bar{n}}(\bar{u}) \right) . \tag{V.92}$$

Diese Wegintegrale können einfach berechnet werden.

Jede elliptische Funktion mit einem einzigen Pol n-ter Ordnung kann durch eine Linearkombination von Weierstraßschen $\wp$-Funktionen, deren Ableitungen und einer Konstante ausgedrückt werden [154, Kapitel XX]. Damit läßt sich die Funktion $h_n(u)$ mit den von den Positionen der Vertexoperatoren abhängenden Laurent-Koeffizienten $h_n^{(k)}(\{z_{ij}\})$ um den Pol $u = 0$ entwickeln[96],

$$\begin{aligned} h_n(u) &= h_n^{(n)} u^{-n} + \ldots + h_n^{(3)} u^{-3} + h_n^{(2)} u^{-2} + h_n^{(0)} + \mathcal{O}(u) \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\, h_n^{(n)}\, \wp^{(n-2)}(u) + \ldots - \frac{1}{2}\, h_n^{(3)}\, \wp'(u) + h_n^{(2)}\, \wp(u) + H_n^{(0)} \,. \end{aligned} \tag{V.93}$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß gilt $\wp(u) = u^{-2} + \mathcal{O}(u^2)$ und[97]

$$\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\, \wp^{(k-2)}(u) = u^{-k} + G_k\, \delta_{k\,\text{gerade}} + \mathcal{O}(u) \tag{V.94}$$

für $k \geq 3$. Die holomorphe Eisenstein-Reihe

$$G_k = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^k} = 2\,\zeta\,(k) + \mathcal{O}(q) \tag{V.95}$$

liefert einen Beitrag zum konstanten Term in Gleichung (V.93)

$$h_n^{(0)} \to H_n^{(0)} = h_n^{(0)} - G_4 h_n^{(4)} - G_6 h_n^{(6)} - \ldots - G_{2\,[n/2]} h_n^{(2\,[n/2])} \,. \tag{V.96}$$

[96] Es gibt keinen Term der Ordnung u^{-1}. Die Summe der Residuen einer elliptischen Funktion verschwindet. Da $h_n(u)$ nur einen Pol in $u = 0$ besitzt, muß das entsprechende Residuum verschwinden.

[97] $\wp^{(k)}(u)$ ist die k-te Ableitung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion nach dem Argument u.

Die Integration der einzelnen Terme der Reihenentwicklung von $h_n(u)$ über die Homologiezykel des Torus ist einfach durchzuführen. Die Stammfunktion einer Ableitung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion $\wp^{(k)}(u)$ mit $k \geq 1$ ist die doppelt periodische Funktion $\wp^{(k-1)}(u)$. Das Integral einer doppelt periodischen Funktion über einen geschlossenen Weg auf dem Torus verschwindet. Folglich tragen nur die letzten beiden Terme der Entwicklung (V.93) von $h_n(u)$ zum Integral $f_{n,\bar{n}}$ aus (V.92) bei. Die Integrale des konstanten Termes und der Weierstraßschen $\wp$-Funktion sind einfach zu berechnen. Es ist (B.3)

$$\oint_a du = 0 \qquad\qquad \oint_b du = \tau \tag{V.97}$$

und (F.31)

$$\oint_a du\, \wp(u) = -2\eta_1 = -G_2 \qquad\qquad \oint_b du\, \wp(u) = -2\eta_2 = 2\pi i - G_2\tau\,, \tag{V.98}$$

mit den entsprechenden komplex konjugierten Ausdrücken. Die in Gleichung (F.32) definierte *beinahe modulare* Form G_2 erhält man durch Regularisierung des Ausdruckes (V.95) für $k = 2$. Das Integral $f_{n,\bar{n}}$ aus (V.90) besteht folglich aus einer Linearkombination der folgenden nicht verschwindenden Spinstruktur-Integrationen

$$\langle 1\rangle = 1\,, \quad \langle\wp\rangle = -G_2 + \frac{\pi}{\tau_2} \quad \text{und} \quad \langle\wp\bar{\wp}\rangle = G_2\bar{G}_2 - \frac{\pi}{\tau_2}\left(G_2 + \bar{G}_2\right). \tag{V.99}$$

Damit läßt sich die allgemeine Form des Ergebnisses der Integration über die Spinstrukturen angeben

$$\begin{aligned} f_{n,\bar{n}} &= H_n^{(0)}\bar{H}_{\bar{n}}^{(0)} + H_n^{(0)}\bar{h}_{\bar{n}}^{(2)}\langle\bar{\wp}\rangle + \bar{H}_{\bar{n}}^{(0)}h_n^{(2)}\langle\wp\rangle + h_n^{(2)}\bar{h}_{\bar{n}}^{(2)}\langle\wp\bar{\wp}\rangle \\ &= \left(H_n^{(0)} + h_n^{(2)}\left(-G_2 + \frac{\pi}{\tau_2}\right)\right)\left(\bar{H}_{\bar{n}}^{(0)} + \bar{h}_{\bar{n}}^{(2)}\left(-\bar{G}_2 + \frac{\pi}{\tau_2}\right)\right) - h_n^{(2)}\bar{h}_{\bar{n}}^{(2)}\left(\frac{\pi}{\tau_2}\right)^2. \end{aligned} \tag{V.100}$$

Dieser Ausdruck läßt sich offensichtlich nicht chiral aufspalten, er kann nicht als das Produkt einer holomorphen und einer antiholomorphen Hälfte geschrieben werden. Zur Berechnung aller in der Vier-Punkt-Amplitude vorkommenden Terme (V.57) bis (V.59) müssen die Integrale $f_{n,\bar{n}}$ mit $(n,\bar{n}) \in \{(0,0),(2,0),(2,2),(4,0),(4,2),(4,4)\}$ und die entsprechenden konjugierten Integrale bestimmt werden. Da die einzigen nicht verschwindenden Integrale (V.99) bereits bekannt sind, bleiben noch die Koeffizienten $h_n^{(k)}$ anzugeben. Allgemein gilt $h_n^{(1)} = 0$ und $h_n^{(n)} = (-1)^n$. Im Fall der Vier-Punkt-Amplitude auf dem Torus sind die Ausdrücke $h_4^{(2)}$ und die konstanten Terme $H_2^{(0)}$ und $H_4^{(0)}$ in der Entwicklung (V.93) zu bestimmen. Es ist

$$H_2^{(0)} = h_2^{(0)} = -\wp(z_{12}) = \partial^2 \ln E_{12} + G_2 \tag{V.101a}$$

$$h_4^{(2)} = \frac{1}{2}T_4^{-1}\tilde{\partial}^2 T_4 + 2\,G_2 \tag{V.101b}$$

$$H_4^{(0)} = h_4^{(0)} - G_4 = \frac{1}{24}T_4^{-1}\tilde{\partial}^4 T_4 + G_2\,T_4^{-1}\tilde{\partial}^2 T_4 + 2\,G_2^2\,. \tag{V.101c}$$

Dabei wurden die Abkürzungen eingeführt $E_{ij} \equiv E(z_{ij})$ und

$$T_4 \equiv E_{12}E_{23}E_{34}E_{41} \tag{V.102}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}^2 T_4 \equiv\ & E''_{12}E_{23}E_{34}E_{41} + E_{12}E''_{23}E_{34}E_{41} + E_{12}E_{23}E''_{34}E_{41} + E_{12}E_{23}E_{34}E''_{41} \\ & +2\,E'_{12}E'_{23}E_{34}E_{41} + 2\,E'_{12}E_{23}E'_{34}E_{41} + 2\,E'_{12}E_{23}E_{34}E'_{41} \\ & +2\,E_{12}E'_{23}E'_{34}E_{41} + 2\,E_{12}E'_{23}E_{34}E'_{41} + 2\,E_{12}E_{23}E'_{34}E'_{41}\,, \end{aligned} \tag{V.103}$$

sowie ein entsprechender Ausdruch für $\tilde{\partial}^4 T_4$. Die Ableitungen $\tilde{\partial}^k$ angewendet auf ein Produkt von Primformen wirken in allen möglichen Kombinationen auf die Argumente z_{ij} der einzelnen Faktoren des Produktes. Die zur Berechnung des Beitrages der fermionischen Propagatoren zur Vier-Punkt-Amplitude des $N{=}2$ Strings auf dem Torus sind

$$
\begin{aligned}
f_{(0,0)} &= 1 && \text{(V.104a)}\\
f_{(2,0)} &= \partial^2 \ln E_{12} + \frac{\pi}{\tau_2} && \text{(V.104b)}\\
f_{(2,2)} &= \left|\partial^2 \ln E_{12} + \frac{\pi}{\tau_2}\right|^2 - \left(\frac{\pi}{\tau_2}\right)^2 && \text{(V.104c)}\\
f_{(4,0)} &= \frac{1}{24}\,T_4^{-1}\tilde{\partial}^4 T_4 + \frac{1}{2}\left(G_2 + \frac{\pi}{\tau_2}\right) T_4^{-1}\tilde{\partial}^2 T_4 + 2\,G_2\,\frac{\pi}{\tau_2} && \text{(V.104d)}\\
f_{(4,2)} &= \left(\frac{1}{24}\,T_4^{-1}\tilde{\partial}^4 T_4 + \frac{1}{2}\left(G_2 + \frac{\pi}{\tau_2}\right) T_4^{-1}\tilde{\partial}^2 T_4 + 2\,G_2\,\frac{\pi}{\tau_2}\right)\partial^2 \ln \bar{E}_{12}\\
&\quad + \frac{\pi}{\tau_2}\left(\frac{1}{24}\,T_4^{-1}\tilde{\partial}^4 T_4 + \frac{1}{2}\,G_2\,T_4^{-1}\tilde{\partial}^2 T_4\right) && \text{(V.104e)}\\
f_{(4,4)} &= \left|\frac{1}{24}\,T_4^{-1}\tilde{\partial}^4 T_4 + \frac{1}{2}\left(G_2 + \frac{\pi}{\tau_2}\right) T_4^{-1}\tilde{\partial}^2 T_4 + 2\,G_2\,\frac{\pi}{\tau_2}\right|^2\\
&\quad - \left|\frac{1}{2}\,T_4^{-1}\tilde{\partial}^2 T_4 + 2\,G_2\right|^2 \left(\frac{\pi}{\tau_2}\right)^2 . && \text{(V.104f)}
\end{aligned}
$$

DER FELDTHEORIE-GRENZWERT

Nachdem in den Gleichungen (V.104a) bis (V.104f) sämtliche aus der Spinstrukturintegration entstehende Beiträge der fermionischen Propagatoren zur Amplitude bestimmt worden sind, soll nun der Feldtheorie-Grenzwert $\alpha' \to 0$ dieser Ausdrücke ermittelt werden. Die für die Berechnung der Vier-Punkt-Amplitude auf dem Torus zu betrachtenden Terme enthalten neben den holomorphen Eisenstein-Reihen G_2 und G_4 Primformen und deren Ableitungen. Die führende Ordnung der Entwicklung der Primform in q ist für $q \to 0$ durch

$$E(z) \to \frac{1}{2\pi}\,\sin(2\pi z) \qquad \text{(V.105)}$$

gegeben. Die Spinstrukturintegrale $f_{n,\bar{n}}$ enthalten folglich Produkte von Konstanten und Termen der Form $\cot(2\pi z)$. Nach der Integration über die Winkelvariablen α_i aus (V.65) erhält man $\cot(2\pi z) \to i$. Die Beiträge der fermionischen Korrelatoren werden also nach der Winkelintegration unabhängig von den Positionen der Vertexoperatoreinsetzungen und liefern lediglich einen zu ihrem Impulsvorfaktor proportionalen Ausdruck. Diese kinetischen Terme können aufgrund ihrer Unabhängigkeit von den Koordinaten z_i addiert werden und verschwinden on-shell wegen der Impulserhaltung.

Der Ausdruck $f_{2,0}$ aus Gleichung (V.104b) führt nach der Bildung des Feldtheorie-Grenzwertes und der Integration über die Winkelvariablen zum Beitrag

$$f_{2,0}(z) \to -(2\pi)^2\left(1 + \cot^2(2\pi z)\right) + \frac{\pi}{\tau_2} \to \frac{\pi}{\tau_2}\,. \qquad \text{(V.106)}$$

Dieser konstante Term ist ebenso wie die anderen fermionischen Beiträge $f_{n,\bar{n}}$ im Grenzfall $\alpha' \to 0$ vom Standpunkt der Konstruktion der MHV Amplituden mit Hilfe der Bern-Kosower-Regeln aus gesehen proportional zur Differenz der Beiträge eines im Loop umlaufenden skalaren Zustandes und eines Gravitons [50]. Aufgrund der Relation (IV.64) $A^{[0]} = A^{[2]}$ müssen diese Beiträge folglich verschwinden. Der konstante Ausdruck $f_{(2,0)}$ aus (V.106) liefert einen kinetischen Vorfaktor der Form $k_1 \cdot \bar{k}_2\, k_2 \cdot \bar{k}_1$, der mit den Beiträgen $\partial_k G_{kl}$ der bosonischen Propagatoren aus (V.59) zu multiplizieren ist. Im Feldtheorie-Grenzfall $q \to 0$ sind die Terme $\partial_k \ln E_{kl}$ von den Positionen der Vertexoperatoren unabhängig. Folglich können ihre kinetischen Vorfaktoren zusammengefaßt werden. Man erhält einen aufgrund der Impulserhaltung on-shell verschwindenden Ausdruck der Form $k_3 \cdot (k_1 + k_2 + k_4) = 0$. Lediglich die Nullmoden $\frac{2\pi i}{\tau_2} \operatorname{Im} z_{ij}$ der Ableitungen der bosonischen Propagatoren liefern einen nicht konstanten Beitrag zu den Termen $f_{2,0}$. Nach dem Variablenwechsel (V.65) sind diese Nullmoden linear in den u_i. Zur Bestimmung des kinetischen Vorfaktors der Beiträge der Kontraktion von zwei Fermionenpaaren zur Amplitude des N=2 Strings sind die zum selben u_i proportionalen Terme zusammenzufassen. Da der Nullmodenbeitrag in führender Ordnung mit einem Faktor $|q|^{-(s\,u_1 u_3 + t\,u_2 u_4)}$ gewichtet über die u_i zu integrieren ist, kann der erhaltene Ausdruck zudem noch mit den Permutationen $1 \leftrightarrow 3$ und $2 \leftrightarrow 4$ symmetrisiert werden. Nach der Addition von holomorpher und antiholomorpher Hälfte $f_{2,0}$ und $f_{0,2}$ ergeben sich auf diese Weise kinetische Vorfaktoren, die proportional zu Ausdrücken der Form

$$\operatorname{Re}\left(k_1 \cdot \bar{k}_2\, k_2 \cdot \bar{k}_3\, k_3 \cdot \bar{k}_1\right) = 0 \tag{V.107}$$

sind. Verschwindende kinetische Faktoren dieser Form ergeben sich auch bei der Konstruktion der Vier-Punkt-Amplitude des N=2 Strings auf der Sphäre (IV.17). Alle Terme, die zu $f_{2,0}$ und zu $f_{0,2}$ beitragen, lassen sich auf diese Weise kombinieren, so daß die Summe über alle Kontraktionen von zwei Fermionenpaaren verschwindet, wie aufgrund der "Supersymmetrie-Identität" (IV.64) der MHV Amplituden zu erwarten war.

Der Ausdruck $f_{2,2}$ verschwindet bereits nach der Integration über die Winkelvariablen,

$$f_{2,2}(z,\bar{z}) \to \left| -(2\pi)^2 \cot^2(2\pi z) - (2\pi)^2 + \frac{\pi}{\tau_2} \right|^2 - \left(\frac{\pi}{\tau_2}\right)^2 \to 0\,. \tag{V.108}$$

Dabei ist $\bar{z}$ eine von z unabhängige Variable. Folglich liefern auch diese fermionischen Kontraktionen keinen Beitrag zur Amplitude.

Alle verbleibenden Beiträge $f_{n,\bar{n}}$ der fermionischen Propagatoren enthalten in der holomorphen oder in der antiholomorphen Hälfte zumindest einen Ausdruck der Form (V.57) mit einer zyklischen Kontraktion zwischen vier fermionischen Feldern, es ist also $n = 4$ oder $\bar{n} = 4$. Diese Terme (V.104d) bis (V.104f) verschwinden nach der Bildung der Feldtheorie-Grenzwertes und nach der Integration über die Winkelvariablen nicht einzeln wie der Ausdruck (V.108), ihre Summe ergibt jedoch einen verschwindenden kinematischen Faktor. Im Grenzfall $\tau_2 \to \infty$ vereinfachen sich die holomorphen Eisenstein-Reihen zu

$$G_2 \to \frac{\pi^2}{3} \qquad \text{und} \qquad G_4 \to \frac{\pi^4}{45}\,. \tag{V.109}$$

Die in Gleichung (V.103) definierten $\tilde{\partial}^2$ und $\tilde{\partial}^4$ Ableitungen erzeugen eine große Anzahl von Termen der Form $E_{ij}^{(k)}/E_{ij}$. Die Abhängigkeit dieser Ausdrücke von den Positionen z_{ij} der Vertexoperatoren verschwindet jedoch im Feldtheorie-Grenzwert nach der Integration über die Winkelvariablen,

$$\frac{E^{(k)}(z_{ij})}{E(z_{ij})} \to (2\pi i)^k \,. \tag{V.110}$$

Daraus folgen für $\alpha' \to 0$ die Ersetzungen

$$T_4^{-1}\tilde{\partial}^4 T_4 \to 256\,(2\pi)^2 \qquad \text{und} \qquad T_4^{-1}\tilde{\partial}^2 T_4 \to -16\,(2\pi)^2 \,. \tag{V.111}$$

Damit nehmen die Terme mit vier fermionischen Propagatoren in der holomorphen oder in der antiholomorphen Hälfte nach dem Grenzübergang $\alpha' \to 0$ und nach der Integration über die Winkelvariablen α_i die Form an

$$f_{4,0} \;\to\; 10\,(2\pi)^4 - \frac{47}{6}\,(2\pi)^2\,\frac{\pi}{\tau_2} \tag{V.112a}$$

$$f_{4,2} \;\to\; 10\,(2\pi)^4\,\frac{\pi}{\tau_2} \tag{V.112b}$$

$$f_{4,4} \;\to\; 100\,(2\pi)^8 - \frac{470}{3}\,(2\pi)^6\,\frac{\pi}{\tau_2} \,. \tag{V.112c}$$

Die Spinstrukturintegrale $f_{n,\bar{n}}(\{z_{ij}\},\{\bar{z}_{kl}\})$ werden mit den kinetischen Vorfaktoren $t_{n,\bar{n}}(\{k_i,\epsilon_j\})$, die aus Skalarprodukten der Impulse und Polarisationsvektoren der Vertexoperatoren $V'(k,\epsilon)$ aus Gleichung (V.48) bestehen, multipliziert. Da der Feldtheorie-Grenzwert der $f_{n,\bar{n}}$ nicht mehr von den Positionen z_i der Vertexoperatoren abhängt, können die verschiedenen Permutationen der kinetischen Vorfaktoren $t_{n,\bar{n}}$ addiert werden. Aufgrund der Struktur des fermionischen Anteils der Vertexoperatoren kann der kinematische Faktor zerlegt werden, $t_{n,\bar{n}} = t_n\,\bar{t}_{\bar{n}}$. Es soll nun gezeigt werden, daß die Summe über die verschiedenen Vorfaktoren der Form t_n verschwindet[98].

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Korrelationsfunktion von vier Fermionenpaaren zu konstruieren. Alle vier Fermionenpaare werden zyklisch kontrahiert oder jeweils zwei Fermionenpaare werden untereinander kontrahiert. Die erste Möglichkeit führt zu einem kinetischen Term der Form

$$t_4^{(1234)} = \epsilon_1\cdot k_2\,\epsilon_2\cdot k_3\,\epsilon_3\cdot k_4\,\epsilon_4\cdot k_1 \,, \tag{V.113}$$

sowie zu den entsprechenden Termen mit den Permutationen $1 \leftrightarrow 2$ und $2 \leftrightarrow 3$. Wählt man für alle Polarisationsvektoren

$$\epsilon_{\alpha\dot{\alpha}}(k;q) = i\,\frac{q_\alpha k_{\dot{\alpha}}}{q^\beta k_\beta} \tag{V.114}$$

aus Gleichung (V.45) die gleichen Referenzimpulse q, läßt sich der kinetische Vorfaktor schreiben als[99]

$$t_4^{(1234)} = [12][23][34][41] \,. \tag{V.115}$$

[98] Durch die Beschränkung auf die holomorphe Hälfte t_n werden lediglich die Vorfaktoren der Terme $f_{4,0}$ betrachtet. Für die Vorfaktoren der Terme $f_{4,2}$ und $f_{4,4}$ kann man ganz analog vorgehen und kommt zum selben Ergebnis.

[99] Das antisymmetrische Spinorprodukt $[ij] = -[ji]$ ist mit der Zerlegung des Bispinors $k^{\alpha\dot{\alpha}} = k^\alpha k^{\dot{\alpha}}$ definiert als $[ij] = k_i^{\dot{\alpha}} k_{j\,\dot{\alpha}}$.

Durch Addition aller Beiträge aus der zyklischen Kontration von vier Fermionenpaaren zum kinetischen Vorfaktor von $f_{4,0}$ erhält man somit

$$t_4^{(1234)} + t_4^{(2134)} + t_4^{(1324)} = [12][23][34][41] + [21][13][34][42] + [13][32][24][41] \,. \tag{V.116}$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wie man durch zweifache Anwendung der Fierz-Identität [101]

$$[AB][CD] = [AC][BD] + [AD][CB] \tag{V.117}$$

leicht überprüfen kann. Es ist

$$\begin{aligned} t_4^{(1234)} + t_4^{(2134)} + t_4^{(1324)} &= [12][23][34][41] + [13][24]\big([12][34] + [14][23]\big) \\ &= [12][23][34][41] + [13]^2[24]^2 \\ &= [12][34]\big([24][31] + [21][43]\big) + [13]^2[24]^2 \\ &= -[12][24][43][31] + [12]^2[34]^2 + [13]^2[42]^2 \,. \end{aligned} \tag{V.118}$$

Symmetrisiert man die Gleichung (V.118) auf beiden Seiten, erhält man

$$\begin{aligned} t_4^{(1234)} + t_4^{(2134)} + t_4^{(1324)} &= -[12][24][43][31] - [21][14][43][32] - [23][24][41][31] \\ &\quad +2\big([12]^2[43]^2 + [13]^2[42]^2 + [14]^2[32]^2\big) \,. \end{aligned} \tag{V.119}$$

Aus der Fierz-Identität (V.117) folgt die Beziehung

$$[12]^2[43]^2 + [13]^2[42]^2 + [14]^2[32]^2 = 0 \,. \tag{V.120}$$

Damit erhält man aus Gleichung (V.119) das Ergebnis

$$t_4^{(1234)} + t_4^{(2134)} + t_4^{(1324)} = -\big(t_4^{(1234)} + t_4^{(2134)} + t_4^{(1324)}\big) \,. \tag{V.121}$$

Folglich verschwindet die Summe (V.116) über die Permutationen des kinetischen Vorfaktors der zyklischen Kontraktion von vier Fermionenpaaren.

Die andere Möglichkeit, vier Fermionenpaare untereinander zu kontrahieren, liefert zwei Zykel von je zwei Fermionenpaaren. Der daraus entstehende kinetische Vorfaktor hat die Form

$$t_4^{(12)(34)} = \epsilon_1 \cdot k_2 \, \epsilon_2 \cdot k_1 \, \epsilon_3 \cdot k_4 \, \epsilon_4 \cdot k_3 \,. \tag{V.122}$$

Mit der entsprechenden Wahl der Referenzimpulse läßt sich dieser Ausdruck schreiben als

$$t_4^{(12)(34)} = [12]^2[34]^2 \,. \tag{V.123}$$

Auch zu diesem Ausdruck gibt es wieder zwei Permutationen $1 \leftrightarrow 3$ und $1 \leftrightarrow 4$, die zu addieren sind. Die so erhaltene Summe

$$t_4^{(12)(34)} + t_4^{(13)(24)} + t_4^{(14)(23)} = [12]^2[34]^2 + [13]^2[24]^2 + [14]^2[23]^2 = 0 \tag{V.124}$$

verschwindet aufgrund der Fierz-Identität (V.117). Die Vier-Fermionen-Terme tragen also nicht zum Feldtheorie-Grenzwert der Amplitude des $N{=}2$ Strings bei.

Die Summe über alle Beiträge fermionischer Kontraktionen verschwindet wenn der Grenzübergang $\alpha' \to 0$ nach der Integration über die Spinstrukturen durchgeführt wird. Diese Eigenschaft bestätigt das in Abschnitt V.3.3 erhaltene Ergebnis der Anwendung der Bern-Kosower-Regeln, daß die Fermionen nicht zur MHV Amplitude der Gravitation, und damit nicht zum Feldtheorie-Grenzwert der Ein-Loop-Amplitude des $N{=}2$ Strings beitragen. Insbesondere ist anzumerken, daß das Verschwinden der Beiträge der fermionischen Korrelationsfunktionen in der Amplitude unabhängig davon ist, ob zuerst der $\alpha' \to 0$ Grenzwert gebildet wird, wodurch die Integration über die Spinstrukturen trivial wird, oder ob zuerst die Integration über die Spinstrukturen durchgeführt und anschließend der Feldtheorie-Grenzwert gebildet wird.

V.3.5 Integration über den metrischen Moduliraum

In den Abschnitten V.3.3 und V.3.4 wurde gezeigt, daß die kinetische Struktur der Vier-Punkt-Amplitude des $N{=}2$ Strings auf dem Torus mit der MHV Amplitude der Gravitation auf Ein-Loop-Niveau übereinstimmt. Es bleibt die Integration $\int d^2\tau$ über den metrischen Moduliraum mit dem entsprechenden Integrationsmaß des $N{=}2$ Strings durchzuführen. Dabei hängt von der Potenz des Imaginärteils des Teichmüller-Parameters τ_2 im Integranden ab, in welcher Raumzeit-Dimension der Impuls der Loopintegration der effektiven Feldtheorie zu interpretieren ist.

Da die führende Ordnung des Integranden für $q \to 0$ nicht vom Realteil des Teichmüller-Parameters τ_1 abhängt, kann die Integration über den metrischen Moduliraum aufgespaltet werden. Der Intergationsbereich $\mathcal{F}$ aus (III.22) zerfällt in $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1$ mit

$$\mathcal{F}_0 = \left\{\tau \in \mathcal{F} \,\middle|\, \mathrm{Im}\ \tau < 1\right\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}_1 = \left\{\tau \in \mathcal{F} \,\middle|\, \mathrm{Im}\ \tau \geq 1\right\}. \tag{V.125}$$

Die Integration über den Bereich $\mathcal{F}_0$ liefert einen Term der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha')$, der im Feldtheorie-Grenzwert nicht zur analytischen oder zur kinetischen Struktur der Amplitude beiträgt [62]. Im Grenzfall $\alpha' \to 0$ nimmt die Integration über den metrischen Moduliraum folglich die Form an

$$\int\limits_{\mathcal{F}} d^2\tau \ldots \to \int\limits_{\mathcal{F}_1} d^2\tau \ldots = \int\limits_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \int\limits_{1}^{\infty} d\tau_2 \ldots = \int\limits_{1}^{\infty} d\tau_2 \ldots\ . \tag{V.126}$$

Die Moduliintegration (V.126) unterscheidet sich von der Integration über die Schwinger-Zeit in der Feldtheorie dadurch, daß der Integrationsbereich für τ_2 von der Null weg beschränkt ist. Dies ist eine Folge der Dualität der Stringtheorie. Die Dualität führt zu modularer Invarianz der Theorie auf der Weltfläche, die den Integrationsbereich des metrischen Moduliraumes beschränkt [107], wie in Abschnitt III.3.2 beschrieben wurde. Abgesehen von diesem im Grenzfall $\alpha' \to 0$ verschwindenden Unterschied im Integrationsbereich, gibt der Feldtheorie-Grenzwert der Ein-Loop-Amplitude das $N{=}2$ Strings mit der Moduliintegration (V.126) die Schwinger-Zeit Darstellung der MHV Amplitude der Gravitation wieder.

Die Integration über den metrischen Moduliraum der Vier-Punkt-Amplitude des N=2 Strings auf dem Torus hat im Feldtheorie-Grenzwert die Form

$$\mathcal{A}_4(k_i) = \int_1^\infty d\tau_2\, \tau_2^2\, K_{MHV}(k_i)\,. \tag{V.127}$$

Dabei beschreibt der Ausdruck K_{MHV} die kinetische Struktur der MHV Amplitude der Gravitation mit dem sich aus der Schwinger-Zeit Parametrisierung ergebenden Exponentialfaktor. Der Vergleich des Maßfaktors τ_2^2 mit der Schwinger-Zeit Darstellung einer ϕ^3-Feldtheorie (E.8) zeigt[100], daß Gleichung (V.127) die MHV Amplitude in d=2 Dimensionen beschreibt. Diese Amplitude verschwindet jedoch, wie in Abschnitt IV.3 gezeigt wurde. Man erhält also für die Vier-Punkt-Amplitude des N=2 Strings auf dem Torus das Ergebnis

$$\mathcal{A}_4(k_i) = 0\,. \tag{V.128}$$

Der für den N=2 String erhaltene Ausdruck (V.127) unterscheidet sich von der entsprechenden Amplitude im selbstdualen Sektor des auf vier Dimensionen kompaktifizierten Typ IIB Superstrings durch einen zusätzlichen Faktor τ_2 im Integranden. Das Integrationsmaß des Superstrings in D Dimensionen besteht aus den Determinanten der bosonischen und fermionischen Materiefelder X und ψ

$$Z_X = \tau_2^{-D/2}\, \big|\eta(\tau)\big|^{-2D} \qquad \text{und} \qquad Z_\psi = \big|\vartheta\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](0,\tau)\big|^{D}\, \big|\eta(\tau)\big|^{-D}\,, \tag{V.129}$$

den Determinanten der fermionischen Reparametrisierungsgeister (b, c) und der bosonischen Supersymmetriegeister (β, γ)

$$Z_{bc} = \tau_2\, \big|\eta(\tau)\big|^4 \qquad \text{und} \qquad Z_{\beta\gamma} = \big|\vartheta\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](0,\tau)\big|^{-2}\, \big|\eta(\tau)\big|^2 \tag{V.130}$$

und dem Weyl-Petersson-Maß $d^2\tau/\tau_2^2$. Insgesamt erhält man im D-dimensionalen Targetraum des Typ IIB Superstrings das Integrationsmaß des metrischen Moduliraumes [63]

$$\frac{d^2\tau}{\tau_2^2}\, \tau_2^{-(D-2)/2}\, \big|\vartheta\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](0,\tau)\big|^{D-2}\, \big|\eta(\tau)\big|^{-3\,(D-2)}\,. \tag{V.131}$$

Zur Berechnung der Superstringamplitude in d Dimensionen muß der Targetraum kompaktifiziert werden. Wählt man etwa eine Kompaktifizierung auf dem Torus T^{D-d}, ist das Integrationsmaß (V.131) um die Gittersumme[101]

$$Z(\Gamma) = \tau_2^{(D-d)/2} \sum_{(P_L,P_R)\in\Gamma} e^{\pi i\,\tau\, P_L\cdot P_L - \pi i\,\bar\tau\, P_R\cdot P_R} \tag{V.132}$$

zu ergänzen. Weiterhin erzeugen n Integrationen $\int d^2z$ über die Positionen der Vertexoperatoren auf dem Torus einen zusätzlichen Faktor τ_2^n, so daß man im Feldtheorie-Grenzwert $\alpha' \to 0$ insgesamt das Integrationsmaß $d\tau_2\, t_2^{n-1-d/2}$ erhält. Damit nimmt die Vier-Punkt-Ein-Loop-Amplitude im selbstdualen Sektor der Gravitation des auf dem Torus T^6 auf d=4 kompaktifizierten Typ IIB Superstrings auf dem

[100] Es muß gelten $2 = n - 1 - d/2$ mit n=4, vergleiche Anhang E.

[101] Die Gitterimpulse P_R und P_L parametrisieren das Gitter Γ. Es muß gelten $P_L^2 - P_R^2 \in 2\,\mathbb{Z}$ [111].

Torus die Form an

$$\mathcal{A}_4^{IIB}(k_i) = \int\limits_1^\infty d\tau_2\, \tau_2\, K_{MHV}(k_i)\,. \tag{V.133}$$

Dabei ist $K_{MHV}(k_i)$ der auch im Fall des $N{=}2$ Strings auftretende kinetische Faktor der entsprechenden MHV Amplitude. Ein Vergleich mit dem Ergebnis (V.127) des $N{=}2$ Strings zeigt, daß die Amplitude des $N{=}2$ Strings einen Faktor τ_2 mehr im Integranden enthält. Das entspricht vom Standpunkt der Stringtheorie aus einer zusätzlichen Kompaktifizierung von zwei Dimensionen. Die Feldtheorieinterpretation des Ergebnisses (V.133) des IIB Superstrings führt dementsprechend zur MHV Amplitude in vier Dimensionen. Diese Amplitude verschwindet im Gegensatz zu (V.128) nicht, sie hat den endlichen Wert[102]

$$\mathcal{A}_4^{MHV}(k_i) = -\frac{i}{120\,(4\pi)^2}\left(\frac{s_{12}s_{23}}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 41\rangle}\right)^2 \left(s_{12}^2+s_{23}^2+s_{13}^2\right). \tag{V.134}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man bei der Berechnung des selbstdualen Sektors der Gravitonstreuung des auf dem Torus T^{22} auf $d{=}4$ kompaktifizierten bosonischen String.

Die effektive Feldtheorie des $N{=}2$ Strings in vier Dimensionen

Das Verschwinden der Ein-Loop-Amplitude des $N{=}2$ Strings (V.128) bestätigt die Aussagen einiger allgemeiner auf den Symmetrien der Theorie basierender Theoreme über das Verschwinden fast aller Amplituden des $N{=}2$ Strings [20, 84, 116]. Jedoch stimmt die Dimension der Feldtheorieinterpretation des Ergebnisses nicht mit der kritischen Dimension der Stringtheorie überein. Dadurch sind die Loop-Amplituden der Stringtheorie nicht identisch mit denen, die man durch die Konstruktion der MHV Amplituden aus der Quantisierung der effektiven Feldtheorie erhält. Der Unterschied in der Dimension der Feldtheorieinterpretation des Ergebnisses ergibt sich aus dem zusätzlichen Faktor τ_2 im Integranden (V.127). Eliminiert man diesen von der $U(1)$ Eichsymmetrie der Weltflächenwirkung stammenden Faktor, erhält man auch für den $N{=}2$ String die nicht verschwindende Vier-Punkt-Ein-Loop-Amplitude des MHV Sektors der Gravitation in vier Dimensionen (V.134).

Eine Möglichkeit, den überschüssigen Faktor τ_2 im Integranden (V.127) zu eliminieren besteht darin, einen nicht integrierten bosonischen Vertexoperator mit verschwindendem Impuls

$$\lim_{k\to 0}\sqrt{-h}\,\partial Z\cdot\bar\partial Z\, e^{i\,k\cdot Z} \tag{V.135}$$

in das Pfadintegral einzusetzen. Ein zusätzlicher Faktor τ_2^{-1} wird auch durch das Einsetzen einer bosonischen Nullmode

$$\partial\bar\partial G(z,\bar z) = \frac{2\pi}{\tau_2}\,\delta^{(2)}(z,\bar z) \tag{V.136}$$

in das Pfadintegral erzeugt. Diese Einsetzungen brechen jedoch die konforme Invarianz der Theorie auf der Weltfläche.

[102] Das antisymmetrische Spinorprodukt $\langle ij\rangle = -\langle ji\rangle$ ist mit der Zerlegung des Bispinors $k^{\alpha\dot\alpha} = k^\alpha k^{\dot\alpha}$ definiert als $\langle ij\rangle = k_i^\alpha k_{j\,\alpha}$. Die Mandelstam-Variablen s_{ij} sind definiert als $s_{ij} = -2\,k_i\cdot k_j = [ij]\langle ij\rangle$.

Eine genaue Untersuchung der in das Pfadintegral einzusetzenden Geist- und Antigeistnullmoden (vergleiche Abschnitt V.1.3) und des Volumens der konformen Killing-Gruppe liefert ein Integrationsmaß, das zu einer vierdimensionalen Feldtheorieinterpreration der Ein-Loop-Amplitude des N=2 Strings führt. Mit den acht konstanten Geistnullmoden, die zu einer Einsetzung des Ausdrucks $c\bar{c}c'\bar{c}'b\bar{b}b'\bar{b}'$ in das Pfadintegral des geschlossenen Strings führen, und mit einem Volumen von τ_2^2 für die beiden mit den Reparametrisierungen und mit den $U(1)$ Eichtransformationen zusammenhängenden konformen Killing-Gruppen, werden das (b,c) Geistsystem und das (b',c') Geistsystem auf dem Torus gleich behandelt[103]. Statt des modular invarianten Integrationsmaßes aus Gleichung (V.54) erhält man auf diese Weise das Integrationsmaß der Moduliräume

$$\frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2u}{\tau_2^2}\,. \tag{V.137}$$

Der Vergleich mit (V.54) zeigt, daß man so einen Faktor τ_2 weniger im Pfadintegral erhält. Das Ergebnis der Vier-Punkt-Amplitude des N=2 Strings auf dem Torus ist in diesem Fall also (V.134),

$$\mathcal{A}_4(k_i) = -\frac{i}{120\,(4\pi)^2}\left(\frac{s_{12}s_{23}}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 41\rangle}\right)^2\left(s_{12}^2+s_{23}^2+s_{13}^2\right). \tag{V.138}$$

Allerdings ist der Integrand mit dem Integrationsmaß (V.137) nicht modular invariant.

Durch die Anwendung von *sewing* Techniken [86, 99] können Tree- und Loop-Amplituden einer Stringtheorie aus dem Propagator $1/L_0$ und den Vertexoperatoren der äußeren Zustände konstruiert werden. Die Ein-Loop-Amplitude des N=2 Strings wird auf diese Weise durch den Ausdruck

$$\mathcal{A}_n = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\left(\frac{1}{L_0}\,V_1^{\theta_1}(k_1)\,\frac{1}{L_0}\,V_2^{\theta_2}(k_2)\ldots\frac{1}{L_0}\,V_n^{\theta_n}(k_n)\right) \tag{V.139}$$

beschrieben. Die Spur wird dabei über die sämtliche Zustände und über die Twistwinkel θ_i der Vertexoperatoren gebildet. Die Auswertung des Ausdrucks (V.139) für die Vier-Punkt-Amplitude des N=2 Strings liefert die MHV Amplitude (V.134) in d=4 Dimensionen [51]. Die Anwendung der sewing Techniken ist äquivalent zur Pfadintegralrechnung mit dem nicht modular invarianten Integrationsmaß (V.137).

V.3.6 Die Vier-Punkt-Amplitude auf dem Zylinder

Die in den obigen Abschnitten für die Vier-Punkt-Amplitude des N=2 Strings auf dem Torus durchgeführten Überlegungen lassen sich auf den Fall des offenen N=2 Strings übertragen. Die Ein-Loop-Amplitude eines offenen Strings wird in der Topologie eines Zylinders oder Anulus berechnet, der durch die Involution $f_C(x,y) = (x, 1-y)$ aus dem Torus hervorgeht [44, 45, 128, 129].

[103] Da der konforme Spin auf dem Torus mit $\chi = R_{z\bar{z}} = 0$ keine Rolle spielt, haben die beiden Geistsysteme dieselben Eigenschaften.

DIE MODULIRÄUME

Der metrische Moduliraum wird durch einen reellen Parameter t beschrieben, der die Form des Zylinders beschreibt. Der Integrationsbereich ist $\int_0^\infty dt$, da die beiden Ränder des Zylinders bei der Konstruktion der Amplitude durch das Anhängen von Vertexoperatoren unterscheidbar sind. Dadurch gibt es anders als auf dem Torus zwei Bereiche möglicher Divergenzen an den Rändern des Moduliraumes. Der Grenzwert $t \to \infty$ entspricht dem Grenzwert $\tau_2 \to \infty$ des Torus und kann zu UV Divergenzen der Amplitude führen. Der Grenzwert $t \to 0$ kann zu IR Divergenzen der Amplitude führen. Durch ein Umskalieren der Metrik kann man zeigen, daß es sich beim $t \to 0$ Grenzwert um einen langreichweitigen Effekt handelt, der äquivalent zur Entstehung eines geschlossenen Strings aus dem Vakuum ist, der nach einer Propagation durch die Raumzeit wieder im Vakuum verschwindet [123, Abschnitt 7.4]. Diese möglichen IR Divergenzen spielen beim Vergleich mit der effektiven Feldtheorie keine Rolle und sollen daher nicht betrachtet werden.

Ebenso wie im Fall des geschlossenen Strings kann die Integration über die fermionischen Supersymmetriemoduli durchgeführt werden und liefert Auswahlregeln für die Bildladungen der Vertexoperatoren. Die Zahl der fermionischen Moduli auf dem Zylinder ist halb so groß wie auf dem Torus[104], allerdings wirken die aus der Moduliintegration entstehenden Bildwechseloperatoren lediglich auf die eine im Fall des offenen Strings vorhandene holomorphe Hälfte. Folglich sind auch auf dem Zylinder sämtliche (offenen) Vertexoperatoren im $(0,0)$ Bild zu wählen. Wie der Vertexoperator des geschlossenen Strings kann auch der offene Vertexoperator durch Ausnutzung der Eichinvarianz und durch Einführung von Referenzimpulsen in eine Form gebracht werden, die dem masselosen Vektor-Vertex des Typ I Superstrings entspricht,

$$V^{o\prime}(k,\epsilon) = \epsilon^+_{\alpha\dot\alpha}\left(\partial Z^{\alpha\dot\alpha} - i\,\psi^{\alpha\dot\alpha}\,\bar k\cdot\psi^+\right)e^{i\,k\cdot Z}\,. \tag{V.140}$$

Dabei sind die Polarisationsvektoren $\epsilon_{\alpha\dot\alpha}$ so gewählt, daß die Amplitude eine MHV Struktur erhält, d.h. $\epsilon_i \cdot \epsilon_j = 0$.

Die unter der $U(1)$ geladenen Spinoren $\psi^{+\mu}$, $\gamma^\pm$ und $\beta^\mp$ behalten unter der Involution f_C die Spinstruktur β des Torus, die auf dem Zylinder zu dem geschlossenen Weg parallel zu den Rändern gehört. Spinoren, die an einem Rand die gleiche Phase haben, können sich am anderen Rand des Zylinders um eine beliebige Phase α unterscheiden. Diese Phase entspricht der üblichen Randbedingung (II.39a) des offenen Strings. α und β können zu zwei Spinstrukturen auf dem Zylinder zusammengefaßt werden. Der $U(1)$ Moduliraum des offenen Strings ist jedoch reell eindimensional, die Moduliintegration wird lediglich über die vom Torus übernommene Spinstruktur β durchgeführt. Unterschiedliche Werte für α beschreiben zunächst unterschiedliche Sektoren des offenen $N{=}2$ Strings. Es läßt sich aber zeigen, daß die Amplitude nach der Integration über den $U(1)$ Modulus β nicht mehr von der Wahl der Randbedingung α abhängt. Die Abhängigkeit des Integranden von den $U(1)$ Moduli stammt von der Spinstrukturabhängigkeit des Szegö Kernes. Die Entwicklung des in den Termen (V.57) bis (V.59) auftauchenden zyklischen Produktes von Szegö Kernen in

[104] Ein komplexer Moduliparameter des geschlossenen Strings entspricht einem reellen Moduliparameter des offenen Strings.

$q = e^{2\pi i \tau}$ bzw. in $q = e^{-2\pi t}$ für den offenen String hat die Form

$$S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{12})\, S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{23}) \dots S\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z_{n1}) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}(z_{12}, z_{23}, \dots, z_{n1})\, e^{2\pi i m\,(\alpha+\beta)}\, q^{f(m,n)}\,. \tag{V.141}$$

Dabei ist $C_{m,n}$ der nur von den Positionen z_i abhängende Entwicklungskoeffizient und $f(m,n)$ gibt die Potenz von q in der Entwicklung an. Die Integration über den $U(1)$ Modulus $\int_0^1 d\beta$ vernichtet in der Summe über m alle Terme außer dem $m = 0$ Beitrag. Für $m = 0$ ist jedoch (V.141) auch von der Spinstruktur α unabhängig.

Die ebenfalls zu den $U(1)$ Moduli beitragenden Monodromien der Vertexoperatoren können wie im Fall des geschlossenen Strings in Spektralflußoperatoren absorbiert und an einen beliebigen Punkt auf der Weltfläche geschoben werden. Anders als auf dem Torus kann die Summe der Monodromien der Vertexoperatoren auf dem Zylinder nicht auf einem Weg konzentriert werden, der zu einem Punkt kontrahiert werden kann. Stattdessen führt der Spektralflußoperator auf dem Zylinder zu einer Verschiebung der Spinstruktur β entlang des Weges parallel zu den Rändern. Diese Spinstruktur ist jedoch periodisch auf dem Intervall $[0, 1]$, so daß die Integration über die $U(1)$ Moduli der Vertexoperatoren lediglich einen konstanten Volumenfaktor zur Amplitude beiträgt.

DAS INTEGRATIONSMASS

Die Determinanten der Geist- und Materiefelder ohne die entsprechenden Nullmoden auf dem Zylinder ist identisch mit der holomorphen Hälfte der Determinanten auf dem Torus. Man erhält also in der d-dimensionalen Raumzeit

$$Z_d^o\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](\tau) = \left(\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](0,\tau)\right)^{(d-4)/2} \left(\eta(\tau)\right)^{3\,(d-4)/2}\,. \tag{V.142}$$

In der kritischen Dimension $d{=}4$ ist dieser Ausdruck ebenso wie auf dem Torus gleich eins, so daß die Determinanten nicht zum Integrationsmaß beitragen.

Das Integrationsmaß des Teichmüller-Parameters $t \in \mathbb{R}$ ist im Fall des offenen Strings durch dt/t gegeben. Die Integration über die auf dem Intervall $[0, 1]$ parametrisierten $U(1)$ Moduli liefert einen konstanten Faktor im Integranden. Das Volumen der bosonischen konformen Killing-Gruppen ist gerade die Wurzel des Volumens der entsprechenden Gruppen auf dem Torus [44, 128], so daß man insgesamt einen Faktor t^{-2} erhält. Wie im Fall des geschlossenen Strings tragen die konformen Killing-Spinoren und die Nullmoden der Supersymmetriegeister nicht zum Integrationsmaß bei. Von den in Abschnitt V.1.3 untersuchten Nullmoden der bosonischen Geistfelder ist nur die Hälfte unter der Involution f_C invariant und trägt auch zu den Nullmoden der Amplitude des offenen Strings auf dem Zylinder bei. Man erhält also jeweils einen Faktor t von den Nullmoden der c und der c' Geister, sowie den üblichen Faktor $t^{-d/2}$ von den Nullmoden der bosonischen Materiefelder Z^μ. Insgesamt ergibt sich damit das Integrationsmaß des metrischen Moduliraumes der Zustandssumme des $N{=}2$ Strings auf dem Zylinder als dt/t^3.

DER STRINGINTEGRAND

Die Koba-Nielsen-Darstellung des bosonische Sektors der n-Punkt-Amplitude des offenen $N{=}2$ Strings mit dem Vertexoperator $V^{o\prime}(k,\epsilon)$ aus Gleichung (V.140) hat unter Ausnutzung der MHV Eigenschaften der Polarisationsvektoren die Form

$$\int d\mu_n \prod_{i\neq j} e^{-k_i\cdot k_j\, G_{ij}} \prod_{i\neq j} e^{\epsilon_{[i}\cdot k_{j]}\,\partial_i G_{ij}}\Big|_{\text{multilinear}} . \tag{V.143}$$

Dabei beschreibt $\int d\mu_n$ die Integration über den metrischen Moduliraum der n-fach punktierten Riemann-Fläche. Die supersymmetrische Verallgemeinerung dieses Ausdrucks erhält man durch die Ersetzung $\partial_i G_{ij} \to D_i^+ G_{ij}$, wobei D_i^+ die kovariante Ableitung im Superraum ist und G_{ij} durch den Propagator des Superfeldes ersetzt wird. Die Entwicklung der Exponentialfunktion in (V.143) und die Anwendung des Wick-Theorems erzeugt wie schon im Fall der Amplitude auf dem Torus Terme der Form (V.57) bis (V.59), in denen ausschließlich Differenzen von bosonischen und fermionischen Propagatoren auftreten, die eventuell mit weiteren bosonischen Propagatoren multipliziert werden.

Die Propagatoren der Materiefelder auf dem Zylinder können mittels des aus der Elektrodynamik bekannten Spiegelladungsprinzips aus den entsprechenden Propagatoren auf dem Torus konstruiert werden. Man erhält für den bosonischen Propagator [44]

$$G^o(z,z') = \tfrac{1}{2}\left(G(z,z') + G(f_C(z),z') + G(z,f_C(z')) + G(f_C(z),f_C(z'))\right)\Big|_{\tau=it} . \tag{V.144}$$

Dabei ist $G(z,z')$ der bosonische Propagator auf dem Torus und die Involution wirkt durch $f_C(z) = \bar{z} + i$ auf die komplexen Koordinaten. Wenn die Propagatoren zwischen Feldern der Vertexoperatoren offener Strings berechnet werden, die sich auf der reellen Achse befinden, ist der Propagator des offenen Strings durch die holomorphe Hälfte des Propagators des geschlossenen Strings ohne die Nullmoden gegeben

$$G^o(z,z') = -\ln E(z-z')\Big|_{\tau=it} . \tag{V.145}$$

Analog dazu kann der fermionische Propagator auf dem Zylinder konstruiert werden [45]. Der fermionische Propagator zwischen auf der reellen Achse definierten Feldern ist dabei durch die holomorphe Hälfte des Szegö Kernes gegeben,

$$S^o\left[{\alpha \atop \beta}\right](z,z') = S\left[{\alpha \atop \beta}\right](z-z')\Big|_{\tau=it} . \tag{V.146}$$

Mit diesen Propagatoren lassen sich die Bern-Kosower-Regeln, die ursprünglich aus einer offenen Stringtheorie abgeleitet wurden, auf die Koba-Nielsen-Darstellung der planaren[105] Ein-Loop-Amplitude des offenen $N{=}2$ Strings anwenden. Der dadurch entstehende kinetische Faktor einer Eichtheorieamplitude mit MHV Struktur ist zusammen mit dem Koba-Nielsen-Term über die Positionen der Vertexoperatoren zu integrieren

$$\prod_{j=1}^{n} \int dy_j \prod_{i<j} e^{-k_i\cdot k_j\, G_{ij}}\, K^o_{KN}(y_i,\beta,t) . \tag{V.147}$$

Dabei liegen die Positionen y_j der Vertexoperatoren auf der reellen Achse.

[105] Bei der planaren Amplitude der offenen Stringtheorie befinden sich alle Vertexopertatoren am selben Rand der Weltfläche.

Der Feldtheorie-Grenzwert

Die in Abschnitt V.3.3 durchgeführte Untersuchung zur Bestimmung des Feldtheorie-Grenzwertes der Amplitude des geschlossenen Strings läßt sich auch auf den offenen String anwenden. Eine Unterteilung des Integrationsbereiches nach den nach ihrem Imaginärteil geordneten Positionen der Vertexoperatoren wie in Gleichung (V.63) ist im Fall des offenen Strings nicht nötig, da hier die Positionen der auf der reellen Achse angeordneten Verexoperatoren bereits geordnet ist. Ebenso entfällt die Definition der Winkelvariablen α_i in Gleichung (V.65). Die Variablen u_i sind beim offenen String nach einer Reskalierung durch die Differenzen der Positionen y_i der Vertexoperatoren im Intervall $[0,1]$ auf der reellen Achse gegeben. Damit ist die Analyse von Gleichung (V.66) bis Gleichung (V.73) für den offenen $N{=}2$ String unnötig, sowohl der Koba-Nielsen-Term als auch die bosonischen und fermionischen Propagatoren lassen sich direkt in Potenzen von $q = e^{-2\pi t}$ entwickeln und liefern die den Bern-Kosower-Regeln entsprechenden Beiträge zum Feldtheorie-Grenzwert der Amplitude.

Integration über den metrischen Moduliraum

Nach der Integration über die Positionen der Vertexoperatoren, die nach der Anwendung der Bern-Kosower-Regeln einer Integration über die Feynman-Parameter einer Feldtheorieamplitude mit MHV Atruktur entspricht, bleibt die Integration über den reellen Moduliparameter t des Zylinders durchzuführen. Mit dem oben diskutierten Maßfaktor erhält man

$$\mathcal{A}_4^o(k_i) = \int_0^\infty dt\, t\, K^o_{MHV}(k_i)\,. \tag{V.148}$$

Der Ausdruck $K^o_{MHV}(k_i)$ beschreibt dabei den kinetischen Faktor der n-Punkt-Amplitude einer Eichtheorie auf Ein-Loop-Niveau mit der Exponentialfunktion der Schwinger-Zeit Parametrisierung. Die Reskalierung der Positionen der Vertexoperatoren auf der reellen Achse liefert dabei einen zusätzlichen Faktor t^4 zum Integrationsmaß dt/t^3 der Zustandssumme auf dem Zylinder. Ein Vergleich mit der Schwinger-Zeit Darstellung der Vier-Punkt-Amplitude einer ϕ^3-Feldtheorie zeigt, daß die Amplitude (V.148) in $d{=}4$ Dimensionen auszuwerten ist. Man erhält somit das nicht verschwindende Ergebnis der Vier-Punkt-Amplitude auf Ein-Loop-Niveau im MHV Sektor einer vierdimensionalen Yang-Mills Theorie (IV.58)

$$\mathcal{A}_4^o(k_i) = -\frac{i}{48\pi^2}\,\frac{s_{12}s_{23}}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 41\rangle}\,. \tag{V.149}$$

Prinzipiell könnte man das Integrationsmaß der Amplitude des offenen Strings aus dem modular invarianten Integrationsmaß (V.54) der Amplitude des geschlossenen Strings ableiten. Damit ergäbe sich für die Vier-Punkt-Amplitude des $N{=}2$ Strings auf dem Zylinder der Ausdruck

$$\int_0^\infty dt\, t^2\, K^o_{MHV}(k_i)\,, \tag{V.150}$$

der zur verschwindenden MHV Amplitude einer Yang-Mills Theorie in d=2 Dimensionen führen würde. Während die Wahl eines modular invarianten Integrationsmaßes für den geschlossenen String noch aus geometrischen und topologischen Gründen motiviert werden kann, ist dies für den offenen String nicht der Fall. Die Weltfläche des offenen Strings wird durch die Transformationen der modularen Gruppe $SL(2,\mathbb{Z})$ nicht auf sich selbst abgebildet.

VI. Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war ein Vergleich der Amplituden des $N{=}2$ Strings mit denen der effektiven Feldtheorie jenseits des Tree-Niveaus. Insbesondere sollte überprüft werden, ob die Äquivalenz zwischen dem geschlossenen $N{=}2$ String und der durch die Plebanski-Wirkung beschriebenen selbstdualen Gravitation, sowie zwischen dem offenen $N{=}2$ String und der durch die Leznov-Wirkung beschriebenen selbstdualen Yang-Mills Theorie auch auf dem Niveau der Ein-Loop-Amplituden besteht.

Die Ein-Loop-Amplituden der selbstdualen Feldtheorien sind bekannt. Da die Plebanski- und die Leznov-Wirkung eichfixierte Varianten der entsprechenden selbstdualen Feldtheorie beschreiben, ist prinzipiell nicht klar, ob eine klassisch äquivalente Theorie mit einer anderen Eichfixierung auf Quantenniveau die gleichen Streuamplituden besitzt. Es kann jedoch gezeigt werden, daß sämtliche Amplituden selbstdualer Feldtheorien unabhängig von der Eichung zumindest auf Ein-Loop-Niveau die gleiche MHV Struktur bestizen. Die Plebanski- und die Leznov-Wirkung beschreiben also Gravitations- bzw. Yang-Mills-Amplituden von Zuständen, die alle die gleiche (auslaufend gemessene) Helizität tragen. Diese Amplituden sind auf Ein-Loop-Niveau in vier Dimensionen endlich und verschwinden in einer zweidimensionalen Raumzeit.

Zur Konstruktion der Stringamplituden wurde der Pfadintegralformalismus verwendet. Dabei ist der Integrand, der sich aus den Korrelationsfunktionen der in den Vertexoperatoren enthaltenen Felder und aus den Beiträgen der Nullmoden und der konformen Killing-Gruppen zusammensetzt, über die Moduliräume des $N{=}2$ Strings zu integrieren. Für den Fall der Amplitude auf dem Torus und auf dem Zylinder läßt sich dieses Pfadintegral explizit konstruieren. Die Auswertung der Moduliintegrationen ist jedoch nur im Feldtheorie-Grenzert $\alpha' \to 0$ möglich. Nach einer entsprechenden Entwicklung des Pfadintegrals konnte durch die Anwendung der Bern-Kosower-Regeln gezeigt werden, daß die Ein-Loop-Amplituden des $N{=}2$ Strings MHV Struktur besitzen. Die Integration über die metrischen Moduli bestimmt dabei die Dimension der Raumzeit, in der diese MHV Amplituden auszuwerten sind. In Abhängigkeit vom gewählten Zugang zur Berechnung der Ein-Loop-Amplituden des $N{=}2$ Strings erhält man zwei verschiedene Ergebnisse, die jedoch beide im Rahmen der gewähten Betrachtungsweise konsistent zu sein scheinen.

Aus geometrischen und topologischen Betrachtungen der Stringtheorie folgt die Forderung nach modularer Invarianz der Amplitude des geschlossenen Strings. Die Verwendung des modular invarianten Integrationsmaßes (V.54) im Pfadintegral führt zu einer verschwindenden Vier-Punkt-Amplitude des $N{=}2$ Strings (V.128). Dieses Ergebnis ist kompatibel mit den aus den Symmetrien der Stringtheorie abgeleiteten Theoremen über das Verschwinden der Loop-Amplituden.

Im Fall des offenen Strings ist die Forderung nach modularer Invarianz nicht durch geometrische Überlegungen gerechtfertigt. Hier führt eine Untersuchung der Nullmoden im Pfadintegral und der konformen Killung-Gruppen zu einem Integrationsmaß des metrischen Moduliraumes, das zu einer Beschreibung des Loop-Impulses der effektiven Feldtheorie in vier Dimensionen und damit zu einer nicht verschwindenden Amplitude führt.

Die sewing Techniken zur Konstruktion von Stringamplituden basieren auf aus der Feldtheorie abgeleiteten Unitaritätsargumenten. Sie führen im Fall des $N{=}2$ Strings zu einem Integrationsmaß, das nicht modular invariant ist, und damit zu nicht verschwindenden Ein-Loop-Amplituden. Dieses durch die Feldtheorie inspirierte Ergebnis gibt die Amplituden der selbstdualen Gravitation und der selbstdualen Yang-Mills Theorie in der korrekten Targetraum-Dimension $d{=}4$ wieder.

Die Ursache für diese unterschiedlichen Interpretationsmöglichkeiten der Ein-Loop-Amplitude des geschlossenen $N{=}2$ Strings liegt in der $U(1)$ Eichsymmetrie der Weltflächenwirkung. Das mit dieser Symmetrie zusammenhängende (c', b') Geistsystem ist auf dem Torus nicht vom (b, c) Geistsystem der Reparametrisierungen zu unterscheiden. Beide Systeme liefern denselben Beitrag zu den Nullmoden und den konformen Killing-Gruppen. Während die Reparametrisierungsgeister mit der zugehörigen Moduliintegration mit $d^2\tau/\tau_2^2$ auf dem Torus ein modular invariantes Integrationsmaß erzeugen, ist der Integrationsbereich der $U(1)$ Moduli der Torus der Spinstrukturen, auf dem d^2u/τ_2^2 kein "natürliches" modular invariantes Integrationsmaß darstellt.

Die Berechnung der Stringamplituden wurde in dieser Arbeit im Feldtheorie-Grenzwert durchgeführt, d.h. es wurde der führende Term der Entwicklung nach q betrachtet. Beiträge höherer Potenzen von q in der Entwicklung der Amplitude entsprechen dem Austausch massiver Zustände im Loop. Da das Spektrum des $N{=}2$ Strings keine massiven Anregungen enthält, kann man vermuten, daß die höheren Potenzen von q keine weiteren Korrekturen zu den hier erhaltenen Amplituden liefern. Eine explizite Überprüfung diese Behauptung war jedoch aufgrund der Komplexität der dazu durchzuführenden Berechnungen bislang nicht möglich.

A. Notation

In diesem Anhang soll ein Überblick über die im Laufe dieser Arbeit verwendete Notation auf der Weltfläche und im Targetraum des N=2 Strings gegeben werden.

A.1 Auf der Weltfläche

A.1.1 Vektoren

Die Weltfläche wird durch die Zeit σ^0 auf dem String und durch die Position σ^1 entlang des Strings parametrisiert. Die Minkowski-Metrik auf der Weltfläche ist gegeben durch

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1)\,. \tag{A.1}$$

Lichtkegelkoordinaten auf der Weltfläche sind definiert durch

$$\sigma^{\pm} = \sigma^0 \pm \sigma^1 \tag{A.2}$$

mit den Lichtkegelableitungen

$$\partial_{\pm} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_0 \pm \partial_1)\,. \tag{A.3}$$

In Lichtkegelkoordinaten hat die Weltflächenmetrik die Form

$$\eta_{+-} = \eta_{-+} = -\tfrac{1}{2} \qquad \eta_{++} = \eta_{--} = 0\,, \tag{A.4}$$

bzw.

$$\eta^{+-} = \eta^{-+} = -2 \qquad \eta^{++} = \eta^{--} = 0\,. \tag{A.5}$$

Komplexe Weltflächenkoordinaten werden nach der Wick-Rotation $\sigma^0 \to -i\,\sigma^0$ definiert durch

$$\sigma^+ \to z \qquad \sigma^- \to \bar{z} \qquad \partial_+ \to \partial_z \qquad \partial_- \to \partial_{\bar{z}}\,. \tag{A.6}$$

A.1.2 Tangentialraum

Üblicherweise ist die Metrik $h^{\alpha\beta}$ auf der Weltfläche nicht flach. Mit Hilfe der Zweibeine $e_\alpha{}^a$ kann jedoch an jedem Punkt die flache Metrik η_{ab} des Tangentialraumes mit der gekrümmten Weltflächen-Metrik in Beziehung gebracht werden. Es ist

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{ab}\, e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \qquad \text{und} \qquad \eta_{ab} = h_{\alpha\beta}\, e^\alpha{}_a e^\beta{}_b \tag{A.7}$$

mit dem Inversen des Zweibeins $e^\alpha{}_a$. Es gilt

$$e_\alpha{}^a e^\beta{}_a = \delta^\alpha_\beta \qquad \text{und} \qquad e_\alpha{}^a e^\alpha{}_b = \delta^a_b\,. \tag{A.8}$$

Der Zweibein-Formalismus wird eingeführt, da die Eichgruppe $GL(n)$ einer allgemeinen gekrümmten Mannigfaltigkeit keine Spinor-Darstellung besitzt. Mit Hilfe des Zweibeins kann an jedem Punkt der gekrümmten Weltfläche des Strings ein flacher Tangentialraum definiert werden, dessen Lorentz-Gruppe $SO(1,1)$ die Konstruktion einer Spinor-Darstellung erlaubt.

A.1.3 Spinoren

Spinoren auf der Weltfläche haben die Komponenten

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

Die Gamma-Matrizen in zwei Dimensionen erfüllen die Clifford-Algebra

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = -2\,\eta^{\alpha\beta} \tag{A.10}$$

mit $\eta^{\alpha\beta}$ aus Gleichung (A.1). Eine Basis dieser Clifford-Algebra in zwei Dimensionen ist gegeben durch die Wahl rein komplexer Gamma-Matrizen

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar\rho = \rho^0\rho^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.11}$$

Dabei gilt $\bar\rho^2 = 1_{2\times 2}$ und $\{\bar\rho, \rho^\alpha\} = 0$. Der adjungierte Spinor wird wie üblich mit Hilfe der Gamma-Matrizen definiert, $\bar\Psi = \Psi^\dagger\rho^0$.

Die obige Definition gilt nur im flachen Raum. Auf der gekrümmten Weltfläche ist die Clifford-Algebra

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = -2\,h^{\alpha\beta} \tag{A.12}$$

zu erfüllen. Die entsprechenden Gamma-Matrizen ρ^α folgen mit Hilfe des Zweibeins aus den flachen Gamma-Matrizen ρ^a aus Gleichung (A.11) durch $\rho^\alpha = e^\alpha{}_a\rho^a$. Für Matrizen ρ^α, die die Clifford-Algebra (A.12) in zwei Dimensionen erfüllen, gelten die Identitäten

$$\rho_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha = 0 \qquad \rho^{\alpha\dagger} = \rho^0\rho^\alpha\rho^0 \qquad \rho^\alpha\rho^\beta = -h^{\alpha\beta} + e^{-1}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\bar\rho\,. \tag{A.13}$$

Dabei ist $\varepsilon^{\alpha\beta}$ der total antisymmetrische Tensor in zwei Dimensionen mit $\varepsilon^{01} = \varepsilon_{10} = +1$. $e = \det e_\alpha{}^a$ ist die Determinante des Zweibeins. Für Majorana-Spinoren λ_1 und λ_2 in zwei Dimensionen gilt die Identität

$$\bar\lambda_1\rho^{\alpha_1}\ldots\rho^{\alpha_n}\lambda_2 = (-1)^n\,\bar\lambda_2\rho^{\alpha_n}\ldots\rho^{\alpha_1}\lambda_1\,. \tag{A.14}$$

Zwei Spin 3/2 Fermionen $\tilde\chi_\alpha$ und $\tilde\psi_\alpha$ mit $\rho\cdot\tilde\chi = \rho\cdot\tilde\psi = 0$ erfüllen die Bedingungen

$$\bar{\tilde\chi}_\alpha\rho_\beta\tilde\chi_\gamma = 0 \tag{A.15a}$$

$$\rho_\alpha\tilde\chi_\beta = \rho_\beta\tilde\chi_\alpha \tag{A.15b}$$

$$e^{-1}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\bar{\tilde\psi}^\gamma\bar\rho\tilde\chi_\gamma = h^{\alpha\beta}\,\bar{\tilde\psi}\cdot\tilde\chi - 2\,\bar{\tilde\psi}^\alpha\,\tilde\chi^\beta\,. \tag{A.15c}$$

Diese Identitäten spielen bei der Untersuchung der Supersymmetrietransformationen auf der Weltfläche eine wichtige Rolle.

A.1.4 Kovariante Ableitungen

Die Generatoren der Lorentz-Algebra

$$\left[L^{ab}, L^{cd}\right] = \eta^{ad} L^{bc} - \eta^{bd} L^{ac} - \eta^{bc} L^{ad} + \eta^{ac} L^{bd} \tag{A.16}$$

wirken wie folgt auf Vektoren v und Spinoren Ψ auf der Weltfläche

$$\left(L^{ab}\right)_r{}^s v_s = \left(\delta_r^a \eta^{bs} - \delta_r^b \eta^{as}\right) v_s \tag{A.17a}$$

$$L^{ab}\Psi = \tfrac{1}{4}\left[\rho^a, \rho^b\right]\Psi = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ab}\bar{\rho}\,\Psi\,. \tag{A.17b}$$

Damit nimmt die Lorentz-kovariante Ableitung ∇_α die Form an

$$\nabla_\alpha v^a = \partial_\alpha v^a + \omega_\alpha \varepsilon^a{}_b v^b \tag{A.18a}$$

$$\nabla_\alpha \Psi = \partial_\alpha \Psi + \tfrac{1}{2}\,\omega_\alpha \bar{\rho}\,\Psi\,. \tag{A.18b}$$

Dabei ist

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha(e) + \tfrac{i}{4}\,\bar{\chi}_\alpha^-\bar{\rho}\rho^\beta\chi_\beta^+ \tag{A.19}$$

die Spinkonnektion auf der Weltfläche und

$$\omega_\alpha(e) = e^{-1} e_{\alpha a}\varepsilon^{\beta\gamma}\partial_\beta e_\gamma{}^a \tag{A.20}$$

ist der torsionsfreie Anteil der Spinkonnektion.

A.2 Im Targetraum

Der Targetraum des $N{=}2$ Strings ist in der kritischen Dimension reell vierdimensional, allerdings mit der Kleinschen Signatur $(2,2)$.

A.2.1 Reeller Vierervektor

Der reelle Vierervektor hat die Form $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Auf seine Indizes wirkt die flache Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,-,+)\,. \tag{A.21}$$

A.2.2 Komplexe Lichtkegelkoordinaten

Komplexe Lichtkegelkoordinaten werden durch

$$x^\mu = (x^0 + i\,x^2, x^1 + i\,x^3) \qquad \bar{x}^{\bar{\mu}} = (x^0 - i\,x^2, x^1 - i\,x^3) \tag{A.22}$$

definiert mit der Metrik

$$\eta_{\mu\bar{\nu}} = \mathrm{diag}(-,+)\,. \tag{A.23}$$

Das Skalarprodukt zweier reeller Vierervektoren nimmt in komlexen Lichtkegelkoordinaten die Form an

$$x\cdot y = \tfrac{1}{2}\big(x\cdot\bar{y} + \bar{x}\cdot y\big) \tag{A.24}$$

A.2.3 Reelle Bispinoren

Reelle Bispinoren in der sogenannten Van-der-Waerden-Notation beschreiben die Aufspaltung eines $SO(2,2)$ Vektorindex $\mu \in \{0,1,2,3\}$ in zwei $SL(2,\mathbb{R})$ Spinorindizes $\alpha \in \{x,-\}$ und $\dot{\alpha} \in \{\dot{+},\dot{-}\}$. Man definiert

$$x^{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\mu}^{\alpha\dot{\alpha}}\, x^{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + x^2 \\ x^1 - x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{A.25}$$

mit den σ-Matrizen

$$\sigma_{\mu\,\alpha\dot{\alpha}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{A.26}$$

Die σ-Matrizen mit oberen Spinorindizes werden durch $\bar{\sigma}_{\mu}{}^{\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\,\sigma_{\mu\,\beta\dot{\beta}}$ definiert. Mit $\varepsilon^{+-} = -\varepsilon_{+-} = \varepsilon^{\dot{+}\dot{-}} = -\varepsilon_{\dot{+}\dot{-}} = +1$ erhält man

$$\bar{\sigma}_{\mu}{}^{\dot{\alpha}\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{A.27}$$

Das Skalarprodukt von zwei reellen Vierervektoren nimmt in dieser Notation die Form an

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu}\, x^{\mu} y^{\nu} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\, x^{\alpha\dot{\alpha}} y^{\beta\dot{\beta}} = -\tfrac{1}{2}\, x_{\alpha\dot{\alpha}} y^{\alpha\dot{\alpha}}\,. \tag{A.28}$$

Das $U(1,1)$ Skalarprodukt zweier komplexer Lichtkegelvektoren x und $\bar{y}$ ist in der Bispinor-Notation

$$x \cdot \bar{y} = -\tfrac{1}{2}\big(\varepsilon_{\alpha\beta} - i\,\delta_{\alpha\beta}\big)\,\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\, x^{\alpha\dot{\alpha}} y^{\beta\dot{\beta}}\,. \tag{A.29}$$

Das Längenquadrat eines Vierervektors wird durch die Determinante des entsprechenden Bispinors wiedergegeben,

$$x^2 = \eta_{\mu\nu}\, x^{\mu} x^{\nu} = -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{\alpha\beta}\, x^{\alpha\dot{\alpha}} x^{\beta\dot{\beta}} = -\det x^{\alpha\dot{\alpha}}\,. \tag{A.30}$$

Ein masseloser Bispinor $k^{\alpha\dot{\alpha}}$ mit $\det k^{\alpha\dot{\alpha}} = 0$ läßt sich durch $k^{\alpha\dot{\alpha}} = k^{\alpha} k^{\dot{\alpha}}$ in zwei $SL(2,\mathbb{R})$ Spinoren zerlegen . Für diese $SL(2,\mathbb{R})$ Spinoren führt man die antisymmetrischen Spinorprodukte ein

$$\langle ij \rangle = k_i^{\alpha} k_{j\,\alpha} \qquad \text{und} \qquad [ij] = k_i^{\dot{\alpha}} k_{j\,\dot{\alpha}}\,. \tag{A.31}$$

B. Riemann-Flächen

Eine Riemann-Fläche Σ_g ist eine eindimensionale, kompakte, orientierbare, komplexe Mannigfaltigkeit. Da die Weltfläche eines Strings zumindest in einer geschlossenen orientierbaren Theorie durch eine Riemann-Fläche beschrieben werden kann, sollen hier einige in der Störungsrechnung benötigte topologische Eigenschaften von Riemann-Flächen dargestellt werden [68, 135]. Für die Berechnung von Stringamplituden wichtige Aspekte der Differentialgeometrie auf Riemann-Flächen werden dann in Anhang C zusammengefaßt. Topologisch ist die Riemann-Fläche durch ihren Genus $g \in \mathbb{N}$ eindeutig charakterisiert[106], jedoch lassen sich die hier vorgestellten Ergebnisse auch im allgemeineren Fall von eindimensionalen, komplexen Mannigfaltigkeiten mit Rändern oder Punktierungen anwenden.

B.1 Homologie und Differentialformen

Auf einer Riemann-Fläche Σ_g vom Genus g kann man auf natürliche Weise eine Basis der ersten Homologiegruppe $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ definieren, wie in Abbildung B.1 dargestellt ist. Dabei führt man die Homologiezykel a_i durch die Löcher und die Zykel b_i um die Löcher herum ein, mit $i = 1, \ldots, g$. Die Schnittzahl[107] dieser Zykel erfüllt die Bedingungen

$$J(a_i, a_j) = J(b_i, b_j) = 0 \qquad \text{und} \quad J(a_i, b_j) = \delta_{ij}\,. \tag{B.1}$$

Jeder beliebige geschlossene 1-Zykel γ auf der Riemann-Fläche kann nun geschrieben werden als $\gamma = m_i a_i + n_i b_i$, mit $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$.

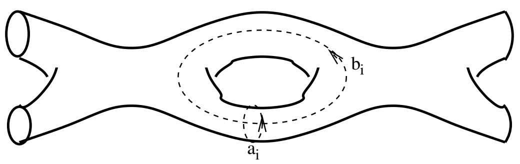

Abbildung B.1 - *Die Basis der ersten Homologiegruppe einer Riemann-Fläche vom Genus g wird durch die Zykel $\{a_i, b_i\}$ mit $i = 1, \ldots, g$ beschrieben.*

Nach dem Hodge-de Rham Theorem kann man einen Satz zur Homologiebasis dualer reeller harmonischer 1-Formen $\{\alpha_i, \beta_i\}$ mit $i = 1, \ldots, g$ finden. Diese 1-Formen erfüllen mit den Homologiezykeln die Bedingungen,

$$\oint_{a_i} \alpha_j = \oint_{b_i} \beta_j = \delta_{ij} \qquad \text{und} \quad \oint_{a_i} \beta_j = \oint_{b_i} \alpha_j = 0\,. \tag{B.2}$$

Da jede Riemann-Fläche Σ_g eine komplexe Struktur besitzt, können aus den reellen 1-Formen α_i und β_i jeweils g holomorphe und antiholomorphe geschlossene 1-Formen,

[106] Siehe dazu Abschnitt III.1.

[107] Die Schnittzahl $J(.,.)$ ist eine quadratische Form auf $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$, die die Anzahl von Überschneidungen zweier Zykel unter Berücksichtigung der relativen Orientierung zählt.

die sogenannten abelschen Differentiale ω_i und $\bar{\omega}_i$, gebildet werden. Man definiert $\omega_i = \alpha_i + \Omega_{ij}\beta_j$ und $\bar{\omega}_i = \alpha_i + \bar{\Omega}_{ij}\beta_j$ mit der Normierung

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij} \qquad \text{und} \qquad \oint_{b_i} \omega_j = \Omega_{ij}\,. \tag{B.3}$$

Die komplexe $(g \times g)$-Matrix Ω_{ij} mit positiv definitem Imaginärteil ist die Periodenmatrix der Riemann-Fläche, sie hängt eng mit den metrischen Moduli auf der Weltfläche des Strings zusammen. Ebenso wie die reellen harmonischen 1-Formen α_i und β_i sind auch die holomorphen und antiholomorphen 1-Formen ω_i und $\bar{\omega}_i$ eindeutig bestimmt sobald die Basis der Homologiegruppe gewählt ist. Bei gegebenen holomorphen 1-Formen ω_i und Periodenmatrix Ω_{ij} lassen sich die reellen harmonischen 1-Formen rekonstruieren, durch

$$\alpha_i = \left(\bar{\Omega}\,(\bar{\Omega} - \Omega)^{-1}\,\omega\right)_i + \left(\Omega\,(\Omega - \bar{\Omega})^{-1}\,\bar{\omega}\right)_i \qquad \text{und} \quad \beta_i = \left(\Omega - \bar{\Omega}\right)^{-1}_{ij}(\omega_j - \bar{\omega}_j)\,. \tag{B.4}$$

Aus der Definition einer Riemann-Fläche mit einer Homologiebasis (a_i, b_i) erhält man also eine Periodenmatrix Ω_{ij}. Eine Periodenmatrix charakterisiert eine Riemann-Fläche eindeutig in dem Sinne, daß zwei inäquivalente Riemann-Flächen auch immer unterschiedliche Periodenmatrizen Ω_{ij} haben[108]. Daher könnte man versuchen, diese Matrizen Ω_{ij} zur Beschreibung der metrischen Moduli in Abschnitt III.3.2 zu verwenden. Allerdings ist der Raum der symmetrischen $(g \times g)$-Matrizen mit positiv definitem Imaginärteil, Siegels obere Halbebene $\mathcal{H}_g$, wesentlich größer als der metrische Moduliraum auf Riemann-Flächen vom Genus g. Die allgemeine Konstruktion der Einbettung des Moduliraumes in Siegels obere Halbebene ist sehr kompliziert und soll hier lediglich für den relativ einfachen Fall des Torus (vgl. Abschnitt III.3.2) explizit vorgeführt werden.

Mit Hilfe der hier nicht untersuchten ersten Homotopiegruppe läßt sich ein sehr nützliches Integrationstheorem auf Riemann-Flächen Σ_g vom Genus g mit der Homologiebasis (a_i, b_i) beweisen [68]. Sind Θ und η zwei geschlossene 1-Formen auf Σ_g, dann gilt

$$\int_{\Sigma_g} \Theta \wedge \eta = \sum_{i=1}^{g} \left(\oint_{a_i} \Theta \oint_{b_i} \eta - \oint_{a_i} \eta \oint_{b_i} \Theta \right)\,. \tag{B.5}$$

B.2 Punktierte Riemann-Flächen

Zur Berechnung von Streuamplituden einer Stringtheorie betrachtet man punktierte Riemann-Flächen mit Vertexoperatoreinsetzungen, welche die äußeren Stringzustände der Amplitude repräsentieren. Zur vollständigen Beschreibung der Differentialformen auf einer punktierten Riemann-Fläche muß die Basis der holomorphen 1-Formen ω_i aus Abschnitt B.1 um meromorphe 1-Formen, die in den Punktierungen singulär werden können, ergänzt werden [36, Kapitel VII]. Eine meromorphe 1-Form

[108] Dies ist die Aussage von Torellis Theorem.

ω_{PQ} auf einer Riemann-Fläche Σ_g vom Genus g ist durch die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_P\, \omega_{PQ} &= -\mathrm{res}_Q\, \omega_{PQ} = \tfrac{1}{2\pi i} \\ \oint_{a_i} \omega_{PQ} &= 0 \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, g \end{aligned} \tag{B.6}$$

eindeutig bestimmt. Für beliebige meromorphe Differentiale auf Σ_g muß die Summe aller Residuen verschwinden. Sei nun m ein meromorphes Differential mit n Polen mit Residuen θ_i in den Punkten P_i, so daß gilt $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0$, und gelte weiterhin $\oint_{a_i} m = 0$ für $i = 1, \ldots, g$. Dann kann man m mit Hilfe der wie in (B.6) definierten meromorphen 1-Formen $\omega_{P_i P_{i+1}}$ darstellen

$$m = \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{i} \theta_j \right) \omega_{P_i P_{i+1}} \,. \tag{B.7}$$

Die Differentiale $\omega_{P_i P_{i+1}}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ bilden also die Basis der meromorphen 1-Formen auf der Riemann-Fläche $\Sigma_g^{(n)}$ mit n Punktierungen. Sie ergänzen die Basis der holomorphen 1-Formen ω_i mit $i = 1, \ldots, g$. Durch die Punktierung der Riemann-Fläche und die Hinzunahme der meromorphen 1-Formen ist auch die Homologiebasis zu ergänzen. Eine sinnvolle Wahl ist das Hinzufügen der in Abbildung B.2 dargestellten Zykel c_i um die Punktierungen herum und d_i zwischen den Punktierungen, für $i = 1, \ldots, n-1$. Für die Schnittzahlen dieser Zykel gilt offensichtlich

$$J(c_i, c_j) = J(d_i, d_j) = 0 \qquad \text{und} \quad J(c_i, d_j) = \delta_{ij} \,, \tag{B.8}$$

außerdem können die Wege (c_i, d_i) so gewählt werden, daß es keine Überschneidungen mit den geschlossenen Wegen (a_i, b_i) der kompakten Riemann-Fläche gibt. Die Normierung der Wegintegrale über diese Zykel soll dabei so sein, daß gilt $\oint_{c_i} \omega_{P_j P_{j+1}} = \delta_{ij}$.

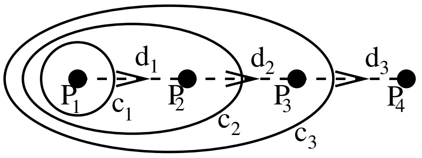

ABBILDUNG B.2 - *Zusätzliche Homologiezykel auf einer Riemann-Fläche mit vier Punktierungen, $P_1, \ldots, P_4$.*

Man erkennt, daß die Riemann-Fläche $\Sigma_g^{(n)}$ vom Genus g mit n Punktierungen einer entarteten Riemann-Fläche Σ_{g+n-1} vom Genus $g + n - 1$ entspricht, bei der die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ identifiziert werden. Diese Identität wird deutlich, wenn man die Basis der Homologiegruppe als $\{a_1, \ldots, a_{g+n-1}\} \equiv \{a_1, \ldots, a_g, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ und $\{b_1, \ldots, b_{g+n-1}\} \equiv \{b_1, \ldots, b_g, d_1, \ldots, d_{n-1}\}$ umdefiniert. Entsprechend kann man auch die Basis der holomorphen und meromorphen 1-Formen zusammenfassen, $\{\omega_1, \ldots, \omega_{g+n-1}\} \equiv \{\omega_1, \ldots, \omega_g, \omega_{P_1P_2}, \ldots, \omega_{P_{n-1}P_n}\}$, so daß die Wegintegrale die folgende Form annehmen

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij} \qquad \text{und} \quad \oint_{b_i} \omega_j = O_{ij} \equiv \begin{pmatrix} \Omega & \rho \\ \bar{\rho} & \sigma \end{pmatrix} . \tag{B.9}$$

Dabei muß die erweiterte Periodenmatrix O_{ij} die selben Eigenschaften haben wie die ursprüngliche Periodenmatrix Ω_{ij}, sie muß symmetrisch sein und einen positiv definiten Imaginärteil besitzen. Daraus folgt, daß die neu eingeführten Matrizen ρ_{ij} und σ_{ij} die Symmetrien $\bar{\rho}^T = \rho$ und $\sigma^T = \sigma$ besitzen. Ebenso wie man mit Hilfe der Periodenmatrix Ω_{ij} aus (B.3) den metrischen Moduliraum einer kompakten Riemann-Fläche Σ_g beschreiben kann, führt die erweiterte Periodenmatrix O_{ij} aus (B.9) zur Beschreibung des metrischen Moduliraumes einer punktierten Riemann-Fläche $\Sigma_g^{(n)}$.

Bei der Bestimmung der Dimensionen der Moduliräume der N=2 Stringtheorie auf einer n-fach punktierten Riemann-Fläche $\Sigma_g^{(n)}$ müssen zu den in Abschnitt C.3 ermittelten Werten noch die Beiträge der meromorphen Differentialformen addiert werden. Damit vergrößert sich die komplexe Dimension sämtlicher Moduliräume bei der Berechnung von n-Punkt Streuamplituden um n.

B.3 RIEMANN-FLÄCHEN MIT RAND

Um die Basis der Homologiegruppe und der holomorphen 1-Formen einer offenen Riemann-Fläche zu bestimmen, kann man den schon bei der Einführung komplexer Koordinaten auf der Weltfläche in Abschnitt II.3 diskutierten Verdoppelungstrick anwenden. Wie in Abbildung B.3 dargestellt, kann man aus jeder berandeten Riemann-Fläche eine kompakte Riemann-Fläche erzeugen, indem zwei Kopien der berandeten Fläche an den Rändern identifiziert werden [131, 132]. Die ursprüngliche Fläche erhält man dann aus der kompakten Überlagerung, indem man zusammengehörende Punkte auf den beiden Kopien identifiziert. Diese Involution hat natürlich Fixpunkte, die identifizierten Ränder der zusammengesetzten offenen Riemann-Flächen.

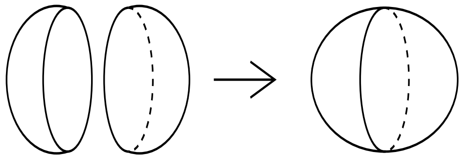

ABBILDUNG B.3 - *Konstruktion einer kompakten Riemann-Fläche aus einer Riemann-Fläche mit Rand durch Verdoppelung.*

Zur Konstruktion der Homologiezykel und der holomorphen oder meromorphen Differentialformen auf einer Riemann-Fläche mit Rand kann man ausnutzen, daß diese Objekte für kompakte Flächen mit oder ohne Punktierungen bekannt sind und in den obigen Abschnitten dieses Anhangs konstruiert wurden. Die offene Fläche erbt von ihrer kompakten Überlagerung denjenigen Anteil der Homologiegruppe und der Differentialformen, der auf den Fixpunkten, d.h. am Rand der offenen Fläche, invariant unter der Involution ist, welche die Überdeckung auf die ursprüngliche Fläche zurückführt.

Seien a_i und b_i mit $i = 1, \ldots, g$ eine Basis der Homologiegruppe der kompakten Überlagerung $\tilde{\Sigma}_g$, welche die Eigenschaft (B.1) erfüllt. Dann muß die Involution I, welche die kompakte Überlagerung auf die ursprüngliche Riemann-Fläche mit Rand abbildet, die Eigenschaft haben

$$I^T J I = -J \,. \tag{B.10}$$

Die Involution ändert das Vorzeichen der Schnittzahl, da sie auf der Überdeckung die Orientierung umkehrt. Die allgemeine Matrixform der Involution auf einer Genus g

Riemann-Fläche ist

$$I = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad I^2 = 1\,. \tag{B.11}$$

Dabei sind A, B, C und D $(g \times g)$-Matrizen, die wegen Gleichung (B.1) und (B.10) die Bedingungen erfüllen müssen

$$AB^T = BA^t\,, \qquad CD^T = DC^T\,, \qquad AD^T - BC^T = -1\,. \tag{B.12}$$

Daraus folgt dann weiter, daß eine mit der Involution I kompatible Periodenmatrix Ω die Bedingung $\bar{\Omega} = I(\Omega) = (C + D\Omega)\,(A + B\Omega)^{-1}$ erfüllen muß [33].

Insgesamt führt das hinzufügen von n Löchern in eine kompakte Riemann-Fläche zu $n-1$ zusätzlichen Henkeln in der kompakten Überlagerung mit jeweils zwei Homologiezykeln[109]. Durch die Involution bleibt auf der Riemann-Fläche mit Rand davon die Hälfte bestehen, d.h. man erhält um $n-1$ der n Löcher jeweils einen neuen geschlossenen Weg. Ein zusätzlicher geschlossener Weg um das n-te Loch wäre nicht unabhängig von den anderen $n-1$ Zykeln, da diese zu einem Zykel um die $n-1$ Löcher zusammengefaßt und dann auf einen Weg um das n-te Loch zusammengezogen werden können. Diese Beobachtung ist auch konsistent mit der Berechnung der ersten Betti-Zahl[110] b_1, die gerade die Dimension der Homologiegruppe einer Riemann-Fläche angibt. Es gilt auf einer Riemann-Fläche Σ die Beziehung[111] $\chi(\Sigma) = b_0 - b_1 + b_2$ [64], dabei gilt trivialerweise $b_0 = 1$. Hat Σ mindestens einen Rand, ist also $b \geq 1$, dann müssen auch alle auf dieser Fläche definierten 2-Komplexe mindestens einen Rand haben. Es wird also kein 2-Komplex durch den Randoperator ∂_2 vernichtet, $\ker \partial_2$ ist leer, damit ist $b_2 = 0$. Hat Σ keinen Rand, enthält H_2 genau eine Äquivalenzklasse; die zu Σ äquivalenten 2-Komplexe werden durch den Randoperator ∂_2 vernichtet. Damit gilt dann $b_2 = 1$ auf Riemann-Flächen mit $b = 0$. Zusammenfassend erhält man die Anzahl der Homologiezykel $b_1 = -\chi + 1$ für $b \geq 1$ und $b_1 = -\chi + 2$ für $b = 0$. Das bedeutet auf Riemann-Flächen mit g Henkeln und b Rändern

$$b_1 = \begin{cases} 2g + b - 1 & \text{für } b \geq 1 \\ 2g & \text{für } b = 0 \end{cases}\,. \tag{B.13}$$

Auf einer Riemann-Fläche mit Rändern kann man nicht nur Punktierungen im Inneren der Fläche haben, sondern auch Punktierungen an einem Rand. In diesem Fall verschwindet der Homologiezykel c_i um die Punktierung, da er mit dem Homologiezykel um das Loch übereinstimmt, wie in Abbildung B.4 dargestellt wird. Insbesondere muß eine meromorphe Differentialform ω am Rand die Bedingung $\partial_n \omega = 0$ erfüllen, d.h. die Normalenableitung muß verschwinden.

[109] Siehe dazu auch Abschnitt III.1 und insbesondere Gleichung (III.3).

[110] Die i-te Betti-Zahl b_i ist definiert als Dimension der i-dimensionalen Kohomologie-Gruppe $H_i = \ker \partial_i / \mathrm{im}\ \partial_{i+1}$. Dabei ist ∂_i hier der Randoperator, der i-dimensionale Komplexe $\mathcal{M}$ auf ihren $(i-1)$-dimensionalen Rand $\partial_i \mathcal{M}$ abbildet.

[111] Allgemein gilt $\chi = 2 - 2g - b = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i$, allerdings ist auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit offensichtlich $b_i = 0$ für $i > 2$.

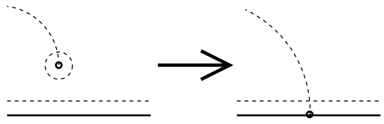

ABBILDUNG B.4 - *Annäherung einer Punktierung an einen Rand.*

Faßt man nun die Ergebnisse der obigen Abschnitte zusammen, läßt sich eine allgemeine Formel für die Anzahl der Homologiezykel und der Differentialformen auf einer Riemann-Fläche Σ mit g Henkeln, b Rändern und n Punktierungen finden. Die n Punktierungen lassen sich dabei zudem noch in n_c Punktierungen im Inneren der Fläche, die bei der Berechnung von Stringamplituden den Vertexoperatoren geschlossener Strings entsprechen und n_o Punktierungen an Rändern, die den Vertexoperatoren offener Strings entsprechen, aufteilen. Die doppelte Überlagerung $\tilde{\Sigma}$ von Σ hat $2g + b - 1$ Henkel, wobei $b - 1$ Henkel durch die Identifizierung der entsprechenden Ränder auf den beiden Kopien von Σ entstehen, sowie $2n_c + n_o$ Punktierungen im Inneren der kompakten Fläche. Damit gibt es auf $\tilde{\Sigma}$ insgesamt $2(2g + b - 1) + 2(2n_c + n_o - 1)$ Homologiezykel, die zu Henkeln oder Punktierungen gehören. Nach Anwendung der Involution I bleiben damit auf der urspünglichen Riemann-Fläche Σ gerade

$$2g + (n_c + n_o - 1) + (b + n_c - 1) \tag{B.14}$$

Basiselemente der Homologiegruppe erhalten. Die $2g$ sind die üblichen mit den Henkeln zusammenhängenden Wege, weiterhin gibt es $n_c + n_o - 1$ Verbindungslinien zwischen den $n = n_c + n_o$ Punktierungen und $b + n_c - 1$ Zykel um die Löcher und Punktierungen im Inneren herum. Der Weg um das verbleibende Loch oder die verbleibende Punktierung herum kann aus diesen $b + n_c - 1$ Basiselementen zusammengesetzt werden. Abbildung B.5 zeigt ein Beispiel von Homologiezykeln auf einer Riemannfläche mit Rändern, inneren Punktierungen und Punktierungen am Rand.

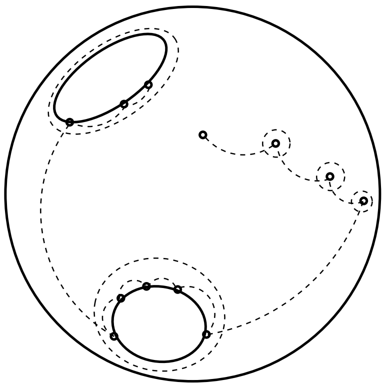

ABBILDUNG B.5 - *Auf der Sphäre mit zwei Löchern, vier Punktierungen im Inneren und acht Punktierungen am Rand gibt es nach Gleichung (B.14) 16 unabhängige Homologiezykel.*

C. Differentialgeometrie auf Riemann-Flächen

Durch die Einführung von komplexen Koordinaten auf der Weltfläche in Gleichungen (II.44a) und (II.44b) wird die Ausbreitung des Strings auf einer eindimensionalen komplexen differenzierbaren Mannigfaltigkeit, d.h. auf einer Riemann-Fläche, beschrieben. Die Differentialoperatoren, welche die lokalen Symmetrien der String-Wirkung erzeugen, wirken also auf die auf einer Riemann-Fläche definierten Felder. Daher soll in diesem Anhang ein kurzer Überblick über die Definition von Differentialoperatoren auf Riemann-Flächen gegeben werden [5, Abschnitt 3] [68]. Die dabei entwickelten Objekte können dann im folgenden zum Beweis des Riemann-Roch Indextheorems verwendet werden.

C.1 Vektoren, Formen und Tensoren

Sei Σ_g eine Riemann-Fläche vom Genus[112] g. In jeder Karte U können nun sogenannte isotherme Koordinaten (σ^0, σ^1) eingeführt werden, in denen die Metrik konform flach ist $h = e^{2\,\phi(\sigma)}\,(d\sigma^0 \otimes d\sigma^1 + d\sigma^1 \otimes d\sigma^0)$, mit den Komponenten

$$h_{\alpha\beta} = e^{2\,\phi(\sigma)}\,\eta_{\alpha\beta}\,. \tag{C.1}$$

Definiert man komplexe Koordinaten, $z = \sigma^0 + i\,\sigma^1$ und $\bar{z} = \sigma^0 - i\,\sigma^1$ mit der Basis für Differentialformen und Vektoren,

$$\begin{aligned} dz &= d\sigma^0 + i\,d\sigma^1 & \qquad d\bar{z} &= d\sigma^0 - i\,d\sigma^1 \\ \partial_z &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial\sigma^0} - i\,\tfrac{\partial}{\partial\sigma^1}\right) & \qquad \partial_{\bar{z}} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial\sigma^0} + i\,\tfrac{\partial}{\partial\sigma^1}\right)\,, \end{aligned} \tag{C.2}$$

nimmt die Metrik die Form an

$$\begin{aligned} h_{z\bar{z}} &= h_{\bar{z}z} = \tfrac{1}{2}\,e^{2\,\phi} & \qquad h_{zz} &= h_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \\ h^{z\bar{z}} &= h^{\bar{z}z} = 2\,e^{-2\,\phi} & \qquad h^{zz} &= h^{\bar{z}\bar{z}} = 0\,. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Sei V eine andere Karte auf Σ_g mit $U \cap V \neq \emptyset$ und Koordinaten $(w, \bar{w})$, so daß die Metrik in V die Form annimmt $h = e^{2\,\phi'(w,\bar{w})}\,dw \otimes d\bar{w}$. Dann muß auf $U \cap V$ gelten

$$e^{2\,\phi(z,\bar{z})}\,dz \otimes d\bar{z} = e^{2\,\phi'(w,\bar{w})}\,dw \otimes d\bar{w}\,. \tag{C.4}$$

[112] Für Riemann-Flächen mit Rändern, d.h. mit halbzahligem Genus $g = \frac{1}{2}\,\chi + 1 \in \mathbb{Z}/2$, kann man ganz analog vorgehen, allerdings sind hier die Koordinaten z und $\bar{z}$ wegen der Randbedingungen nicht mehr unabhängig voneinander.

Wegen $dw \otimes d\bar{w} = (\partial_z w\, dz + \partial_{\bar{z}} w\, d\bar{z}) \otimes (\partial_z \bar{w}\, dz + \partial_{\bar{z}} \bar{w}\, d\bar{z})$ folgt daraus, daß für Koordinatenwechsel auf der Riemann-Fläche gelten muß[113] $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$. Es gilt also $w = w(z)$ und $\bar{w} = \bar{w}(\bar{z})$. Damit ist Σ_g eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $e^{2\,\phi(z,\bar{z})} = \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2 e^{2\,\phi'(w,\bar{w})}$.

Vektoren in den Tangentialräumen an die Riemann-Fläche Σ_g, $V^z \frac{\partial}{\partial z} \in TM^+$ und $V^{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \in TM^-$ transformieren unter Koordinatenwechseln $z \to w$ wie

$$V^w = \frac{\partial w}{\partial z} V^z \qquad V^{\bar{w}} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} V^{\bar{z}} . \tag{C.5}$$

Differentialformen $\omega_z dz \in \Omega^{1,0}$ und $\omega_{\bar{z}} d\bar{z} \in \Omega^{0,1}$ haben das entsprechende Transformationsverhalten

$$\omega_w = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \omega_z \qquad \omega_{\bar{w}} = \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\right)^{-1} \omega_{\bar{z}} . \tag{C.6}$$

Die Metrik h stellt einen natürlichen Isomorphismus zwischen TM^+ und $\Omega^{0,1}$ dar, mit $\omega_{\bar{z}} = h_{\bar{z}z} V^z$ und $V^z = h^{z\bar{z}} \omega_{\bar{z}}$. Ebenso ist der Tangentialraum TM^- isomorph zu den holomorphen 1-Formen $\Omega^{1,0}$ mit $\omega_z = h_{z\bar{z}} V^{\bar{z}}$ und $V^{\bar{z}} = h^{\bar{z}z} \omega_z$. Insbesondere können nun an jedem Tensor $T \in (TM^+)^{q_1} \otimes (TM^-)^{q_2} \otimes \Omega^{p_1,p_2}$ sämtliche $\bar{z}$ Indizes durch z Indizes ersetzt werden, um einen Tensor aus $(TM^+)^{q_1+p_2} \otimes \Omega^{p_1+q_2,0}$ zu erhalten

$$T^{\overbrace{z\cdots z}^{q_1}\overbrace{\bar{z}\cdots\bar{z}}^{q_2}}_{\underbrace{z\ldots z}_{p_1}\underbrace{\bar{z}\ldots\bar{z}}_{p_2}} \to T^{\overbrace{z\cdots z}^{q_1+p_2}}_{\underbrace{z\ldots z}_{p_1+q_2}} = (h_{z\bar{z}})^{q_2}\,(h^{z\bar{z}})^{p_2}\, T^{\overbrace{z\cdots z}^{q_1}\overbrace{\bar{z}\cdots\bar{z}}^{q_2}}_{\underbrace{z\ldots z}_{p_1}\underbrace{\bar{z}\ldots\bar{z}}_{p_2}} . \tag{C.7}$$

Es sind also nur noch Tensoren mit reinen z Indizes zu betrachten. Mit Hilfe der wohldefinierten Transformationsgesetze solcher Tensoren unter Reparametrisierungen $z \to w$, $T \to \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^n T$, läßt sich nun die Helizität $n \in \mathbb{Z}$ solcher Tensoren definieren. Damit ergibt sich die Möglichkeit, den Raum der Tensoren mit Helizität n zu definieren,

$$\mathcal{T}^n \equiv \left\{ T^{\overbrace{z\cdots z}^{q}}_{\underbrace{z\ldots z}_{p}} \middle| q - p = n \right\} . \tag{C.8}$$

Die Helizität charakterisiert eine irreduzible Darstellung von $U(1) \cong SO(2)$. Insbesondere sind auch halbzahlige Helizitäten $n \in \mathbb{Z}/2$ erlaubt, was die Beschreibung von Spinoren auf der Riemann-Fläche ermöglicht [110, Abschnitt 14.1.2].

C.2 Kovariante Ableitungen

Bei der obigen konform flachen Wahl der Metrik h auf der Riemann-Fläche Σ_g sind die einzigen nicht verschwindenden Komponenten der Christoffel-Symbole gegeben durch

$$\begin{aligned} \Gamma^z{}_{zz} &= h^{z\bar{z}} \partial_z h_{z\bar{z}} = 2\,\partial_z \phi \\ \Gamma^{\bar{z}}{}_{\bar{z}\bar{z}} &= h^{\bar{z}z} \partial_{\bar{z}} h_{\bar{z}z} = 2\,\partial_{\bar{z}} \phi . \end{aligned} \tag{C.9}$$

[113] $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0$ ist auch möglich, führt aber zu nicht orientierbaren Flächen, die hier nicht betrachtet werden sollen.

Damit lassen sich nun für Tensoren aus $\mathcal{T}^n$ zwei Arten von kovarianten Ableitungen definieren

$$\nabla^z_{(n)} : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^{n+1} \qquad \text{und} \quad \nabla^{(n)}_z : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^{n-1} \,. \tag{C.10}$$

Auf $T^{\overbrace{z\cdots z}^{q}}_{\underbrace{z\cdots z}_{p}} \in \mathcal{T}^n$ mit $q-p=n$ definiert man die Wirkungen dieser kovarianten Ableitungen wie folgt

$$\nabla^z_{(n)} T^{z\ldots z}_{z\ldots z} = h^{z\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} T^{z\ldots z}_{z\ldots z} = h^{z\bar{z}} \big(\partial_{\bar{z}} + (q-p)\Gamma^z{}_{\bar{z}z}\big)\, T^{z\ldots z}_{z\ldots z} = h^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} T^{z\ldots z}_{z\ldots z} \,, \tag{C.11}$$

und

$$\nabla^{(n)}_z T^{z\ldots z}_{z\ldots z} = \nabla_z T^{z\ldots z}_{z\ldots z} = \big(\partial_z + (q-p)\Gamma^z{}_{zz}\big)\, T^{z\ldots z}_{z\ldots z} = \big(\partial_z + 2n\, \partial_z \phi\big)\, T^{z\ldots z}_{z\ldots z} \,. \tag{C.12}$$

Die kovarianten Ableitungen bezüglich der Koordinate $\bar{z}$ lassen sich entsprechend durch

$$\nabla^{\bar{z}}_{(n)} = h^{\bar{z}z} \nabla^{(n)}_z \qquad \text{und} \quad \nabla^{(n)}_{\bar{z}} = h_{\bar{z}z} \nabla^z_{(n)} \tag{C.13}$$

definieren.

Mit diesen kovarianten Ableitungen erhält man den Ricci-Tensor

$$R_{z\bar{z}} = -2\, \partial_z \partial_{\bar{z}} \phi \tag{C.14}$$

und den Krümmungsskalar

$$R = -8\, e^{-2\phi}\, \partial_z \partial_{\bar{z}} \phi \,. \tag{C.15}$$

Weiterhin läßt sich einfach überprüfen, daß gilt

$$\begin{aligned} \nabla^z_{(n)} &= 2\, e^{-2\phi}\, \partial_{\bar{z}} & \qquad \nabla^{(n)}_z &= e^{-2n\phi}\, \partial_z e^{2n\phi} \\ \nabla^{\bar{z}}_{(n)} &= 2\, e^{-2(n+1)\phi}\, \partial_z e^{2n\phi} & \qquad \nabla^{(n)}_{\bar{z}} &= \partial_{\bar{z}} \,. \end{aligned} \tag{C.16}$$

Mit dem für $T, U \in \mathcal{T}^n$ definierten invarianten Skalarprodukt

$$(T, U) \equiv \int d^2 z\, \sqrt{-h}\, (h_{z\bar{z}})^n\, \bar{T} U \tag{C.17}$$

lassen sich nun die Adjungierten der kovarianten Ableitungen berechnen,

$$\big(\nabla^z_{(n)}\big)^\dagger = -\nabla^{(n+1)}_z \qquad \big(\nabla^{(n)}_z\big)^\dagger = -\nabla^z_{(n-1)} \,. \tag{C.18}$$

Man kann auf der Riemann-Fläche Σ_g zwei Laplace-Operatoren definieren, die Tensoren der Helizität n auf Tensoren der Helizität n abbilden, $\Delta^\pm_{(n)} : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^{n\pm 1} \to \mathcal{T}^n$. Es gilt,

$$\Delta^+_{(n)} \;\equiv\; -\nabla^{(n+1)}_z \nabla^z_{(n)} = -2\, e^{-2\phi} \left(\partial_z \partial_{\bar{z}} + 2n\, (\partial_z \phi)\, \partial_{\bar{z}}\right) \tag{C.19a}$$

$$\Delta^-_{(n)} \;\equiv\; -\nabla^z_{(n-1)} \nabla^{(n)}_z = -2\, e^{-2\phi} \left(\partial_z \partial_{\bar{z}} + 2n\, (\partial_z \phi)\, \partial_{\bar{z}} + 2n\, (\partial_z \partial_{\bar{z}} \phi)\right) . \tag{C.19b}$$

Man erkennt, daß diese beiden Laplace-Operatoren selbstadjungiert sind, $(\Delta^\pm_{(n)})^\dagger = \Delta^\pm_{(n)}$, und daß ihre Differenz proportional zum Krümmungsskalar R ist,

$$\Delta^+_{(n)} - \Delta^-_{(n)} = 4n\, e^{-2\phi}\, (\partial_z \partial_{\bar{z}} \phi) = -\tfrac{1}{2} n\, R \,. \tag{C.20}$$

Insbesondere gilt damit für $n = 0$, $\Delta^+_{(0)} = \Delta^-_{(0)}$.

C.3 Das Riemann-Roch Indextheorem

Das Riemann-Roch Indextheorem stellt einen Zusammenhang zwischen dem Index eines Differentialoperators, d.h. der Differenz der Anzahlen der Nullmoden des Operators und seines Adjungierten, und der Topologie der Riemann-Fläche, auf der dieser Operator definiert ist, her. Für die oben definierten kovarianten Ableitungen auf der Riemann-Fläche Σ_g ist die Aussage des Riemann-Roch Theorems

$$\operatorname{ind} \nabla_z^{(n)} = \dim_{\mathbb{C}} \ker \nabla_z^{(n)} - \dim_{\mathbb{C}} \ker \nabla^z_{(n-1)} = (2n+1)\,(g-1)\,. \tag{C.21}$$

Dabei ist $\operatorname{ind} \nabla_z^{(n)}$ der Index des Differentialoperators, und $\dim_{\mathbb{C}}$ die komplexe Dimension des entsprechenden Kerns. Wie oben schon erwähnt ist $\nabla^z_{(n-1)} = -(\nabla_z^{(n)})^\dagger$.

Zur Berechnung der Dimensionen der Kerne verwendet man die sogenannte *heat kernel* Methode. Dazu ist zunächst anzumerken, daß gilt $\ker \nabla_z^{(n)} = \ker \Delta^-_{(n)}$. Es ist $\Delta^-_{(n)} = -\nabla^z_{(n-1)} \nabla_z^{(n)}$ und wegen $\nabla^z_{(n-1)} = -(\nabla_z^{(n)})^\dagger$ kann $\Delta^-_{(n)}|n\rangle$ nur dann Null sein, wenn auch $\nabla_z^{(n)}|n\rangle = 0$ ist. Also sind die Kerne dieser beiden Operatoren identisch. Ebenso kann man zeigen, daß gilt $\ker \nabla^z_{(n-1)} = \ker \Delta^+_{(n-1)}$. Statt der Dimensionen der Kerne der kovarianten Ableitungen können also auch die Dimensionen der Kerne der Laplace-Operatoren auf der Riemann-Fläche untersucht werden.

Sei nun Δ ein Laplace-Operator mit $\dim \ker \Delta = n_0$. Dann definiert man den heat kernel als $h(t) \equiv e^{-t\Delta}$. In der Koordinatenbasis läßt $h(t)$ sich ausschreiben, als

$$h(x,y;t) = \langle x|h(t)|y\rangle = \langle x| \sum_n e^{-t\Delta}|n\rangle\langle n|y\rangle = \sum_n e^{-t\lambda_n} \langle x|n\rangle\langle n|y\rangle\,. \tag{C.22}$$

Dabei bilden die $|n\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren des Laplace-Operators Δ mit den zugehörigen Eigenwerten λ_n. Da die Eigenwerte des per Konstruktion hermiteschen Laplace-Operators nicht negativ sind, gilt offensichtlich $\lim_{t\to\infty} h(x,y;t) = \sum_{i=1}^{n_0} \langle x|0,i\rangle\langle 0,i|y\rangle$, wobei die $|0,i\rangle$ die Nullmoden des Laplace-Operators sind. Die Eigenvektoren von Δ bilden ein Orthonormalsystem, daher folgt nun

$$\lim_{t\to\infty} \int dx\, h(x,x;t) = n_0\,. \tag{C.23}$$

Die Spur des heat kernel liefert also im Grenzwert für unendlich große Zeiten die Dimension des Kernes des Laplace-Operators.

Der heat kernel $h(x,y;t)$ erfüllt die Wärmeleitgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) h(x,y;t) = 0 \tag{C.24}$$

mit der Anfangsbedingung $h(x,y;0) = \delta(x-y)$. Diese Eigenschaft kann man ausnutzen, um den heat kernel explizit zu konstruieren und damit den Index des Laplace-Operators Δ zu berechnen.

Der heat kernel $\mathcal{K}_n^+(z,w;t)$ des Laplace-Operators $\Delta^+_{(n)}$, der auf Tensoren aus $\mathcal{T}^n$ wirkt, erfüllt für $t \neq 0$ die Wärmeleitgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta^+_{(n)}\right) \mathcal{K}_n^+(z,w;t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta - V_n\right) \mathcal{K}_n^+(z,w;t) = 0\,. \tag{C.25}$$

Dabei ist $\Delta = -2\,\partial_z \partial_{\bar z}$ der Laplace-Operator des flachen Raumes und

$$V_n = \Delta - \Delta^+_{(n)} = \left(1 - e^{-2\,\phi}\right)\Delta + 4n\,e^{-2\,\phi}\,\partial_z\phi\,\partial_{\bar z}\,. \tag{C.26}$$

Der flache Laplace-Operator Δ definiert auch einen heat kernel $K(z,w;t)$, durch die Wärmeleitgleichung $(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)\,K(z,w;t) = 0$ für $t \neq 0$. Diese Gleichung läßt sich durch eine Laplace-Transformation einfach lösen, man erhält,

$$K(z,w;t) = \frac{1}{4\pi t}\,e^{-|z-w|^2/2t}\,. \tag{C.27}$$

Mit Hilfe der Lösung von $K(z,w;t)$ kann man nun eine Reihenentwicklung in t für den gesuchten heat kernel $\mathcal{K}_n^+$ angeben,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_n^+(z,w;t) \;&=\; K(z,w;t) + \int\limits_0^t dt' \int d^2z'\,K(z,z';t-t')\,V_n(z')\,K(z',w;t') \\
&\quad + \int\limits_0^t dt' \int\limits_0^{t'} dt'' \int d^2z' \int d^2z''\,K(z,z';t-t')\,V_n(z')\,K(z',z'';t'-t'') \\
&\qquad\qquad \times V_n(z'')\,K(z'',w;t'') + \ldots\,.
\end{aligned}$$

Wir sind am Index der kovarianten Ableitung ∇_z interessiert[114], d.h. es ist die Differenz der Dimensionen der Kerne von Δ^+ und Δ^- zu berechnen. Man stellt fest, daß in diesem Fall nur der von t unabhängige Anteil der Spur der heat kernels $\mathcal{K}^+$ und $\mathcal{K}^-$ eine Rolle spielt, da Δ^+ und Δ^- dasselbe Spektrum haben. Sei $|n\rangle$ ein beliebiger Eigenvektor von $\Delta^+ = \nabla_z^\dagger \nabla_z$ mit von Null verschiedenem Eigenwert $\lambda_n \neq 0$. Dann ist $\nabla_z|n\rangle$ ein Eigenvektor von $\Delta^- = \nabla_z \nabla_z^\dagger$ mit dem selben Eigenwert λ_n,

$$\Delta^-\nabla_z|n\rangle = \nabla_z\nabla_z^\dagger\nabla_z|n\rangle = \nabla_z\Delta^+|n\rangle = \lambda_n\,\nabla_z|n\rangle\,. \tag{C.28}$$

Jedem Eigenvektor von Δ^+, der nicht zu den Nullmoden gehört, entspricht also genau ein Eigenvektor von Δ^- mit dem selben Eigenwert. Damit ist die Differenz der Spuren der entsprechenden heat kernels von t unabhängig. Im folgenden reicht es also aus, lediglich die für kleine t führenden Terme von $\mathcal{K}_n^\pm$ zu betrachten. Damit erhält man aus der obigen Reihenentwicklung

$$\mathcal{K}_n^+(z,w;t) = \frac{1}{4\pi t} + \int\limits_0^t dt' \int d^2z'\,K(z,z';t-t')\,V_n(z')\,K(z',w;t') + \mathcal{O}(t)\,. \tag{C.29}$$

Um diesen Ausdruck auszuwerten wählt man nun ein Koordinatensystem, für das an der Stelle z gilt, $\phi(z,\bar z) = 0$. An der Stelle z' gilt dann in der Nähe der Diagonalelemente des heat kernel

$$\begin{aligned}
\phi(z',\bar z') \;&=\; (z'-z)\,\partial_z\phi(z,\bar z) + (\bar z' - \bar z)\,\partial_{\bar z}\phi(z,\bar z) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left((z'-z)^2\,\partial_z^2\phi(z,\bar z) + (\bar z'-\bar z)^2\,\partial_{\bar z}^2\phi(z,\bar z) + 2\,|z'-z|^2\,\partial_z\partial_{\bar z}\phi(z,\bar z)\right) + \ldots\,.
\end{aligned}$$

[114] Da die Helizität n der kovarianten Ableitung und der Laplace-Operatoren für diese Argumentation keine Rolle spielt, wird der Index n zur Vereinfachung der Notation hier unterdrückt.

Aus Symmetriegründen bleiben nach der Integration über d^2z' nur die Terme übrig, die eine ∂_z und eine $\partial_{\bar z}$ Ableitung enthalten. Man erhält somit

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n^+(z,w;t) &= \frac{1}{4\pi t} + \int_0^t dt' \int d^2z'\, K(z,z';t-t')\Big(2\,|z'-z|^2\,\partial_z\partial_{\bar z}\phi(z,\bar z)\,\Delta_w \\ &\qquad +4n\,(\bar z'-\bar z)\,\partial_z\partial_{\bar z}\phi(z,\bar z)\,\partial_{\bar w}\Big)\,K(z',w;t') + \mathcal{O}(t)\,.\end{aligned}$$

Dieses Integral ist lösbar, man erhält als Ergebnis für $w \to z$,

$$\mathcal{K}_n^+(z,z;t) = \frac{1}{4\pi t} - \frac{1+3n}{6\pi}\,\partial_z\partial_{\bar z}\phi(z,\bar z) + \mathcal{O}(t)\,. \tag{C.30}$$

Ganz analog erhält man für die Diagonalelemente des heat kernels des Laplace-Operators $\Delta^-_{(n)}$ den Ausdruck

$$\mathcal{K}_n^-(z,z;t) = \frac{1}{4\pi t} - \frac{1-3n}{6\pi}\,\partial_z\partial_{\bar z}\phi(z,\bar z) + \mathcal{O}(t)\,. \tag{C.31}$$

Mit der obigen Definition des Ricci-Tensors $R_{z\bar z} = -2\partial_z\partial_{\bar z}\phi(z,\bar z)$ ergibt sich nun der gesuchte Index der kovarianten Ableitung $\nabla_z^{(n)}$

$$\operatorname{ind}\nabla_z^{(n)} = \frac{1-2n}{8\pi}\int d^2z\,R_{z\bar z} = -\frac{2n-1}{2}\chi(\Sigma_g) = (2n+1)(g-1)\,. \tag{C.32}$$

Dies ist gerade das zu beweisende Riemann-Roch Indextheorem.

Bei der Untersuchung der Moduliräume des N=2 Strings sind auch die Dimensionen der Kerne $U(1)$ kovarianter Ableitungen $\mathcal{D}_z^{n,q} = \nabla_z^{(n)} + i\,q\,A_z$ zu bestimmen. Das Vorgehen dabei ist ganz analog zum Vorgehen im Fall rein Lorentz-kovarianter Ableitungen $\nabla_z^{(n)}$. Ebenso wie sich die Beiträge der Christoffel-Symbole, d.h. der Lorentz-Konnektionen, zur Krümmungs-2-Form $R_{z\bar z}dz \wedge d\bar z$ kombinieren und nach Integration über die Diagonalelemente des heat kernel die Euler-Zahl der betrachteten Riemann-Fläche liefern, kombinieren sich die Beiträge des Eichfeldes A_z, d.h. der Konnektion des $U(1)$ Bündels auf der Riemann-Fläche, zur Feldstärke-2-Form. Die Integration über diese Feldstärke ergibt die in Abschnitt III.1 eingeführte Chern-Zahl M des $U(1)$ Bündels. Damit nimmt das Riemann-Roch Indextheorem für $U(1)$ kovariante Ableitungen die Form an

$$\operatorname{ind}\mathcal{D}_z^{n,q} = \dim_{\mathbb{C}}\ker\mathcal{D}_z^{n,q\dagger} - \dim_{\mathbb{C}}\ker\mathcal{D}_z^{n,q} = (2n+1)\,(g-1) + q\,M\,. \tag{C.33}$$

Wenn nun die Dimension von $\ker\mathcal{D}_z^{n,q}$ oder von $\ker\mathcal{D}_z^{n,q\dagger}$ bekannt ist, kann daraus die Dimension des jeweils anderen Kernes abgeleitet werden.

Weiterhin kann gezeigt werden, daß in den meisten Fällen einer der beiden Kerne der Lorentz-kovarianten Ableitungen $\nabla_z^{(n)}$ oder $\nabla^z_{(n)}$ nur die Null enthält. Dazu betrachtet man zunächst die Norm der Wirkung von $\nabla_z^{(n)}$ auf einen Tensor $\xi \in \mathcal{T}^n$ mit Helizität n. Mit Hilfe der Definitionen der Adjungierten der kovarianten Ableitungen aus (C.18) und mit $\Delta^+_{(n)} - \Delta^-_{(n)} = -\frac{1}{2}n\,R$ aus (C.20) erhält man nach einigen partiellen Integrationen

$$\begin{aligned}\big\|\nabla_z^{(n)}\xi\big\|^2 &= \int\big(\nabla_z^{(n)}\xi\big)^\dagger\big(\nabla_z^{(n)}\xi\big) = -\int\bar\xi\Delta^-_{(n)}\xi = -\int\big(\bar\xi\Delta^+_{(n)}\xi - \tfrac{1}{2}n\,R\,\bar\xi\xi\big) \\ &= \int\Big(\big(\nabla^z_{(n)}\xi\big)^\dagger\big(\nabla^z_{(n)}\xi\big) - \tfrac{1}{2}n\,R\,\bar\xi\xi\Big) = \big\|\nabla^z_{(n)}\xi\big\|^2 - \tfrac{1}{2}n\int R\,\bar\xi\xi\,.\end{aligned} \tag{C.34}$$

Für die kovariante Ableitung $\nabla^z_{(n)}$ folgt daraus

$$\left\|\nabla^z_{(n)}\xi\right\|^2 = \left\|\nabla^{(n)}_z\xi\right\|^2 + \tfrac{1}{2}n\int R\,\bar{\xi}\xi\,. \tag{C.35}$$

Nach dem Uniformisierungstheorem [110, Theorem 14.9] kann jede Riemann-Fläche durch Weyl-Transformationen auf eine Riemann-Fläche mit konstantem Krümmungsskalar R abgebildet werden. Dabei muß das konstante R dasselbe Vorzeichen haben, wie die Euler-Zahl $\chi = 2 - 2g$ der Riemann-Fläche Σ_g. Wie in Tabelle C.1 dargestellt ist, ist R auf der Sphäre mit $\chi = 2$ positiv. Damit ist der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (C.35) strikt positiv, es gilt also $\|\nabla^z_{(n)}\xi\| > 0$, d.h. auf der Sphäre gibt es keinen Tensor ξ, der von $\nabla^z_{(n)}$ auf Null abgebildet wird. Damit gibt es zumindest für $n > 0$ auf der Sphäre keine Moduli. Ebenso zeigt man aus Gleichung (C.34), daß es auf Riemann-Flächen vom Genus $g \geq 2$ wegen $R < 0$ für $n > 0$ keine konformen Killing-Vektoren oder Spinoren gibt. Auf dem Torus, d.h. für $g = 1$, sind die Dimensionen der beiden Kerne gleich. Hier überzeugt man sich anhand der Definition (C.16) der kovarianten Ableitungen leicht davon, daß es genau ein Feld mit den Randbedingungen des Torus gibt, nämlich das konstante Vektor-, Spinor- oder Skalarfeld, das von $\nabla^{(n)}_z$ vernichtet wird. Es gibt also einen konformen Killing-Vektor, Skalar oder Spinor und auch einen entsprechenden Moduliparameter.

Im Fall $n = 0$, d.h. für die $U(1)$ Moduli und die konformen Killing-Skalare, liefern die Beziehungen (C.34) und (C.35) keine neuen Informationen. Jedoch läßt sich in diesem Fall an der genauen Form der Ableitung $\nabla^{(0)}_z = \partial_z$ ablesen, daß es unabhängig vom Genus immer genau einen konformen Killing-Skalar gibt. Die Anzahl der $U(1)$ Moduli folgt dann aus dem Riemann-Roch Theorem (C.21).

g	Riemann-Fläche	Metrik	Vorzeichen von R
0	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	$ds^2 = dzd\bar{z}/(1 + z\bar{z})^2$	$+$
1	$\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\,\tau + \mathbb{Z})$	$ds^2 = dzd\bar{z}$	0
≥ 2	$\mathbb{H}/G$	$ds^2 = dzd\bar{z}/(\mathrm{Im}\ z)^2$	$-$

TABELLE C.1 - *Alle Riemann-Fächen Σ_g vom Genus g können durch eine konforme Abbildung auf die hier dargestellten zurückgeführt werden. $\mathbb{H}$ ist die komplexe obere Halbebene, $G \subset SL(2,\mathbb{R})$ ist die Fuchssche Gruppe.*

Bei der Untersuchung der Eichtransformationen der unter der $U(1)$ geladenen Felder, insbesondere der Gravitinos, ist statt der Lorentz-kovarianten Ableitung $\nabla^{(n)}_z$ die $U(1)$ kovariante Ableitung $\mathcal{D}^{n,q}_z = \nabla^{(n)}_z + i\,q\,A_z$ zu betrachten. Der zusätzliche zum Eichfeld A_z proportionale Term ändert offensichtlich nichts an der Anzahl der Nullmoden des Operators. Sie ist weiterhin allein durch die Anzahl der Nullmoden der Lorentz-kovarianten Ableitung $\nabla^{(n)}_z$ gegeben. Damit folgt aus dem Riemann-Roch Indextheorem (C.33) unter Berücksichtigung der $U(1)$ Ladung für die Anzahl der Moduli

$$\dim\ker\mathcal{D}^{n,q\dagger}_z = \dim\ker\nabla^{(n)\dagger}_z + q\,M\,. \tag{C.36}$$

Genus		$\dim\ker\mathcal{D}_z^{n,q\dagger}$	$\dim\ker\mathcal{D}_z^{n,q}$
$g=0$		$q\,M$	$2n+1$
$g=1$		$1+q\,M$	1
$g>1$	$n=0$	$(2n+1)\,(g-1)+1+q\,M$	1
	$n>0$	$(2n+1)\,(g-1)+q\,M$	0

TABELLE C.2 - *Die Anzahl der Moduliparameter und der konformen Killing-Vektoren ($n=1$), Spinoren ($n=1/2$) oder Skalare ($n=0$) für Felder mit der $U(1)$ Ladung q auf Riemann-Flächen Σ_g vom Genus g.*

Damit sind die Dimensionen der Kerne sämtlicher relevanter Differentialoperatoren bestimmt und können in Tabelle C.2 abgelesen werden. Auch der hier nicht explizit behandelte Fall von Riemann-Flächen mit Rändern, d.h. mit ungerader Euler-Zahl χ, kann aus dieser Tabelle erhalten werden. Der Beweis des Riemann-Roch Indextheorems ist unabhängig davon, ob eine Riemann-Fläche mit oder ohne Rand betrachtet wird, und das Uniformisierungstheorem gilt ebenfalls für Flächen mit Rändern, so daß sich auch an der Betrachtung der Anzahl der Moduliparameter in den Fällen $\chi<0$ und $\chi>0$ nichts wesentliches ändert.

Eine alternative Methode zur Bestimmung der Anzahl der Moduliparameter und der konformen Killing-Vektoren, Spinoren bzw. Skalare besteht in der Untersuchung der bosonisierten Geistsysteme, die durch die Wirkung (II.98) beschrieben werden. Man findet dabei den Zusammenhang [71]

$$\big(\#_{\text{Geistnullmoden}}-\#_{\text{Antigeistnullmoden}}\big)=\tfrac{1}{2}\,Q\,\chi\,. \tag{C.37}$$

Dabei ist $Q=\pm(1-2\lambda)$ die Hintergrundladung, an die die bosonisierten Geister koppeln und λ das konforme Gewicht des entsprechenden Antigeistes. Mit $Q_{bc}=-3$, $Q_{\beta\gamma}=+2$ und $Q_{b'c'}=-1$ erhält man aus Gleichung (C.37) gerade wieder das Riemann-Roch Indextheorem, da die Nullmoden der Antigeister gerade den Moduli entsprechen und die Nullmoden der Geister den konformen Killing-Vektoren.

D. Berechnung der Determinanten

In diesem Anhang werden die Fadeev-Popov-Determinanten des $N{=}2$ Strings berechnet. Diese Determinanten können im Pfadintegral als Zustandssumme der Form

$$Z_{\mathcal{D}} = \int [d\phi][d\bar{\phi}]\, e^{-\int d^2z\,\sqrt{-h}\,\bar{\phi}\mathcal{D}\phi} \tag{D.1}$$

dargestellt werden. Dabei bezeichnen ϕ und $\bar{\phi}$ die Geist- bzw. Antigeistfelder c, c' und $\gamma^{\pm}$ bzw. b, b' und $\beta^{\mp}$, und $\mathcal{D}$ ist durch das Quadrat des die Eichtransformationen erzeugenden Differentialoperators $\mathcal{P}_1^{\dagger}\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_0^{\dagger}\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_{1/2}^{\dagger}\mathcal{P}_{1/2}$ gegeben. Die Zustandssumme der bosonischen und fermionischen Materiefelder Z^{μ} und $\psi^{+\mu}$ kann mit den Differentialoperatoren $\Box$ und $\rho{\cdot}\nabla$ ebenso berechnet werden. Aus den Definitionen der Differentialoperatoren $\mathcal{P}$ in den Gleichungen (II.23), (II.24) und (II.25), stellt man fest, daß die Ausdrücke $\mathcal{P}^{\dagger}\mathcal{P}$ stets durch Laplace-Operatoren Δ auf der Weltfläche beschrieben werden können. Es sind also im folgenden die Determinanten des Laplace-Operators mit verschiedenen Randbedingungen (α,β) zu berechnen. Für die bosonischen Materiefelder und die fermionischen Geister gilt dabei $(\alpha,\beta)=(0,0)$, während die Randbedingungen der Fermionen und der Supersymmetrie-Geister durch die Spinstruktur (α,β) gegeben sind.

Bei der Berechnung der Determinanten werden die Nullmoden des Differentialoperators Δ unterdrückt[115], um ein Verschwinden oder ein Divergieren des in das Pfadintegral einzusetzenden Ausdrucks zu verhindern. Die Nullmoden, deren Anzahl von der Topologie der Weltfläche abhängt, werden bei der Konstruktion der Amplituden gesondert untersucht.

Zur Berechnung der Determinante von Δ wird die ζ-Funktions-Regularisierung verwendet [59, 60]. Mit den Eigenwerten λ_{mn} des Laplace-Operators Δ nimmt die Determinante die Form an

$$\det{}'\Delta = \prod_{m,n}{}' \lambda_{mn}\,. \tag{D.2}$$

Die ζ-Funktion ist definiert als

$$\zeta(s,\Delta) = \sum_{m,n}{}' \lambda_{mn}^{-s}\,. \tag{D.3}$$

Damit ist die Determinante durch die Ableitung der ζ-Funktion an der Stelle $s=0$ gegeben,

$$\det{}'\Delta = e^{-\zeta'(0,\Delta)}\,. \tag{D.4}$$

[115] Dies wird durch die Verwendung des Symbols $\det'$ ausgedrückt.

Zur Bestimmung der Determinante kann dabei ausgenutzt werden, daß die ζ-Funktion als

$$\zeta(s,\Delta) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m,n}{}' \int\limits_0^\infty dt\, t^{s-1}\, e^{-\lambda_{mn} t} \tag{D.5}$$

dargestellt werden kann, wobei die Gammafunktion durch $\Gamma(s) = \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\, e^{-t}$ definiert ist. Nach einer Entwicklung des Ausdrucks (D.5) für kleine s kann die Integration $\int dt$ bei gegebenem Spektrum λ_{mn} des Laplace-Operators ausgeführt werden. Der in s lineare Term der Entwicklung von $\zeta(s,\Delta)$ liefert dann den zur Bestimmung der Determinante (D.4) benötigten Beitrag.

D.1 Determinanten auf dem Torus

Zunächst sollen die Determinanten des Laplace-Operators für die verschiedenen Randbedingungen (α,β) auf dem Torus berechnet werden. Die entsprechenden Determinanten auf dem Zylinder oder Anulus können durch Anwendung der Involution f_c aus Gleichung (III.24) aus den entsprechenden Determinanten auf dem Torus konstruiert werden.

Der Torus wird durch das Einheitsquadrat $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ mit der Metrik

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & |\tau|^2 \end{pmatrix} \tag{D.6}$$

beschrieben. Damit nimmt der Laplace-Operator die Form an

$$\Delta = -\frac{1}{\tau_2^2}\left(|\tau|^2\, \partial_x^2 - 2\tau_1\, \partial_x \partial_y + \partial_y^2\right). \tag{D.7}$$

Die von den Randbedingungen (α,β) abhängenden Eigenfunktionen

$$u_{mn}^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\sqrt{\tau_2}}\, e^{2\pi i\,((m+\alpha)\,x + (n+\beta)\,y)} \tag{D.8}$$

mit $m,n \in \mathbb{Z}$ erzeugen das Spektrum der Eigenwerte

$$\lambda_{mn}^{(\alpha,\beta)} = \left(\frac{2\pi}{\tau_2}\right)^2 \left((m+\alpha)^2\, \tau_2^2 + (n+\beta-\tau_1\,(m+\alpha))^2\right). \tag{D.9}$$

Mit diesen Eigenwerten erhält man die Ableitung der ζ-Funktion an der Stelle $s=0$

$$\begin{aligned} \zeta'^{\,(\alpha,\beta)}(0) \;\; &= \;\; 2\pi\,\tau_2\left(\alpha^2 - \alpha + \tfrac{1}{6}\right) - \ln\left|1 - e^{2\pi i\,(\alpha-\beta)}\right|^2 \\ &\quad - \sum_{n=1}^\infty \ln\left|\left(1 - e^{-2\pi i\,\beta}\, e^{2\pi i\,\tau\,(n+\alpha)}\right)\left(1 - e^{2\pi i\,\beta}\, e^{2\pi i\,\tau\,(n-\alpha)}\right)\right|^2. \end{aligned} \tag{D.10}$$

Für ein kommutierendes, periodisches Boson mit Randbedingungen $(\alpha,\beta) = (0,0)$ erhält man daraus die Determinante

$$\det{}'\Delta = \tau_2^{-1/2}\left|\eta(\tau)\right|^{-2}. \tag{D.11}$$

Die Determinante eines antikommutierenden periodischen Skalars, wie etwa eines c oder eines c' Geistes oder der entsprechenden Antigeister, ist der Kehrwert von (D.11). Für einen antikommutierenden Spinor mit Spinstruktur $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ außerhalb des Ramond-Sektors der Theorie ergibt sich für die holomorphe Hälfte die Determinante

$$\det{}'\Delta\big|_{\mathrm{hol}} = \left(\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](0,\tau)\right)^{1/2} \left(\eta(\tau)\right)^{-1/2}. \tag{D.12}$$

Im Fall des geschlossenen Strings auf dem Torus ist die vollständige Determinante des antikommutierenden Spinors das Produkt aus holomorpher und antiholomorpher Hälfte,

$$\det{}'\Delta = \left|\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](0,\tau)\right| \left|\eta(\tau)\right|^{-1}. \tag{D.13}$$

Die Determinante eines kommutierenden Spinors des $(\gamma^{\pm}, \beta^{\mp})$ Geistsystems ist der Kehrwert von (D.13).

D.2 Determinanten auf dem Zylinder

Der Zylinder oder der Anulus kann aus dem Torus durch die Involution

$$f_C(x,y) = (x, 1-y) \tag{D.14}$$

gewonnen werden. Dabei werden nur diejenigen Felder auf dem Zylinder betrachtet, die invariant unter der Involution (D.14) sind. Insbesondere nimmt die Metrik auf dem Zylinder die Form an

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}. \tag{D.15}$$

Dabei ist $t \in \mathbb{R}$. Die Wirkung der Involution f_C auf die Eigenfunktionen des Torus (D.8) mit periodischen Randbedingungen $(\alpha, \beta) = (0,0)$ ist

$$u^{(0,0)}_{m\,n} \circ f_C = u^{(0,0)}_{-m\,n}. \tag{D.16}$$

Diese Eigenfunktionen können in Moden, die gerade oder ungerade unter der Involution sind, unterteilt werden [44]. Gerade Moden führen zu Neumann-Randbedingungen, ungerade Moden führen zu Dirichlet-Randbedingungen. Da bosonische Felder am Rand der offenen Strings Neumann-Randbedingungen erfüllen sollen, werden im folgenden nur die unter f_C geraden Moden betrachtet. Damit läßt sich die ζ-Funktion auf dem Zylinder auf die ζ-Funktion auf dem Torus zurückführen. Es ist[116]

$$\zeta^{(0,0)}_C(s) = \tfrac{1}{2}\,\zeta^{(0,0)}(s)\big|_{\tau=it} + \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{2s} \zeta(2s). \tag{D.17}$$

Damit erhält man die Determinante eines kommutierenden Skalarfeldes auf dem Zylinder

$$\det{}'\Delta = \left(\eta(it)\right)^{-1}. \tag{D.18}$$

[116] $\zeta(s)$ ist dabei die Riemannsche ζ-Funktion mit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

Für ein antikommutierendes Skalarfeld erhält man den entsprechenden Kehrwert. Fermionen können an den Rändern des offenen Strings beliebige relative Phasen annehmen. Die Involution f_C ersetzt die Spinstruktur α entlang eines Homologiezykels des Torus durch die Randbedingung des offenen Strings, während die Spinstruktur β auf dem Zylinder erhalten bleibt. Die Randbedingung der Fermionen auf dem offenen String und die verbleibende Spinstruktur können wieder zu einem Paar (α, β) von Spinstrukturen zusammengefaßt werden [45]. Die Herleitung der Determinante der Spinorfelder ist damit identisch zum Fall des geschlossenen Strings mit dem auf $\tau = it$ eingeschränkten Bereich des Teichmüller-Parameters. Allerdings gibt es auf dem offenen String nur eine holomorphe Hälfte der fermionischen Felder. Man erhält also die Determinante eines antikommutierenden Spinors auf dem Zylinder

$$\det{}'\Delta = \left(\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](0, it)\right)^{1/2} \left(\eta(it)\right)^{-1/2}. \tag{D.19}$$

Die kommutierenden Spinoren des $(\gamma^{\pm}, \beta^{\mp})$ Geistsystems liefern wieder den entsprechenden Kehrwert.

Für die Geist- und Materiefelder des geschlossenen $N{=}2$ Strings im d-dimensionalen Targetraum erhält man so die Determinanten

$$\begin{aligned}
Z_Z(\tau, \bar\tau) &= \tau_2^{-d/2} \left|\eta(\tau)\right|^{-2d} && \text{(D.20a)}\\
Z_\psi\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](\tau, \bar\tau) &= \left|\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](0, \tau)\right|^{d} \left|\eta(\tau)\right|^{-d} && \text{(D.20b)}\\
Z_{bc}(\tau, \bar\tau) &= \tau_2 \left|\eta(\tau)\right|^{4} && \text{(D.20c)}\\
Z_{b'c'}(\tau, \bar\tau) &= \tau_2 \left|\eta(\tau)\right|^{4} && \text{(D.20d)}\\
Z_{\beta\gamma}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](\tau, \bar\tau) &= \left|\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](0, \tau)\right|^{-4} \left|\eta(\tau)\right|^{4}. && \text{(D.20e)}
\end{aligned}$$

E. Ein-Loop-Integrale einer ϕ^3-Feldtheorie

In diesem Anhang soll das in Abbildung E.1 dargestellte n-gon Integral einer ϕ^3-Feldtheorie in d Dimensionen durch die Einführung von Feynman-Parametern a_i und der Schwinger-Zeit T berechnet werden. Diese einzige Einteilchen-irreduzible Ein-Loop-Amplitude der ϕ^3-Theorie spielt beim Vergleich der Ergebnisse von Stringtheorie und effektiver Feldtheorie eine wichtige Rolle.

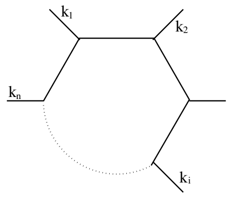

Abbildung E.1 - *Die 1PI n-Punkt Ein-Loop-Amplitude einer ϕ^3-Feldtheorie.*

Die einlaufenden Zustände tragen Impulse k_i mit $k_i^2 = -m_i^2$. Mit der Definition $p_j = \sum_{i=1}^{j} k_i$ nimmt die Amplitude die Form an

$$\mathcal{A}_n = \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(\ell - p_j)^2} \,. \tag{E.1}$$

Durch die Einführung von Feynman-Parametern a_i läßt sich dieser Ausdruck umschreiben. Man erhält

$$\mathcal{A}_n = \Gamma(n) \left(\prod_{j=1}^{n} \int_0^1 da_j \right) \delta\Big(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j\Big) \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\sum_{j=1}^{n} a_j\,(\ell - p_j)^2)^n} \,. \tag{E.2}$$

Durch die Verschiebung des Loop-Impulses $\ell \to \ell' - \sum_{j=1}^{n} a_j p_j$ und mit der Definition

$$M^2 = -\left(\sum_{j=1}^{n} a_j p_j \right)^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j p_j^2 \tag{E.3}$$

folgt daraus

$$\mathcal{A}_n = \Gamma(n) \left(\prod_{j=1}^{n} \int_0^1 da_j \right) \delta\Big(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j\Big) \int \frac{d^d\ell'}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell'^2 + M^2)^n} \,. \tag{E.4}$$

Die Impulsintegration kann nun einfach ausgeführt werden. Mit

$$\int \frac{d^d\ell'}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(\ell'^2 + M^2\right)^n} = \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(n)} \frac{1}{(M^2)^{n-d/2}} \tag{E.5}$$

vereinfacht sich die Amplitude zu

$$\mathcal{A}_n = \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int_0^1 da_j \right) \frac{\delta(1-\sum_{j=1}^{n} a_j)}{(M^2)^{n-d/2}} . \tag{E.6}$$

Durch die Einführung der Schwinger-Zeit T läßt sich diese Amplitude in eine mit den aus der Stringtheorie erhaltenen Ausdrücken besser vergleichbare Form bringen. Es gilt die Identität

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dT\, T^{m-1}\, e^{-Tf} &= \left(-\frac{\partial}{\partial f}\right)^{m-1} \int_0^\infty dT\, e^{-Tf} = \left(-\frac{\partial}{\partial f}\right)^{m-1} \frac{1}{f} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-1)}{f^m} = \frac{\Gamma m}{f^m} . \end{aligned} \tag{E.7}$$

Daraus ergibt sich mit $m = n - d/2$ und $f = M^2$ das Ergebnis für die Amplitude mit n äußeren Zuständen in d Dimensionen,

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\prod_{j=1}^{n} \int_0^1 da_j \right) \delta\Big(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j\Big) \int_0^\infty dT\, T^{n-1-d/2} e^{-TM^2} . \tag{E.8}$$

F. Elliptische Funktionen

In diesem Anhang sollen einige der im Laufe dieser Arbeit verwendeten mathematischen Objekte vorgestellt und untersucht werden. Insbesondere soll in Abschnitt F.1 ein Überblick über die Jacobi-Thetafunktionen [7, 108] auf dem Torus und in Abschnitt F.2 ein Überblick über die Primformen [69, 109] gegeben werden. Diese beiden Objekte spielen eine entscheidende Rolle bei der Konstruktion der bosonischen und fermionischen Propagatoren (in Abschnitt F.3) auf dem Torus und bieten gleichzeitig die Möglichkeit zur Verallgemeinerung des Formalismus auf Riemann-Flächen von höherem Genus. In Abschnitt F.4 wird als weitere bei der Berechnung von Stringamplituden wichtige elliptische Funktion die Weierstraßsche $\wp$-Funktion [154, Kapitel XX] definiert. Im letzten Abschnitt F.5 wird das Verhalten der hier definierten elliptischen Funktionen unter modularen Transformationen angegeben.

F.1 Thetafunktionen

Die Jacobi-Thetafunktion ist eine Funktion in zwei komplexen Variablen, z und τ, die definiert wird durch die Reihenentwicklung

$$\vartheta(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\, n^2\tau + 2\pi i\, n z} . \tag{F.1}$$

Dabei ist $z \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl, und $\tau \in \mathbb{H}$ liegt in der oberen Halbebene, $\operatorname{Im}\tau > 0$. Damit kann man leicht überprüfen, daß $\vartheta(z,\tau)$ auf jeder kompakten Menge absolut und gleichförmig konvergiert. Ebenso läßt sich leicht nachrechnen, daß die Thetafunktion periodisch unter Transformationen $z \to z+1$ ist und unter $z \to z+\tau$ einen Phasenfaktor annimmt. Für die Periodizität der Thetafunktion gilt somit

$$\vartheta(z + a\tau + b, \tau) = e^{-\pi i\, a^2\tau - 2\pi i\, a z}\, \vartheta(z,\tau) . \tag{F.2}$$

Betrachtet man reelle Parameter $z = x \in \mathbb{R}$ und rein imaginäre Parameter $\tau = it$ mit $t \in \mathbb{R}_+$, stellt die Thetafunktion die fundamentale periodische Lösung der Wärmeleitgleichung dar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vartheta(x, it) = 0 . \tag{F.3}$$

Für $t \to 0$ geht die $\vartheta(x,it)$ als Funktional in eine Reihe von δ-Funktionen an den Stellen $x \in \mathbb{Z}$ über. $\vartheta(x,it)$ ist also die Lösung der Wärmeleitgleichung auf dem Kreis, d.h. mit $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, mit der Anfangsbedingung $\vartheta(x,0) = \delta(x)$.

F.1.1 Thetafunktionen mit Spinstrukturen

Analog zur Definition (F.1) läßt sich die Jacobi-Thetafunktion mit Charakteristik $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/2$ definieren. Diese Definition läßt sich dann für den im $N{=}2$ String benötigten Fall der kontinuierlichen Spinstrukturen $\alpha, \beta \in [0,1]$ verallgemeinern. Man definiert

$$\begin{aligned} \vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\,(n+\alpha)^2\tau + 2\pi i\,(n+\alpha)\,(z+\beta)} \\ &= e^{\pi i\,\alpha^2\tau + 2\pi i\,\alpha\,(z+\beta)}\,\vartheta(z+\alpha\,\tau+\beta,\tau)\,. \end{aligned} \tag{F.4}$$

Dabei sind die Spinstrukturen aus $\alpha, \beta \in [0,1]$ und ϑ ist die in Gleichung (F.1) definierte fundamentale Thetafunktion. Das Verhalten unter Transformationen $z \to z + m\,\tau + n$ folgt aus dem der fundamentalen Thetafunktion (F.2),

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z+m\,\tau+n,\tau) = e^{-\pi i\,m^2\,\tau - 2\pi i\,m\,(z+\beta) + 2\pi i\,n\,\alpha}\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z,\tau)\,. \tag{F.5}$$

Für die durch die üblichen Charakteristiken gegebenen Fälle $\alpha, \beta \in \{0, \frac{1}{2}\}$ kann man die Signatur der Thetafunktion definieren. In diesen Fällen gilt

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](-z,\tau) = (-1)^{4\alpha\beta}\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z,\tau)\,.$$

Damit definiert man eine Thetafunktion $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right]$ als *gerade*, wenn $4\alpha\beta$ gerade ist, und als *ungerade*, wenn $4\alpha\beta$ ungerade ist. Von besonderer Bedeutung ist die Jacobi-Thetafunktion mit ungerader Spinstruktur $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\vartheta_1(z,\tau) \equiv \vartheta\left[\begin{smallmatrix}1/2\\ 1/2\end{smallmatrix}\right](z,\tau)$. Mit Hilfe der Definition (F.4) können Thetafunktionen mit beliebiger Spinstruktur auf $\vartheta_1(z,\tau)$ zurückgeführt werden,

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z,\tau) = e^{\pi i\,\tau\,(\alpha-\frac{1}{2}) + 2\pi i\,(\alpha-\frac{1}{2})\,(z+\beta)}\,\vartheta_1\big(z-u,\tau\big)\,. \tag{F.6}$$

Dabei gibt $u = (\frac{1}{2}-\alpha)\,\tau + (\frac{1}{2}-\beta)$ die Abweichung der Spinstruktur (α, β) vom ungeraden Referenzpunkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an.

F.1.2 Produktdarstellung

Der Grund für die besondere Bedeutung der Thetafunktion mit ungerader Sprinstruktur $\vartheta_1(z,\tau)$ ist, daß man für diese Funktion eine einfache Produktdarstellung angeben kann[117],

$$\vartheta_1(z,\tau) = i\,q^{1/8} e^{\pi i\,z} \prod_{m=0}^{\infty}\left(1-q^m\right) \prod_{m=1}^{\infty}\Big(\left(1-q^m e^{-2\pi i\,z}\right)\left(1-q^{m+1}e^{+2\pi i\,z}\right)\Big)\,. \tag{F.7}$$

q ist dabei wie üblich definiert als $q = e^{2\pi i\,\tau}$. Daraus ergibt sich für die Produktdarstellung der Ableitung von ϑ_1 an der Stelle $z=0$ der Ausdruck[118]

$$\vartheta_1'(0,\tau) = 2\pi\,q^{1/8} \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^m\right)^3\,. \tag{F.8}$$

[117] Zum Beweis siehe [108, §14].

[118] Es ist $\vartheta_1'(0,\tau) \equiv \partial_z \vartheta_1(z,\tau)\big|_{z=0}$.

Mit Hilfe von (F.6) lassen sich nun auch die Produktdarstellungen für alle anderen Spinstrukturen angeben,

$$\begin{aligned}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right](z,\tau) &= i\, q^{1/8} e^{\pi i\,(z-u)} e^{\pi i\,\tau\,(\alpha-\frac{1}{2})+2\pi i\,(\alpha-\frac{1}{2})\,(z+\beta)} \prod_{m=0}^{\infty}\left(1-q^m\right) \\ &\times \prod_{m=1}^{\infty}\left(\left(1-q^m e^{-2\pi i\,(z-u)}\right)\left(1-q^{m+1}e^{+2\pi i\,(z-u)}\right)\right). \end{aligned} \tag{F.9}$$

F.1.3 Mehrdimensionale Thetafunktionen

Die Jacobi-Thetafunktion ist der fundamentale Baustein zur Konstruktion von Propagatoren und Korrelationsfunktionen auf dem Torus. Für die Berechnung von Streuamplituden auf Riemann-Flächen von höherem Genus benötigt man eine Verallgemeinerung der Definition aus (F.4). Eine Riemann-Fläche vom Genus g läßt sich durch die Periodenmatrix Ω_{ij} charakterisieren. Dabei handelt es sich um eine komplexe $(g\times g)$-Matrix mit positivem Imaginärteil. Mit den $2g$ Spinstrukturen $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^g$ definiert man nun die mehrdimensionale Thetafunktion

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\end{smallmatrix}\right](\vec{z},\Omega) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^g} e^{\pi i\,(n_i+\alpha_i)\Omega_{ij}\,(n_j+\alpha_j)+2\pi i\,(n_i+\alpha_i)\,(z_i+\beta_i)}\,. \tag{F.10}$$

Dabei ist $\vec{z}$ ein g-komponentiger komplexer Vektor, der einem Punkt P auf der Riemann-Fläche durch die Jacobi-Abbildung $\mathbb{I}$ [76] zugeordnet wird,

$$\mathbb{I}_i : P \to z_i(P) = \int_{P_0}^{P} \omega_i\,. \tag{F.11}$$

P_0 ist ein beliebiger Referenzpunkt, der aus allen physikalischen Ergebnissen, insbesondere aus den Korrelationsfunktionen, herausfällt. Die ω_i bilden die Basis der zu den Homologiezykeln der Riemann-Fläche dualen holomorphen 1-Formen. Die so aus den Punkten P der Weltfläche erhaltenen Vektoren $\vec{z}$ liegen in der Jacobi-Varietät $J=\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g+\Omega\mathbb{Z}^g)$. Im Fall des Torus, $g=1$, ist $J=\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$. Durch Ausdividieren des Gitters $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ aus der komplexen Ebene erhält man wieder eine zum ursprünglichen Torus isomorphe Mannigfaltigkeit.

Die mehrdimensionalen Thetafunktionen (F.10) haben ähnliche Eigenschaften wie die eindimensionalen Thetafunktionen (F.4) und sollen hier nicht näher untersucht werden.

F.2 Primformen

Die Primform wird zur Konstruktion der bosonischen und fermionischen Propagatoren auf Riemann-Flächen von höherem Genus benötigt. Die Grundidee bei der Definition der Primform ist die Suche nach einer auf der Riemann-Fläche Σ_g definierten holomorphen Funktion $E:\Sigma_g\times\Sigma_g\to\mathbb{C}$, für die $E(x,y)=0$ genau dann gilt, wenn $x=y$ ist. Obwohl eine solche holomorphe Funktion nicht existiert, stellt sich heraus, daß sie "beinahe" auf der Riemann-Fläche existiert.

Das Objekt, das die gesuchten Eigenschaften fast erfüllt, ist die sogenannte Primform, die für eine Riemann-Fläche Σ_g vom Genus g definiert wird, durch

$$E(x,y) = \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\end{smallmatrix}\right]\left(\int_x^y \vec{\omega}, \Omega\right)}{\sqrt{\zeta(x)}\sqrt{\zeta(y)}}\,, \tag{F.12}$$

mit $\zeta(x) = \sum_{i=1}^{g} \partial_{z_i}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\end{smallmatrix}\right](0,\Omega)\omega_i(x)$. Dabei ist $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}$ eine feste ungerade Spinstruktur[119] und $\vec{\omega}$ ist der Vektor der holomorphen 1-Formen auf der Riemann-Fläche. Damit ist $E(x,y)$ eine holomorphe Differentialform vom Gewicht $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ auf $\tilde{\Sigma}_g \times \tilde{\Sigma}_g$, wobei $\tilde{\Sigma}_g$ die universelle Überlagerung von Σ_g ist. Die in Gleichung (F.12) definierte Primform ist antisymmetrisch, $E(y,x) = -E(x,y)$, und es gilt $E(x,y) = 0$ für $x, y \in \tilde{\Sigma}_g$ genau dann, wenn für die Bilder von x und y in Σ_g, $\bar{x}$ und $\bar{y}$, gilt $\bar{x} = \bar{y}$. $E(x,y)$ hat eine Nullstelle erster Ordnung auf der Überlagerung der Diagonalen von $\Sigma_g \times \Sigma_g$. Für kleine Abstände $x \sim y$ gilt $E(x,y) \sim x - y$. Die Primform ist also die Verallgemeinerung des Ausdrucks $x-y$ in der komplexen Ebene für Riemann-Flächen von höherem Genus. Die Primform ist nicht einwertig auf der Riemann-Fläche. Wenn der Punkt x einmal um einen b_i-Zykel auf den Punkt x' verschoben wird, ändert sich die Primform um einen Vorfaktor,

$$E(x',y) = -e^{-\pi i\,\Omega_{ii} - 2\pi i\int_x^y \omega_i}\, E(x,y)\,. \tag{F.13}$$

Entsprechendes gilt für eine Verschiebung des Punktes y um einen b_i-Zykel, während $E(x,y)$ bis auf ein Vorzeichen invariant ist unter Verschiebung der Variablen x und y um einen a_i-Zykel der Riemann-Fläche.

Die Primform auf dem Torus

Auf dem Torus ist die Primform entsprechend (F.12) definiert durch

$$E(x-y,\tau) = \frac{\vartheta_1(x-y,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau)}\,. \tag{F.14}$$

Sie erfüllt die Periodizitätsbedingungen auf dem Torus

$$E(z+1,\tau) = -E(z,\tau) \tag{F.15a}$$
$$E(z+\tau,\tau) = -q^{-1/2}e^{-2\pi i\, z}E(z,\tau)\,. \tag{F.15b}$$

Mit Hilfe der Produktdarstellung der ungeraden Thetafunktion (F.7) läßt sich nun auch eine Produktdarstellung für die Primform auf dem Torus angeben,

$$E(z,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\, e^{\pi i\, z}\, \frac{\prod_{m=0}^{\infty}\Big(\left(1-q^m e^{-2\pi i\, z}\right)\left(1-q^{m+1}e^{+2\pi i\, z}\right)\Big)}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^m\right)^2}\,. \tag{F.16}$$

Der bosonische Propagator

Mit Hilfe der in Gleichung (F.14) definierten Primform kann man den Propagator der bosonischen Weltflächenfelder auf dem Torus angeben. Der vollständige Propagator

[119] Der Wert der Primform hängt nicht von der expliziten Wahl der ungeraden Spinstruktur ab.

$G(z,w)$ für die holomorphe und die antiholomorphe Hälfte der Stringtheorie erfüllt mit den richtigen Periodizitätsbedingungen auf dem Torus die Bewegungsgleichung

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} G(z,w) = -2\pi\, \delta(z-w) + \frac{2\pi}{\tau_2}\,, \tag{F.17}$$

wobei τ_2 der Imaginärteil des Teichmüllerparameters $\tau = \tau_1 + i\,\tau_2$ des Torus ist. Der Nullmodenanteil $2\pi/\tau_2$ in der Bewegungsgleichung ist notwendig, um die richtigen Randbedingungen auf dem Torus sicherzustellen. Die Lösung dieser Bewegungsgleichung (F.17) hat die Form

$$\begin{aligned} G(z,w) &= -\ln E(z-w) - \ln E(\bar{z}-\bar{w}) + \frac{2\pi}{\tau_2}\big(\mathrm{Im}\ (z-w)\big)^2 \\ &= -\ln \big|E(z-w)\big|^2 + \frac{2\pi}{\tau_2}\big(\mathrm{Im}\ (z-w)\big)^2 . \end{aligned} \tag{F.18}$$

Mit den Periodizitätseigenschaften der Primform auf dem Torus (F.15a) und (F.15b) läßt sich leicht überprüfen, daß der Propagator $G(z-w) \equiv G(z,w)$ auf dem Torus periodisch ist,

$$G(z+1) = G(z) \qquad \text{und} \quad G(z+\tau) = G(z)\,. \tag{F.19}$$

Bei der Berechnung von Streuamplituden in der $N{=}2$ Stringtheorie tauchen häufig Ausdrücke der Form $\partial_z G(z,w)$ in den Korrelationsfunktionen auf. Mit der Definition der Thetafunktionen (F.4) ergibt sich dafür die Reihenentwicklung

$$G(z) = -\pi i\, \frac{1+e^{-2\pi i\, z}}{1-e^{+2\pi i\, z}} + 2\pi i \sum_{m=1}^{\infty} q^m \left(\frac{e^{+2\pi i\, z}}{1-q^m e^{+2\pi i\, z}} - \frac{e^{-2\pi i\, z}}{1-q^m e^{-2\pi i\, z}} \right) . \tag{F.20}$$

Auf Riemann-Flächen von höherem Genus g kann der bosonsiche Propagator $G(z,w)$ entsprechend (F.18) aus den Thetafunktionen bzw. Primformen auf Riemann-Flächen vom Genus g definieren,

$$G(z,w) = -\ln \big|E(z,w)|^2 - 2\pi \sum_{i,j=1}^{g} \mathrm{Im} \int_w^z \omega_i \,\big(\mathrm{Im}\ \Omega\big)^{-1}_{ij}\, \mathrm{Im} \int_w^z \omega_j\,. \tag{F.21}$$

F.3 Der Szegö Kern

Aus den oben definierten Jacobi-Thetafunktionen und Primformen läßt sich nun der Szegö Kern $S\big[{\alpha \atop \beta}\big](z,w)$ konstruieren. Dabei handelt es sich um die Greensfunktion der fermionischen Bewegungsgleichung

$$\partial_{\bar{z}} S\big[{\alpha \atop \beta}\big](z,w) = \pi\, \delta(z-w) \tag{F.22}$$

auf dem Raum orthogonal zu den Nullmoden und mit den auf dem Torus durch die Spinstrukturen (α,β) vorgegebenen Randbedingungen. $S\big[{\alpha \atop \beta}\big](z,w)$ ist ein meromorphes $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$-Differential mit einem einfachen Pol mit Risiduum 1 in $z=w$. Auf Riemann-Flächen vom Genus $g=1$ läßt sich der Szegö Kern für eine holomorphe

Hälfte mit Hilfe der Thetafunktionen und der Primform für die nicht ungerade Spinstruktur[120] darstellen als

$$
\begin{aligned}
S\big[{\alpha \atop \beta}\big](z-w) &= \frac{\vartheta\big[{\alpha \atop \beta}\big](z-w,\tau)}{E(z-w)\,\vartheta\big[{\alpha \atop \beta}\big](0,\tau)} \\
&= e^{-2\pi i\,(\alpha-\frac{1}{2})\,z}\,\frac{\vartheta_1(z-u,\tau)\,\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1(-u,\tau)\,\vartheta_1(z-w,\tau)}\,,
\end{aligned}
\tag{F.23}
$$

mit dem unter Gleichung (F.6) definierten $u = (\frac{1}{2}-\alpha)\,\tau + (\frac{1}{2}-\beta)$. In der ungeraden Spinstruktur $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, d.h. im Ramond-Sektor der Theorie, erhalten die fermionischen Felder Nullmoden, welche die Form des Szegö Kerns modifizieren. Man erhält dann

$$
S\big[{1/2 \atop 1/2}\big](z-w) = \frac{\vartheta_1'(z-w,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau)} = -\partial_z G(z-w)\,. \tag{F.24}
$$

Da der Ramond-Sektor im $N{=}2$ String nur einen Punkt vom Maß Null im Kontinuum der möglichen Spinstrukturen darstellt, zwischen denen zudem noch mit Hilfe des Spektralflusses hin und her gewechselt werden kann, erfordert seine Behandlung hier deutlich weniger Aufmerksamkeit als etwa im Fall des Superstrings.

Wie schon der bosonische Propagator $G(z,w)$ läßt sich auch der Szegö Kern $S\big[{\alpha \atop \beta}\big](z,w)$ mit den entsprechenden Definitionen der Jacobi-Thetafunktionen und der Primform ganz analog zu Gleichung (F.23) für den Fall von Riemann-Flächen mit höherem Genus g verallgemeinern.

Man erkennt in Gleichung (F.24), daß die holomorphen und antiholomorphen Hälften des fermionischen und der Ableitung des bosonischen Propagators jeweils die selbe funktionale Form haben. Dies gilt ebenso für den Nullmodenanteil, $\frac{2\pi}{i\,\tau_2}\,\mathrm{Im}\; z = \partial_z \frac{2\pi}{\tau_2}\,(\mathrm{Im}\; z)^2$. Es wird sich insbesondere bei den 1-Loop-Rechnungen zeigen, daß in allen Korrelationsfunktionen stets nur Differenzen der Form $\partial_z G(z-w) - S\big[{\alpha \atop \beta}\big](z-w)$ auftauchen. Der Ramond-Sektor der Stringtheorie trägt also zu den entsprechenden Korrelationsfunktionen nicht bei.

Sowohl der Szegö Kern als auch die Ableitung des bosonischen Propagators werden singulär für $z \to w$. Die Kombination

$$
\mathcal{F}\big[{\alpha \atop \beta}\big](z,w) = S\big[{\alpha \atop \beta}\big](z,w) - \partial_z G(z,w) \tag{F.25}
$$

bleibt jedoch auch in diesem Grenzwert endlich. Dies liefert einen Hinweis darauf, daß die 1-Loop-Amplituden des $N{=}2$ Strings endlich sind, wie in Kapitel V gezeigt wird.

F.4 DIE WEIERSTRASS-FUNKTION $\wp(z)$

Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ist die einzige doppelt periodische[121] Funktion mit einem einzigen Pol zweiter Ordnung im Ursprung und ohne konstanten Term in ihrer Laurent-Entwicklung. Sie ist definiert durch die Reihe

$$
\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(z-m\,\tau-n)^2} - \frac{1}{(m\,\tau+n)^2} \right)\,, \tag{F.26}
$$

[120] Auf dem Torus bedeutet das $(\alpha,\beta) \neq (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

[121] D.h. $\wp(z)$ ist periodisch unter Translationen entlang beider Homologiezykel des durch den Teichmüller-Parameter τ beschriebenen Torus.

und erfüllt die Differentialgleichung

$$\wp'^2(z) = 4\,\wp^3(z) - g_2\,\wp(z) - g_3\,. \tag{F.27}$$

Dabei sind die sogenannten Invarianten g_2 und g_3 bis auf konstante Vorfaktoren identisch mit den holomorphen Eisenstein-Reihen vom Gewicht 4 bzw. 6,

$$g_2 = 60\,G_4(\tau) \qquad \text{und} \quad g_3 = 140\,G_6(\tau)\,. \tag{F.28}$$

Die holomorphe Eisenstein-Reihe $G_{2k+2}(\tau)$ ist eine modulare Form vom Gewicht $2k{+}2$ [89, Kapitel 4], die für $k \geq 1$ wie folgt definiert wird

$$G_{2k+2}(\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\,\tau + n)^{2k+2}} = 2\,\zeta(2k+2,\tau) + \mathcal{O}(q)\,, \tag{F.29}$$

mit $q = e^{2\pi i\,\tau}$. $\zeta(z,\tau)$ auf der rechten Seite von Gleichung (F.29) ist die Weierstraßsche ζ-Funktion

$$\zeta(z,\tau) = \frac{1}{z} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{z - m\,\tau - n} + \frac{1}{m\,\tau + n} + \frac{z}{(m\,\tau + n)^2} \right)\,. \tag{F.30}$$

$\zeta(z,\tau)$ konvergiert absolut und gleichförmig für jedes z in einer kompakten Umgebung, die keinen Gitterpunkt $m\,\tau + n$, mit $m,n \in \mathbb{Z}$, enthält. Die Zetafunktion ist die Stammfunktion der Weierstraßschen $\wp$-Funktion, $\zeta'(z,\tau) = -\wp(z)$. An den Halbpunkten, in der Mitte zwischen den Gitterpunkten, nimmt $\zeta(z,\tau)$ die Werte

$$\zeta(\tfrac{1}{2},\tau) = \tfrac{1}{2}\,G_2 \equiv \eta_1 \qquad \text{und} \quad \zeta(\tfrac{\tau}{2},\tau) = \tfrac{1}{2}\,G_2\,\tau - \pi i \equiv \eta_2 \tag{F.31}$$

an. Die in Gleichung (F.31) auftauchende Eisenstein-Reihe G_2 konvergiert nicht absolut, wie man in Gleichung (F.29) für $k = 0$ leicht erkennen kann. Mit einer entsprechenden Regularisierung definiert man daher die *beinahe modulare* Form,

$$G_2(\tau) = 4 - \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\,\tau + n)^2\,(2m\,\tau + 2n - 1)} = -4\pi i\,\partial_\tau \ln \eta(\tau)\,. \tag{F.32}$$

$\eta(\tau)$ ist dabei die Dedekindsche η-Funktion,

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^m\right)\,, \tag{F.33}$$

mit $q = e^{2\pi i\,\tau}$. Die Dedekindsche η-Funktion hängt mit der Ableitung der ungeraden Thetafunktion über die Beziehung

$$\vartheta_1'(0,\tau) = -2\pi\,\left(\eta(\tau)\right)^3 \tag{F.34}$$

zusammen.

F.5 Modulare Transformationen

Modulare Transformationen bilden die Weltfläche des Strings auf sich selbst ab. Das Verhalten der Korrelationsfunktionen der auf der Weltfläche definierten Felder unter diesen modularen Transformationen spielt eine wichtige Rolle bei der Frage, ob der Integrand im Pfadintegral bzw. die Streuamplitude modular invariant ist. Daher soll hier die Wirkung der modularen Transformationen auf die oben definierten elliptischen Funktionen untersucht werden.

Die modulare Gruppe des Torus $SL(2,\mathbb{Z})$ wirkt wie folgt auf den Raum der Argumente der Jacobi-Thetafunktion $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$,

$$(z,\tau)\to\big(z/(c\tau+d),(a\tau+b)/(c\tau+d)\big)\,. \tag{F.35}$$

Dabei gilt $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ und $ad-bd=1$. Aufgespannt wird die auf den Teichmüller-Parameter τ wirkende Gruppe $SL(2,\mathbb{Z})$ von den Transformationen $\tau\to\tau+1$ und $\tau\to-1/\tau$. Die Wirkung dieser Transformationen auf die Thetafunktion mit Spinstruktur (α,β) ist gegeben durch

$$\vartheta\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](z,\tau+1) = e^{-\pi i\,\alpha\,(\alpha-1)}\,\vartheta\big[{}^{\;\;\alpha}_{\alpha+\beta-1/2}\big](z,\tau) \tag{F.36a}$$

$$\vartheta\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](z/\tau,-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\,(4\,\alpha\beta+z^2/\tau)}\,\vartheta\big[{}^{\;\beta}_{-\alpha}\big](z,\tau)\,. \tag{F.36b}$$

Es gilt insbesondere für die Thetafunktion mit ungerader Spinstruktur

$$\vartheta_1(z,\tau+1) = e^{\pi i/4}\,\vartheta_1(z,\tau) \tag{F.37a}$$

$$\vartheta_1(z/\tau,-1/\tau) = -\sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\,z^2/\tau}\,\vartheta_1(z,\tau)\,. \tag{F.37b}$$

Die Ableitung der Thetafunktion mit ungerader Spinstruktur an der Stelle $z=0$ verhält sich unter modularen Transformationen wie folgt,

$$\vartheta_1'(0,\tau+1) = e^{\pi i/4}\,\vartheta_1'(0,\tau) \tag{F.38a}$$

$$\vartheta_1'(0,-1/\tau) = (-i\tau)^{3/2}\,\vartheta_1'(0,\tau)\,. \tag{F.38b}$$

Damit ergeben sich die Transformationseigenschaften der Primform

$$E(z,\tau+1) = E(z,\tau) \tag{F.39a}$$

$$E(z/\tau,-1/\tau) = \frac{e^{-\pi i\,z^2/\tau}}{i\tau}\,E(z,\tau) \tag{F.39b}$$

und des Szegö Kernes

$$S\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](z,\tau+1) = S\big[{}^{\;\;\alpha}_{\alpha+\beta-1/2}\big](z,\tau) \tag{F.40a}$$

$$S\big[{}^{\alpha}_{\beta}\big](z/\tau,-1/\tau) = i\tau\,e^{-\pi i\,z^2/\tau}\,S\big[{}^{\;\beta}_{-\alpha}\big](z,\tau)\,. \tag{F.40b}$$

Für die Weierstraßsche $\wp$-Funktion gilt unter modularen Transformationen

$$\wp(z,\tau+1) = \wp(z,\tau) \tag{F.41a}$$

$$\wp(z/\tau,-1/\tau) = \tau^2\,\wp(z,\tau)\,. \tag{F.41b}$$

Das Verhalten der Dedekindschen η-Funktion folgt nach Gleichung (F.34) aus dem der Thetafunktion mit ungerader Spinstruktur,

$$\eta(\tau+1) = e^{\pi i/12}\,\eta(\tau) \tag{F.42a}$$

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau)\,. \tag{F.42b}$$

Von besonderer Bedeutung für die Untersuchung der modularen Invarianz der Stringamplituden ist das Transformationsverhalten des Integrationsmaßes $d^2\tau$ und des Imaginärteils des Teichmüller-Parameters $\tau_2 = \mathrm{Im}\ \tau$. Die allgemeine modulare Transformation der Form (F.35) wirkt wie folgt auf diese Objekte,

$$d^2\tau \quad \to \quad |c\tau + d|^{-4} \tag{F.43a}$$

$$\mathrm{Im}\ \tau \quad \to \quad |c\tau + d|^{-2}\,. \tag{F.43b}$$

Man erkennt, daß das Weil-Petersson-Maß $d^2\tau/\tau_2^2$ modular invariant ist.

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz und I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover (1970).

[2] M. Ademollo, L. Brink, A. D'Adda, R. D'Auria, E. Napolitano, S. Sciuto, E. D. Guidice, P. D. Veccia, S. Ferrara, F. Gliozzi, R. Musto und R. Pettorino. *Dual String Models with Non–Abelian Colour and Flavour Symmetries*. Nucl. Phys. **B114**:297 (1976).

[3] M. Ademollo, L. Brink, A. D'Adda, R. D'Auria, E. Napolitano, S. Sciuto, E. D. Guidice, P. D. Veccia, S. Ferrara, F. Gliozzi, R. Musto und R. Pettorino. *Supersymmetric Strings and Colour Confinement*. Phys. Lett. **62B**:105 (1976).

[4] M. Ademollo, L. Brink, A. D'Adda, R. D'Auria, E. Napolitano, S. Sciuto, E. D. Guidice, P. D. Veccia, S. Ferrara, F. Gliozzi, R. Musto, R. Pettorino und J. H. Schwarz. *Dual String with $U(1)$ Colour Symmetry*. Nucl. Phys. **B111**:77 (1976).

[5] O. Alvarez. *Theory of Strings with Boundaries: Fluctuations, Topology and Quantum Geometry*. Nucl. Phys. **B216**:125 (1983).

[6] L. Alvarez-Gaumé und D. Freedman. *Geometrical Structure and Ultraviolet Finiteness of the Supersymmetric Nonlinear Sigma Model*. Comm. Math. Phys. **80**:443 (1981).

[7] L. Alvarez-Gaumé, G. Moore und C. Vafa. *Theta Functions, Modular Invariance, and Strings*. Commun. Math. Phys. **106**:1 (1986).

[8] J. J. Atick, G. Moore und A. Sen. *Some Global Issues in String Perturbation Theory*. Nucl. Phys. **B308**:1 (1988).

[9] M. Atiyah, N. Hitchin und I. Singer. *Selfduality in Four-Dimensional Riemannian Geometry*. Proc. Roy. Soc. London **A362**:425 (1978).

[10] M. Atiyah und G. Segal. *The Index of Elliptic Operators. 2*. Annals Math. **87**:531 (1968).

[11] M. Atiyah und I. Singer. *The Index of Elliptic Operators. 1*. Annals Math. **87**:484 (1968).

[12] M. Atiyah und I. Singer. *The Index of Elliptic Operators. 3*. Annals Math. **87**:546 (1968).

[13] W. BARDEEN. *Self-Dual Yang-Mills Theory, Integrability and Multiparton Amplitudes*. Prog. Theor. Phys. Suppl. **123**:1 (1996).

[14] C. BECCI, A. ROUET und R. STORA. *The Abelian Kibble Model, Unitarity of the S-Operator*. Phys. Lett. **52B**:344 (1975).

[15] S. BELLUCCI und A. GALAJINSKY. *Restoring Lorentz Invariance in Classical N=2 String* (2001). Hep-th/0104003.

[16] F. BERENDS und W. GIELE. *Recursive Calculations for Processes with N Gluons*. Nucl. Phys. **B306**:759 (1988).

[17] F. BERENDS, W. GIELE und H. KUIJF. *On Relations between Multi-Gluon and Multigraviton Scattering*. Phys. Lett. **211B**:91 (1988).

[18] F. BERENDS, R. KLEISS, P. D. CAUSMAECKER, R. GASTMANS und T. WU. *Single Bremsstrahlung Processes in Gauge Theories*. Phys. Lett. **B103**:124 (1981).

[19] N. BERKOVITS. *Vanishing Theorems for the Selfdual $N = 2$ String*. Phys. Lett. **B350**:28 (1995).

[20] N. BERKOVITS und C. VAFA. *$N = 4$ Topological Strings*. Nucl. Phys. **B433**:123 (1995).

[21] N. BERKOVITS und B. ZWIEBACH. *On the picture Dependence of Ramond-Ramond Cohomology*. Nucl. Phys. **B523**:311 (1998).

[22] Z. BERN. *String-Based Perturbative Methods for Gauge Theories*. TASI Lectures 1992, hep-th/9304249.

[23] Z. BERN. *A Compact Representation for the One-Loop N-Gluon Amplitude*. Phys. Lett. **B296**:85 (1992).

[24] Z. BERN, G. CHALMERS, L. DIXON und D. KOSOWER. *One-Loop N Gluon Amplitudes with Maximal Helicity Violation via Collinear Limits*. Phys. Rev. Lett. **72**:2134 (1994).

[25] Z. BERN, L. DIXON, D. DUNBAR und D. KOSOWER. *One Loop Selfdual and N=4 Super Yang-Mills*. Phys. Lett. **B394**:105 (1997).

[26] Z. BERN, L. DIXON und D. KOSOWER. *Dimensionally Regulated One-Loop Integrals*. Phys. Lett. **B302**:299 (1993).

[27] Z. BERN, L. DIXON und D. KOSOWER. *Progress in One-Loop QCD Computations*. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **46**:109 (1996).

[28] Z. BERN, L. DIXON, M. PERELSTEIN und J. ROZOWSKY. *One-Loop n-Point Helicity Amplitudes in (Self-Dual) Gravity*. Phys. Lett. **B444**:273 (1998).

[29] Z. BERN, D. DUNBAR und T. SHIMADA. *String Based Methods in Perturbative Gravity*. Phys. Lett. **B312**:277 (1993).

[30] Z. BERN und D. KOSOWER. *A new Approach to One Loop Calculations in Gauge Theories*. Phys. Rev. **D38**:1888 (1988).

[31] Z. BERN und D. KOSOWER. *Color Decomposition of One Loop Amplitudes in Gauge Theories*. Nucl. Phys. **B362**:389 (1991).

[32] Z. BERN und D. KOSOWER. *The Computation of Loop Aamplitudes in Gauge Theories*. Nucl. Phys. **B379**:451 (1992).

[33] M. BIANCHI und A. SAGNOTTI. *The Partition Function of the $SO(8192)$ Bosonic String*. Phys. Lett. **B211**:407 (1988).

[34] J. BIEŃKOWSKA. *The Generalized no–ghost Theorem for $N = 2$ SUSY Critical Strings*. Phys. Lett. **B281**:59 (1992).

[35] A. BILAL. *BRST Approach to the N=2 Superkonformal Algebra*. Phys. Lett. **B180**:255 (1986).

[36] J. BISCHOFF. *Moduli und Amplituden des $N = 2$ Strings*. Dissertation, Universität Hannover (1996).

[37] J. BISCHOFF, S. V. KETOV und O. LECHTENFELD. *The GSO Projection, BRST Cohomology and Picture–Changing in $N = 2$ String Theory*. Nucl. Phys. **B438**:373 (1995).

[38] J. BISCHOFF und O. LECHTENFELD. *Path–Integral Quantization of the (2,2) String*. J. Mod. Phys. **A 12**:4933 (1997).

[39] J. BISCHOFF und O. LECHTENFELD. *Restoring Reality for the Self–Dual $N = 2$ String*. Phys. Lett. **B390**:153 (1997).

[40] A. BOGOJEVIC und Z. HLOUSEK. *The BRST Quantization of the $O(2)$ string*. Phys. Lett. **B179**:69 (1986).

[41] A. BONINI, E. GAVA und R. IENGO. *Amplitudes in the $N = 2$ String*. Mod. Phys. Lett. **A6**:795 (1991).

[42] L. BRINK und H. NIELSEN. *A Simple Physical Interpretation of the Critical Dimension of Space-Time Dual Models*. Phys. Lett. **45B**:332 (1973).

[43] L. BRINK und J. H. SCHWARZ. *Local Complex Supersymmetry in Two Dimensions*. Nucl. Phys. **B121**:285 (1977).

[44] C. BURGESS und T. MORRIS. *Open and Unoriented Strings à la Polyakov*. Nucl. Phys. **B291**:256 (1987).

[45] C. BURGESS und T. MORRIS. *Open Superstrings à la Polyakov*. Nucl. Phys. **B291**:285 (1987).

[46] P. D. CAUSMAECKER, R. GASTMANS, W. TROOST und T. WU. *Multiple Bremsstrahlung in Gauge Theories at High-Energies. 1. General Formalism for Quantum Electrodynamics*. Nucl. Phys. **B206**:53 (1982).

[47] G. CHALMERS. *Momentum Analyticity and Finiteness of Compactified String Amplitudes. Part 1. Tori*. Nucl. Phys. **B524**:295 (1998).

[48] G. CHALMERS, O. LECHTENFELD und B. NIEMEYER. *N=2 Quantum String Scattering*. Nucl. Phys. **B591**:39 (2000).

[49] G. CHALMERS und W. SIEGEL. *The Self-Dual Sector of QCD Amplitudes*. Phys. Rev. **D54**:7628 (1996).

[50] G. CHALMERS und W. SIEGEL. *Simplifying Algebra in Feynman Graphs, Part I: Spinors*. Phys. Rev. **D59**:045012 (1999).

[51] G. CHALMERS und W. SIEGEL. *Global Conformal Anomaly in N=2 String* (2000). Hep-th/0010238.

[52] S. CHRISTENSEN, S. DESER, M. DUFF und M. GRISARU. *Chirality, Self-Duality, and Supergravity Counterterms*. Phys. Lett. **84B**:411 (1979).

[53] J. COHN. *N=2 Super-Riemann Surfaces*. Nucl. Phys. **B284**:349 (1986).

[54] S. COLEMAN. *The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model*. Phys. Rev. **D11**:2088 (1975).

[55] A. D'ADDA und F. LIZZI. *Space Dimensions from Supersymmetry for the $N = 2$ Spinning String: A Four–Dimensional Model*. Phys. Lett. **191B**:85 (1987).

[56] C. DEVCHAND und O. LECHTENFELD. *Extended Self-Dual Yang-Mills from the N=2 String*. Nucl. Phys. **B516**:255 (1998).

[57] C. DEVCHAND und O. LECHTENFELD. *String Induced Yang-Mills Coupling to Selfdual Gravity*. Nucl. Phys. **B539**:309 (1999).

[58] E. D'HOKER und D. PHONG. *Loop Amplitudes for the Fermionic String*. Nucl. Phys. **B278**:225 (1986).

[59] E. D'HOKER und D. PHONG. *Multiloop Amplitudes for tho Bosonic Polyakov String*. Nucl. Phys. **B269**:205 (1986).

[60] E. D'HOKER und D. PHONG. *On Determinants of Laplacians on Riemann Surfaces*. Comm. Math. Phys. **105**:537 (1986).

[61] E. D'HOKER und D. PHONG. *Dispersion Relations in Superstring Theory*. Theor. Math. Phys. **98**:306 (1994).

[62] E. D'HOKER und D. PHONG. *The Box Graph in Superstring Theory*. Nucl. Phys. **B440**:24 (1995).

[63] E. D'HOKER und D. H. PHONG. *The Geometry of String Perturbation Theory*. Rev. Mod. Phys. **60**:917 (1988).

[64] B. DUBROVIN, A. FOMENKO und S. NOVIKOV. *Modern Geometry – Methods and Applications*, Bd. III. Springer Verlag (1990).

[65] M. DUFF und C. ISHAM. *Self-Duality, Helicity and Coherent States in Non-Abelian Gauge Theories*. Nucl. Phys. **B162**:271 (1980).

[66] D. DUNBAR und P. NORRIDGE. *Calculation of Graviton Scattering Amplitudes Using String Based Methods*. Nucl. Phys. **B433**:181 (1995).

[67] L. D. FADDEEV und V. N. POPOV. *Feynman Diagrams for the Yang–Mills Field*. Phys. Lett. **25B**:29 (1967).

[68] H. M. FARKAS und I. KRA. *Riemann Surfaces*. Springer (1991).

[69] J. D. FAY. *Theta Functions on Riemann Surfaces*. Springer (1973).

[70] E. S. FRADKIN und A. A. TSEYTLIN. *Quantization of Two–Dimensional Supergravity and Critical Dimensions for String Models*. Phys. Lett. **106B**:63 (1981).

[71] D. FRIEDAN, E. MARTINEC und S. SHENKER. *Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory*. Nucl. Phys. **B271**:93 (1986).

[72] P. GINSPARG. *Applied Conformal Field Theory*. In: *Les Houches 1988, Session XLIX, Fields, Strings and Critical Phenomena* (Hg. E. BRÉZIN, J. ZINN–JUSTIN), S. 1–168. North Holland (1988).

[73] A. GIVEON und M. ROCEK. *On the BRST Operator Structure of the N=2 Sting*. Nucl. Phys. **B400**:145 (1993).

[74] M. GREEN und J. SCHWARZ. *Anomaly Cancellations in Supersymmetric $D = 10$ Gauge Theory and Superstring Theory*. Phys. Lett. **149B**:117 (1984).

[75] M. B. GREEN, J. H. SCHWARZ und E. WITTEN. *Superstring Theory, Volume 1*. Cambridge University Press (1987).

[76] P. GRIFFITHS und J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley (1978).

[77] M. GRISARU und H. PENDLETON. *Some Properties of Scattering Amplitudes in Supersymmetric Theories*. Nucl. Phys. **B124**:81 (1977).

[78] M. GRISARU, H. PENDLETON und P. VAN NIEUWENHUIZEN. *Supergravity and the S Matrix*. Phys. Rev. **D15**:997 (1977).

[79] J. GUNION und Z. KUNSZT. *Improved Analytic Techniques for Tree Graph Calculations and the G G Q Anti-Q Lepton Anti-Lepton Subprocess*. Phys. Lett. **B161**:333 (1985).

[80] R. HIPPMANN. *Tree–Amplituden des $N = 2$ String*. Diplomarbeit, Universität Hannover (1999).

[81] C. M. HULL und P. K. TOWNSEND. *Finiteness and Conformal Invariance in Non–Linear Sigma Models*. Nucl. Phys. **B274**:349 (1986).

[82] K. JÜNEMANN. *Symmetrien des N=2 Strings*. Dissertation, Universität Hannover (1999).

[83] K. JÜNEMANN und O. LECHTENFELD. *Chiral BRST Cohomology of $N = 2$ Strings at Arbitrary Ghost and Picture Number*. Commun. Math. Phys. **203**:53 (1999).

[84] K. JÜNEMANN und O. LECHTENFELD. *Ward Identities and the Vanishing Theorem for Loop Amplitudes of the Closed N=2 String*. Phys. Lett. **B474**:58 (2000).

[85] H. KAWAI, D. C. LEWELLEN und S. H. H. TYE. *A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings*. Nucl. Phys. **B269**:1 (1986).

[86] K. KIKKAWA, B. SAKITA und M. VIRASORO. *Feynman-Like Diagrams Compatible with Duality. I: Planar Diagrams*. Phys. Rev. **184**:1701 (1969).

[87] R. KLEISS und W. STRILING. *Spinor Techniques for Calculating P Anti-P $\longrightarrow W^{+-} / Z_0$ + Jets*. Nucl. Phys. **B262**:235 (1985).

[88] D. KOSOWER. *Light Cone Recurrence Relations for QCD Amplitudes*. Nucl. Phys. **B335**:23 (1990).

[89] S. LANG. *Elliptic Functions*. 2. Aufl. Springer Verlag (1987).

[90] O. LECHTENFELD. *Mathematics and Physics of the N=2 String* (1999). BLTP Workshop on Supersymmetry and Quantum Symmetries, Dubna; hep-th/9912281.

[91] W. LERCHE, C. VAFA und N. WARNER. *Chiral Rings in $N = 2$ Superconformal Theories*. Nucl. Phys. **B324**:427 (1989).

[92] O. LETHO. *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*. Springer Verlag (1987).

[93] A. LEZNOV. *On Equivalence of Four-Dimensional Selfduality Equations to Continual Analog of the Main Chiral Field Problem*. Theor. Math. Phys. **73**:1233 (1988).

[94] A. LEZNOV und M. MUKHTAROV. *Deformation of Algebras and Solution of Selfduality Equation*. J. Math. Phys. **28**:2574 (1987).

[95] H. LU und C. N. POPE. *BRST Quantization of the N=2 String*. Nucl. Phys. **B447**:297 (1995).

[96] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER und R. SONI. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer Verlag (1966).

[97] G. MAHLON. *Multi-Gluon Helicity Amplitudes Involving a Quark Loop*. Phys. rev. **D49**:4438 (1994).

[98] S. MANDELSTAM. *Interacting String Picture of Dual Resonance Models*. Nucl. Phys. **B64**:205 (1973).

[99] S. MANDELSTAM. *Dual-Resonance Models*. Phys. Rep. **13**:259 (1974).

[100] S. MANDELSTAM. *Soliton Operators for the Quantized Sine-Gordon Equation*. Phys. Rev. **D11**:3026 (1975).

[101] M. MANGANO und S. PARKE. *Multiparton Amplitudes in Gauge Theories*. Phys. Rep. **200**:1 (1991).

[102] N. MARCUS. *The $N = 2$ Open String*. Nucl. Phys. **B387**:263 (1992).

[103] N. MARCUS. *A Tour through $N = 2$ Strings*. In: *Rome String Theory Workshop*, S. 391–413 (1992).

[104] N. MARCUS und A. SAGNOTTI. *Tree-Level Constraints on Gauge Groups for Type I Superstrings*. Phys. Lett. **119B**:97 (1982).

[105] S. D. MATHUR und S. MUKHI. *Becchi–Rouet–Stora–Tyutin Quantization of Twisted Extended Fermionic Strings*. Phys. Rev. **D36**:465 (1987).

[106] S. D. MATHUR und S. MUKHI. *The $N = 2$ Fermionic String: Path Integral, Spin Structures and Supermoduli on the Torus*. Nucl. Phys. **B302**:130 (1988).

[107] G. MOORE, P. NELSON und J. POLCHINSKI. *Strings and Supermoduli*. Phys. Lett. **B169**:47 (1986).

[108] D. MUMFORD. *Tata Lectures on Theta 1*. Birkhäuser (1983).

[109] D. MUMFORD. *Tata Lectures on Theta 2*. Birkhäuser (1984).

[110] M. NAKAHARA. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (1990).

[111] K. NARAIN. *New Heterotic String Theories in Uncompactified Dimensions $D < 10$*. Phys. Lett. **B169**:41 (1986).

[112] A. NEVEU und J. H. SCHWARZ. *Factorizable Dual Model of Pions*. Nucl. Phys. **B31**:86 (1971).

[113] H. OOGURI und C. VAFA. *Self–Duality and $N = 2$ String Magic*. Mod. Phys. Lett. **A5**:1389 (1990).

[114] H. OOGURI und C. VAFA. *Geometry of $N = 2$ Strings*. Nucl. Phys. **B361**:469 (1991).

[115] H. OOGURI und C. VAFA. *N=2 Heterotic Strings*. Nucl. Phys. **B367**:83 (1991).

[116] H. OOGURI und C. VAFA. *All Loop $N = 2$ String Amplitudes*. Nucl. Phys. **B451**:121 (1995).

[117] S. PARKE und T. TAYLOR. *An Amplitude for N Gluon Scattering*. Phys. Rev. Lett. **56**:2459 (1986).

[118] J. PATON und H.-M. CHAN. *Generalized Veneziano Model with Isospin*. Nucl. Phys. **B10**:516 (1969).

[119] J. F. PLEBANSKI. *Some Solutions of Complex Einstein Equations*. J. Math. Phys. **16**:2395 (1975).

[120] J. POLCHINSKI. *Evaluation of the One Loop String Path Integral*. Comm. Math. Phys. **104**:37 (1986).

[121] J. POLCHINSKI. *Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges*. Phys. Rev. Lett. **75**:4724 (1995).

[122] J. POLCHINSKI. *String Theory*, Bd. 2. Cambridge University Press (1998).

[123] J. POLCHINSKI. *String Theory*, Bd. 1. Cambridge University Press (1998).

[124] A. M. POLYAKOV. *Quantum Geometry of Bosonic Strings*. Phys. Lett. **103B**:207 (1981).

[125] A. M. POLYAKOV. *Quantum Geometry of Fermionic Strings*. Phys. Lett. **103B**:211 (1981).

[126] P. RAMOND. *Dual Theory for Free Fermions*. Phys. Rev. **D3**:2415 (1971).

[127] B. RIEMANN. *Theorie der abelschen Funktionen*. In: *Gesammelte mathematische Werke*, S. 88–142. Dover, New York (1953).

[128] J. RODRIGUES. *Open Strings from Closed Strings: Period Matrix, Measure and Ghost Determinant*. Phys. Lett. **B202**:227 (1988).

[129] J. RODRIGUES und A. V. TONDER. *Spin Structures for Riemann Surfaces with Boundaries and Cross-Caps*. Phys. Lett. **B217**:85 (1989).

[130] A. ROSLY und K. SELIVANOV. *On Amplitudes in the Selfdual Sector of Yang-Mills Theory*. Phys. Lett. **B399**:135 (1997).

[131] A. SAGNOTTI. *Closed Strings and their Open-String Descendants*. Phys. Rep. **184**:167 (1989).

[132] S. SAMUEL. *Solving the Open Bosonic String in Perturbation Theory*. Nucl. Phys. **B341**:513 (1989).

[133] A. N. SCHELLEKENS. *Introduction to Conformal Field Theory*. Fortschr. Phys. **44**:605 (1996).

[134] J. SCHERK und J. SCHWARZ. *Dual Models and the Geometry of Space-Time*. Phys. Lett. **52B**:347 (1974).

[135] M. SCHLICHENMAIER. *An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*. Springer Verlag (1989).

[136] M. SCHMIDT und C. SCHUBERT. *On the Calculation of Effective Actions by String Methods*. Phys. Lett. **B318**:438 (1993).

[137] M. SCHMIDT und C. SCHUBERT. *Wordline Green Functions for Multiloop Diagrams*. Phys. Lett. **B331**:69 (1994).

[138] J. H. SCHWARZ. *Faddeev–Popov Ghosts and BRS Symmetry in String Theory*. Prog. Theo. Phys. **86**:70 (1985).

[139] A. SCHWIMMER und N. SEIBERG. *Comments on the $N = 2, 3, 4$ Superconformal Algebras in Two Dimensions*. Phys. Lett. **184B**:191 (1987).

[140] K. SELIVANOV. *Multi-Gluon Tree Amplitudes and Selfduality Equation* (1996). Hep-th/9604206.

[141] A. SEN. *Tachyon Condensation in String Field Theory*. JHEP **0003**:002 (2000).

[142] J. A. SHAPIRO. *Electrostatic Analogue for the Virasoro Model*. Phys. Lett. **33B**:361 (1969).

[143] B. SPENDIG. *Gemischte Amplituden des $N = 2$ Strings*. Diplomarbeit, Universität Hannover (1998).

[144] B. SPENDIG. *Der N=2 String in nichttrivialen Hintergünden*. Dissertation, Universität Hannover (2001).

[145] M. STRASSLER. *Field Theory Without Feynman Diagrams: One Loop Effective Actions*. Nucl. Phys. **B385**:145 (1992).

[146] C. THORN. *String Field Theory*. Phys. Rep. **175**:1 (1989).

[147] I. V. TYUTIN. *Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism* (1975). Lebedev Institute preprint.

[148] G. VENEZIANO. *Construction of a Crossing-Symmetric, Regge-Behaved Amplitude for Linearly Rising Trajectories*. Nouvo Cim. **57A**:190 (1968).

[149] E. VERLINDE und H. VERLINDE. *Chiral Bosonization, Determinants and the String Partition Function*. Nucl. Phys. **B288**:357 (1987).

[150] E. VERLINDE und H. VERLINDE. *Multiloop Calculations in Covariant Superstring Theory*. Phys. Lett. **B192**:95 (1987).

[151] H. VERLINDE. *The Path–Integral Formulation of Supersymmetric String Theory*. Dissertation, University of Amsterdam (1988).

[152] M. A. VIRASORO. *Alternative Constructions of Crossing–Symmetric Amplitudes with Regge Behavior*. Phys. Rev. **177**:2309 (1969).

[153] S. WEINBERG. *Coupling Constants and Vertex Functions in String Theories*. Phys. Lett. **156B**:309 (1985).

[154] E. WHITTAKER und G. WATSON. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press (1902).

[155] E. WITTEN. *Noncommutative Geometry and String Field Theory*. Nucl. Phys. **B268**:253 (1986).

[156] Z. XU, D.-H. ZHANG und L. CHANG. *Helicity Amplitudes for Multiple Bremsstrahlung in Massless Nonabelian Gauge Theories*. Nucl. Phys. **B291**:392 (1987).

[157] C. YANG. *Condition of Selfduality for $SU(2)$ Gauge Fields on Euclidean Four-Dimensional Space*. Phys. Rev. Lett. **38**:1377 (1977).

[158] B. ZWIEBACH. *Closed String Field Theory: Quantum Action and the B-V Master Equation*. Nucl. Phys. **B390**:33 (1993).

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei Prof. Dr. O. Lechtenfeld für die Betreuung meiner Arbeit, die vielfältige Unterstützung, die zahlreichen interessanten Diskussionen und die angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken.
Weiterhin bedanke ich mich bei G. Chalmers für die interessante und erfolgreiche Zusammenarbeit während seiner beiden Aufenthalte in Hannover.
Außerdem danke ich meinen Mitstreitern H. Dennhardt, K. Jünemann, M. Krohn, O. Maznytsya, J. Nielsen, B. Spendig, U. Theis und S. Uhlmann für die vielen Diskussionen, Kommentare und Anregungen, und nicht zuletzt für die nette Atmosphäre am Institut für Theoretische Physik.