Gemischte Amplituden des N=2 Strings

Bernd Spendig

Diplomarbeit am
Institut für Theoretische Physik
der Universität Hannover

Juni 1998

Für Tänzer

Glattes Eis
Ein Paradies
Für den, der gut zu tanzen weiß.

F.Nietzsche

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist die explizite Berechnung gemischter Drei- und Vier-Punkt-Amplituden des N=2 Strings auf Treeniveau. Im Gegensatz zu den reinen Streuamplituden des offenen bzw. geschlossenen Strings existieren für den gemischten Fall nur wenige konkrete Berechnungen [1, 2]. Bekannt sind die Amplituden A_{ooc} und A_{occ} (der Index o steht für open=offen, der Index c für closed=geschlossen), also die Drei-Punkt-Amplitude von zwei offenen und einem geschlossenen bzw. von einem offenen und zwei geschlossenen Strings. Im Fall der Vier-Punkt-Amplitude wird in [1, 2] gezeigt, daß die Amplitude A_{oooc} verschwindet. Für A_{occc} führen Symmetrieüberlegungen zu dem gleichen Schluß. Dualitätsüberlegungen wie im Fall des offenen bzw. geschlossenen Strings führen zu der Annahme, daß alle gemischten n-Punkt-Amplituden für $n \geq 4$ verschwinden, also insbesondere auch A_{oocc}. In dieser Arbeit wird die explizite Berechnung der drei verschiedenen 4-Punkt-Amplituden versucht, allerdings weicht die Methodik von dem in [1, 2] verwendeten Konzept ab, d.h. konkret, daß hier der Beschreibung der Stringzustände die Vertexoperatoren aus [3] zugrunde liegen.

Die Diplomarbeit gliedert sich wie folgt:

Die zum Verständnis der Rechnung notwendigen Grundlagen werden in den ersten drei Kapiteln dargelegt. Kapitel 2 beschäftigt sich in aller Kürze mit den elementaren in den späteren Rechnungen verwendeten Begriffen und Definitionen aus der Konformen Feldtheorie (im weiteren mit CFT=Conformal Field Theory abgekürzt). Kapitel 3 führt in die Grundlagen des N=2 Strings ein (Wirkung, Symmetrien, Quantisierung, BRST-Ladung). Kapitel 4 erläutert, wie mittels sogenannter Vertexoperatoren Streuamplituden des N=2 Strings berechnet werden können. Als Beispiel hierzu dient die Berechnung der Vier-Punkt-Amplitude A_{cccc} des geschlossenen Strings.

Die beiden nächsten Kapitel widmen sich dem eigentlichen Thema dieser Diplomarbeit - den gemischten Streuamplituden. Zur Verdeutlichung der elementaren Rechenprinzipien werden in Kapitel 5 zunächst die beiden Drei-Punkt-Amplituden A_{ooc} und A_{occ} berechnet, sowie die Amplitude dreier *geschlossener* Strings auf der Scheibe (in der Folge mit $\langle ccc \rangle_D$ bezeichnet). Kapitel 6 gilt schließlich der expliziten Berechnung der Vier-Punkt-Amplituden A_{oooc},A_{oocc} und A_{occc} sowie der Amplitude vier geschlossener Strings auf der Scheibe $\langle cccc \rangle_D$.

Im abschließenden Kapitel 7 werden die Ergebnisse dieser Arbeit diskutiert und im Rahmen einer effektiven Wirkung interpretiert.

2 Konforme Feldtheorie

Die Weltfläche, die der String bei der Bewegung durch die Raumzeit überstreicht, ist zweidimensional. Diese Bewegung kann durch zweidimensionale, masselose Felder auf dem Parameterraum der Weltfläche dargestellt werden. Die Forderung der konformen Invarianz an diese Theorie führt zu beträchtlichenVereinfachungen in den Berechnungen der String-Amplituden. Die grundlegende Idee der CFT ist, lediglich durch Ausnutzen der konformen Invarianz Korrelationsfunktionen zwischen den Feldern zu berechnen. Am Anfang dieser Arbeit steht deshalb zunächst eine kurze Übersicht über die grundlegenden Ideen und Gleichungen der CFT, die im folgenden bei der konkreten Berechnung der Streuamplituden verwendet werden. Eine tiefergehende Darstellung findet sich in diversen Publikationen, diese kurze Einführung basiert auf [4, 5, 6].

2.1 Die konforme Gruppe

Unter zweidimensionaler konformer Invarianz versteht man die Invarianz unter den konformen Abbildungen in D=2 (euklidische Dimensionen). Die *Gruppe* der konformen Transformationen ist dabei die Untergruppe der Koordinatentransformationen $x \to x'$, welche die Metrik bis auf einen Skalenfaktor invariant lassen:

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g'_{\mu\nu} = \Omega(x) g_{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

In zwei Dimensionen sind diese konformen Transformationen gerade die analytischen Koordinatentransformationen $z \to f(z)$, $\overline{z} \to f(\overline{z})$ ($z, \overline{z}$ komplexe Koordinaten). Eine Theorie, die konforme Invarianz besitzt, wird deshalb durch Felder beschrieben, die analytische Funktionen der komplexen Koordinaten z und $\overline{z}$ sind. Unter der konformen Transformation $z \to f(z)$ bzw. $\overline{z} \to f(\overline{z})$ transformiert sich ein *Primärfeld* $\Phi(z, \overline{z})$ mit *konformen Gewicht* $(h, \overline{h})$ gemäß

$$\Phi'(z', \overline{z}') = \left(\frac{dz}{dz'}\right)^h \left(\frac{d\overline{z}}{d\overline{z}'}\right)^{\overline{h}} \Phi(z, \overline{z}). \tag{2.2}$$

Primäre holomorphe (also nur von z abhängende) Felder können in eine Laurent-Reihe der Form

$$\Phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi_n z^{-n-h} \tag{2.3}$$

entwickelt werden (entsprechend für antiholomorphe primäre Felder).

Infinitesimal haben die konformen Transformationen die Form

$$
\begin{aligned}
&z \longrightarrow z' = z + \varepsilon(z) && \overline{z} \longrightarrow \overline{z}' = \overline{z} + \overline{\varepsilon}(\overline{z}) \\
&\text{wobei zu} && \\
&\varepsilon(z) = -z^{n+1}, && \overline{\varepsilon}(\overline{z}) = -\overline{z}^{m+1}
\end{aligned}
$$

die infinitesimalen Generatoren

$$L_n = -z^{n+1}\partial_z \quad \text{und} \quad \overline{L}_n = -\overline{z}^{n+1}\partial_{\overline{z}} \tag{2.4}$$

gehören. Die Generatoren erfüllen die konforme Algebra

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \tag{2.5}$$
$$[\overline{L}_m, \overline{L}_n] = (m-n)\overline{L}_{m+n} \tag{2.6}$$
$$[L_m, \overline{L}_n] = 0. \tag{2.7}$$

Die Algebra ist offensichtlich die direkte Summe zweier isomorpher Unteralgebren (2.5) und (2.6). Aus diesem Grund werden bei Berechnungen von *reinen* Amplituden z und $\overline{z}$ als unabhängige Variable aufgefaßt (die Aussage kann in dieser strengen Form für den Fall gemischter Amplituden nicht mehr aufrecht erhalten werden).

Nur die Generatoren $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ und $\{\overline{L}_{-1}, \overline{L}_0, \overline{L}_1\}$ führen auf global (d.h. auf der Riemannkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) wohldefinierte Transformationen und erzeugen die sogenannte globale konforme Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$.

Die Generatoren der infinitesimalen konformen Transformationen können durch den Energie-Impuls-Tensor T(z) ausgedrückt werden:

$$L_n = \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z). \tag{2.8}$$

$\mathcal{C}_0$ ist dabei eine geschlossene Kurve um den Ursprung. Die Umkehrung ergibt sofort

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}. \tag{2.9}$$

Äquivalente Gleichungen ergeben sich für $\overline{L}_n$ und $\overline{T}(\overline{z})$.

Zur konformen Transformation $z \longrightarrow z' = z + \varepsilon(z)$ gehört die erhaltene Ladung

$$T_\varepsilon = \oint \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) T(z), \tag{2.10}$$

welche als Generator der Feldtransformationen fungiert:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \Phi(w) &= [T_\varepsilon, \Phi](w) & (2.11) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint [dz T(z)\varepsilon(z), \Phi(w)]. & (2.12) \end{aligned}$$

In klassischen Feldtheorien steht auf der rechten Seite der Gleichung (2.11) die Poisson-Klammer. Dieser entspricht in quantisierten konformen Feldtheorien der Kommutator. In diesen ist aber die Gleichung (2.12) nicht wohldefiniert, da generell das Operatorprodukt $A(z)B(w)$ im $\mathbb{C}^2$ nur für $|z|>|w|$ definiert ist. Es muß also eine bestimmte Operatorordnung spezifiziert werden. Analog der Zeitordnung in der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie definiert man in der konformen Feldtheorie die sogenannte Radialordnung:

$$\mathcal{R}(A(z)B(w)) = \begin{cases} +A(z)B(w), \text{für } |z| > |w| \\ \pm B(w)A(z), \text{für } |w| > |z|. \end{cases} \tag{2.13}$$

Das Vorzeichen in der unteren Gleichung ist Minus genau dann, wenn beide Operatoren fermionisch sind.

Damit wird (2.12)

$$[T_\varepsilon, \Phi(w)] = \lim_{z \to w} \Big\{ \oint\limits_{|z|>|w|} \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) \mathcal{R}(T(z)\Phi(w)) - \oint\limits_{|z|<|w|} \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) \mathcal{R}(T(z)\Phi(w)) \Big\}. \tag{2.14}$$

Dieser Ausdruck ist nur dann von Null verschieden, wenn im Operatorprodukt

$$\lim_{z \to w} T(z)\Phi(w)$$

singuläre Beiträge auftauchen. Diese werden durch die sogenannte *Operator-Produkt-Entwicklung* (im weiteren mit OPE abgekürzt) beschrieben (die übliche Notation für die OPE zweier Felder A und B ist: $A(z)B(w) \sim$ singuläre Terme). Beispielsweise hat ein holomorphes primäres Feld Φ vom konformen Gewicht h die OPE

$$\Phi(z)\Phi(w) \sim \frac{\alpha}{(z-w)^{2h}} + \text{weniger singuläre Terme.} \tag{2.15}$$

2.2 Das freie Boson

Das Standardbeispiel der CFT in D=2 ist das freie masselose bosonische Feld X auf der komplexen Ebene. Die zugehörige Wirkung ist

$$S = \frac{1}{4\pi} \int (\partial X \bar{\partial} X). \tag{2.16}$$

Das Integrationsmaß ist definiert durch $\int := 2i \int dz \wedge d\overline{z}$, es ist $\partial := \partial_z, \bar{\partial} := \partial_{\overline{z}}$.

Die Bewegungsgleichung $\partial_z \partial_{\overline{z}} X = 0$ führt dazu, daß das freie Feld $X(z, \overline{z})$ in die Summe zweier unabhängiger Terme - eines holomorphen („Linksläufer") und eines antiholomorphen („Rechtsläufer") - zerfällt:

$$X(z, \overline{z}) = X_L(z) + X_R(\overline{z}). \tag{2.17}$$

Aus diesem Grund reicht es, sich zunächst auf den holomorphen Anteil $X_L(z)$ zu beschränken (in der Folge nur noch mit X(z) bezeichnet). Bei den gemischten Amplituden kommt allerdings gerade der Beziehung zwischen der holomorphen und der antiholomorphen Komponente wieder große Bedeutung zu.

Im folgenden wird die in der Stringtheorie übliche Parametrisierung der komplexen Ebene $z = e^{\tau + i\sigma}$ gewählt ($\tau \in [-\infty, \infty], 0 \leq \sigma \leq 2\pi$ sind die sogenannten Stringkoordinaten). Wie man sich leicht überzeugen kann, parametrisieren τ und σ in obiger Form einen Zylinder und repräsentieren folglich den geschlossenen String. Eine Parametrisierung durch $\tau \in [-\infty, \infty], 0 \leq \sigma \leq \pi$ wird für den offenen String verwendet, dieser wird durch die Abbildung $z = e^{\tau + i\sigma}$ auf die obere komplexe Halbebene abgebildet. Der geschlossene String „lebt“ entsprechend in der gesamten komplexen Ebene (vgl. Kapitel 3).

Fordert man, daß bei der Variation der Wirkung die Randterme verschwinden, so muß der geschlossene String in bezug auf die räumliche Koordinate σ des bosonischen Felds 2π-periodisch sein: $X(\tau, \sigma + 2\pi) = +X(\tau, \sigma)$. Im Fall des offenen Strings ergibt sich $\partial_\sigma X(\tau, \sigma = 0) = \partial_\sigma X(\tau, \sigma = \pi) = 0$ oder anders ausgedrückt: Aus den Stringenden fließt kein Impuls.

In der obigen Parametrisierung hat das Boson X dann die folgende Modenzerlegung [6]:

$$X(z) = \frac{q}{2} - i(p \ln(z)) + i \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n} \alpha_n z^{-n}. \tag{2.18}$$

Durch Differenzieren erhält man

$$\partial X = -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_0 := p. \tag{2.19}$$

Die Theorie des freien Bosons wird quantisiert, indem man die folgenden Vertauschungsrelationen für die α_n fordert:

$$\begin{aligned}[][\alpha_n, \alpha_m] &= n\delta_{n+m,0} \\ [q,p] &= i\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Die α_n wirken für n ≥ 0 als Vernichter und für $n < 0$ als Erzeuger auf das Vakuum der Theorie.

Die OPE zweier bosonischer Felder $X(z)$ und $X(w)$ ist (zur Herleitung dieser OPE siehe zum Beispiel [6])

$$X(z)X(w) \sim -\ln(z-w). \tag{2.21}$$

Damit wird der Korrelator $\langle X(z)X(w)\rangle = -\ln(z-w)$.

Für die OPE zweier primärer Felder $\partial X(z)$ und $\partial X(w)$ ergibt sich sofort durch Differenzieren von (2.21)

$$\partial_z X(z)\partial_w X(w) \sim -\frac{1}{(z-w)^2}. \tag{2.22}$$

Eine andere Möglichkeit, sich dieses Resultat zu verschaffen, besteht darin, die beiden ∂X radial zu ordnen und die Kommutatorrelationen (2.20) auszunutzen:

$$R(\partial_z X(z)\partial_w X(w)) =: \partial_z X(z)\partial_w X(w) : + \big[-i\sum_{n\geq 0}\alpha_n z^{-n-1}, -i\sum_{k<0}\alpha_k w^{-k-1}\big].$$

Von Bedeutung für die OPE ist nur der Kommutator:

$$\begin{aligned}\big[-i\sum_{n\geq 0}\alpha_n z^{-n-1}, -i\sum_{k<0}\alpha_k w^{-k-1}\big] &= -\sum_{n\geq 0}\sum_{k<0} z^{-n-1}w^{-k-1}[\alpha_n,\alpha_k] \\ &= -\sum_{n\geq 0}\sum_{k<0} nz^{-n-1}w^{-k-1}\delta_{n+k,0} \\ &= -\sum_{n>0} nz^{-n-1}w^{+n-1} \\ &= -\sum_{n>0} n\left(\frac{w}{z}\right)^{n-1}\frac{1}{z^2} \\ &= -\frac{1}{(z-w)^2}.\end{aligned}$$

Vergleich mit (2.15) zeigt, daß ∂X ein primäres konformes Feld mit konformer Dimension $h = 1$ ist.

Ebenso transformiert das Feld e^{ikX} als primäres Feld konformer Dimension $h = k^2/2$.

Für e^{ikX} gelten die wichtigen Gleichungen:

$$: e^{ikX}(z) :: e^{ipX}(w) :\sim \frac{1}{(z-w)^{-kp}} : e^{i[kX(z)+pX(w)]} : \tag{2.23}$$

und

$$\langle : e^{ikX}(z) :: e^{ipX}(w) : \rangle = e^{-kp\langle X(z)X(w)\rangle}\delta_{k+p,0} = \frac{\delta_{k+p,0}}{(z-w)^{-kp}}. \tag{2.24}$$

Korrelationsfunktionen von n primären Feldern ∂X sind ebenfalls sofort anzugeben. Für ungerade n verschwinden alle Korrelationsfunktionen, für gerade n wird als Beispiel im Anhang A die Vier-Punkt-Funktion der ∂X berechnet. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\langle \partial X(z_1)\partial X(z_2)\partial X(z_3)\partial X(z_4)\rangle = &\frac{1}{(z_1-z_2)^2(z_3-z_4)^2} + \frac{1}{(z_1-z_3)^2(z_2-z_4)^2} \\ &+ \frac{1}{(z_1-z_4)^2(z_2-z_3)^2}.\end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung auf beliebige gerade n ist offensichtlich.

2.3 Das freie Fermion

Zum Abschluß dieses Kapitels wird noch ein weiteres wichtiges Beispiel der CFT in zwei Dimensionen und gleichsam ein fundamentales Feld der N=2 Stringtheorie (siehe Kapitel 3) eingeführt, das masselose *Majorana-Weyl*-Fermion Ψ.

Die Wirkung ist

$$S = -\frac{1}{4\pi}\int \left(\Psi_\downarrow\bar{\partial}\Psi_\downarrow + \Psi_\uparrow\partial\Psi_\uparrow\right). \tag{2.25}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\partial\Psi_\uparrow(z,\overline{z}) = 0 \tag{2.26}$$
$$\bar{\partial}\Psi_\downarrow(z,\overline{z}) = 0 \tag{2.27}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\Psi_\uparrow(z,\overline{z}) &= \Psi_\uparrow(\overline{z}) \\ \Psi_\downarrow(z,\overline{z}) &= \Psi_\downarrow(z).\end{aligned}$$

Hierbei sind $\uparrow$ und $\downarrow$ Spinorindizes, die in der Folge unterdrückt werden.

Die OPE zweier Ψ ist

$$\Psi(z)\Psi(w) \sim -\frac{1}{z-w}, \tag{2.28}$$

implizierend, daß $h = 1/2$.

Die Randbedingungen auf dem Zylinder (vgl. Abschnitt 2.2) und folglich auch auf der komplexen Ebene sind im Falle des Fermions nicht eindeutig festgelegt, es sind vielmehr sowohl periodische als auch antiperiodische Randbedingungen möglich. Die beiden Möglichkeiten werden als Neveu-Schwarz- (periodisch auf der komplexen Ebene) bzw. Ramond-Randbedingungen bezeichnet.

Also:

$$\begin{aligned} \Psi(e^{2\pi i}z) &= +\Psi(z) && \text{(Neveu-Schwarz)} \\ \Psi(e^{2\pi i}z) &= -\Psi(z) && \text{(Ramond).} \end{aligned}$$

Die entsprechenden Modenzerlegungen sind

$$\text{NS:} \quad \Psi(z) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \Psi_n z^{-n-1/2} \tag{2.29}$$

$$\text{R:} \quad \Psi(z) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_n z^{-n-1/2}. \tag{2.30}$$

Eine (2.20) entsprechende Quantisierungsvorschrift liefert der Antikommutator der Moden:

$$\{\Psi_n, \Psi_m\} = \delta_{n+m,0}. \tag{2.31}$$

3 Der N=2 String

Die grundlegende Idee des N=2 Strings geht zurück auf Ademello et al. [7, 8], dabei wird die String-Weltfläche in eine Raumzeit mit D Dimensionen eingebettet. Nach anfänglichen Problemen wurde die richtige kritische Dimension schließlich von d'Adda und Lizzi [9] gefunden und mit D=4 angegeben. Die Signatur der Raumzeitmetrik ist dabei (2,2). Die Einbettung des N=2 Strings in die Raumzeit erfolgt durch die skalaren Weltflächenfelder X^μ und deren supersymmetrische Partner Ψ^μ (Weltflächenspinoren), die beide Raumzeitvektoren sind.

3.1 Wirkung und Symmetriegeneratoren

Aufgrund der Struktur der Wirkung des N=2 Strings erweist es sich als vorteilhaft, die reellen $(2,2)$-Vektoren (mit Metrik $\eta^{\mu\nu} = diag(-,+,-,+)$) zu komplexen $(1,1)$-Vektoren (mit Metrik $\eta^{\mu\nu} = diag(-,+)$) zusammenzufassen. Dieses sei am Beispiel des Vektors X^μ erläutert.

Es sei:

$$X^\pm = (X^{\pm 0}, X^{\pm 1}) = (X^0 \pm iX^2, X^1 \pm iX^3). \tag{3.1}$$

Das (2,2)-Skalarprodukt lautet dann in Komponenten

$$X_1 \cdot X_2 = \frac{1}{2}(X_1^+ \cdot X_2^- + X_1^- \cdot X_2^+).$$

Das (1,1)-Skalarprodukt ist

$$X_1^+ \cdot X_2^- = \frac{1}{2}\big(X_1^{++} X_2^{--} + X_1^{+-} X_2^{-+}\big),$$

wobei $X^{\pm +} = X^{\pm 0} + X^{\pm 1}$ und $X^{\pm -} = -X^{\pm 0} + X^{\pm 1}$.

In dieser Notation hat die *Brink-Schwarz*-Wirkung des N=2 Strings die Form [10, 11]

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{\pi}\int d^2z\; e\Big\{&\frac{1}{2}h^{mn}\partial_m X^+ \cdot \partial_n X^- + \frac{i}{2}\bar{\Psi}^+ \cdot \gamma^m \overleftrightarrow{D_m}\, \Psi^- + A_m \bar{\Psi}^+ \cdot \gamma^m \Psi^- \\ &+ (\partial_m X^+ + \bar{\Psi}^+ \chi_m^-) \cdot \bar{\chi}_n^+ \gamma^m \gamma^n \Psi^- + (\partial_m X^- + \bar{\chi}_m \Psi^-) \cdot \bar{\Psi}^+ \gamma^n \gamma^m \chi_n^- \Big\}. \end{aligned}$$

Dabei sind die Materiefelder X^μ und Ψ^μ an das N=2 Supergravitationsmultiplett bestehend aus dem Zweibein e_a^b (der Zusammenhang mit der Weltflächenmetrik h_{mn} ist $h_{mn} = \eta_{ab} e_m^a e_n^b$), den komplexen Gravitini $\chi_m^\pm$ und der $U(1)$-Konnektion A_m gekoppelt.

Zur Wahl der γ-Matrizen und zur Definition der kovarianten Ableitung D_m siehe den Anhang von [11].

Die *Brink-Schwarz*-Wirkung ist invariant unter N=2 Super-Diffeomorphismen und N=2 Super-Weyl-Transformationen. Aufgrund dieser lokalen Symmetrien ist es möglich, alle Freiheitsgrade des Supergravitationsmultipletts lokal wegzueichen. In der *superkonformen Eichung* nimmt die Wirkung die Form

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2 z \, \left(\partial_z X^- \cdot \partial_{\overline{z}} X^+ + \partial_{\overline{z}} X^- \cdot \partial_z X^+ + \Psi^-_\uparrow \cdot \overleftrightarrow{D_z} \, \Psi^+_\uparrow + \Psi^-_\downarrow \cdot \overleftrightarrow{D_{\overline{z}}} \, \Psi^+_\downarrow \right)$$

an.

Dieses ist die Wirkung einer freien, zweidimensionalen Feldtheorie.

Die Bewegungsgleichungen der Materiefelder

$$\partial_z \partial_{\overline{z}} X^\pm(z, \overline{z}) = 0 \tag{3.2}$$
$$\partial_z \Psi^\pm_\uparrow(z, \overline{z}) = 0 \tag{3.3}$$
$$\partial_{\overline{z}} \Psi^\pm_\downarrow(z, \overline{z}) = 0 \tag{3.4}$$

führen auf die aus Kapitel 2 bekannte Zerlegung der Felder in Links- und Rechtsläufer (alle weiteren Betrachtungen beschränken sich aus diesem Grund zumeist auf den holomorphen Anteil; für die Rechtsläufer gelten äquivalente Gleichungen).

Beide Felder haben die übliche Modenentwicklung (in (2,2)-Schreibweise $\mu = 0, 1, 2, 3$)

$$X^\mu_L(z) = \frac{q^\mu}{2} - i(p^\mu \ln(z)) + i \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n} \alpha^\mu_n z^{-n}$$

$$\text{NS:} \quad \Psi^\mu(z) = - \, i \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \Psi^\mu_n z^{-n-1/2}$$

$$\text{R:} \quad \Psi^\mu(z) = - \, i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi^\mu_n z^{-n-1/2}.$$

Die (Anti-)Kommutatorrelationen der Moden sind

$$[\alpha^\mu_n, \alpha^\nu_m] = \eta^{\mu\nu} n \delta_{n+m,0}$$
$$\{\Psi^\mu_n, \Psi^\nu_m\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0}.$$

Damit erhält man die Operatorproduktentwicklungen

$$X^\mu(z) X^\nu(w) \sim -\eta^{\mu\nu} ln(z-w) \tag{3.5}$$
$$\Psi^\mu(z) \Psi^\nu(w) \sim -\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-w}. \tag{3.6}$$

In der komplexen (1,1)-Notation also:

$$X^{\pm\mu}(z)X^{\mp\nu}(w) \sim -2\eta^{\mu\nu} ln(z-w) \tag{3.7}$$

$$\Psi^{\pm\mu}(z)\Psi^{\mp\nu}(w) \sim -\frac{2\eta^{\mu\nu}}{z-w} \tag{3.8}$$

Man beachte, daß in der komplexen (1,1)-Notation $\eta^{\mu\nu} = diag(-,+)$.

Die N=2 Supergravitation-Transformationen werden durch die Generatoren T_{mn}, $G^{\pm}_{m}$ und J_m erzeugt, diese zerfallen ebenfalls in holomorphe und antiholomorphe Komponenten. Die holomorphen Anteile erzeugen die (residuellen) superkonformen Transformationen [11]:

$$T_{zz} = -\frac{1}{2}\partial_z X^- \partial_z X^+ - \frac{1}{4}\partial_z \Psi^-_\downarrow \Psi^+_\downarrow - \frac{1}{4}\partial_z \Psi^+_\downarrow \Psi^-_\downarrow \quad \text{(Reparametrisierungen)}$$

$$G^{\pm}_{z\downarrow} = \partial_z X^{\mp} \Psi_{\pm} \quad \text{(N=2 Supersymmetrie)}$$

$$J_z = -\frac{1}{2}\Psi^- \Psi^+ \quad \text{(U(1)-Symmetrie).}$$

Die Generatoren haben die folgende Modenzerlegung:

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \tag{3.9}$$

$$G^{\pm}(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}\mp\rho} G_r z^{-r-\frac{3}{2}} \tag{3.10}$$

$$J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n z^{-n-1} \tag{3.11}$$

(Der Parameter ρ inkorporiert die Randbedingungen der fermionischen Felder des geschlossenen Strings. $\rho = 0$ für NS- und $\rho = \frac{1}{2}$ für R-Randbedingungen).

Die Algebra der Moden ist:

$$[L_n, L_m] = \frac{1}{12}cn(n^2-1)\delta_{n+m,0} + (n-m)L_{n+m} \tag{3.12}$$

$$[L_n, G^{\pm}_r] = (\frac{1}{2}n - r)G^{\pm}_{n+r} \tag{3.13}$$

$$[L_n, J_m] = -mJ_{m+n} \tag{3.14}$$

$$\{G^{\pm}_r, G^{\mp}_s\} = \frac{2}{3}c(r^2-\frac{1}{4})\delta_{r+s,0} + 4L_{r+s} + 2(r-s)J_{r+s} \tag{3.15}$$

$$[J_n, G^{\pm}_r] = \mp G^{\pm}_{n+r} \tag{3.16}$$

$$[J_n, J_m] = \frac{1}{3}cn\delta_{n+m,0}, \tag{3.17}$$

wobei in D=4 die zentrale Ladung $c = 6$ ist.

3.2 BRST Quantisierung

Die Algebra-Relationen (3.12) - (3.17) werden bei der Quantisierung der Stringtheorie als Constraints für die Identifizierung der physikalischen Zustände berücksichtigt. Es treten in der Algebra jedoch Anomalien in Form der *zentralen Erweiterung* c auf. Bei der üblichen Pfadintegral-Quantisierung werden diese Anomalien dadurch zum Verschwinden gebracht, daß zu jedem Symmetrie-Generator ein Geist/Antigeist-Paar eingeführt wird. Für den N=2 String erhält man also *vier* Geist/Antigeist-Paare:

$$
\begin{array}{rll}
c_n, b_n : & \{c_n, b_m\} = \delta_{m+n,0} & \text{(konforme Geister)} \\
\beta_r,^{\pm} \gamma_s^{\pm} : & [\beta_r^{\pm}, \gamma_s^{\mp}] = \delta_{r+s,0} & \text{(SUSY Geister)} \\
\tilde{c}_n, \tilde{b}_n : & \{\tilde{c}_n, \tilde{b}_m\} = \delta_{m+n,0} & \text{(U(1)-Geister)}\,.
\end{array}
$$

Analog führt man für den antiholomorphen Anteil des geschlossenen Strings vier Geist/Antigeist-Paare $\overline{c}/\overline{b}$, $\overline{\beta}/\overline{\gamma}$, $\overline{\tilde{c}}/\overline{\tilde{b}}$ ein.

Die Geister (Antigeister) haben die Modenentwicklung eines konformen Felds mit konformen Gewicht $1-\lambda$ (λ) entsprechend dem konformen Gewicht λ des Symmetriegenerators.

Also:

$$
c(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^{-n+1}, \qquad b(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^{-n-2}
$$

$$
\beta^{\mp}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} \mp \rho} \beta_r z^{-n-\frac{3}{2}}, \qquad \gamma^{\pm}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} \pm \rho} \gamma_r z^{-n+\frac{1}{2}}
$$

$$
\tilde{c}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n z^{-n}, \qquad \tilde{b}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{b}_n z^{-n-1}.
$$

Von fundamentaler Bedeutung für die späteren Rechnungen sind die Operatorproduktentwicklungen der jeweiligen Paare:

$$
c(z)b(w) \sim \frac{1}{z-w} \tag{3.18}
$$

$$
\beta^{\pm}(z)\gamma^{\mp}(w) \sim \frac{-1}{z-w} \tag{3.19}
$$

$$
\tilde{c}(z)\tilde{b}(w) \sim \frac{1}{z-w}. \tag{3.20}
$$

In der Potenz -1 der OPE spiegelt sich die Tatsache wider, daß die Summe der konformen Gewichte von Geist und Antigeist 1 ergibt.

Es zeigt sich, daß die konformen Anomalien nach Hinzunahme der Geist/Antigeist-Paare zum Verschwinden gebracht werden können, wenn die Dimension der Raumzeit mit D=2 (D komplex!) gewählt wird.

Das Vakuum $|0\rangle$ der N=2 superkonformen Feldtheorie wird durch die Wirkung der Symmetriegeneratormoden definiert:

$$\hat{L}_n|0\rangle = 0 \quad \text{für } n \geq -1 \tag{3.21}$$

$$\hat{G}_r|0\rangle = 0 \quad \text{für } r \geq -\frac{1}{2} \tag{3.22}$$

$$\hat{J}_n|0\rangle = 0 \quad \text{für } n \geq 0. \tag{3.23}$$

Dabei bedeutet $\hat{L}$ etc., daß die Generatoren geisterweitert sind, so daß die Algebra in der kritischen Dimension anomaliefrei ist.

Die Einführung der Geist/Antigeist-Paare hat zu einer Vergrößerung des Fockraums geführt. Im BRST-Formalismus wird deshalb ein nilpotenter Operator Q konstruiert, der es ermöglicht, die physikalischen Zustände durch die Forderung $Q|phys\rangle = 0$ zu identifizieren. Zustände, die sich gerade um ein $Q|\lambda\rangle$ ($|\lambda\rangle$ beliebiger Zustand) unterscheiden, sind physikalisch äquivalent: $|phys\rangle \sim |phys'\rangle$, falls $|phys\rangle - |phys'\rangle = Q|\lambda\rangle$.

In der N=2 Stringtheorie ergibt sich der BRST-Operator Q zu:

$$\begin{aligned} Q = \oint \frac{dz}{2\pi i}\Big[& cT + \gamma^+ G^- + \gamma^- G^+ \tilde{c}J + c\partial c b + c\partial\tilde{c}\tilde{b} \\ & - 4\gamma^+\gamma^- b + 2\partial\gamma^-\gamma^+\tilde{b} - 2\partial\gamma^+\gamma^-\tilde{b} + \frac{3}{4}\partial c(\gamma^+\beta^- + \gamma^-\beta^+) \\ & - \frac{3}{4}c(\partial\gamma^+\beta^- + \partial\gamma^-\beta^+) + \frac{1}{4}c(\gamma^+\partial\beta^- + \gamma^-\partial\beta^+) \\ & + \tilde{c}(\gamma^+\beta^- - \partial\gamma^-\beta^+)\Big]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Man erhält ein sehr einfaches Spektrum, das sowohl im offenen wie geschlossenen Fall nur einen masselosen Zustand umfaßt (beim offenen String müssen noch die entsprechenden Chan-Paton-Faktoren (siehe Kapitel 4) berücksichtigt werden). Das heißt, für diese Zustände $|k\rangle$ gilt $k^2 = 0$, eine Einschränkung an die Impulse, welche die Rechnungen enorm vereinfachen wird. Eine ausführliche Diskussion des Spektrums findet sich in [3].

4 Streuamplituden

4.1 Vertexoperatoren

Wechselwirkungen werden in der Stringtheorie mit Hilfe von Vertexoperatoren berechnet. Die String-Wirkung ist invariant unter einer konformen Reskalierung der Weltflächenmetrik. Aufgrund dessen ist es möglich, externe Stringzustände auf Punkte auf kompakten Riemann-Flächen abzubilden. Dabei gehen die Quantenzahlen (wie Impuls und Spin) des entsprechenden Stringzustands $|\Lambda\rangle$ auf einen lokalen Vertexoperator V_Λ an diesem Punkt über. Die Riemann-Flächen werden durch die *Euler-Charakteristik* χ klassifiziert. Diese ist gegeben durch $\chi = 2 - 2g - b - k$, wobei g der Genus, b die Zahl der Ränder („boundaries") und k die Zahl der Kreuzkappen der Weltfläche ist.

Die n-Punkt-Streuamplitude des geschlossenen Strings wird auf Tree-Niveau durch Vertexoperatoren auf der Riemann-Sphäre S^2 $(g = b = k = 0)$ beschrieben. Eine erneute konforme Abbildung projiziert die S^2 stereographisch auf die komplexe Ebene. Für den offenen String hat die Weltfläche Ränder, an denen die Vertexoperatoren „angeklebt" werden. Auf Tree-Niveau entspricht diese Weltfläche der *Scheibe* $(g = k = 0,\ b = 1)$, die konform auf die komplexe obere Halbebene abgebildet wird. Der Rand, auf dem sich die Vertexoperatoren befinden, ist die reelle Achse.

Um Streuamplituden zu berechnen, integriert man - bis auf konforme Invarianz - die Korrelationsfunktionen der Vertexoperatoren über alle möglichen Orte auf der Weltfläche. Die Gruppe der konformen Isometrien der S^2 ist die $SL(2,\mathbb{C})$, eine Untergruppe der konformen Gruppe. Dies erlaubt es, drei der Vertexoperatoren auf Werte z_i (i=1,2,3) zu fixieren. Die entsprechende Invarianzgruppe der Scheibe bzw. oberen Halbebene ist die $SL(2,\mathbb{R})$, was ebenfalls die Fixierung dreier Vertexoperatoren (jetzt auf der reellen Achse) ermöglicht.

Korrekturen höherer Ordnung werden durch Integrationen über Riemann-Flächen kleinerer Euler-Charakteristik beschrieben. Dabei muß differenziert werden, ob es sich um orientierte oder nicht-orientierte Strings handelt. Für Weltflächen orientierter Strings gilt immer $k = 0$, bei nicht-orientierten ist auch $k \neq 0$ möglich. Die Ein-Loop-Korrekturen werden im offenen wie geschlossenen Fall durch Flächen mit $\chi = 0$ beschrieben. Daneben gibt es für den geschlossenen String *Tree-Amplituden höherer Ordnung* auf Riemann-Flächen mit Euler-Charakteristik $\chi = 1$. Für orientierte wie für nicht-orientierte geschlossene Strings ist dieses zum einen die Amplitude auf der Scheibe. Für nicht-orientierte Strings gibt es noch einen zweiten Beitrag in dieser Ordnung, die *Projektive Ebene* RP_2 $(g = b = 0, k = 1)$. Hierauf wird in der Diskussion der Ergebnisse näher eingegangen. Die Berechnungen in dieser Arbeit beschränken sich auf die Amplituden auf der Sphäre und der Scheibe.

Eine wichtige topologische Invariante in der N=2 Stringtheorie ist die Instantonzahl $c = \frac{1}{2\pi}\int F$, wobei $F = dA$ die Feldstärke der U(1)-Konnektion A_m ist [12]. Die vollständigen Streuamplituden ergeben sich durch gewichtete Summation über die verschiedenen Instantonzahlen. Diese Arbeit beschränkt sich auf $c = 0$.

In der Theorie des offenen Strings ist es möglich, unter Wahrung der Poincaré-Invarianz der Raumzeit und der konformen Invarianz der Weltfläche, nichtdynamische Freiheitsgrade an den Enden des Strings anzubringen (beschrieben durch Quantenzahlen a_i einer Eichgruppe [13] (i=1,...,N; mit N=dim(R), R fundamentale Darstellung der Eichgruppe)). Offene Vertexoperatoren sind mit dem Generator T^a der Eichgruppe zu verzieren. Die vollständige n-Punkt-Amplitude $T(1,...,n)$ ist dann gegeben durch

$$T(1,...,n) = \sum tr(T^1...T^n)A(1,...,n), \tag{4.1}$$

wobei A(1,...,n) die n-Punkt-Amplitude ohne Berücksichtigung der Quantenzahlen ist. Die Summe läuft über alle $(n-1)!$ zyklisch inäquivalenten Permutationen der Vertexoperatoren. Die Spur wird als *Chan-Paton-Faktor* bezeichnet. Für gemischte Amplituden mit nur einem offenen String verschwindet wegen $tr(T^a) = 0$ dieser Faktor, es sei denn, die Eichgruppe ist $U(1)^N$. Um die Rechnungen übersichtlicher zu gestalten, werden die zusätzlichen Indizes an den Vertexoperatoren unterdrückt. Zum Ergebnis der Amplitudenberechnung ist der entsprechende Chan-Paton-Faktor hinzuzufügen.

Um die Konstruktion der Vertexoperatoren zu erleichtern, werden in supersymmetrischen Stringtheorien die Geistsysteme bosonisiert. Dieses Verfahren wird üblicherweise verwendet, um fermionische Felder durch bosonische auszudrücken (daß dieses überhaupt möglich ist, liegt daran, daß in der Stringtheorie eine *zwei*dimensionale konforme Feldtheorie betrachtet wird) und auf diese dann den üblichen Rechenapparat der CFT anwenden zu können. Für den N=2 String ist die übliche Bosonisierungsvorschrift [11]

$$c \cong e^{+\sigma}, \quad b \cong e^{-\sigma} \tag{4.2}$$

$$\tilde{c} \cong e^{+\tilde{\sigma}}, \quad \tilde{b} \cong e^{-\tilde{\sigma}} \tag{4.3}$$

mit den OPE

$$\sigma(z)\sigma(w) \sim \ln(z-w) \tag{4.4}$$

$$\tilde{\sigma}(z)\tilde{\sigma}(w) \sim \ln(z-w). \tag{4.5}$$

Entscheidend ist nun, daß β und γ bereits bosonische Felder sind, also Bosonen „bosonisiert" werden; dieses führt zum Phänomen der sogenannten

Bildentartung. Die Bosonisierungsvorschrift lautet hier

$$\gamma^{\pm} \cong \eta^{\pm} e^{+\varphi^{\pm}}, \quad \beta^{\mp} \cong e^{-\varphi^{\pm}} \partial \xi^{\mp}, \tag{4.6}$$

wobei die Felder φ, η und ξ die folgenden OPE haben:

$$\varphi^{\pm}(z)\varphi^{\pm}(w) \sim -\ln(z-w) \tag{4.7}$$

$$\xi^{\mp}(z)\eta^{\pm}(w) \sim \frac{1}{z-w}. \tag{4.8}$$

Auch η und ξ können noch vermittels

$$\eta^{\pm} \cong e^{-\chi^{\pm}}, \quad \xi^{\mp} \cong e^{\chi^{\pm}}, \tag{4.9}$$

$$\text{wobei} \quad \chi^{\pm}(z)\chi^{\pm}(w) \sim \ln(z-w) \tag{4.10}$$

bosonisiert werden.

In der Bosonisierung des γ/β-Geistsystems treten die zusätzlichen Felder ξ und η auf. Diese werden aufgrund der Differenz der Hintergrundladungen des φ-Systems ($c_\varphi = 1 + 3Q$) und des γ/β-Geistsystems ($c = -(1-3Q)$) benötigt. Als zusätzliche Freiheitsgrade führen sie zu einer Entartung der Stringzustände und damit auch der Vertexoperatoren. In die Bosonisierung der SUSY-Geister geht im Exponenten nur die Differenz der Felder φ und χ ein. Andere Kombinationen von φ und χ liefern Zustände, die *bildentartet* sind. Das entsprechende Etikett ist durch die Eigenwerte $\pi^{\pm}$ (die *Bildladungen*) des *Bildoperators*

$$\Pi_{\pm} = -\frac{1}{4\pi i} \oint [\beta^{\pm}\gamma^{\mp} + \eta^{\pm}\xi^{\mp}] = -\frac{1}{4\pi i} \oint [-\partial\varphi^{\mp} + \partial\chi^{\mp}] \tag{4.11}$$

gegeben. Insbesondere hat der Operator $e^{q^{\pm}\varphi^{\mp}}$ die Bildladungen $\pi^{\pm} = q^{\pm}$.

Bereits in Kapitel 2 wurde darauf hingewiesen, daß es für das fermionische Feld Ψ zwei verschiedene Randbedingungen - Neveu-Schwarz (NS) oder Ramond (R) - gibt. Dementsprechend erhält man auch Vertexoperatoren in beiden Sektoren; Vertexoperatoren haben im R-Sektor *halbzahlige*, im NS-Sektor *ganzzahlige* Bildladungen. Eine Übersicht über die Vertexoperatoren in den verschiedenen Bildern findet sich im Anhang von [3].

Eine Besonderheit des N=2 Strings ist, daß es, bedingt durch die U(1)-Symmetrie, einen Operator gibt, der einen Bildwechsel zwischen den beiden Sektoren erlaubt - den *Spektralflußoperator* SFO. Der SFO ist eine Operatorschar und ändert die Bildladungen $(\pi^+, \pi^-) \to (\pi^+ + \rho, \pi^- - \rho)$, so daß es ein ganzes Kontinuum an Randbedingungen für die fermionischen Felder gibt:

$$\Psi^{\pm\mu}(e^{2\pi i}z) = e^{\mp 2\pi i \rho}\Psi^{\pm\mu}(z);$$

der NS-Sektor und der R-Sektor entsprechen $\rho = 0$ bzw. $\rho = \frac{1}{2}$.

Bei der Amplitudenberechnung kann durch den SFO in den Korrelationsfunktionen beliebig zwischen dem R- und NS-Sektor vermittelt werden, ohne die Physik zu ändern. Aus diesem Grund und da die Summe aller Monodromien ρ_i verschwinden muß ist es möglich, sich in den folgenden Rechnungen auf die einfacher zu handhabenden NS-Vertexoperatoren zu beschränken.

Offene Vertexoperatoren sind von der Form $V^o = V(z)$, geschlossene von der Form $V^{cl} = V(z)V(\overline{z})$, wobei die V(z) in beiden Fällen gleich aussehen, sie unterscheiden sich durch den Definitionsbereich der Stringvariable z (offen: reelle Achse, geschlossen: komplexe Ebene). Aufgrund der Unabhängigkeit (mögliche Kontaktterme $\langle \partial X \overline{\partial} X \rangle \sim \delta^2(z - \overline{z})$ tragen hier nicht bei) von z und $\overline{z}$ (vgl. Kapitel 3) lassen sich die Amplituden des geschlossenen Strings schreiben als

$$A_n = \langle : V(z_1) : \cdots : V(z_n) : \rangle \langle : V(\overline{z}_1) : \cdots : V(\overline{z}_n) : \rangle, \tag{4.12}$$

also als Produkt der Korrelationsfunktionen des holomorphen und des antiholomorphen Anteils der Vertexoperatoren. Bei der Berechnung der Amplituden müssen bestimmte Auswahlregeln beachtet werden. Auf Tree-Niveau müssen die Vertexoperatoren die Hintergrundladung Q kompensieren [14]. Die freien Bosonen aus der Bosonisierung der Geistsysteme haben die Hintergrundladungen

$$\tilde{Q}_\sigma = 3, \tilde{Q}_{\tilde{\sigma}} = 1, \tilde{Q}_{\varphi^\pm} = -2, \tilde{Q}_{\chi^\pm} = 1.$$

Da ξ_0 nicht Element des Fockraums ist, wird der Beitrag des χ-Bosons abgesättigt und man erhält effektiv $\tilde{Q}_{\chi^\pm} = 0$. Damit folgt [13]:

Für die n-Punkt-Funktion des offenen Strings muß die Summe aller Bildladungen $(\sum \pi^+, \sum \pi^-) = (-2, -2)$ ergeben. Ferner müssen in den Amplituden auf die zu fixierenden Vertexoperatoren drei Reparametrisierungsgeister c und ein U(1)-Geist $\tilde{c}$ verteilt werden. Über die Positionen der verbleibenden n-3 Vertexoperatoren wird integriert.

Diese Auswahlregeln gelten im Fall der geschlossenen Strings auf der Sphäre für den holomorphen bzw. antiholomorphen Anteil jeweils separat, wobei die Bildladungen in beiden Teilen unabhängig voneinander verteilt werden können.

Damit lautet beispielsweise eine mögliche Korrelationsfunktion für die Drei-Punkt-Amplitude des offenen Strings (x_i Positionsvariablen, k_i Impulse):

$$A_{ooo} = \langle : V^{\tilde{c}c}_{(-1,0)}(x_1, k_1) :: V^c_{(0,-1)}(x_2, k_2) :: V^c_{(-1,-1)}(x_3, k_3) : \rangle,$$

wobei

$$V^{\tilde{c}c}_{(-1,0)} = (\tilde{c}c\, k^+ \Psi^- e^{-\varphi^-} - 2ic\eta^-) e^{ikX}$$
$$V^{c}_{(0,-1)} = c\, k^- \Psi^+ e^{-\varphi^+}\, e^{ikX}$$
$$V^{c}_{(-1,-1)} = c\, e^{-\varphi^-} e^{-\varphi^+}\, e^{ikX}.$$

Die untere Indizierung gibt die Bildladungen, die obere Indizierung den c- und $\tilde{c}$-Geistgehalt des Vertexoperators an (Skalarproduktpunkte zwischen den Impulsen und Feldern werden unterdrückt). Hierbei sind die $x_i \in \mathbb{R}$ (i=1,2,3) und können auf beliebige (jedoch paarweise verschiedene) Werte fixiert werden. Das Resultat ist $A_{ooo} \propto k_1^+ k_2^-$. Die Amplitude ist vollständig antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Vertexoperatoren, damit wird der Chan-Paton-Faktor $tr(T^a T^b T^c) \sim f^{abc}$.

4.2 Die Vier-Punkt-Amplitude A_{cccc}

Zur Veranschaulichung der Rechenregeln wird die Vier-Punkt-Amplitude des geschlossenen Strings für die Sphäre berechnet. Um die Rechnungen in der Folge übersichtlicher zu gestalten, werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$k^+_{ij} := k^+_i \cdot k^-_j, \qquad \overline{k^+_{ij}} := k^+_{ji} = k^+_j \cdot k^-_i,$$
$$k_{ij} := k_i \cdot k_j = \frac{1}{2}(k^+_{ij} + \overline{k^+_{ij}}),$$
$$k_i X := k_i \cdot X = \frac{1}{2}(k^+_i \cdot X^- + k^-_i \cdot X^+),$$
$$c_{ij} := k^+_{ij} - \overline{k^+_{ij}}.$$

Die Variablen, von denen die einzelnen Felder des Vertexoperators abhängen, werden lediglich am Ende des gesamten Ausdrucks geschrieben, also beispielsweise:

$$c\, k_1^+ \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_1X}(z_1) := c(z_1) k_1^+ \Psi^-(z_1) e^{-\varphi^-(z_1)} e^{k_1X(z_1)}.$$

Die Rechnungen beschränken sich zunächst auf die holomorphe Komponente, erst bei der Integration (*nach* der Fixierung dreier komplexer Variable) muß der antiholomorphe Anteil hinzugenommen werden. Unter Berücksichtigung der Auswahlregeln werden aus dem Pool der möglichen Vertexoperatoren (siehe Anhang [3]) die folgenden gewählt:

$$V^{\tilde{c}c}_{(-1,0)}(z_1) = (\tilde{c}c\, k_1^+ \Psi^- e^{-\varphi^-} - 2ic\eta^-) e^{ik_1X}(z_1)$$
$$V^{\int}_{(-1,0)} = \int d^2z_2\ k_2^+ \Psi^- e^{-\varphi^+}\, e^{ik_2X}(z_2).$$

Für die Koordinaten drei und vier wird jeweils der Vertexoperator

$$V^{c}_{(0,-1)}(z_{3/4}) = c\, k_{3/4}\Psi^{+} e^{-\varphi^{+}} e^{ik_{3/4}X}(z_{3/4})$$

gewählt.

Damit ergibt sich die Amplitude aus:

$$A_{cccc} = \langle : V^{\tilde{c}c}_{(-1,0)}(z_1) :: V^{\int}_{(-1,0)}(z_2) :: V^{c}_{(0,-1)}(z_3) :: V^{c}_{(0,-1)}(z_4) : \rangle .$$

Der Anteil $2ic\eta^{-}$ des ersten Vertexoperators trägt nicht zur Amplitude bei, da er den falschen Geistgehalt (fehlender U(1)-Geist) hat. Der U(1)-Korrelator $\langle\tilde{c}\rangle$ gibt einen konstanten Beitrag, der mit in die Normierung einbezogen wird und in den nachfolgenden Rechnungen unterdrückt wird. Auf die Normalordnungspunkte wird im folgenden verzichtet, da im allgemeinen eindeutig ist, welche Ausdrücke jeweils normalgeordnet sind. Es bleibt also zu berechnen:

$$\begin{aligned} A_{cccc} = \int d^2z_2\, \langle (\tilde{c}c\, k_1^{+}\Psi^{-} e^{-\varphi^{-}}) e^{ik_1X}(z_1) k_2^{+}\Psi^{-} e^{-\varphi^{+}} e^{ik_2X}(z_2) \\ \times\, ck_3^{-}\Psi^{+} e^{-\varphi^{+}} e^{ikX}(z_3) ck_3^{-}\Psi^{+} e^{-\varphi^{+}} e^{ikX}(z_4)\rangle\langle a.h.\rangle \end{aligned}$$

(a.h. = antiholomorpher Anteil). Die Amplitude zerfällt in Produkte der Korrelationsfunktionen der einzelnen Felder und Geister. Es ist übersichtlicher, die einzelnen Terme separat zu untersuchen:

$$\begin{aligned} &\langle c(z_1)c(z_3)c(z_4)\rangle = (z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_3 - z_4) \\ &\langle e^{-\varphi^{-}}(z_1)e^{-\varphi^{-}}(z_2)e^{-\varphi^{+}}(z_3)e^{-\varphi^{+}}(z_4)\rangle = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} \\ &\langle k_1^{+}\Psi^{-} k_2^{+}\Psi^{-} k_3^{-}\Psi^{+} k_4^{-}\Psi^{+}\rangle = \frac{4k_{12}^{+}k_{23}^{+}}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} - \frac{4k_{13}^{+}k_{24}^{+}}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} . \end{aligned}$$

Der Korrelator der Exponentialfunktionen ergibt den sogenannten Koba-Nielsen-Term:

$$\langle e^{ikX}(z_1)e^{ikX}(z_2)e^{ikX}(z_3)e^{ikX}(z_4)\rangle = \prod_{1\le i<j\le 4} (z_i - z_j)^{k_ik_j} .$$

Zusammengesetzt ergibt sich für die Amplitude die Summe zweier Terme, die getrennt betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} : 4 \int d^2z_2\, k_{14}^{+}k_{23}^{+} \frac{z_1 - z_3}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)} \prod_{1\le i<j\le 4} (z_i - z_j)^{k_ik_j} \times a.h. \\ \mathrm{II} : -4 \int d^2z_2\, k_{13}^{+}k_{24}^{+} \frac{z_2 - z_4}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_4)} \prod_{1\le i<j\le 4} (z_i - z_j)^{k_ik_j} \times a.h.. \end{aligned}$$

Zunächst der Term I:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} = 4 \int d^2 z_2 \; k_{14}^{+} k_{23}^{+} \frac{(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)} (z_1 - z_2)^{k_1 k_2} (z_1 - z_3)^{k_1 k_3} \times \\
\times\, (z_1 - z_4)^{k_1 k_4} (z_2 - z_3)^{k_2 k_3} (z_2 - z_4)^{k_2 k_4} (z_3 - z_4)^{k_3 k_4} \times a.h..
\end{aligned}
$$

Jetzt werden drei der Koordinaten fixiert und zwar durch folgende Wahl:

$$
z_1' = 0, \quad z_3' = 1 \quad \text{und} \quad z_4' = \infty.
$$

Im Gegensatz zum offenen String gibt es bei den komplexen Variablen der geschlossenen Vertexoperatoren keine Ordnungsrelation, d.h. es ist egal, ob z.B. z_1 oder z_2 auf den kleineren Wert auf der reellen Achse fixiert wird, da auch eine Fixierung irgendwo anders auf der komplexen Ebene möglich wäre. An dieser Stelle unterscheiden sich die Rechnungen der reinen geschlossenen Amplituden fundamental von denen im gemischten Fall. Dort stellt die reelle Achse den Rand für die geschlossenen Vertexoperatoren da, und es ist verboten, sie auf diesem zu fixieren (was erhebliche Verkomplizierungen in den Rechnungen nach sich zieht). Nach der Fixierung erhält man (z_2 jetzt nur noch mit z bezeichnet):

$$
4 k_{14}^{+} k_{23}^{+} \int d^2 z \; z^{k_1 k_2 - 1} (1 - z)^{k_2 k_3 - 1} z_4^{k_1 k_4 + k_2 k_4 + k_3 k_4} (-1)^{k_2 k_4 + k_3 k_4 + k_2 k_3} \times a.h..
$$

Es sieht zunächst so aus, als sei dieses Integral wegen des z_4-Termes divergent. Aufgrund Impulserhaltung und der Masselosigkeit des Stringzustands ($k_i^2 = 0$) gelten aber die Beziehungen

$$
k_2 k_4 + k_3 k_4 + k_2 k_3 = 0 \tag{4.13}
$$

$$
k_1 k_4 + k_2 k_4 + k_3 k_4 = -k_4 k_4 = 0. \tag{4.14}
$$

Damit fällt die z_4-Abhängigkeit weg, das Integral ist endlich. Dieses Phänomen, daß scheinbar divergente Ausdrücke aufgrund der Impulserhaltung und der on-shell Bedingung $k_i^2 = 0$ verschwinden, wird in den weiteren Rechnungen wiederholt auftauchen.

Man erhält also für den ersten Teil der Amplitude:

$$
\mathrm{I} = -4 k_{14}^{+} k_{23}^{+} \int d^2 z \; z^{k_1 k_2 - 1} (1 - z)^{k_2 k_3 - 1} \times a.h..
$$

Für II liefert eine vergleichbare Rechnung:

$$
\mathrm{II} = 4 k_{13}^{+} k_{24}^{+} \int d^2 z \; z^{k_1 k_2 - 1} (1 - z)^{k_2 k_3} \times a.h..
$$

Nach Hinzunahme der antiholomorphen Komponente ergibt sich insgesamt:

$$A = 16|F|^2 \int d^2z\ |z|^{2k_1k_2-2}|1-z|^{2k_2k_3-2} + 16|G|^2 \int d^2z\ |z|^{2k_1k_2-2}|1-z|^{2k_2k_3} -$$
$$16\pi(FG^* + F^*G) \int d^2z\ z^{k_1k_2-1}\overline{z}^{k_1k_2-1}(1-z)^{k_2k_3-1}(1-\overline{z})^{k_2k_3},$$

wobei

$$F = k_{14}^+ k_{23}^+$$
$$G = k_{13}^+ k_{24}^+.$$

Die Integrale sind von der Form (vgl.[15])

$$\int d^2z\ z^{\alpha+n_1}\overline{z}^{\alpha+n_2}(1-z)^{\beta+m_1}(1-\overline{z})^{\beta+m_2} = \frac{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi(\alpha+\beta))}$$
$$\times \frac{\Gamma(\alpha+n_1+1)\Gamma(\alpha+n_2+1)\Gamma(\beta+m_1+1)\Gamma(\beta+m_2+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n_1+m_1+1)\Gamma(\alpha+\beta+n_2+m_2+1)}. \tag{4.15}$$

Anmerkungen zu diesem Integral finden sich im Anhang B. Nutzt man nach der Auswertung der Integrale noch die bekannte Relation der Γ-Funktion

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

so folgt:

$$A_{cccc} = 4\pi \frac{\sin(\pi k_{12})\sin(\pi k_{23})}{\sin(\pi(k_{12}+k_{23}))} \frac{\Gamma^2(k_{12})\Gamma^2(k_{23})}{\Gamma^2(k_{12}+k_{23})}$$
$$\times (F + \frac{k_{23}}{k_{24}}G)(F^* + \frac{k_{23}}{k_{24}}G^*).$$

Dieser Ausdruck ist proportional zu

$$k_{14}^+ k_{23}^+ k_{24} + k_{13}^+ k_{24}^+ k_{23}. \tag{4.16}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß dieser Ausdruck verschwindet (!):

$$\begin{aligned} k_{14}^+ k_{23}^+ k_{24} + k_{13}^+ k_{24}^+ k_{23} &= -k_{13}^+ k_{23}^+ (k_{13} + k_{23}) - \frac{1}{2}(k_{12}^+ k_{23}^+ k_{31}^+ + \overline{k_{12}^+ k_{23}^+ k_{31}^+}) \\ &\quad - \frac{1}{2} k_{13}^+ k_{23}^+ (k_{12}^+ + \overline{k_{12}^+}) \\ &= -k_{13}^+ k_{23}^+ (k_{13} + k_{23} + k_{12}) - Re(k_{12}^+ k_{23}^+ k_{31}^+). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Der erste Klammerterm entspricht gerade (4.13) (es gilt $k_{13} = k_{24}, k_{12} = k_{34}$). Der Beweis für $Re(k_{12}^+ k_{23}^+ k_{31}^+) = 0$ findet sich in [16].

Also ergibt sich:

$$\boxed{A_{cccc} = 0}. \tag{4.18}$$

5 Die gemischten Drei-Punkt-Amplituden

In Kapitel 4 wurde die Berechnung der Vier-Punkt-Amplitude des geschlossenen Strings nachvollzogen. Jetzt werden dieser die Rechnungen für den gemischten Fall gegenübergestellt. Gemischte Amplituden spiegeln die Möglichkeit wider, daß sich die Enden eines offenen Strings verbinden können und damit aus dem offenen ein geschlossener String wird. Nach der Berechnung der Drei-Punkt-Amplituden A_{ooc}, A_{occ} und $\langle ccc \rangle_D$ (drei geschlossene Vertexoperatoren auf der Scheibe) folgen in Kapitel 6 die Berechnungen der Vier-Punkt-Amplituden A_{oooc}, A_{oocc} und A_{occc}.

5.1 Gemischte Korrelatoren

Bei der Berechnung der gemischten Amplituden folgt man prinzipiell dem gleichen Schema wie bei den reinen Amplituden, d.h. man hat die Korrelationsfunktionen der entsprechenden Vertexoperatoren unter Berücksichtigung der Auswahlregeln zu berechnen und anschließend über die nichtfixierten Variablen zu integrieren.

Die Vertexoperatoren der offenen Strings befinden sich wie üblich auf der reellen Achse, die geschlossenen Vertexoperatoren jedoch hängen von der Variablen z ab, wobei z auf die obere Halbebene beschränkt ist - die reelle Achse (unter Hinzunahme des Punkts ∞) repräsentiert also einen Rand des Lokalisierungsgebiets der geschlossenen Vertexoperatoren. Die geschlossenen Vertexoperatoren dürfen beliebig nahe an den Rand geschoben werden, diesen aber nie berühren ($Im(z) > 0, Re(z) < \infty$). Das hat Konsequenzen für die geschlossenen Vertexoperatoren, die hier am Beispiel des bosonischen Feldes X erläutert werden.

Eine gute Veranschaulichung ist das aus der Elektrodynamik bekannte Beispiel einer Ladung vor einer auf konstantem Potential gehaltenen leitenden Platte. Die von der „Ladung" $X_{cl}(z)$ ausgehenden Feldlinien werden von der Platte (hier die reelle Achse) abgelenkt, so daß auf der Platte gilt:

$$\partial_y X_{cl}(z = x + iy)|_{y=0} = 0. \tag{5.1}$$

Diese Randbedingung wird als *Neumann-Randbedingung* bezeichnet. Die

Lösung wird in der Elektrodynamik durch das Spiegelladungsprinzip konstruiert.

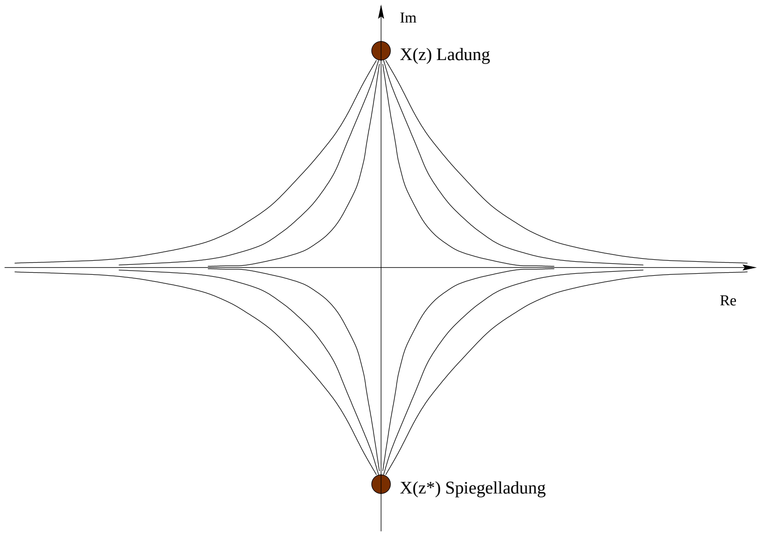


Abbildung 1: Neumann-Randbedingungen

Man spiegelt den Ort der Ladung an der Platte (hier die reelle Achse, die Spiegelung entspricht der komplexen Konjugation) und fügt dort die gleiche Ladung hinzu:

$$X(z) \to X(z) + X(\overline{z}). \tag{5.2}$$

Formal sieht diese Gleichung wie die übliche Zerlegung in den holomorphen und antiholomorphen Anteil aus, wie sie im reinen Fall aus der Bewegungsgleichung für X folgt. Damit ist es möglich, die gemischten Amplituden wieder als Korrelator des Produkts von Vertexoperatoren zu schreiben, wobei jetzt aber zwei verschiedene Typen (offen und geschlossen) von Vertexoperatoren auftreten.

$$A = \langle : V_{op}(x_1) : \cdots : V_{op}(x_l) :: V_{cl}(z_1) :: V_{cl}(\overline{z}_1) : \cdots : V_{cl}(z_m) :: V_{cl}(\overline{z}_m) : \rangle \tag{5.3}$$

(Man beachte, daß holomorpher und antiholomorpher Anteil eines Vertexoperators <u>nicht</u> zueinander normalgeordnet sind, folglich die Amplitude nicht einfach das Produkt des holomorphen mit dem antiholomorphen Korrelator wie in Gleichung (4.12) ist.)

Das Feld $X(\overline{z})$ ist aber nur ein Hilfsfeld, das die richtigen Randbedingungen erzwingt. Deshalb ist es angebracht, sich den Vertexoperator $: V(z, \overline{z}) : = : V(z) :: V(\overline{z}) :$ als Produkt zweier *halber* geschlossener Vertexoperatoren vorzustellen. Dieses berücksichtigt man, indem die Operatorproduktentwicklungen bei der Amplitudenberechnung modifiziert werden, abhängig davon, ob die Felder aus dem offenen Sektor und/oder dem (*halben*) geschlossenen kommen. In Gleichungen:

$$\begin{aligned} X^{\pm\mu}(a)X^{\mp\nu}(b) &\sim -2\eta^{\mu\nu}\ln(a-b) && \text{(offen-offen)} \\ X^{\pm\mu}(a)X^{\mp\nu}(z) &\sim -\eta^{\mu\nu}\ln(a-z) && \text{(offen-geschlossen).} \end{aligned}$$

Für die geschlossen-geschlossen Operatorproduktentwicklungen setzt man an:

$$\begin{aligned} X^{\pm\mu}(z)X^{\mp\nu}(w) &\sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\ln(z-w) \\ X^{\pm\mu}(z)X^{\mp\nu}(\overline{w}) &\sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\ln(z-\overline{w}) \\ X^{\pm\mu}(\overline{z})X^{\mp\nu}(w) &\sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\ln(\overline{z}-w) \\ X^{\pm\mu}(\overline{z})X^{\mp\nu}(\overline{w}) &\sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\ln(\overline{z}-\overline{w}). \end{aligned}$$

Die entsprechenden Regeln gelten auch für die fermionischen Felder Ψ

$$\begin{aligned} \Psi^{\pm\mu}(a)\Psi^{\mp\nu}(b) &\sim -\frac{2\eta^{\mu\nu}}{a-b} && \text{(offen-offen)} \\ \Psi^{\pm\mu}(a)\Psi^{\mp\nu}(z) &\sim -\frac{\eta^{\mu\nu}}{a-z} && \text{(offen-geschlossen)} \end{aligned}$$

geschlossen-geschlossen:

$$\begin{aligned} \Psi^{\pm\mu}(z)\Psi^{\mp\nu}(w) &\sim -\frac{1}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-w} \\ \Psi^{\pm\mu}(\overline{z})\Psi^{\mp\nu}(w) &\sim -\frac{1}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{\overline{z}-w} \\ \Psi^{\pm\mu}(z)\Psi^{\mp\nu}(\overline{w}) &\sim -\frac{1}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-\overline{w}} \\ \Psi^{\pm\mu}(\overline{z})\Psi^{\mp\nu}(\overline{w}) &\sim -\frac{1}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{\overline{z}-\overline{w}}. \end{aligned}$$

Eine kompakte Übersicht über diese Regeln findet sich im Anhang C.

Es bleibt, die Auswahlregeln zu bestimmen. Die gemischte Theorie „lebt" in der oberen Halbebene. Die Invarianzgruppe der oberen Halbebene ist $SL(2,\mathbb{R})$ (vgl. Kap.4). Damit ist es nur möglich, drei <u>reelle</u> Variable zu fixieren (siehe hierzu den nächsten Abschnitt). Es treten insgesamt in der Korrelationsfunktion nur <u>drei</u> c-Geister auf (sowie ein $\tilde{c}$ - Geist). Im Gegensatz dazu kann man in der Theorie des geschlossenen Strings drei *komplexe* Variable fixieren, und es treten damit jeweils drei c-Geister im holomorphen und antiholomorphen Teil des Korrelators auf. In der gemischten Theorie entspricht auch die Summe der Bildladungen der der offenen Theorie, also gilt für alle Vertexoperatoren zusammen (offen plus beide Anteile des geschlossenen Vertexoperators): $(\sum \pi^+, \sum \pi^-) = (-2, -2)$. Damit ist es gerechtfertigt, von der gemischten Theorie als einer Modifizierung der offenen Theorie zu sprechen, bei der auch im Inneren der Weltfläche Vertexoperatoren liegen, ansonsten aber die gleichen Auswahlregeln wie im offenen Fall gelten.

Eine direkte Konsequenz aus den Auswahlregeln ist, daß bereits bei der einfachsten Drei-Punkt-Amplitude A_{ooc} nicht alle Variablen fixiert werden können. Es muß also entweder über den Real- oder Imaginärteil der komplexen Variable oder aber über eine der beiden reellen Variablen integriert werden. Da aber Real- und Imaginärteil eines geschlossenen Vertexoperators unabhängig voneinander fixiert werden können, ist die Einsetzung des c-Geist-Korrelators in die Korrelationsfunktion nicht mehr eindeutig. Fixiert man beispielsweise nur den Realteil eines geschlossenen Vertexoperators, so stellt sich die Frage, ob der entsprechende c-Geist an der Stelle z oder aber am Ort $\overline{z}$ in den Korrelator einzusetzen ist, was zu unterschiedlichen Ergebnissen führt. Um dieses zu klären, müßten die BRST-invarianten geschlossenen Vertexoperatoren für die Scheibentopologie neu bestimmt werden. Die Berechnung dieser BRST-Kohomologie geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Deshalb wird für alle gemischten Amplituden bei der Fixierung anstelle des Geistkorrelators die zugehörige Jacobideterminante (vgl. Abschnitt 5.3) direkt berechnet.

5.2 Die Fixierung der Vertexoperatoren in der oberen Halbebene

Bei den gemischten Amplitudenberechnungen muß die verbleibende $SL(2,\mathbb{R})$-Symmetrie durch Fixierung dreier reeller Positionsvariablen berücksichtigt werden. Allerdings trügt die naive Annahme, daß alle Fixierungen erlaubt seien.

Es sind natürlich besonders die Fixierungen interessant, die entweder die auszuführenden Integrale deutlich vereinfachen oder eine Symmetrie aufweisen, die im Idealfall die Integration gänzlich unnötig macht (zum Beispiel weil der verbleibende Integrand eine ungerade Funktion einer von $-\infty$ bis ∞ zu integrierenden Variable ist). Es soll jetzt gezeigt werden, wie Aussagen über die Legalität bestimmter Fixierungen getroffen werden können.

Die generelle Form einer $SL(2,\mathbb{R})$-Transformation ist gegeben durch die Möbiustransformation $z \to z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ mit der Bedingung $ad - bc = 1$. Eine direkte, aber wenig elegante Methode zur Identifizierung der erlaubten Transformationen ist, für drei beliebige Punkte die Transformation zu bestimmen, welche die entsprechende Fixierung bewirkt. Da eine beliebige Lösung mit $ad - bc = \frac{1}{\lambda^2}$ durch Reskalierung $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c, d' = \lambda d$ auf die gewünschte Form $ad - bc = 1$ gebracht werden kann, zeigt sich eine unerlaubte Fixierung daran, daß das Gleichungssystem für die {a,b,c,d} nur die Lösungen $a \vee d = 0$ und $b \vee c = 0$ zuläßt, die Determinante der „Möbiustransformation" also identisch Null ist.

Als Beispiel diene hierzu eine Fixierung, die in vielen Fällen zu stark vereinfachten Ausdrücken führt, aber verboten ist. Seien $u, v, z \in \mathbb{C}^+$ die Koordinaten der zu fixierenden Vertexoperatoren. Wähle $Re(u') = 0 = Re(v') = Re(z')$ mit u', v', z' durch die Möbiustransformation (siehe oben) gegeben.

Mit $u = u_x + iu_y$, $v = v_x + iv_y$ und $z = z_x + iz_y$ erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{I} : ac(u_x^2 + u_y^2) + (ad + bc)u_x + bd = 0 \\ \mathrm{II} : ac(v_x^2 + v_y^2) + (ad + bc)v_x + bd = 0 \\ \mathrm{III} : ac(z_x^2 + z_y^2) + (ad + bc)z_x + bd = 0. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat nur die obengenannten trivialen Lösungen $a \vee d = 0$ und $b \vee c = 0$. Die entsprechende Möbiustransformation bildet also jeden Punkt auf Null ab, verletzt aber die Bedingung $ad - bc = 1$. Folglich ist diese keine erlaubte $SL(2, \mathbb{R})$-Fixierung.

In vielen Fällen ist die Methode, das Gleichungssystem der $\{a, b, c, d\}$ zu lösen, sehr unhandlich und mit großem Rechenaufwand verbunden. Es ist deshalb oft von Vorteil, geometrische Überlegungen anzustellen.

Man betrachte dazu die obere komplexe Halbebene $\mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$, die ja unter Anwendungen der Möbiustransformationen invariant ist, d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$ ist auch $z' = \dfrac{az + b}{cz + d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ wiederum in $\mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$. Für Möbiustransformationen gilt der wichtige Satz:

Kreise und Geraden werden auf Kreise oder Geraden abgebildet (zum Beweis siehe z.B. [17]).

Als besonders vorteilhaft erweist es sich deshalb, die sogenannten „Orthokreise" zu betrachten. So werden die Kreise bezeichnet, welche die reelle Achse unter einem rechten Winkel schneiden. Zwei Punkte auf der oberen Halbebene bestimmen bereits eindeutig einen Orthokreis.

Da Möbiustransformationen winkeltreue Abbildungen sind, werden Orthokreise auf Orthokreise abgebildet (man beachte, daß auch die imaginäre Achse per definitionem ein Orthokreis ist).

Die Möbiustransformationen werden durch Translationen und Dehnungen des Orthokreises sowie Verschiebungen der Punkte auf dem Orthokreis dargestellt (es kann hierbei nur einer der Punkte auf einem Orthokreis frei verschoben werden, da der jeweilige *hyperbolische Abstand* zweier Punkte auf dem Kreis erhalten bleiben muß). Insbesondere kann jeder Orthokreis durch Translation eines der Schnittpunkte auf den Ursprung und anschließende Dehnung des anderen nach ∞ bzw. $-\infty$ auf die imaginäre Achse abgebildet werden.

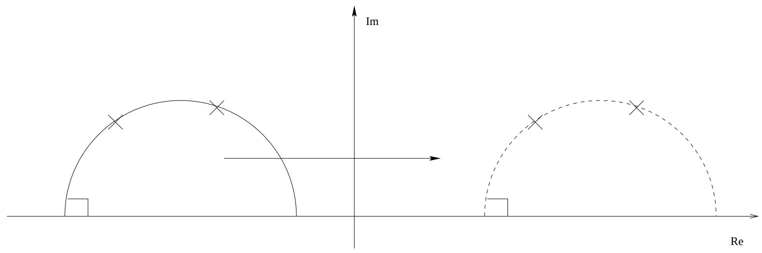


Abbildung 2: Translation des Orthokreises

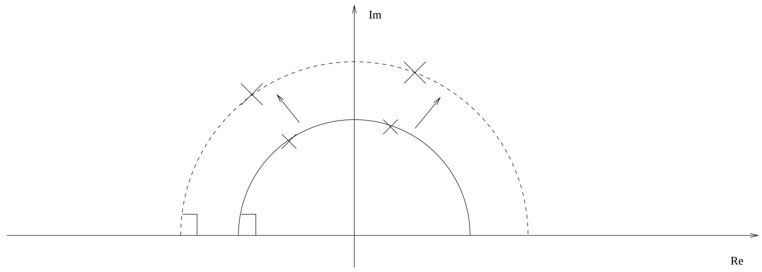


Abbildung 3: Dehnung des Orthokreises

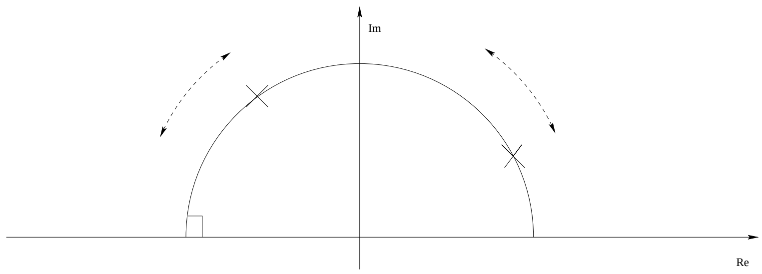


Abbildung 4: Verschiebungen der Punkte auf dem Orthokreis

Der Nutzen dieses Konzepts soll an einem Beispiel demonstriert werden. Bei der Berechnung der Amplitude A_{ooc} (vgl. Abschnitt 5.4, dort wird aber eine andere Fixierung gewählt) ist eine erlaubte Fixierung dadurch gegeben, daß der geschlossene Vertexoperator auf i fixiert wird und die beiden reellen Vertexoperatoren auf x und $-x$ ($x \in [0, \infty]$).

In Abschnitt 5.6 wird die Amplitude $\langle ccc \rangle_D$ berechnet, also eine Amplitude, bei der drei komplexe Vertexoperatoren in der oberen Halbebene liegen. Naiv betrachtet, scheint eine äquivalente Fixierung der drei Vertexoperatoren auf $ia, x+iy$ und $-x+iy$ $(a, y \in [0,\infty], x \in [-\infty,\infty])$ möglich zu sein.

Dieses ist aber nicht der Fall! Man betrachte dazu die Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^+$. Fixiere o.B.d.A. z_1 auf $x+iy$ und z_2 auf $-x+iy$. Mit Hilfe der Orthokreise läßt sich dieses wie folgt beschreiben:

Lege durch z_1 und z_2 den *eindeutig* bestimmten Orthokreis. Verschiebe die Schnittpunkte mit der reellen Achse bis diese symmetrisch um die imaginäre Achse liegen.

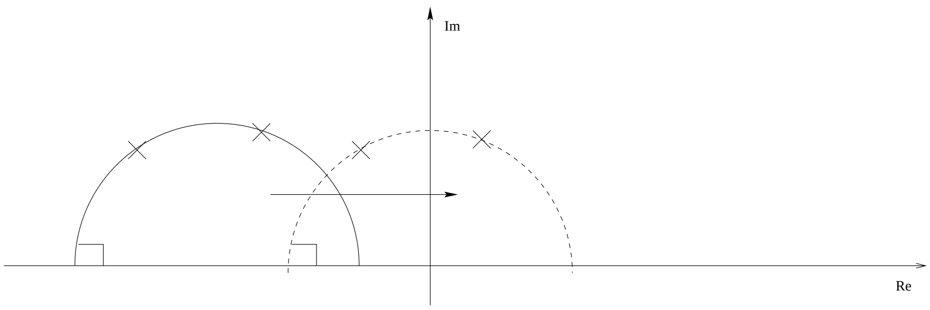


Abbildung 5: Verschiebung des Orthokreises

Drehe z_1 und z_2 auf dem Orthokreis, so daß sie den gleichen Imaginärteil haben.

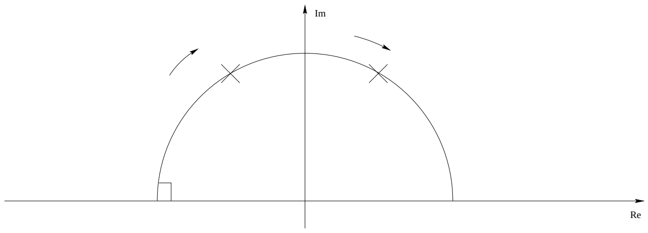


Abbildung 6: Drehung von z_1 und z_2

Damit ist der erste Schritt der Fixierung beendet. Jetzt muß der dritte Punkt z_3 auf die imaginäre Achse verschoben werden. Es ist aber sofort einsichtig, daß dieses nicht mehr möglich ist. Die einzig verbleibende Art von Möbiustransformation, die die Symmetrie der z_1 und z_2 auf dem Orthokreis erhält, ist die Dehnung. Durch die ersten beiden Manipulationen ist der Punkt z_3 irgendwo auf oberen Halbebene gelandet - aber nur in Ausnahmefällen bereits auf der imaginären Achse. Durch eine Dehnung alleine ist es aber unmöglich, einen beliebigen nichtverschwindenden Realteil auf Null abzubilden. Folglich ist die gesamte Fixierung nicht erlaubt.

Geometrisch sofort einsichtig ist auch, warum die erste Fixierung dieses Abschnitts, also die dreier Vertexoperatoren auf die imaginäre Achse, nicht möglich ist. Um nämlich drei Punkte auf eine beliebige Gerade abzubilden, müssen diese vor der Transformation auf dem gleichen Orthokreis liegen. Da aber bereits zwei Punkte einen Orthokreis eindeutig festlegen, ist diese Bedingung für drei beliebige Punkte in der oberen Halbebene natürlich nicht erfüllbar.

5.3 Die Jacobideterminante der Fixierungen

Bei der $SL(2,\mathbb{R})$-Fixierung ist die Jacobideterminante dieser Variablentransformation zu berücksichtigen. Dazu genügt es, die infinitesimale Form der $SL(2,\mathbb{R})$-Transformationen zu betrachten, die auf der oberen komplexen Halbebene durch die *reellen* Virasorogeneratoren

$$K_{-1} = \frac{1}{2}(L_{-1} + \overline{L}_{-1}) \tag{5.4}$$

$$K_0 = \frac{1}{2}(L_0 + \overline{L}_0) \tag{5.5}$$

$$K_{+1} = \frac{1}{2}(L_{+1} + \overline{L}_{+1}) \tag{5.6}$$

erzeugt werden. Hierbei sind die L_i $(i = -1, 0, 1)$ gegeben durch die gewöhnlichen $SL(2,\mathbb{C})$-Generatoren

$$\begin{aligned} L_{-1} &= \partial_z, & \overline{L}_{-1} &= \partial_{\overline{z}} \\ L_0 &= z\partial_z, & \overline{L}_0 &= \overline{z}\partial_{\overline{z}} \\ L_{+1} &= z^2\partial_z, & \overline{L}_{+1} &= \overline{z}^2\partial_{\overline{z}}. \end{aligned}$$

Mit $z = x + iy$ und $\partial_z = \partial_x - i\partial_y$, $\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$ ergibt sich:

$$K_{-1} = \partial_x \tag{5.7}$$

$$K_0 = x\partial_x + y\partial_y \tag{5.8}$$

$$K_{+1} = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y\,. \tag{5.9}$$

Damit ist die Zerlegung des Problems in Real- und Imaginärteil gelungen, die jetzt entsprechend unabhängig fixiert werden können. Für die offenen Vertexoperatoren, die sich auf der reellen Achse befinden, gelten die äquivalenten Beziehungen, wenn man beachtet, daß $L = \overline{L}$ und $z \in \mathbb{R}$ gilt.

Eine infinitesimale $SL(2,\mathbb{R})$-Transformation kann geschrieben werden als:

$$z \longrightarrow z' = z + (\alpha K_{-1} + \beta K_0 + \gamma K_1)z.$$

Um die entsprechende Jacobideterminante zu erhalten, variiert man die zu fixierenden Variablen nach den Variationsparametern α, β, γ. Dieses sei an zwei Beispielen erläutert:

Betrachte die Amplitude $< ccc >_D$. Für die Fixierung $z_1 \equiv x_1 + iy_1 \rightarrow i$ und $z_2 \equiv x_2 + iy_2 \rightarrow iy$ $(y \in \mathbb{R})$ erhält man die Jacobideterminante:

$$J \;= det\left(\frac{\partial(x_1, y_1, x_2)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 - y_1^2 \\ 0 & y_1 & 2x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - y_2^2 \end{vmatrix}$$

und mit $x_1' = x_2' = 0, y_1' = 1, y_2' = y$ ergibt sich

$$J = 1 - y^2. \tag{5.10}$$

Bei der Berechnung der Amplitude A_{ooc} wird einer der beiden offenen Vertexoperatoren (mit reeller Koordinate a) auf $a' = \infty$ und der geschlossene Vertexoperator (mit Koordinate $z = x + iy$) auf $z' = i$ fixiert (der Realteil also Null gesetzt). Die Jacobideterminante ergibt sich dann zu:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & x & x^2 - y^2 \\ 0 & y & 2xy \end{vmatrix}.$$

Mit $x' = 0, y' = 1$ folgt

$$J = a'^2 + 1. \tag{5.11}$$

Es sei noch erwähnt, daß für die Streuamplituden in der reinen offenen bzw. geschlossenen Theorie die Jacobideterminante gerade den Korrelator der c-Geister ergibt (vgl. [13]).

5.4 A_{ooc}

Zum „Aufwärmen" folgt die Berechnung der Drei-Punkt-Amplitude A_{ooc}. In der Notation, die ab jetzt verwendet wird, werden komplexe Variablen mit z bezeichnet, bei mehreren geschlossenen Vertexoperatoren wird entweder ein Index i angehängt oder die Variablen werden mit u, v und z bezeichnet. Reelle Variable hingegen sind a, b, x oder y.

Der Vertexoperator des geschlossenen Strings ist durch vier verschiedene Bildladungen gekennzeichnet, zwei im holomorphen und zwei im antiholomorphen Teil.

Der geschlossene String-Vertexoperator wird im $(-1,0)$-Bild gewählt:

$$V^{\int\int}_{(-1,0;-1,0)} = \int\limits_{\mathbb{C}^+} d^2z\; k_1^+\Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_1X}(z) k_1^+\Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_1X}(\overline{z}).$$

Die beiden offenen Vertexoperatoren sind im $(0,-1)$-Bild:

$$V^{\int}_{(0,-1)} = \int da\; k_2^-\Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_2X}(a)$$
$$V^{\int}_{(0,-1)} = \int dx\; k_3^-\Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_3X}(x).$$

Der Integrationsbereich ist die gesamte reelle Achse, der Punkt a wird später auf ∞ fixiert, die Variable z auf $z' = i$. Damit ergeben sich aus

$$A_{ooc} = \langle V^{\int\int}_{(-1,0;-1,0)} V^{\int}_{(0,-1)} V^{\int}_{(0,-1)} \rangle$$

die Korrelatoren

$$\langle e^{-\varphi^-}(z) e^{-\varphi^-}(\overline{z}) e^{-\varphi^+}(a) e^{-\varphi^+}(x)\rangle = \frac{1}{(z-\overline{z})(a-x)}$$
$$\langle k_1^+\Psi^-(z) k_1^+\Psi^-(\overline{z}) k_2^-\Psi^+(a) k_3^-\Psi^+(x)\rangle = k_{12}^+ k_{13}^+ \left(\frac{1}{(z-x)(\overline{z}-a)} - \frac{1}{(z-a)(\overline{z}-x)}\right).$$

Der Koba-Nielsen-Term gibt gerade Eins, da aufgrund der Kinematik alle Produkte k_{ij} verschwinden:

$$\langle e^{ik_1X}(z) e^{ik_1X}(\overline{z}) e^{ik_2X}(a) e^{ik_3X}(x)\rangle = 1\ .$$

Damit ergibt sich zunächst:

$$A_{ooc} = k_{12}^+ k_{13}^+ \int\limits_{\mathbb{C}^+} d^2z \int da \int dx\; \frac{1}{(z-\overline{z})(a-x)} \left(\frac{1}{(z-x)(\overline{z}-a)} - \frac{1}{(z-a)(\overline{z}-x)}\right).$$

Vor der Integration wird die Fixierung $a' = \infty, z' = i$ durchgeführt. Die Jacobideterminante ist dann $J = a'^2 + 1$. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} A_{ooc} &= \frac{1}{2i} k_{12}^+ k_{13}^+ \int dx\; \left(\frac{1}{-i-x} - \frac{1}{i-x}\right) \\ &= k_{12}^+ k_{13}^+ \int dx\; \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Das Integral ist elementar lösbar: $\displaystyle\int dx\; \frac{1}{x^2+1} = \pi.$

Die Amplitude ist symmetrisch unter Vertauschung der beiden offenen Vertexoperatoren und folglich ist $tr(T^aT^b) = \delta^{ab}$. Insgesamt ergibt sich also:

$$\boxed{A_{ooc} = \delta^{ab}\pi k_{12}^+ k_{13}^+ = -\delta^{ab}\pi (k_{12}^+)^2}. \tag{5.12}$$

5.5 A_{occ}

Die nächstkompliziertere Amplitude ist die Drei-Punkt-Amplitude A_{occ}.

Hierbei werden die Vertexoperatoren wieder entsprechend den Auswahlregeln gewählt, der offene und einer der beiden geschlossenen Vertexoperatoren werden fixiert, über den zweiten geschlossenen Vertexoperator wird integriert. Die Integration läuft hierbei über die obere komplexe Halbebene $\mathbb{C}^+$.

Der offene Vertexoperator wird im $(0,0)$-Bild gewählt:

$$V^{\int}_{(0,0)} = \int da\, \{(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+) - i(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)\}\, e^{ik_1X}(a).$$

Die Variable, die später auf den Wert i fixiert wird, wird mit w bezeichnet. Die Integrationsvariable ist z. Wähle für den w-Vertexoperator

$$V^{\int\int}_{(-1,0;-1,0)} = \int_{\mathbb{C}^+} d^2w\; k_2^+\Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_2X}(w)c\, k_2^+\Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_2X}(\overline{w}).$$

Der zweite geschlossene Vertexoperator lautet:

$$V^{\int\int}_{(0,-1;0,-1)} = \int_{\mathbb{C}^+} d^2z\; k_3^-\Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_3X}(z) k_3^-\Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_3X}(\overline{z}).$$

Anhand des offenen Vertexoperators sieht man, daß zwei Terme zu unterscheiden sind. In beiden Fällen hat man den gleichen Vorfaktor, der sich aus den Korrelatoren der Geister ergibt:

$$\langle e^{-\varphi^-}(w)e^{-\varphi^-}(\overline{w})e^{-\varphi^+}(z)e^{-\varphi^+}(\overline{z})\rangle = \frac{1}{(w-\overline{w})(z-\overline{z})}.$$

Es werden jetzt die beiden Teile separat untersucht: zunächst der Anteil mit $(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+)$, der mit I bezeichnet wird. Dieser zerfällt wieder in zwei Summanden, die aber eine vergleichbare Struktur haben. Es reicht deshalb, sich um den in der Folge mit a) bezeichneten Term $\langle k_1^+\partial X^- e^{ik_1X}(a)e^{ik_2X}(w)e^{ik_2X}(\overline{w})e^{ik_3X}(z)e^{ik_3X}(\overline{z})\rangle$ zu kümmern. Bei der Berechnung wird ein weiterer Korrelator benötigt:

$$k_i^+\partial X^-(a)e^{ik_jX(w)} \sim -\frac{i}{2}\frac{+k_j^-}{a-w} : e^{i(k_i+k_j)X(w)} : \qquad \text{(offen-geschlossen)}$$

$$k_i^+\partial X^-(z)e^{ik_jX(w)} \sim -\frac{i}{4}\frac{+k_j^-}{z-w} : e^{i(k_i+k_j)X(w)} : \quad \text{(geschlossen-geschlossen)}.$$

Mit der Zerlegung $e^{ikX} = e^{\frac{i}{2}(k^+X^- + k^-X^+)}$ ergibt die Rechnung dann:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ia}) = &-\frac{i}{2}\Big(\frac{k_{12}^+}{a-w} + \frac{k_{12}^+}{a-\overline{w}} + \frac{k_{13}^+}{a-z} + \frac{k_{13}^+}{a-\overline{z}}\Big) \\ &\times \big\{|a-w|^{k_{12}}|a-z|^{k_{13}}|w-z|^{k_{23}}\big\}.\end{aligned}$$

Da aufgrund der Kinematik einer Drei-Punkt-Amplitude wiederum gilt $k_{12} = k_{13} = k_{23} = 0$, ist der Term in der geschweiften Klammer gerade gleich Eins. Für den äquivalenten Ausdruck b) müssen lediglich k_i^+ und k_j^- jeweils vertauscht werden.

Es fehlt noch der Ψ-Korrelator für Teil I:

$$\langle k_2^+\Psi^-(w)k_2^+\Psi^-(\overline{w})k_3^-\Psi^+(z)k_3^-\Psi^+(\overline{z})\rangle = \frac{1}{4}k_{23}^+k_{23}^+\Big(\frac{1}{|w-\overline{z}|^2} - \frac{1}{|w-z|^2}\Big).$$

Insgesamt ergibt sich für Teil I:

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = &-\frac{F}{4}\int\limits_{\mathbb{C}^+} d^2z\,\frac{1}{(w-\overline{w})(z-\overline{z})}\Big(\frac{1}{|w-z|^2} - \frac{1}{|w-\overline{z}|^2}\Big) \\ &\times \Big\{i(k_{13}^+ - \overline{k_{13}^+})\frac{a-Re(z)}{|a-z|^2} + i(k_{12}^+ - \overline{k_{12}^+})\frac{a-Re(w)}{|a-w|^2}\Big\}.\end{aligned}$$

Hierbei ist $F = (k_{23}^+)^2$.

Jetzt wird der offene Vertex auf $a' = 0$ fixiert (möglich wäre auch z.B. $a' = \infty$), der geschlossene auf $w' = i$. Damit ist die Jacobideterminante gerade Eins, so daß sich nach kurzer Rechnung ergibt

$$\mathrm{I} = -\frac{iF}{4}(k_{13}^+ - \overline{k_{13}^+})\int\limits_{\mathbb{C}^+} d^2z\,\frac{Re(z)}{|z-i|^2|z+i|^2|z|^2}.$$

Der Integrand ist eine ungerade Funktion von $Re(z)$. Bei der Integration über $\mathbb{C}^+$ wird der Realteil von $-\infty$ bis ∞ integriert, das Integral verschwindet also, man erhält:

$$\mathrm{I} = 0.$$

Die Berechnung des zweiten Terms II (mit $-i(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)$) ist ebenso elementar durchführbar.

Der Korrelator der Exponentialfunktionen liefert gerade wieder eine Eins, der Ψ-Korrelator ergibt:

$$\begin{aligned}&-i\langle(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)(a)k_2^+\Psi^-(w)k_2^+\Psi^-(\overline{w})k_3^-\Psi^+(z)k_3^-\Psi^+(\overline{z})\rangle \\ &= -\frac{i}{2}k_{13}^+\overline{k_{12}^+}k_{23}^+\Big\{\frac{1}{(a-z)(a-w)(\overline{w}-\overline{z})} + \frac{1}{(a-\overline{w})(a-\overline{z})(w-z)} - \\ &\frac{1}{(a-z)(a-\overline{w})(w-\overline{z})} - \frac{1}{(a-\overline{z})(a-w)(\overline{w}-z)}\Big\}.\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $G := k^+_{13}\overline{k^+_{12}}k^+_{23}$ ergibt sich für II:

$$\mathrm{II} = -\frac{i}{2}G\int\limits_{\mathbb{C}+} d^2z \,\frac{1}{(w-\overline{w})(z-\overline{z})}\left\{\frac{1}{(a-z)}\left(\frac{1}{(a-\overline{w})(w-\overline{z})} - \frac{1}{(a-w)(\overline{w}-z)}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(a-\overline{z})}\left(\frac{1}{(a-\overline{w})(w-z)} - \frac{1}{(a-w)(\overline{w}-z)}\right)\right\}.$$

Nach der Fixierung (siehe oben) erhält man durch elementare Umformungen

$$\mathrm{II} = iG\int\limits_{\mathbb{C}+} d^2z \,\frac{Re(z)}{|z-i|^2|z+i|^2|z|^2}.$$

Der Integrand ist identisch mit dem aus I, also verschwindet auch dieses Integral.

Insgesamt ergibt sich folglich:

$$\boxed{A_{occ} = 0}. \tag{5.13}$$

5.6 Die geschlossene Drei-Punkt-Amplitude auf der Scheibe

Obwohl keine *gemischte* Amplitude im eigentlichen Sinne, ist es doch sinnvoll, die geschlossene Drei-Punkt-Amplitude auf der Scheibe ($\langle ccc\rangle_D$) an dieser Stelle zu behandeln. Der Streuprozeß, der dieser Amplitude zugrunde liegt, läßt sich anschaulich als gewöhnliche geschlossene Drei-Punkt-Amplitude denken, bei der sich ein String zwischenzeitlich öffnet und dann wieder schließt. Dieser Prozeß stellt somit eine Korrektur zur Drei-Punkt-Amplitude des geschlossenen Strings dar. Die drei Strings leben im Gegensatz zur reinen Theorie auf der Scheibe, diese hat Euler-Charakteristik $\chi = 1$ (die Sphäre hat $\chi = 2$). Ein-Loop-Korrekturen werden in der Stringtheorie auf Weltflächen mit Euler-Charakteristik $\chi = 0$ berechnet. Der $\langle ccc\rangle_D$-Streuprozeß stellt also ein Tree-Diagramm höherer Ordnung dar.

Die Vertexoperatoren werden wie folgt gewählt:

$$V^{\int\int}_{(0,0;0,0)} = \int\limits_{\mathbb{C}+} d^2u \,\left\{[(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+) - i(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)]\, e^{ik_1X}(u)\right\}$$
$$\times\left\{[(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+) - i(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)]\, e^{ik_1X}(\overline{u})\right\}$$
$$V^{\int\int}_{(-1,0;-1,0)} = \int\limits_{\mathbb{C}+} d^2v \; k_2^+\Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_2X}(v) k_2^+\Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_2X}(\overline{v})$$
$$V^{\int\int}_{(0,-1;0,-1)} = \int\limits_{\mathbb{C}+} d^2z \; k_3^-\Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_3X}(z) k_3^-\Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_3X}(\overline{z}).$$

Nach der Berechnung der Korrelatoren erfolgt die Fixierung $v' = i, z' = iy$. Damit wird die Jacobi-Determinante gerade $(1-y^2)$ und folglich $d^2v\, d^2z \longrightarrow |1-y^2|\, dy$. Eine genauere Analyse der Fixierung zeigt, daß nach der Transformation des ersten Vertexoperators auf $v' = i$ der z-Vertexoperator *entweder* im Intervall $y \in]0, 1]$ *oder* im Intervall $y \in [1, \infty[$ fixiert werden kann.

Dazu zerlegt man die Fixierung in zwei Einzelschritte. Zunächst transformiert man den Vertexoperator an der Postion $v = v_x + iv_y$ durch die Möbiustransformation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_y}} \begin{pmatrix} 1 & -v_x \\ 0 & v_y \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

auf den Punkt $v' = i$. Der zweite zu fixierende Vertexoperator wird jetzt durch eine Drehung (elliptische Abbildung) um i auf die imaginäre Achse gebracht. Die entsprechende Möbiustransformation ist von der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Das Gleichungssystem für die vollständige Fixierung hat zwei Lösungen. Eine Lösung bringt den z-Vertexoperator oberhalb von i und eine zwischen i und der reellen Achse auf die imaginäre Achse.

Geometrisch ist dieses sofort einsichtig. Dazu denke man sich am Ort i eine elektrische Ladung und die reelle Achse auf konstantem Potential. Dann bedeutet die Drehung des z-Vertexoperators um den Punkt i eine Verschiebung entlang der Äquipotentiallinien dieser Anordnung.

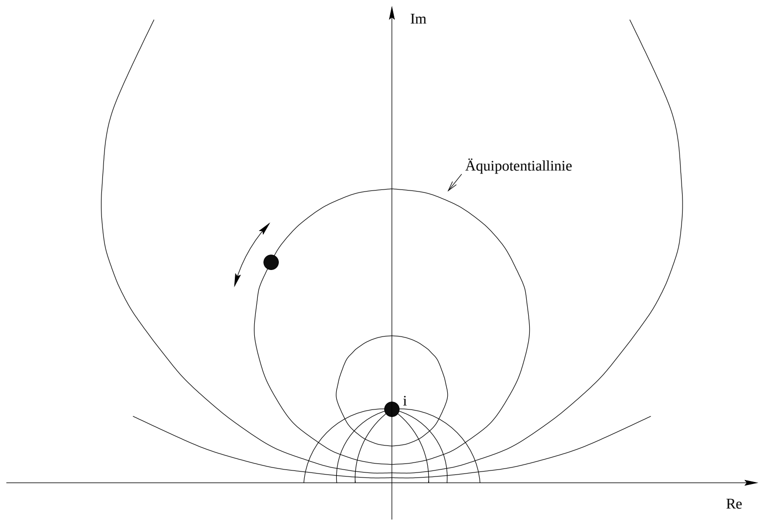


Abbildung 7: Fixierung des zweiten Vertexoperators

Es ist offensichtlich, daß jede Äquipotentiallinie zwei Schnittpunkte mit der imaginären Achse hat, es also zwei Möglichkeiten der Fixierung gibt.

Dieses hat zur Folge, daß eine Integration über die gesamte imaginäre Achse das Volumen der $SL(2,\mathbb{R})$ doppelt zählen würde. Folglich ist die Integration auf eines der beiden obengenannten Intervalle einzuschränken. Der Integrationsbereich wird hier o.B.d.A von Eins bis Unendlich gewählt.

Am ersten Vertexoperator erkennt man, daß das Problem in vier Terme zerfällt. Der gemeinsame Vorfaktor ist

$$\langle e^{-\varphi^-}(v)e^{-\varphi^-}(\overline{v})e^{-\varphi^+}(z)e^{-\varphi^+}(\overline{z})\rangle = \frac{1}{(v-\overline{v})(z-\overline{z})}.$$

Die vier Terme sind:

I:

$$\begin{aligned}
&\langle(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+)e^{ik_1X}(u)(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+)e^{ik_1X}(\overline{u})e^{ik_2X}(v)e^{ik_2X}(\overline{v}) \\
&\times e^{ik_3X}(z)e^{ik_3X}(\overline{z})\rangle\langle k_2^+\Psi^-(v)k_2^+\Psi^-(\overline{v})k_3^-\Psi^+(z)k_3^-\Psi^+(\overline{z})\rangle \\
&= -\frac{(k_{12}^+)^4}{16}\Big(\frac{1}{|v-\overline{z}|^2}-\frac{1}{|v-z|^2}\Big)\Big\{\Big[\Big(\frac{1}{u-v}+\frac{1}{u-\overline{v}}\Big)-\Big(\frac{1}{u-z}+\frac{1}{u-\overline{z}}\Big)\Big] \\
&\times\Big[\frac{1}{\overline{u}-v}+\frac{1}{\overline{u}-\overline{v}}-\frac{1}{\overline{u}-z}-\frac{1}{\overline{u}-\overline{z}}\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

II:

$$\begin{aligned}
&-i\langle(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+)e^{ik_1X}(u)e^{ik_1X}(\overline{u})e^{ik_2X}(v)e^{ik_2X}(\overline{v})e^{ik_3X}(z)e^{ik_3X}(\overline{z})\rangle \\
&\times\langle(k_1^+\Psi^-)(k_1^+\Psi^-)(\overline{u})(k_2^+\Psi^-)(v)k_2^+\Psi^-(\overline{v})k_3^-\Psi^+(z)k_3^-\Psi^+(\overline{z})\rangle \\
&=\frac{(k_{12}^+)^4}{16}\Bigg\{\Bigg[\Big(\frac{1}{u-v}+\frac{1}{u-\overline{v}}\Big)-\Big(\frac{1}{u-z}+\frac{1}{u-\overline{z}}\Big)\Bigg] \\
&\times\Bigg[\frac{1}{\overline{u}-z}\Big(\frac{1}{(\overline{u}-\overline{v})(v-\overline{z})}-\frac{1}{(\overline{u}-v)(\overline{v}-\overline{z})}\Big) \\
&\quad+\frac{1}{\overline{u}-\overline{z}}\Big(\frac{1}{(\overline{u}-v)(\overline{v}-z)}-\frac{1}{(\overline{u}-\overline{v})(v-z)}\Big)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}$$

III:

$$\begin{aligned}
&-i\langle e^{ik_1X}(u)(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+)e^{ik_1X}(\overline{u})e^{ik_2X}(v)e^{ik_2X}(\overline{v})e^{ik_3X}(z)e^{ik_3X}(\overline{z})\rangle \\
&\times\langle(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)(u)k_2^+\Psi^-(v)k_2^+\Psi^-(\overline{v})k_3^-\Psi^+(z)k_3^-\Psi^+(\overline{z})\rangle \\
&=\frac{(k_{12}^+)^4}{16}\Bigg\{\Bigg[\Big(\frac{1}{\overline{u}-v}+\frac{1}{\overline{u}-\overline{v}}\Big)-\Big(\frac{1}{\overline{u}-z}+\frac{1}{\overline{u}-\overline{z}}\Big)\Bigg] \\
&\times\Bigg[\frac{1}{u-z}\Big(\frac{1}{(u-\overline{v})(v-\overline{z})}-\frac{1}{(u-v)(\overline{v}-\overline{z})}\Big) \\
&\quad+\frac{1}{u-\overline{z}}\Big(\frac{1}{(u-v)(\overline{v}-z)}-\frac{1}{(u-\overline{v})(v-z)}\Big)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}$$

IV:

$$-\langle e^{ik_1X}(u)e^{ik_1X}(\overline{u})e^{ik_2X}(v)e^{ik_2X}(\overline{v})e^{ik_3X}(z)e^{ik_3X}(\overline{z})\rangle$$
$$\times\langle(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)(u)(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)(\overline{u})k_2^+\Psi^-(v)k_2^+\Psi^-(\overline{v})k_3^-\Psi^+(z)k_3^-\Psi^+(\overline{z})\rangle$$
$$=\frac{(k_{12}^+)^4}{16}\left\{(\frac{1}{|u-z|^2}-\frac{1}{|u-\overline{z}|^2})(\frac{1}{|u-v|^2}-\frac{1}{|u-\overline{v}|^2})\right\}.$$

Führt man jetzt die Fixierung $v' = i$, $z' = iy$ durch, so erhält man die folgenden Integrale ($u = u_x + iu_y$):

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}(k_{12}^+)^4 \int_{\mathbb{C}^+} d^2u \int_1^\infty dy\, \frac{(1-y^2)|u|^2}{|u-i|^2|u+i|^2|u-iy|^2|u+iy|^2}$$
$$\mathrm{II}+\mathrm{III} = -\frac{1}{2}(k_{12}^+)^4 \int_{\mathbb{C}^+} d^2u \int_1^\infty dy\, \frac{(1-y^2)|u|^2}{|u-i|^2|u+i|^2|u-iy|^2|u+iy|^2}$$
$$\mathrm{IV} = +\frac{1}{4}(k_{12}^+)^4 \int_{\mathbb{C}^+} d^2u \int_1^\infty dy\, \frac{(1-y^2)u_y^2}{|u-i|^2|u+i|^2|u-iy|^2|u+iy|^2}.$$

Die Integranden lassen sich zusammenfassen. Es verbleibt ein einziges Integral:

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{4}(k_{12}^+)^4 \int_{\mathbb{C}^+} d^2u \int_1^\infty dy\, \frac{(1-y^2)u_x^2}{|u-i|^2|u+i|^2|u-iy|^2|u+iy|^2}.$$

Um dieses Integral zu lösen, ist es zweckmäßig zunächst die komplexe Variable u durch Real- und Imaginärteil auszudrücken. Mit $u = a + ib$ ergibt sich:

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{4}(k_{12}^+)^4 \int_{-\infty}^{\infty} da \int_0^\infty db \int_1^\infty dy\, \frac{(1-y^2)a^2}{(a^4+b^4+2a^2b^2+2(a^2-b^2)+1)} \times \frac{1}{(a^4+b^4+2a^2b^2+2(a^2-b^2)y^2+y^4)}.$$

Es wird jetzt zunächst die Integration über a bei festem y und b durchgeführt. Die Pole des Integranden liegen bei $a = \pm i(b-1), \pm i(b+1), \pm i(y-b)$ und $\pm i(y+b)$. Das Linienintegral wird durch einen Halbkreis mit Radius $R \to \infty$ über der oberen Halbebene geschlossen. Für die Berechnung des Integrals ist dann eine Fallunterscheidung vorzunehmen. Im einzelnen ergibt sich für die Residuen:

$b > y > 1$

$$-\frac{i}{2}\frac{y^2-1}{b((2b+1)^2-y^2)((2b-1)^2-y^2)}$$

$y > b > 1$

$$-\frac{i}{4}\frac{b+y}{by((2b+y)^2-1)}$$

$y > 1 > b$

$$\frac{i}{4}\frac{y-1}{y(4b^2-(y+1)^2)}.$$

Es zeigt sich, daß die Integration über b jetzt problemlos durchzuführen ist, da innerhalb des jeweiligen Integrationsbereichs keine Pole auftreten und die Integranden offensichtlich reell sind. Führt man diese drei Integrationen getrennt durch und faßt anschließend die Ausdrücke zusammen, verbleibt das Integral:

$$2\pi i\frac{1}{4}(k_{12}^{+})^4\int_1^\infty dy\left\{\frac{i}{4}\frac{\ln(4y)}{y^2-1}+\frac{i}{8}\Big(\frac{y-1}{y(y+1)}\ln(y-1)-\frac{y+1}{y(y-1)}\ln(y+1)\Big)\right\}.$$

Eine sorgfältige Rechnung zeigt, daß dieses Integral existiert. Dazu integriert man die einzelnen Summanden in den Grenzen von k $(k>1)$ bis l $(l>k)$ und führt am Ende die Grenzübergänge $k\to 1, l\to\infty$ durch. Die dabei auftretenden Integrale sind [18][1]:

$$\int_k^l dy\frac{\ln(4y)}{2(y-1)} = \ln(2)\ln(l-1)-\ln(2)\ln(k-1)-\frac{1}{2}Li_2(l)+\frac{1}{2}Li_2(k)$$

$$\int_k^l dy\frac{\ln(4y)}{2(y+1)} = \ln(2)\ln(l+1)-\ln(2)\ln(k+1)+\frac{1}{2}\ln(l+1)\ln(l)$$
$$-\frac{1}{2}\ln(k+1)\ln(k)+\frac{1}{2}Li_2(l+1)-\frac{1}{2}Li_2(k+1)$$

[1] $Li_2(x)$ ist der Dilogarithmus, der durch $Li_2(x) := -\int_1^x dy\,\frac{\ln(y)}{y-1}$ definiert ist.

$$\int_k^l dy \frac{\ln(y+1)}{y} = -\,Li_2(l+1) + Li_2(k+1)$$

$$\int_k^l dy \frac{\ln(y+1)}{y-1} = \ln(2)\ln(l-1) - \ln(2)\ln(k-1) - Li_2(\frac{l+1}{2}) + Li_2(\frac{k+1}{2})$$

$$\int_k^l dy \frac{\ln(y-1)}{y} = \ln(l)\ln(l-1) - \ln(k)\ln(k-1) + Li_2(l) - Li_2(k)$$

$$\int_k^l dy \frac{\ln(y-1)}{y+1} = -\,\ln(2)\ln(l-1) + \ln(2)\ln(k-1) + \ln(l-1)\ln(l+1)$$
$$-\ln(k-1)\ln(k+1) + Li_2(\frac{l+1}{2}) - Li_2(\frac{k+1}{2}).$$

Unter Einbeziehung der Vorfaktoren erhält man insgesamt:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}(k_{12}^+)^4 \Bigg[& \frac{1}{4}\ln(2)\ln(l-1) + \frac{1}{4}\ln(2)\ln(l+1) + \frac{1}{8}\ln(l+1)\ln(l) \\ & - \frac{1}{4}\ln(l-1)\ln(l+1) + \frac{1}{8}\ln(l)\ln(l-1) + \frac{1}{4}Li_2(l) + \frac{1}{4}Li_2(l+1) \\ & - \frac{1}{2}Li_2(\frac{l+1}{2}) - \frac{1}{4}\ln(2)\ln(k-1) - \frac{1}{4}\ln(2)\ln(k+1) \\ & - \frac{1}{8}\ln(k+1)\ln(k) + \frac{1}{4}\ln(k-1)\ln(k+1) - \frac{1}{8}\ln(k)\ln(k-1) \\ & - \frac{1}{4}Li_2(k) - \frac{1}{4}Li_2(k+1) + \frac{1}{2}Li_2(\frac{k+1}{2}) \Bigg].\end{aligned}$$

Führt man zunächst den Grenzübergang $k \to 1$ durch, so verbleibt unter Ausnutzung von $Li_2(2) = -\frac{\pi^2}{12}$ von den k-abhängigen Termen ein Beitrag:

$$\frac{\pi}{2}(k_{12}^+)^4 \left[\frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{4}\ln(2)\ln(2)\right].$$

Um den Limes $l \to \infty$ durchführen zu können, benötigt man die Relation

$$\lim_{l\to\infty}\big(\ln(2)\ln(l) + Li_2(l) - Li_2(\frac{l}{2})\big) = \frac{1}{2}\ln(2)\ln(2).$$

Der Chan-Paton-Faktor ist gegeben durch $tr(1) = n$. Als Ergebnis ergibt sich für diese Drei-Punkt-Amplitude:

$$\boxed{A = n\frac{\pi^3}{96}(k_{12}^+)^4}. \qquad (5.15)$$

6 Die gemischten Vier-Punkt-Amplituden

Die Berechnung der Vier-Punkt-Amplituden unterscheidet sich erheblich an Komplexität von denen der Drei-Punkt-Amplituden. Dieses liegt zum einen daran, daß die Symmetriegruppe der oberen komplexen Halbebene nur die $SL(2,\mathbb{R})$ ist. Damit ist schon im einfachsten Fall - der A_{oooc} - eine Integration über die komplexe Variable durchzuführen. Der Hauptgrund ist aber, daß der Koba-Nielsen Term nicht mehr Eins ist, da für vier Impulse das Produkt $k_i k_j$ im allgemeinen ungleich Null ist.

6.1 A_{oooc}

Bei der Berechnung dieser Vier-Punkt-Amplitude werden die drei reellen Variablen x_1, x_2, x_3 fixiert, über die komplexe Variable z wird integriert.

Die offenen Vertexoperatoren werden wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned}
V^{\int}_{(-1,0)} &= \int dx_1\ k_1^+ \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_1X}(x_1) \\
V^{\int}_{(-1,0)} &= \int dx_2\ k_2^+ \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_2X}(x_2) \\
V^{\int}_{(0,0)} &= \int dx_3\ \{(k_3^+ \partial X^- - k_3^- \partial X^+) - i(k_3^+\Psi^-)(k_3^-\Psi^+)\}\ e^{ik_3X}\}(x_3).
\end{aligned}$$

Der geschlossene Vertexoperator ist dann:

$$V^{\int\int}_{(0,-1;0,-1)} = \int\limits_{\mathbb{C}^+} d^2z\ k_4^- \Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_4X}(z) k_4^- \Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_4X}(\overline{z}).$$

Wie bei der Drei-Punkt-Amplitude A_{occ} zerfällt das Problem wieder in zwei Terme, die einzeln betrachtet werden. In beiden Fällen gibt es den Vorfaktor:

$$\langle e^{-\varphi^-}(x_1) e^{-\varphi^-}(x_2) e^{-\varphi^+}(z) e^{-\varphi^+}(\overline{z})\rangle = \frac{1}{(x_1-x_2)(z-\overline{z})}.$$

Betrachtet wird jetzt zunächst der Term I (der den Anteil $(k_3^+\partial X^- - k_3^-\partial X^+)$ enthält). Der Ψ-Korrelator gibt

$$\begin{aligned}
&\langle k_1^+\Psi^-(x_1) k_2^+\Psi^-(x_2) k_4^-\Psi^+(z) k_4^-\Psi^+(\overline{z})\rangle \\
&= k_{14}^+ k_{24}^+ \Big(\frac{1}{(x_1-\overline{z})(x_2-z)} - \frac{1}{(x_1-z)(x_2-\overline{z})}\Big).
\end{aligned}$$

Der Korrelator der bosonischen Felder X liefert

$$\begin{aligned}
&\langle e^{ik_1X}(x_1) e^{ik_2X}(x_2) k_3^+\partial X^- e^{ik_3X}(x_3) e^{ik_4X}(z) e^{ik_4X}(\overline{z})\rangle = \\
&(x_1-x_2)^{k_{12}}(x_1-x_3)^{k_{13}}(x_2-x_3)^{k_{23}}|x_1-z|^{k_{14}}|x_2-z|^{k_{24}}|x_3-z|^{k_{34}} \\
&\times \Big\{ -ik_3^+\Big(\frac{-k_1^-}{x_1-x_3} - \frac{-k_2^-}{x_2-x_3} + \frac{1}{2}k_4^-\Big(\frac{1}{x_3-z} + \frac{1}{x_3-\overline{z}}\Big)\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

und einen entsprechenden Ausdruck für $k_3^- \partial X^+$.

Jetzt werden die reellen Variablen fixiert, und zwar auf

$$x_1' = 0, \quad x_2' = 1 \quad \text{und} \quad x_3' = \infty.$$

Die Jacobideterminante ist dann $J = x_3^2 - x_3$. Es treten wieder scheinbar divergente Ausdrücke auf, z.B. $x_3^{k_{13}+k_{23}+k_{34}}$. Der Exponent verschwindet aber aufgrund der Kinematik (vgl. (4.14)), der Term ist also gleich Eins. Nach einigen Vereinfachungen ergibt sich das folgende Integral:

$$\mathrm{I} = ik_{14}^+ k_{24}^+ \int_{\mathbb{C}^+} d^2z\ |z|^{k_{14}-2} |1-z|^{k_{24}-2} \big\{ (\overline{k_{23}^+} - k_{23}^+) + \frac{1}{2}(k_{34}^+ - \overline{k_{34}^+})(z+\overline{z}) \big\}.$$

Der Integrand ist offensichtlich invariant unter Vertauschung von z und $\overline{z}$. Deshalb ist es legitim, den Integrationsbereich auf die ganze komplexe Ebene auszuweiten und dieses Integral mit Hilfe von (4.15) zu lösen. Man erhält

$$\mathrm{I} = \frac{i}{2} B k_{14}^+ k_{24}^+ (\overline{k_{23}^+} - k_{23}^+ - (k_{34}^+ - \overline{k_{34}^+}) \frac{k_{14}}{k_{34}}),$$

wobei

$$B = \frac{\sin(\pi \frac{k_{12}}{2}) \sin(\pi \frac{k_{24}}{2})}{\sin(-\pi \frac{k_{34}}{2})} \frac{\Gamma^2(\frac{k_{14}}{2}) \Gamma^2(\frac{k_{24}}{2})}{\Gamma^2(-\frac{k_{34}}{2})}. \tag{6.1}$$

Für den zweiten Term II (mit $(k_3^+ \Psi^-)(k_3^- \Psi^+)$) sind die beiden Korrelatoren

$$\begin{aligned}
-i\langle & k_1^+ \Psi^-(x_1) k_2^+ \Psi^-(x_2) (k_3^+ \Psi^-)(k_3^- \Psi^+)(x_3) k_4^- \Psi^+(z) k_4^- \Psi^+(\overline{z}) \rangle \\
&= 2i \big\{ \frac{k_{13}^+ k_{24}^+ k_{34}^+}{(x_1 - x_3)} \big(\frac{1}{(x_2 - \overline{z})(x_3 - z)} - \frac{1}{(x_2 - z)(x_3 - \overline{z})} \big) \\
&+ \frac{k_{14}^+ k_{23}^+ k_{34}^+}{x_2 - x_3} \big(\frac{1}{(x_1 - z)(x_3 - \overline{z})} - \frac{1}{(x_1 - \overline{z})(x_3 - z)} \big) \big\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\langle e^{ik_1X}(x_1) e^{ik_2X}(x_2) e^{ik_3X}(x_3) e^{ik_4X}(z) e^{ik_4X}(\overline{z}) \rangle = (x_1 - x_2)^{k_{12}} (x_1 - x_3)^{k_{13}} \\
&\times (x_2 - x_3)^{k_{23}} |x_1 - z|^{k_{14}} |x_2 - z|^{k_{24}} |x_3 - z|^{k_{34}}
\end{aligned}$$

zu berechnen.

Führt man jetzt wieder die Fixierung durch, so verbleibt das Integral:

$$\mathrm{II} = 2i \int_{\mathbb{C}^+} d^2z\ |z|^{k_{14}} |1-z|^{k_{24}} \big\{ \frac{k_{13}^+ k_{24}^+ k_{34}^+}{|1-z|^2} - \frac{k_{14}^+ k_{23}^+ k_{34}^+}{|z|^2} \big\}.$$

Hier gilt wiederum, daß der Integrationsbereich gefahrlos auf die gesamte komplexe Ebene ausgeweitet werden darf. Es ergibt sich:

$$\mathrm{II} = iB\{k_{13}^+ k_{24}^+ k_{34}^+ \frac{(k_{14})^2}{k_{34}^2} - k_{14}^+ k_{23}^+ k_{34}^+ \frac{(k_{24})^2}{(k_{34})^2}\}$$

Hierbei ist B durch (6.1) gegeben.

Man erhält insgesamt:

$$\begin{aligned} A_{oooc} = \frac{iB}{2(k_{34})^2}\{ & k_{14}^+ k_{24}^+ [(\overline{k_{23}^+} - k_{23}^+) k_{34}^2 - (k_{34}^+ - \overline{k_{34}^+}) k_{14} k_{34}] \\ & + 2k_{13}^+ k_{24}^+ k_{34}^+ (k_{14})^2 - 2k_{14}^+ k_{23}^+ k_{34}^+ (k_{24})^2\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dieser Ausdruck ist nicht offensichtlich Null, aber im Anhang D wird gezeigt, daß sich alle Terme wegheben(!).

Die Rechnung zeigt also, daß

$$\boxed{A_{oooc} = 0}. \tag{6.3}$$

Damit ist jeder Summand in Gleichung (4.1) unabhängig vom Chan-Paton-Faktor Null und die gesamte Amplitude verschwindet.

6.2 A_{oocc}

Die Berechnung der Amplitude A_{oocc} ist sehr aufwendig. Es treten Korrelatoren zwischen offenen und geschlossenen Vertexoperatoren in allen drei möglichen Kombinationen auf, der Koba-Nielsen Term gibt darüberhinaus einen nichttrivialen Beitrag. Die Regeln für die Auswertung der Korrelatoren sind im Anhang C dargelegt.

Im folgenden bezeichnen a und b die rellen, u und z die komplexen Variablen. Die Vertexoperatoren werden wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} V_{(0,0)}^{\int} &= \int da\, [(k_1^+ \partial X^- - k_1^- \partial X^+) - i(k_1^+ \Psi^-)(k_1^- \Psi^+)]\, e^{ik_1 X}(a) \\ V_{(0,0)}^{\int} &= \int db\, [(k_2^+ \partial X^- - k_2^- \partial X^+) - i(k_2^+ \Psi^-)(k_2^- \Psi^+)]\, e^{ik_2 X}(b) \\ V_{(-1,0;-1,0)}^{\int\int} &= \int_{\mathbb{C}+} d^2u\, k_3^+ \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_3 X}(u) k_3^+ \Psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik_3 X}(\overline{u}) \\ V_{(0,-1;0,-1)}^{\int\int} &= \int_{\mathbb{C}+} d^2z\, k_4^- \Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_4 X}(z) k_4^- \Psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik_4 X}(\overline{z}). \end{aligned}$$

Das Problem zerfällt zum erneuten Mal in vier separate Terme. Der gemeinsame Vorfaktor ist:

$$\langle e^{-\varphi^-}(u) e^{-\varphi^-}(\overline{u}) e^{-\varphi^+}(z) e^{-\varphi^+}(\overline{z})\rangle = \frac{1}{(u-\overline{u})(z-\overline{z})}.$$

Der Koba-Nielsen-Term (K.N.), der aus dem Korrelator der Exponentialfunktionen gebildet wird, ist:

$$\begin{aligned}\text{K.N.} &= \langle e^{ik_1X}(a)e^{ik_2X}(b)e^{ik_3X}(u)e^{ik_3X}(\overline{u})e^{ik_4X}(z)e^{ik_4X}(\overline{z})\rangle \\ &= (a-b)^{k_{12}}|a-u|^{k_{13}}|a-z|^{k_{14}}|b-u|^{k_{23}}|b-z|^{k_{24}}|u-z|^{k_{34}/2}|u+z|^{k_{34}/2}.\end{aligned}$$

Jeder der zu untersuchenden vier Terme zerfällt in einen Korrelator der bosonischen und einen der fermionischen Felder:

I:

Bosonisch:

$$\begin{aligned}&\langle(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+)e^{ik_1X}(a)(k_2^+\partial X^- - k_2^-\partial X^+)e^{ik_2X}(b)e^{ik_3X}(u) \\ &\times e^{ik_3X}(\overline{u})e^{ik_4X}(z)e^{ik_4X}(\overline{z})\rangle \\ &= \text{K.N.}\times\Big\{\big[-\frac{i}{2}k_1^+(2k_2^-\frac{1}{a-b}+k_3^-(\frac{1}{a-u}+\frac{1}{a-\overline{u}})+k_4^-(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a-\overline{z}}))\big] \\ &\times\big[-\frac{i}{2}k_2^+(-2k_1^-\frac{1}{a-b}+k_3^-(\frac{1}{b-u}+\frac{1}{b-\overline{u}})+k_4^-(\frac{1}{b-z}+\frac{1}{b-\overline{z}}))\big] \\ &-\big[-\frac{i}{2}k_1^+(2k_2^-\frac{1}{a-b}+k_3^-(\frac{1}{a-u}+\frac{1}{a-\overline{u}})+k_4^-(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a-\overline{z}}))\big] \\ &\times\big[-\frac{i}{2}k_2^-(-2k_1^+\frac{1}{a-b}+k_3^+(\frac{1}{b-u}+\frac{1}{b-\overline{u}})+k_4^+(\frac{1}{b-z}+\frac{1}{b-\overline{z}}))\big]+\frac{2k_1^+k_2^-}{(a-b)^2} \\ &-\big[-\frac{i}{2}k_1^-(2k_2^+\frac{1}{a-b}+k_3^+(\frac{1}{a-u}+\frac{1}{a-\overline{u}})+k_4^+(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a-\overline{z}}))\big] \\ &\times\big[-\frac{i}{2}k_2^+(-2k_1^-\frac{1}{a-b}+k_3^-(\frac{1}{b-u}+\frac{1}{b-\overline{u}})+k_4^-(\frac{1}{b-z}+\frac{1}{b-\overline{z}}))\big]+\frac{2k_1^-k_2^+}{(a-b)^2} \\ &+\big[-\frac{i}{2}k_1^-(2k_2^+\frac{1}{a-b}+k_3^+(\frac{1}{a-u}+\frac{1}{a-\overline{u}})+k_4^+(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a-\overline{z}}))\big] \\ &\times\big[-\frac{i}{2}k_2^-(-2k_1^+\frac{1}{a-b}+k_3^+(\frac{1}{b-u}+\frac{1}{b-\overline{u}})+k_4^+(\frac{1}{b-z}+\frac{1}{b-\overline{z}}))\big]\Big\}\end{aligned}$$

Fermionisch:

$$\langle k_3^+\Psi^-(u)k_3^+\Psi^-(\overline{u})k_4^-\Psi^+(z)k_4^-\Psi^+(\overline{z})\rangle = \frac{(k_{34}^+)^2}{4}\Big[\frac{1}{|u-\overline{z}|^2}-\frac{1}{|u-z|^2}\Big]$$

II:

Bosonisch:

$$\begin{aligned}&\langle(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+)e^{ik_1X}(a)e^{ik_2X}(b)e^{ik_3X}(u)e^{ik_3X}(\overline{u})e^{ik_4X}(z)e^{ik_4X}(\overline{z})\rangle \\ &= \text{K.N.}\times\Big\{-\frac{i}{2}k_1^+(2k_2^-\frac{1}{a-b}+k_3^-(\frac{1}{a-u}+\frac{1}{a-\overline{u}})+k_4^-(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a-\overline{z}})) \\ &+\frac{i}{2}k_1^-(2k_2^+\frac{1}{a-b}+k_3^+(\frac{1}{a-u}+\frac{1}{a-\overline{u}})+k_4^+(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a-\overline{z}}))\Big\}\end{aligned}$$

Fermionisch:

$$
\begin{aligned}
&-i\langle (k_2^+\Psi^-)(k_2^-\Psi^+)(b)k_3^+\Psi^-(u)k_3^+\Psi^-(\overline{u})k_4^-\Psi^+(z)k_4^-\Psi^+(\overline{z})\rangle \\
&= -\frac{i}{2}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Bigg[\frac{1}{b-z}\Big(\frac{1}{(b-u)(\overline{u}-\overline{z})}-\frac{1}{(b-\overline{u})(u-\overline{z})}\Big) \\
&\quad -\frac{1}{b-\overline{z}}\Big(\frac{1}{(b-u)(\overline{u}-z)}-\frac{1}{(b-\overline{u})(u-z)}\Big)\Bigg]
\end{aligned}
$$

III:

Bosonisch:

$$
\begin{aligned}
&\langle e^{ik_1X}(a)(k_2^+\partial X^- - k_2^-\partial X^+)e^{ik_2X}(b)e^{ik_3X}(u)e^{ik_3X}(\overline{u})e^{ik_4X}(z)e^{ik_4X}(\overline{z})\rangle \\
&= \text{K.N.}\times\Bigg\{-\frac{i}{2}k_2^+\Big(-2k_1^-\frac{1}{a-b}+k_3^-\big(\frac{1}{b-u}+\frac{1}{b-\overline{u}}\big)+k_4^-\big(\frac{1}{b-z}+\frac{1}{b-\overline{z}}\big)\Big) \\
&\quad +\frac{i}{2}k_2^-\Big(-2k_1^+\frac{1}{a-b}+k_3^+\big(\frac{1}{b-u}+\frac{1}{b-\overline{u}}\big)+k_4^+\big(\frac{1}{b-z}+\frac{1}{b-\overline{z}}\big)\Big)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

Fermionisch:

$$
\begin{aligned}
&-i\langle (k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)(b)k_3^+\Psi^-(u)k_3^+\Psi^-(\overline{u})k_4^-\Psi^+(z)k_4^-\Psi^+(\overline{z})\rangle \\
&= -\frac{i}{2}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+\Bigg[\frac{1}{a-z}\Big(\frac{1}{(a-u)(\overline{u}-\overline{z})}-\frac{1}{(a-\overline{u})(u-\overline{z})}\Big) \\
&\quad -\frac{1}{a-\overline{z}}\Big(\frac{1}{(a-u)(\overline{u}-z)}-\frac{1}{(a-\overline{u})(u-z)}\Big)\Bigg]
\end{aligned}
$$

IV:

Bosonisch:

$$
\langle e^{ik_1X}(a)e^{ik_2X}(b)e^{ik_3X}(u)e^{ik_3X}(\overline{u})e^{ik_4X}(z)e^{ik_4X}(\overline{z})\rangle = \text{K.N.}
$$

Fermionisch:

$$
\begin{aligned}
&-\langle (k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)(a)(k_2^+\Psi^-)(k_2^-\Psi^+)(b)k_3^+\Psi^-(u)k_3^+\Psi^-(\overline{u})k_4^-\Psi^+(z)k_4^-\Psi^+(\overline{z})\rangle \\
&= -k_{12}^+\overline{k_{12}^+}k_{34}^+k_{34}^+\qquad\Bigg[\frac{1}{(a-b)^2}\Big(\frac{1}{|u-\overline{z}|^2}-\frac{1}{|u-z|^2}\Big)\Bigg] \\
&\quad -k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\Bigg[\frac{1}{(a-u)(a-b)}\Big(\frac{1}{(\overline{u}-\overline{z})(b-z)}-\frac{1}{(\overline{u}-z)(b-\overline{z})}\Big) \\
&\qquad +\frac{1}{(a-\overline{u})(a-b)}\Big(\frac{1}{(u-z)(b-\overline{z})}-\frac{1}{(u-\overline{z})(b-z)}\Big)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- k_{14}^{+}\overline{k_{12}^{+}k_{23}^{+}}k_{34}^{+}\Big[\frac{1}{(a-z)(a-b)}\big(\frac{1}{(b-\overline{u})(u-\overline{z})}-\frac{1}{(b-u)(\overline{u}-\overline{z})}\big)\\
&\quad+\frac{1}{(a-\overline{z})(a-b)}\big(\frac{1}{(b-u)(\overline{u}-z)}-\frac{1}{(b-\overline{u})(u-z)}\big)\Big]\\
&- k_{14}^{+}\overline{k_{13}^{+}}k_{24}^{+}\overline{k_{23}^{+}}\Big[\frac{1}{(a-z)(b-\overline{z})}\big(\frac{1}{(a-\overline{u})(b-u)}-\frac{1}{(a-u)(b-\overline{u})}\big)\\
&\quad+\frac{1}{(a-\overline{z})(b-z)}\big(\frac{1}{(a-u)(b-\overline{u})}-\frac{1}{(a-\overline{u})(b-u)}\big)\Big].
\end{aligned}
$$

Jetzt wird die Fixierung $a' \to \infty$, $z' = i$ gewählt. Die Jacobideterminante ist dann J$=a'^2+1$ (siehe (5.11)), der $e^{-\varphi^-}/e^{-\varphi^+}$-Korrelator gibt den Vorfaktor $\frac{1}{2i(u-\overline{u})}$.

Der Koba-Nielsen-Term geht über in

K.N. $= |b-u|^{k_{23}}|b-i|^{k_{24}}|u-i|^{k_{34}/2}|u+i|^{k_{34}/2}+O(1/a).$

da aufgrund der Kinematik $a^{k_{12}+k_{13}+k_{14}}=1$.

In den obigen bosonischen und fermionischen Korrelatoren sind nur die Terme der Ordnung $O(a^{-2})$ relevant. Terme der Ordnung $O(a^{-1})$ verschwinden aufgrund der Kinematik, höhere (negative) Potenzen im Grenzübergang $a \to \infty$. Nach Multiplikation mit der Jacobideterminante verbleibt also im einzelnen ohne Vorfaktor und Koba-Nielsen-Term:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} = -\frac{1}{4}\Big\{&4c_{12}c_{23}\frac{b^2}{|b-u|^2}+2(c_{13}c_{23}-c_{12}c_{23})\frac{b(u+\overline{u})}{|b-u|^2}\\
&-c_{13}c_{23}\frac{(u+\overline{u})^2}{|b-u|^2}+4c_{12}c_{24}\frac{b^2}{b^2+1}\\
&+2c_{13}c_{24}\frac{b(u+\overline{u})}{b^2+1}-16k_{12}\Big\}\\
\times\,&\frac{(k_{34}^{+})^2}{4}\Big[\frac{2i(u-\overline{u})}{|u+i|^2|u-i|^2}\Big]\\
\mathrm{II} = -\frac{1}{4}\Big\{&2c_{12}b+c_{13}(u+\overline{u})\Big\}k_{24}^{+}\overline{k_{23}^{+}}k_{34}^{+}\\
\times\,&\Big[\frac{2i(u-\overline{u})(2b(|u|^2-1)-(b^2-1)(u+\overline{u}))}{|b-u|^2(b^2+1)|u-i|^2|u+i|^2}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III} =& \frac{1}{4}\Big\{ c_{23}\frac{2b-(u+\overline{u})}{|b-u|^2} + c_{24}\frac{2b}{b^2+1}\Big\} k_{14}^{+}\overline{k_{13}^{+}}k_{34}^{+}\left[\frac{2i(u-\overline{u})(u+\overline{u})}{|u-i|^2|u+i|^2}\right] \\
\mathrm{IV} =& -k_{12}^{+}\overline{k_{12}^{+}}k_{34}^{+}k_{34}^{+}\frac{2i(u-\overline{u})}{|u+i|^2|u-i|^2} \\
& -k_{12}^{+}\overline{k_{13}^{+}}k_{24}^{+}k_{34}^{+}\frac{2i(u-\overline{u})}{(b^2+1)|u-i|^2|u+i|^2}\big(|u|^2-1-b(u+\overline{u})\big) \\
& -k_{14}^{+}\overline{k_{12}^{+}k_{23}^{+}}k_{34}^{+}\frac{2i(u-\overline{u})}{|b-u|^2|u-i|^2|u+i|^2}\big(b(u+\overline{u})-(|u|^2-1)\big) \\
& +k_{14}^{+}\overline{k_{13}^{+}}k_{24}^{+}\overline{k_{23}^{+}}\frac{2i(u-\overline{u})}{|b-u|^2(b^2+1)}.
\end{aligned}
$$

Faßt man die Ausdrücke zusammen, ergibt sich unter Berücksichtigung der Vorfaktoren folgendes Integral:

$$
\int_{\mathbb{C}^+} d^2u \int_{-\infty}^{\infty} db\; |b-u|^{k_{23}}|b-i|^{k_{24}}|u-i|^{k_{34}/2}|u+i|^{k_{34}/2}\frac{A}{|u-i|^2|u+i|^2} \tag{6.4}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
A =& \big\{k_{12}(k_{34}^{+})^2 - k_{12}^{+}\overline{k_{12}^{+}}(k_{34}^{+})^2\big\} \\
&+ \frac{b^2}{|b-u|^2}\big\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{23}(k_{34}^{+})^2\big\} \\
&+ \frac{b(u+\overline{u})}{|b-u|^2}\big\{-\frac{1}{8}(c_{13}c_{23}-c_{12}c_{23})(k_{34}^{+})^2 \\
&\qquad\qquad - k_{14}^{+}\overline{k_{12}^{+}k_{23}^{+}}k_{34}^{+} + \frac{1}{2}c_{23}k_{14}^{+}\overline{k_{13}^{+}}k_{34}^{+}\big\} \\
&+ \frac{(u+\overline{u})^2}{|b-u|^2}\big\{\frac{1}{16}c_{13}c_{23}(k_{34}^{+})^2\big\} \\
&+ \frac{b^2}{(b^2+1)}\big\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{24}(k_{34}^{+})^2\big\} \\
&+ \frac{b(u+\overline{u})}{(b^2+1)}\big\{-\frac{1}{8}c_{13}c_{24}(k_{34}^{+})^2 + \frac{1}{2}c_{24}k_{14}^{+}\overline{k_{13}^{+}}k_{34}^{+} \\
&\qquad\qquad + k_{12}^{+}\overline{k_{13}^{+}}k_{24}^{+}k_{34}^{+}\big\} \\
&+ \frac{|u|^2-1}{|b-u|^2}\big\{k_{14}^{+}\overline{k_{12}^{+}k_{23}^{+}}k_{34}^{+}\big\} \\
&+ \frac{|u|^2-1}{(b^2+1)}\big\{-k_{12}^{+}\overline{k_{13}^{+}}k_{24}^{+}k_{34}^{+}\big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{b^2(|u|^2-1)}{(b^2+1)|b-u|^2}\Big\{-c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Big\}\\
&+\frac{b(b^2-1)(u+\overline{u})}{(b^2+1)|b-u|^2}\Big\{\frac{1}{2}c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Big\}\\
&+\frac{b(|u|^2-1)(u+\overline{u})}{(b^2+1)|b-u|^2}\Big\{-\frac{1}{2}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Big\}\\
&+\frac{(b^2-1)(u+\overline{u})^2}{(b^2+1)1|b-u|^2}\Big\{\frac{1}{4}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Big\}\\
&+\frac{(u+\overline{u})^2}{|b-u|^2}\Big\{-\frac{1}{4}c_{23}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+\Big\}\\
&+\frac{|u-i|^2|u+i|^2}{|b-u|^2(b^2+1)}\Big\{k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\Big\}.
\end{aligned}
$$

Leider ist im Rahmen dieser Arbeit eine abschließende Berechnung der Amplitude nicht gelungen. Ein Ansatz für die Lösung der Integrale wird im Anhang E präsentiert. Zudem werden dort die Korrelatoren in zwei weiteren Fixierungen angegeben.

6.3 A_{occc}

Die konkrete Berechnung dieser Amplitude wäre ein sehr aufwendiges Vorhaben. Zum Glück ist diese aber gar nicht nötig, denn wie schon Marcus [1, 2] feststellt, verschwinden alle Amplituden mit nur einem offenen Vertexoperator aufgrund der „Twistsymmetrie" der gemischten Theorie.

Der Gedankengang sei kurz skizziert:

Die obere komplexe Halbebene ist invariant unter dem Diffeomorphismus $z \to -\overline{z}$. Man kann sich aber davon überzeugen, daß die Amplitude A_{occc} diese notwendige Invarianz nicht zeigt und damit verschwinden muß.

Seien die Vertexoperatoren wie folgt gewählt:

$$
\begin{aligned}
V^{\int}_{(0,0)} &= \int da\ \left[(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+) - i(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)\right]e^{ik_1X}(a)\\
V^{\int\int}_{(0,0;0,0)} &= \int_{\mathbb{C}^+} d^2u\ \left\{\left[(k_2^+\partial X^- - k_2^-\partial X^+) - i(k_2^+\Psi^-)(k_2^-\Psi^+)\right]e^{ik_2X}(u)\right\}\\
&\qquad\times\left\{\left[(k_2^+\partial X^- - k_2^-\partial X^+) - i(k_2^+\Psi^-)(k_2^-\Psi^+)\right]e^{ik_2X}(\overline{u})\right\}\\
V^{\int\int}_{(-1,0;-1,0)} &= \int_{\mathbb{C}^+} d^2v\ k_3^+\Psi^-e^{-\varphi^-}e^{ik_3X}(v)k_3^+\Psi^-e^{-\varphi^-}e^{ik_3X}(\overline{v})\\
V^{\int\int}_{(0,-1;0,-1)} &= \int_{\mathbb{C}^+} d^2z\ k_4^-\Psi^+e^{-\varphi^+}e^{ik_4X}(z)k_4^-\Psi^+e^{-\varphi^+}e^{ik_4X}(\overline{z}).
\end{aligned}
$$

$\Psi^{\pm}$ und $e^{-\varphi^{\pm}}$ sind fermionische Operatoren. Man erhält beim Vertauschen von holomorphem und antiholomorphem Anteil der geschlossenen Vertexoperatoren eine gerade Anzahl von Minuszeichen. Die Vertexoperatoren sind deshalb invariant unter der Abbildung

$$\begin{aligned} u &\to -\overline{u} \\ v &\to -\overline{v} \\ z &\to -\overline{z}. \end{aligned}$$

Der offene Vertexoperator nimmt dagegen unter der Transformation $a \to -a$ ein Minuszeichen auf.

Dieses läßt sich im Detail an den Korrelatoren zeigen. Der übliche Vorfaktor kommt vom $e^{-\varphi^{\pm}}$-Korrelator

$$\langle e^{-\varphi^-}(v)e^{-\varphi^-}(\overline{v})e^{-\varphi^+}(z)e^{-\varphi^+}(\overline{z})\rangle = \frac{1}{(v-\overline{v})(z-\overline{z})},$$

der offensichtlich invariant unter der obengenannten Abbildung ist.

Die restlichen Terme sind jeweils das Produkt aus einem Korrelator bosonischer und einem Korrelator fermionischer Felder. Man kann jetzt die Korrelatoren ausrechnen und Term für Term überprüfen, daß jeweils ein Minuszeichen nach der Transformation der Koordinaten übrigbleibt. Damit ist die oben beschriebene Invarianz der Amplitude nicht gegeben und diese *muß* Null sein.

Es reicht aber auch „scharfes Hinsehen". Betrachte man dazu beispielsweise den Term

$$\begin{aligned} &\langle e^{ik_1X}(a)e^{ik_2X}(u)e^{ik_2X}(\overline{u})e^{ik_3X}(v)e^{ik_3X}(\overline{v})e^{ik_4X}(z)e^{ik_4X}(\overline{z})\rangle\langle(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)(a) \\ &\times(k_2^+\Psi^-)(k_2^-\Psi^+)(u)(k_2^+\Psi^-)(k_2^-\Psi^+)(\overline{u})k_3^+\Psi^-(v)k_3^+\Psi^-(\overline{v})k_4^-\Psi^+(z)k_4^-\Psi^+(\overline{z})\rangle. \end{aligned}$$

Der Koba-Nielsen-Term ist invariant unter den obigen Transformationen (dieses liegt an der speziellen Form der Kontraktionsregeln für Exponentialfunktionen).Der fermionische Korrelator nimmt jedoch, da hier eine ungerade Anzahl von Kontraktionen (nämlich genau fünf) durchzuführen ist, ein Minuszeichen auf.

Auch bei Ausdrücken der Form

$$\langle \partial X \partial X e^{ik_1X} \cdots e^{ik_4X}\rangle\langle k^+\Psi^- \cdots k^-\Psi^+\rangle$$

trägt der fermionische Korrelator wieder ein Minuszeichen bei, während der bosonische Korrelator unverändert bleibt.

Hingegen tritt bei Korrelatoren mit einer ungeraden Anzahl von ∂X-Feldern das Minuszeichen gerade im Korrelator der bosonischen Felder zutage, jedoch bleibt jetzt der fermionische Korrelator unberührt vom obigen Diffeomorphismus.

Es zeigt sich also insgesamt, daß unter den obigen Koordinatentransformationen, welche die Amplitude eigentlich unverändert lassen sollten, diese als Vorfaktor ein Minuszeichen erhält:

$$\begin{aligned}&\langle V^{\int}_{(0,0)}(a)V^{\int}_{(0,0;0,0)}(u,\overline{u})V^{\int}_{(-1,0;-1,0)}(v,\overline{v})V^{\int}_{(0,-1;0,-1)}(z,\overline{z})\rangle\\ &\longrightarrow -\langle V^{\int}_{(0,0)}(a)V^{\int}_{(0,0;0,0)}(u,\overline{u})V^{\int}_{(-1,0;-1,0)}(v,\overline{v})V^{\int}_{(0,-1;0,-1)}(z,\overline{z})\rangle.\end{aligned}$$

Als Ergebnis läßt sich somit festhalten, daß auch diese gemischte Vier-Punkt-Amplitude verschwindet:

$$\boxed{A_{occc}=0}. \tag{6.5}$$

6.4 Die geschlossene Vier-Punkt-Amplitude auf der Scheibe

Wie im Fall der Drei-Punkt-Amplituden gibt es auch bei den Vier-Punkt-Amplituden einen Korrekturterm zur geschlossenen Vier-Punkt-Amplitude - die geschlossene Vier-Punkt-Amplitude auf der Scheibe $< cccc >_D$. Eine konkrete Berechnung übersteigt den Rahmen dieser Arbeit, der Vollständigkeit halber soll aber kurz skizziert werden, welcher grundlegende Typ von Integralen bei der Berechnung auftritt.

Seien die Vertexoperatoren der vier geschlossenen Strings wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned}V^{\int\int}_{(0,0;0,0)} &= \int_{\mathbb{C}^+} d^2z_1\ \big\{[(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+) - i(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)]\,e^{ik_1X}(z_1)\big\}\\ &\qquad\times\big\{[(k_1^+\partial X^- - k_1^-\partial X^+) - i(k_1^+\Psi^-)(k_1^-\Psi^+)]\,e^{ik_1X}(\overline{z}_1)\big\}\\ V^{\int\int}_{(0,0;0,0)} &= \int_{\mathbb{C}^+} d^2z_2\ \big\{[(k_2^+\partial X^- - k_2^-\partial X^+) - i(k_2^+\Psi^-)(k_2^-\Psi^+)]\,e^{ik_2X}(z_2)\big\}\\ &\qquad\times\big\{[(k_2^+\partial X^- - k_2^-\partial X^+) - i(k_2^+\Psi^-)(k_2^-\Psi^+)]\,e^{ik_2X}(\overline{z}_2)\big\}\\ V^{\int\int}_{(-1,0;-1,0)} &= \int_{\mathbb{C}^+} d^2z_3\ k_3^+\Psi^-e^{-\varphi^-}e^{ik_3X}(z_3)k_3^+\Psi^-e^{-\varphi^-}e^{ik_3X}(\overline{z}_3)\\ V^{\int\int}_{(0,-1;0,-1)} &= \int_{\mathbb{C}^+} d^2z_4\ k_4^-\Psi^+e^{-\varphi^+}e^{ik_4X}(z_4)k_4^-\Psi^+e^{-\varphi^+}e^{ik_4X}(\overline{z}_4).\end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Korrelatoren treten kinematische Faktoren der Ordnung $O((k_{ij}^{+})^4)$ bis einschließlich $O((k_{ij}^{+})^6)$ auf.

Der Koba-Nielsen-Term

$$(|z_1 - z_2||z_1 - \overline{z}_2|)^{k_{12}/2}(|z_1 - z_3||z_1 - \overline{z}_3|)^{k_{13}/2}(|z_1 - z_4||z_1 - \overline{z}_4|)^{k_{14}/2} \\ \times (|z_2 - z_3||z_2 - \overline{z}_3|)^{k_{23}/2}(|z_2 - z_4||z_2 - \overline{z}_4|)^{k_{24}/2}(|z_3 - z_4||z_3 - \overline{z}_4|)^{k_{34}/2}$$

geht bei der üblichen Wahl der Fixierung $z_1' = i, z_2' = iy$ über in

$$|1 - y^2|^{k_{12}/2}(|i - z_3||i - \overline{z}_3|)^{k_{13}/2}(|i - z_4||i - \overline{z}_4|)^{k_{23}/2}(|iy - z_3||iy - \overline{z}_3|)^{k_{23}/2} \\ \times (|iy - z_4||iy - \overline{z}_4|)^{k_{13}/2}(|z_3 - z_4||z_3 - \overline{z}_4|)^{k_{12}/2}.$$

Damit haben die auftretenden Integrale die Form

$$\int_{\mathbb{C}^+} d^2z_3 \int_{\mathbb{C}^+} d^2z_4 \int_0^1 dy\, (1 - y^2)^{k_{12}/2+a}(|i - z_3||i - \overline{z}_3|)^{k_{13}/2+b}(|i - z_4||i - \overline{z}_4|)^{k_{23}/2+c} \\ \times(|iy - z_3||iy - \overline{z}_3|)^{k_{23}/2+d}(|iy - z_4||iy - \overline{z}_4|)^{k_{13}/2+e} \\ \times(|z_3 - z_4||z_3 - \overline{z}_4|)^{k_{12}/2+f}(z_3 + \overline{z}_3)^g(z_4 + \overline{z}_4)^h\ ,$$

wobei $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}$.

Es ist unklar, inwieweit es möglich ist, zwischen den Integralen Beziehungen zu finden oder ob diese sogar lösbar sind. Ebensowenig können hier Aussagen über eventuell zu erwartende Ergebnisse getroffen werden. Eine Analogie mit der Amplitude $\langle ccc\rangle_D$ ist insofern nur bedingt gegeben, als die zugehörige geschlossene Amplitude auf der Sphäre A_{cccc} im Gegensatz zur Drei-Punkt-Amplitude A_{ccc} verschwindet.

7 Diskussion und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Vertreter der gemischten Drei- und Vier-Punkt-Amplituden des N=2 Strings auf Tree-Niveau berechnet. Dabei ist es gelungen, die bekannten Ergebnisse für die Amplituden $A_{ooc}, A_{occ}, A_{oooc}$ und A_{occc} unter Verwendung der neuen auf dem BRST-Formalismus basierenden Vertexoperatormethode zu reproduzieren. Für die Amplitude A_{oocc} wurden die Korrelatoren in drei verschiedenen Fixierungen berechnet. Leider war es nicht möglich, diese weiter auszuwerten und ein Resultat für die Amplitude anzugeben.

Darüber hinaus wurden die Drei- und Vier-Punkt-Amplitude geschlossener Strings auf der Scheibe betrachtet. Es zeigt sich, daß die Amplitude $\langle ccc\rangle_D$ nicht verschwindet. Dieses Ergebnis soll jetzt etwas eingehender beleuchtet werden.

7.1 Die Projektive Ebene

Um das Ergebnis für die Amplitude $\langle ccc\rangle_D$ interpretieren zu können, ist ein Vergleich mit dem N=1 String angebracht. Dort ist die entsprechende Amplitude logarithmisch divergent. Für *orientierte* geschlossene Strings in Wechselwirkung mit offenen Strings ist dieses das einzige Diagramm mit Euler-Charakteristik $\chi = 1$ und damit gibt es keine Möglichkeit, die Divergenz zu beseitigen. Erweitert man die Betrachtung allerdings auf nicht-orientierte Strings, so gibt die Projektive Ebene RP_2 einen zweiten Beitrag, der ebenfalls logarithmisch divergent ist. Für orthogonale Eichgruppen $SO(n)$ hat dieser aber das umgekehrte Vorzeichen und ist vom Betrag her bis auf einen Faktor $2^{D/2}$ (D=Dimension der Raumzeit) gleich dem Beitrag der Scheibe, der mit dem Chan-Paton-Faktor n (n=Dimension der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe) versehen wird. Unter der Bedingung $n = 2^{D/2}$ heben sich also die beiden Divergenzen weg, die Theorie ist zumindest auf diesem Niveau konsistent. Damit ist die Eichgruppe des Typ-I Superstrings auf SO(32) festgelegt ($D = 10 \Rightarrow n = 32$)[12].

Die auftretenden Divergenzen lassen sich als „Dilaton-Tadpoles" interpretieren. Dazu betrachtet man die geschlossene Vier-Punkt-Amplitude auf der Sphäre, setzt einen einlaufenden Impuls $k = 0$ und fügt einen Propagator an. Das Diagramm läßt sich als geschlossene Drei-Punkt-Amplitude mit Rand interpretieren ($= \langle ccc\rangle_D$). Die Divergenz wird durch den on-shell-Propagator des Dilatons verursacht.

Das N=2 String-Resultat ist hingegen endlich! Auch dieses ist mit obigem Bild verträglich. Eine Analogie zwischen N=1 und N=2 String ist nämlich insofern nicht gegeben, als daß die entsprechende Vier-Punkt-Amplitude A_{cccc}

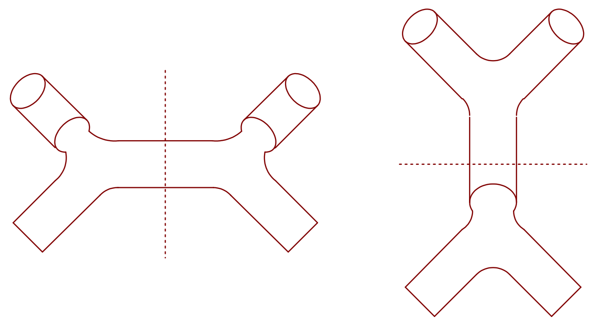
für den N=2 String identisch Null ist. Für den N=1 String hingegen verschwindet diese selbst dann nicht, wenn einer der Vertexoperatoren bei $k = 0$ betrachtet wird.

Da also keine Divergenz vorliegt, entfällt auch die oben beschriebene Forderung, daß der RP_2-Beitrag exakt (negativ) gleich dem Beitrag der Scheibe sein muß. Insbesondere gibt es auf diesem Weg keine Einschränkung an die Eichgruppe. Die Bedingung $n = 2^{D/2}$ würde im N=2 String (D=2 !) auf SO(2) führen. Ein „unangenehmes" Ergebnis, da für SO(2) (eine abelsche Gruppe) die Strukturkonstanten f^{abc} der Algebra identisch Null sind und folglich die effektive Wirkung (siehe unten) des N=2 Strings die einer *wechselwirkungsfreien* Theorie wäre.

Trotzdem bleibt es eine interessante Aufgabe, die Amplitude der drei geschlossenen Strings auf der Projektiven Ebene zu bestimmen. Der Aufwand hierfür sollte dem der Rechnung für die Scheibe vergleichbar sein.

7.2 Kopplungskonstanten

Die Rechnungen dieser Arbeit haben bestätigt, daß es zunächst nur drei elementare Diagramme beim gemischten N=2 String gibt: A_{ooo}, A_{ccc} und A_{ooc}. Ordnet man diesen Prozessen jeweils die Kopplungskonstanten g, κ und κ' zu, so ist es möglich, durch Betrachten von kombinierten Amplituden Beziehungen zwischen den Kopplungskonstanten zu erkennen. Bekannt ist, daß $\kappa \sim g^2$ gilt [13]. Um einen Zusammenhang zwischen κ und κ' zu erhalten, betrachte man die Amplitude A_{oocc}:



Im linken Kanal propagiert ein offener String, im rechten ein geschlossener. Die Kopplungskonstante ist im ersten Diagramm $(\kappa')^2$, im zweiten $\kappa\kappa'$. Ist diese Amplitude ungleich Null, so kann daraus die Beziehung $\kappa \sim \kappa'$ gefolgert werden. Das ist im Einklang mit der Allgemeinen Relativitätstheorie, die fordert, daß die Kopplung des Gravitons an Materie (offener String) gleich der an andere Gravitonen (geschlossener String) sei. Dieselbe Beziehung für die Kopplungskonstanten erhält man auch durch Betrachtung von Loop-Diagrammen des N=2 Strings.

Der Streuprozeß $\langle ccc \rangle_D$ läßt sich nicht durch Zusammenfügen der elementaren Diagramme erhalten, er ist also im Rahmen des Stringbilds ein neuer elementarer Prozeß (mit zunächst unbestimmter Kopplungskonstante λ). Es stellt sich erneut die Frage, ob es duale Diagramme gibt, die einem Aussagen über Zusammenhänge zwischen λ und κ bzw. g ermöglichen. Die Kinematik des N=2 Strings führt auf Tree-Niveau zum Verschwinden aller relevanten Amplituden; erst auf Ein-Loop-Niveau ist eine Konstruktion entsprechender Diagramme möglich. Ein in dieser Hinsicht nützliches Diagramm ist zum Beispiel die Streuung vier geschlossener Strings auf dem Annulus, das in zwei geschlossene Drei-Punkt-Amplituden auf der Scheibe faktorisiert. Das erste Diagramm ergibt einen Beitrag κ^4, letzteres λ^2. Daraus ergibt sich die Beziehung $\lambda \sim \kappa^2$. Diese Betrachtung hängt natürlich wesentlich vom Nichtverschwinden der noch nicht berechneten Loop-Amplitude ab, es ist aber derzeit kein Grund bekannt, warum Loop-Amplituden des N=2 Strings verschwinden sollten.

7.3 Die effektive Wirkung

Konstruiert man die effektiven Wirkungen, die die Amplituden des N=2 Strings reproduzieren, so erkennt man, daß die Theorie des geschlossenen N=2 Strings als *selbstduale Gravitation* (SDG) [15] und die des offenen N=2 Strings als *selbstduale Yang-Mills-Theorie* (SDYM)[2] interpretiert werden kann. Die in dieser Arbeit behandelte gemischte Theorie kann als SDYM gekoppelt an SDG betrachtet werden.

Eine effektive Wirkung der gemischten Theorie sollte die hier berechneten String-Amplituden reproduzieren können. Ein Vorschlag [20], der von Devchand und Lechtenfeld erarbeitet worden ist, soll hier kurz präsentiert werden. Die Notation, in der die Wirkung formuliert ist, basiert auf der „van der Waerden"-Indexnotation [19]. Hierbei werden die (2,2)-Vektoren X^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ als Bispinoren geschrieben:

$$X^{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_\mu^{\alpha\dot{\alpha}} X^\mu = \begin{pmatrix} X^0 + X^3 & X^1 + X^2 \\ X^1 - X^2 & X^0 - X^3 \end{pmatrix}$$

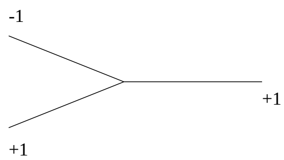
mit $\alpha \in \{+, -\}, \dot{\alpha} \in \{\dot{+}, \dot{-}\}$: $SL(2, \mathbb{R})$-Spinorindizes.

Die einfachste Version der vorgeschlagenen Wirkungen hat die Form [20]:

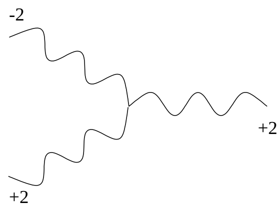
$$
\begin{aligned}
S = \int d^4x \Big[& tr\Big\{ -\phi^{++}\Box\phi^{--} + \frac{1}{2}\phi^{++}\left[\partial^{+\dot\alpha}\phi^{--}, \partial^{+}_{\dot\alpha}\phi^{--}\right] \Big\} \\
& + \Big\{ -F^{++++}\Box F^{----} + \frac{1}{2}F^{++++}\partial^{+\dot\alpha}\partial^{+\dot\beta}F^{----}\partial^{+}_{\dot\alpha}\partial^{+}_{\dot\beta}F^{----} \Big\} \\
& + tr\Big\{ \partial^{+\dot\alpha}\partial^{+\dot\beta}F^{----}\partial^{+}_{\dot\alpha}\phi^{++}\partial^{+}_{\dot\beta}\phi^{--} \Big\} \Big].
\end{aligned}
$$

Der erste Summand ist der SDYM-, der zweite der SDG-Anteil, während der letzte Term die Wechselwirkung zwischen den beiden Sektoren beschreibt. Diese *Zwei-Feld-Wirkung* (in jedem Sektor tauchen nur zwei Felder F^{++++}, F^{----} bzw. ϕ^{++}, ϕ^{--} auf) ist vom *Chalmers-Siegel-Typ* [21]. Die Anzahl der Plus- und Minuszeichen steht in direktem Zusammenhang mit der Helizität des entsprechenden Zustands: Jedes Pluszeichen trägt mit $-\frac{1}{2}$ zur Helizität h bei, jedes Minuszeichen entsprechend mit $+\frac{1}{2}$. Die Wirkung ist in diesem Sinne *nicht chiral*.

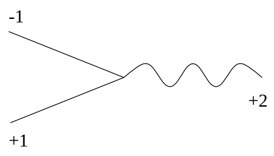
Die grundlegenden Vertizes sind (die Indizierung bezeichnet die Helizität des ein- bzw. auslaufenden Teilchens):



3-Gluon-Streuung



3-Graviton-Streuung



Gluon-Graviton-Streuung

Offensichtlich entsprechen diese Vertizes im Stringtheoriebild gerade den nichtverschwindenen Drei-Punkt-Amplituden A_{ooo}, A_{ccc} und A_{ooc}.

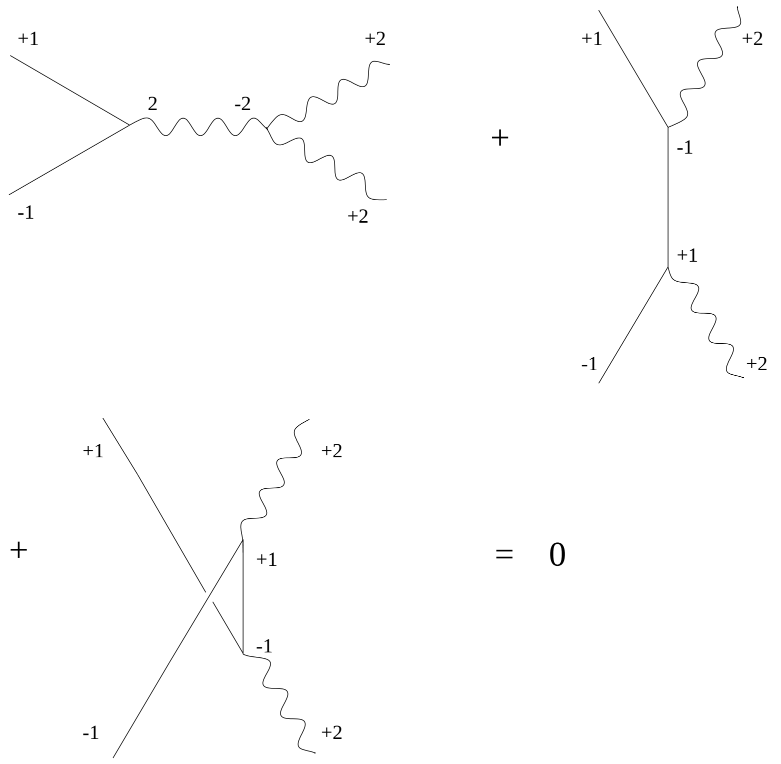
Die Helizität der äußeren Beine steht in direktem Zusammenhang mit der

Bildladung $\hat{\pi}$ ($\hat{\pi} = \pi_+ + \pi_-$) des entsprechenden Vertexoperators. Es gilt:

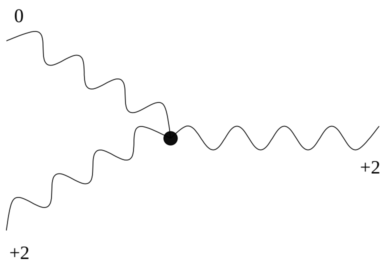
$$\hat{\pi} = \begin{cases} 2h - 2 & \text{Gluon} \\ 2h - 4 & \text{Graviton} \end{cases} .$$

Die gesamte Bildladung aller Vertexoperatoren ist $\pi_{tot} = -4\chi$. Daraus lassen sich die Helizitäts-Auswahlregeln $h_{tot} = 2n_c + n_o - 2\chi$ ablesen, wobei n_c (n_o) die Zahl der äußeren Graviton-(Gluon-)linien ist. Am Propagator ändert die Helizität des Zustands ihr Vorzeichen.

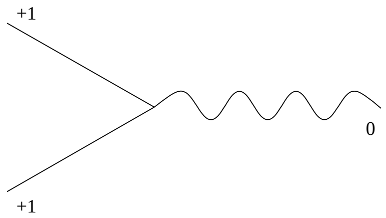
Berechnet man mit Hilfe dieser Vertizes die gemischten Vier-Punkt-Amplituden, so findet man, daß alle drei verschwinden ($A_{oooc} = A_{oocc} = A_{occc} = 0$). So gibt es beispielsweise für A_{oocc} drei Diagramme, die sich zu Null addieren:



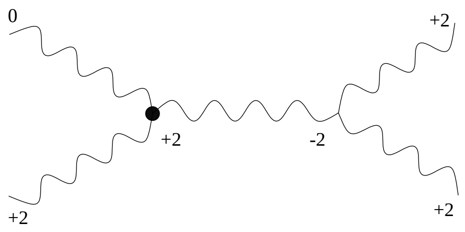
Die Frage ist, wie in diesem Bild die geschlossenen Amplituden auf der Scheibe zu interpretieren sind. Insbesondere für die Amplitude $\langle ccc \rangle_D$ ist in der obigen Feldtheorie kein Platz. Die Auswahlregeln erzwingen, daß für drei geschlossene Strings auf der Scheibe ($\chi = 1$) die totale Helizität des Diagrammms $h_{tot} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$ ist. Aus den beiden Feldern F^{++++} und F^{----} läßt sich aber ein solches Diagramm nicht kombinieren. Die Wirkung muß beispielsweise um das Feld F^0 ($h = 0$) erweitert werden. Die Amplitude repräsentiert also einen neuen Vertex (mit neuer Kopplungskonstante λ):



Durch Hinzunahme des Felds F^0 gibt es auch ein neues Diagramm für die Gluon-Graviton-Streuung (mit alter Kopplung κ [20]):



Mittels des $\langle ccc\rangle_D$-Vertex erlaubt die erweiterte Feldtheorie eine Vorhersage für die Stringamplitude $\langle cccc\rangle_D$. Für diese gibt es nämlich nur einen einzigen Typ von Diagramm, der sich aus den grundlegenden Vertizes konstruieren läßt:



Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Summe der sechs verschiedenen Feldtheoriegraphen Null ergibt. Die Voraussage der Feldtheorie ist also, daß die Stringamplitude $\langle cccc\rangle_D$ verschwindet! Eine konkrete Berechnung der Amplitude wird zeigen, ob die N=2 Stringtheorie auf Tree-Niveau durch die hier skizzierte Feldtheorie konsistent beschrieben werden kann oder ob etwaige Korrekturen notwendig werden.

A Der Korrelator $\langle \partial X \partial X \partial X \partial X \rangle$

Korrelationsfunktionen von vier Feldern ∂X lassen sich auf zwei verschiedene Arten berechnen. Der einfache Weg ist, jeweils nur den singulären Anteil der OPE zweier Felder zu betrachten (hier mit SOP bezeichnet) und alle möglichen Kombinationen von Wick-Kontraktionen durchzuführen:

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial X(z_1)\partial X(z_2)\partial X(z_3)\partial X(z_4)\rangle \\
&= \langle SOP(12)\rangle\langle SOP(34)\rangle + \langle SOP(13)\rangle\langle SOP(24)\rangle + \langle SOP(14)\rangle\langle SOP(23)\rangle \\
&= \frac{1}{(z_1-z_2)^2(z_3-z_4)^2} + \frac{1}{(z_1-z_3)^2(z_2-z_4)^2} + \frac{1}{(z_1-z_4)^2(z_2-z_3)^2}.
\end{aligned}
$$

Ein anderer Weg, der das gleiche Ergebnis liefert, ist, zunächst die vollständige OPE mit allen regulären Termen der Felder 1 und 2 sowie 3 und 4 separat zu betrachten und dann die singulären Terme der Korrelation zwischen diesen beiden Ausdrücken zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
\langle \partial X(z_1)\partial X(z_2)\partial X(z_3)\partial X(z_4)\rangle &= \langle OPE(12)OPE(34)\rangle \\
&= \langle SOP(12)SOP(34)\rangle + \langle :12::34:\rangle \\
&= \frac{1}{(z_1-z_2)^2(z_3-z_4)^2} + \langle :12::34:\rangle.
\end{aligned}
$$

Hier bezeichnen die Normalordnungspunkte die Normalordnung der Felder 1 und 2 bzw. 3 und 4 jeweils zueinander. Es bleibt zu zeigen:

$$
\langle :12::34:\rangle = \frac{1}{(z_1-z_3)^2(z_2-z_4)^2} + \frac{1}{(z_1-z_4)^2(z_2-z_3)^2}. \tag{A.1}
$$

Beweis:

Zunächst werden die Felder $\partial X(z_2)$ und $\partial X(z_4)$ nach z_1 bzw. z_3 entwickelt (die Summation läuft, wenn nicht anders angegeben, immer bis ∞):

$$
\begin{aligned}
&\langle :12::34:\rangle = \langle :\partial X(z_1) \sum_{n=1} \frac{1}{(n-1)!}(z_2-z_1)^{n-1}\partial^{(n)}X(z_1) : \\
&\times : \partial X(z_3) \sum_{l=1} \frac{1}{(l-1)!}(z_4-z_3)^{l-1}\partial^{(l)}X(z_3) :\rangle \\
&= \langle \partial X(z_1)\partial X(z_3)\rangle \langle \sum_{n=1} \frac{1}{(n-1)!}(z_2-z_1)^{n-1}\partial^{(n)}X(z_1) \\
&\times \sum_{l=1} \frac{1}{(l-1)!}(z_4-z_3)^{l-1}\partial^{(l)}X(z_3)\rangle \\
&+ \langle \partial X(z_1) \sum_{l=1} \frac{(z_4-z_3)^{l-1}}{(l-1)!}\partial^{(l)}X(z_3)\rangle \langle \sum_{n=1} \frac{(z_2-z_1)^{n-1}}{(n-1)!}\partial^{(n)}X(z_1)\partial X(z_3)\rangle.
\end{aligned}
$$

Es werden jetzt die entsprechenden Operatorproduktentwicklungen durchgeführt und nur die singulären Terme behalten, da die anderen keinen Beitrag zum Korrelator liefern:

$$\begin{aligned}
&\langle : 12 :: 34 : \rangle = \\
&= \frac{1}{(z_1-z_3)^2}\sum_{n=1}\sum_{l=1}\frac{(z_2-z_1)^{n-1}(z_4-z_3)^{l-1}}{(l-1)!(n-1)!}\frac{1}{(z_1-z_3)^{n+l}}(n+l-1)!(-1)^{n-1} \\
&+\sum_{n=1}\sum_{l=1}\frac{(z_2-z_1)^{n-1}(z_4-z_3)^{l-1}}{(n-1)!(l-1)!}\frac{1}{(z_1-z_3)^{l+1}(z_1-z_3)^{n+1}}(-1)^{n-1}l!n!.
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $\sum\limits_{n=1}\sum\limits_{l=1}\frac{(z_2-z_1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(z_4-z_3)^{l-1}}{(l-1)!} =: \gamma$ ergibt sich:

$$\langle : 12 :: 34 : \rangle = \gamma\frac{(-1)^n}{(z_1-z_3)^{n+l+2}}\big\{-l!n! - (n+l-1)!\big\}.$$

Die zwei Summanden werden jetzt einzeln untersucht.

Um die Rechnungen übersichtlich zu halten, werden folgende Abkürzungen verwendet: $\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3} =: \alpha$, $\frac{z_4-z_3}{z_1-z_3} =: \beta$

Zunächst:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} := -\gamma\frac{(-1)^n}{(z_1-z_3)^{n+l+2}}l!n! &= \frac{1}{(z_1-z_3)^4}\sum_{n=1}\sum_{l=1}nl(-1)^n\cdot\alpha\beta \\
&= -\frac{1}{(z_1-z_3)^4}\partial_\alpha\sum_{n=1}(-\alpha)^n\partial_\beta\sum_{l=1}(\beta)^l \\
&= -\frac{1}{(z_1-z_3)^4}\partial_\alpha\frac{1}{1+\alpha}\partial_\beta\frac{1}{1-\beta} \\
&= \frac{1}{(z_1-z_3)^4(1+\alpha)^2(1-\beta)^2} \\
&= \frac{1}{(z_1-z_3+z_2-z_1)^2(z_1-z_3+z_3-z_4)^2} \\
&= \frac{1}{(z_2-z_3)^2(z_1-z_4)^2}.
\end{aligned}$$

Ebenso läßt sich der zweite Term berechnen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} :&= -\gamma \frac{(-1)^n}{(z_1 - z_3)^{n+l+2}} (n+l-1)! \\
&= \frac{1}{(z_1 - z_3)^4} \sum_{n=1} \sum_{l=1} \frac{(-1)^n (n+l-1)!}{(n-1)!(l-1)!} \alpha^{n-1} \beta^{l-1} \\
&= -\frac{1}{(z_1 - z_3)^4} \sum_{n=0} \sum_{l=1} \frac{(-1)^{n+1} (n+l)!}{n! l!} l \alpha^n \beta^{l-1} \\
&= -\frac{1}{(z_1 - z_3)^4} \sum_{n=0} \sum_{l=1} \frac{(-1)^{n+1} (n+l)!}{n! l!} \alpha^n \partial_\beta \beta^l .
\end{aligned}
$$

Jetzt der bekannte Trick, die Summationsreihenfolge zu ändern:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \frac{1}{(z_1 - z_3)^4} \partial_\beta \sum_{k=0} \sum_{n,l,n+l=k} \frac{k!}{n! l!} (-\alpha)^n \beta^l \\
&= \frac{1}{(z_1 - z_3)^4} \partial_\beta \sum_{k=0} (\beta - \alpha)^k \\
&= \frac{1}{(z_1 - z_3)^4} \partial_\beta \frac{1}{1 - (\beta - \alpha)} \\
&= \frac{1}{(z_1 - z_3)^4} \frac{1}{(1 - (\beta - \alpha)^2)} \\
&= \frac{1}{(z_1 - z_3)^2 (z_2 - z_4)^2} .
\end{aligned}
$$

Addiert man die beiden Terme, so folgt die Behauptung (A.1).

B Zwei hilfreiche Formeln

In dieser Arbeit werden in den Rechnungen wiederholt die bekannten Integrale

$$\int_{\mathbb{C}} d^2z\ |z|^{-A}|1-z|^{-B} = B(1-\frac{A}{2}, 1-\frac{B}{2}, \frac{A+B}{2}-1) \tag{B.1}$$

mit

$$B(a,b,c) = \pi\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b+c)\Gamma(c+a)} \tag{B.2}$$

und

$$\int_{\mathbb{C}} d^2z\ z^{\alpha+n_1}\overline{z}^{\alpha+n_2}(1-z)^{\beta+m_1}(1-\overline{z})^{\beta+m_2} = \frac{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi(\alpha+\beta))}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\alpha+n_1+1)\Gamma(\alpha+n_2+1)\Gamma(\beta+m_1+1)\Gamma(\beta+m_2+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n_1+m_1+2)\Gamma(\alpha+\beta+n_2+m_2+2)} \tag{B.3}$$

benutzt. Zunächst wird der Beweis des ersten Integrals aus [13] im Detail ausgeführt. (B.3) ist offensichtlich die Verallgemeinerung dieses Integrals. Im zweiten Teil wird gezeigt, daß für die entsprechenden Exponenten die beiden Lösungen äquivalent sind.

Beweis von B.1:

Zunächst wird gezeigt, daß

$$\int d^2z\ |z|^{-A}|1-z|^{-B} = \pi\frac{\Gamma(\frac{A+B}{2}-1)}{\Gamma(1-\frac{A}{2})\Gamma(1-\frac{B}{2})}\int_0^1 d\lambda\ \lambda^{-\frac{A}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{B}{2}}. \tag{B.4}$$

Es gilt:

$$|z|^{-A} = \frac{1}{\Gamma(\frac{A}{2})}\int_0^\infty dt\ t^{\frac{A}{2}-1}e^{-t|z|^2}. \tag{B.5}$$

Damit ist

$$\int d^2z\ |z|^{-A}|1-z|^{-B} = \frac{1}{\Gamma(\frac{A}{2})\Gamma(\frac{B}{2})}\int_0^\infty du\,dt\ t^{\frac{A}{2}-1}u^{\frac{B}{2}-1}$$
$$\times\int_{-\infty}^\infty dx\,dy\ \exp\{-t(x^2+y^2)-u[(1-x)^2+y^2]\}.$$

Der zweite Teil des Integrals gibt:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\ \exp\{-t(x^2+y^2) - u[(1-x)^2+y^2]\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\ \exp\{-(t+u)x^2 + 2ux - u - (t+u)y^2\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-(t+u)y^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-(t+u)[(x-\frac{u}{t+u})^2 - \frac{u^2}{(t+u)^2}]} e^{-u} =: C\,.
\end{aligned}$$

Es ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-(t+u)y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t+u}}$$

und damit

$$C = \frac{\pi}{t+u} e^{-\frac{tu}{t+u}}\ . \tag{B.6}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
D :=& \int_{\mathbb{C}} d^2z\ |z|^{-A}|1-z|^{-B} \\
=& \frac{\pi}{\Gamma(\frac{A}{2})\Gamma(\frac{B}{2})} \int_0^{\infty} du\, dt\ \frac{t^{\frac{A}{2}-1} u^{\frac{B}{2}-1}}{t+u} e^{-\frac{tu}{t+u}}\ .
\end{aligned}$$

Mit den Substitutionen $\lambda = \dfrac{u}{t+u}$ und $\mu = \dfrac{tu}{t+u}$ folgt:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\pi}{\Gamma(\frac{A}{2})\Gamma(\frac{B}{2})} \int_0^1 d\lambda \int_0^{\infty} d\mu\ \frac{(t+u)^2}{tu} t^{\frac{A}{2}-1} u^{\frac{B}{2}-1} e^{-\mu} \\
&= \frac{\pi}{\Gamma(\frac{A}{2})\Gamma(\frac{B}{2})} \int_0^1 d\lambda \int_0^{\infty} d\mu\ \mu^{\frac{A+B}{2}-2} \lambda^{-\frac{A}{2}} (1-\lambda)^{-\frac{B}{2}} e^{-\mu} \\
&= \frac{\pi\Gamma(\frac{A+B}{2}-2)}{\Gamma(\frac{A}{2})\Gamma(\frac{B}{2})} \int_0^1 d\lambda\ \lambda^{-\frac{A}{2}} (1-\lambda)^{-\frac{B}{2}}\ ,
\end{aligned} \tag{B.7}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, daß $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt\, t^{z-1} e^{-t}$. (B.8)

Mit der Identität

$$\int_0^1 d\lambda\ \lambda^{-\frac{A}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{B}{2}} = B(-\frac{A}{2}+1,-\frac{B}{2}+1) = \frac{\Gamma(1-\frac{A}{2})\Gamma(1-\frac{B}{2})}{\Gamma(2-\frac{A+B}{2})} \quad \text{(B.9)}$$

erhält man die Behauptung.

Es wird jetzt gezeigt, daß das Integral

$$\int d^2z\ |z|^{-A}|1-z|^{-B} = \pi \frac{\Gamma(\frac{A+B}{2}-1)}{\Gamma(1-\frac{A}{2})\Gamma(1-\frac{B}{2})} \int_0^1 d\lambda\ \lambda^{-\frac{A}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{B}{2}}$$

für $n_1 = n_2 = n$ und $m_1 = m_2 = m$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}\int d^2z\ z^{\alpha+n_1}\overline{z}^{\alpha+n_2}(1-z)^{\beta+n_1}(1-\overline{z})^{\beta+m_2} &= \frac{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi(\alpha+\beta)} \\ &\times \frac{\Gamma(\alpha+n_1+1)\Gamma(\alpha+n_2+1)\Gamma(\beta+m_1+1)\Gamma(\beta+m_2+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n_1+m_1+2)\Gamma(\alpha+\beta+n_2+m_2+2)}\end{aligned}$$

ist.

Beweis:

Zunächst gilt es festzustellen, daß

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}(-a-n_1-n_2) \\ \beta &= \frac{1}{2}(-b-m_1-m_2).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}E := \int d^2\ z\ z^{\alpha+n_1}\overline{z}^{\alpha+n_2}(1-z)^{\beta+n_1}(1-\overline{z})^{\beta+m_2} &= \frac{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi(\alpha+\beta))} \\ &\times \frac{\Gamma(\alpha+n_1+1)\Gamma(\alpha+n_2+1)\Gamma(\beta+m_1+1)\Gamma(\beta+m_2+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n_1+m_1+2)\Gamma(\alpha+\beta+n_2+m_2+2)} \\ = -&\frac{\sin(\frac{\pi}{2}(a+n_1+n_2))\sin(\frac{\pi}{2}(b+m_1+m_2))}{\sin(\frac{\pi}{2}(a+n_1+n_2+b+m_1+m_2))} \\ &\times \frac{\Gamma((2-a+n_1-n_2)/2)\Gamma((2-a-n_1+n_2)/2)}{\Gamma((4-(a+b)+(n_1-n_2)+(m_1-m_2))/2)} \\ &\times \frac{\Gamma((2-b+m_1-m_2)/2)\Gamma((2-b-m_1+m_2)/2)}{\Gamma((4-(a+b)-(n_1-n_2)-(m_1-m_2)/2)}\end{aligned}$$

$$= - \frac{\sin(\pi \frac{1}{2}(a+2n))\sin(\pi \frac{1}{2}(b+2m))}{\sin(\pi(\frac{1}{2}(a+2n+b+2m))} \frac{\Gamma((2-a)/2)\Gamma((2-a)/2)\Gamma((2-b)/2)\Gamma((2-b)/2)}{\Gamma((4-(a+b)/2)\Gamma((4-(a+b))/2)}.$$

Da $n, m \in \mathbb{Z}$, vereinfacht sich der Ausdruck weiter:

$$E = \frac{\sin(\pi \frac{1}{2}a)\sin(\pi \frac{1}{2}b)}{\sin(\pi(\frac{1}{2}(a+b)))} \frac{\Gamma((2-a)/2)\Gamma((2-a)/2)\Gamma((2-b)/2)\Gamma((2-b)/2)}{\Gamma((4-(a+b))/2)\Gamma((4-(a+b))/2)}.$$

Unter Ausnutzung von

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{B.10}$$

erhält man schließlich die Behauptung.

C Operatorproduktentwicklungen

Es folgt eine Zusammenstellung der in den Rechnungen verwendeten Operatorproduktentwicklungen. Dabei ist $\eta^{\mu\nu} = diag(-,+)$, a und b sind reelle, w und z komplexe Variablen.

C.1 OPE der Materiefelder in reinen Amplituden

offen-offen:

$$\begin{aligned}
X^{\pm\mu}(a)X^{\mp\nu}(b) &\sim -2\eta^{\mu\nu}\ln(a-b) \\
\Psi^{\pm\mu}(a)\Psi^{\mp\nu}(b) &\sim -\frac{2\eta^{\mu\nu}}{a-b} \\
e^{ik_iX}(a)e^{ik_jX}(b) &\sim (a-b)^{k_{ij}}e^{i(k_i+k_j)X(b)} \\
k_i^{\pm}\partial X^{\mp}(a)e^{ik_jX}(b) &\sim \frac{-ik_i^{\pm}k_j^{\mp}}{a-b}e^{ik_jX(b)}
\end{aligned}$$

geschlossen-geschlossen:

$$\begin{aligned}
X^{\pm\mu}(z)X^{\mp\nu}(w) &\sim -2\eta^{\mu\nu}\ln(z-w) \\
\Psi^{\pm\mu}(z)\Psi^{\mp\nu}(w) &\sim -\frac{2\eta^{\mu\nu}}{z-w} \\
e^{ik_iX}(z)e^{ik_jX}(w) &\sim (z-w)^{k_{ij}}e^{i(k_i+k_j)X(w)} \\
k_i^{\pm}\partial X^{\mp}(z)e^{ik_jX}(w) &\sim \frac{-ik_i^{\pm}k_j^{\mp}}{z-w}e^{ik_jX(w)}
\end{aligned}$$

C.2 OPE der Materiefelder in gemischten Amplituden

$$\begin{aligned}
X^{\pm\mu}(a)X^{\mp\nu}(b) &\sim -2\eta^{\mu\nu}\ln(a-b) && \text{offen-offen} \\
X^{\pm\mu}(a)X^{\mp\nu}(z) &\sim -\eta^{\mu\nu}\ln(a-z) && \text{offen-geschlossen}
\end{aligned}$$

geschlossen-geschlossen:

$$\begin{aligned}
X^{\pm\mu}(z)X^{\mp\nu}(w) &\sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\ln(z-w) \\
X^{\pm\mu}(z)X^{\mp\nu}(\overline{w}) &\sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\ln(z-\overline{w}) \\
X^{\pm\mu}(\overline{z})X^{\mp\nu}(w) &\sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\ln(\overline{z}-w) \\
X^{\pm\mu}(\overline{z})X^{\mp\nu}(\overline{w}) &\sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\ln(\overline{z}-\overline{w})
\end{aligned}$$

$$\Psi^{\pm\mu}(a)\Psi^{\mp\nu}(b) \sim -\frac{2\eta^{\mu\nu}}{a-b} \qquad \text{offen-offen}$$
$$\Psi^{\pm\mu}(a)\Psi^{\mp\nu}(z) \sim -\frac{\eta^{\mu\nu}}{a-z} \qquad \text{offen-geschlossen}$$

geschlossen-geschlossen:

$$\begin{aligned}
\Psi^{\pm\mu}(z)\Psi^{\mp\nu}(w) &\sim -\frac{1}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-w}\\
\Psi^{\pm\mu}(\overline{z})\Psi^{\mp\nu}(w) &\sim -\frac{1}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{\overline{z}-w}\\
\Psi^{\pm\mu}(z)\Psi^{\mp\nu}(\overline{w}) &\sim -\frac{1}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-\overline{w}}\\
\Psi^{\pm\mu}(\overline{z})\Psi^{\mp\nu}(\overline{w}) &\sim -\frac{1}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{\overline{z}-\overline{w}}
\end{aligned}$$

$$e^{ik_iX}(a)e^{ik_jX}(b) \sim (a-b)^{k_{ij}}e^{i(k_i+k_j)X(b)} \qquad \text{offen-offen}$$
$$e^{ik_iX}(a)e^{ik_jX}(w) \sim (a-z)^{k_{ij}/2}e^{i(k_i+k_j)X(z)} \qquad \text{offen-geschlossen}$$

geschlossen-geschlossen:

$$\begin{aligned}
e^{ik_iX}(z)e^{ik_jX}(w) &\sim (z-w)^{k_{ij}/4}e^{i(k_i+k_j)X(w)}\\
e^{ik_iX}(\overline{z})e^{ik_jX}(w) &\sim (\overline{z}-w)^{k_{ij}/4}e^{i(k_i+k_j)X(w)}\\
e^{ik_iX}(z)e^{ik_jX}(\overline{w}) &\sim (z-\overline{w})^{k_{ij}/4}e^{i(k_i+k_j)X(\overline{w})}\\
e^{ik_iX}(\overline{z})e^{ik_jX}(\overline{w}) &\sim (\overline{z}-\overline{w})^{k_{ij}/4}e^{i(k_i+k_j)X(\overline{w})}
\end{aligned}$$

$$k_i^{\pm}\partial X^{\mp}(a)e^{ik_jX}(b) \sim \frac{-ik_i^{\pm}k_j^{\mp}}{a-b}e^{ik_jX(b)} \qquad \text{offen-offen}$$
$$k_i^{\pm}\partial X^{\mp}(a)e^{ik_jX}(z) \sim \frac{-ik_i^{\pm}k_j^{\mp}}{2(a-z)}e^{ik_jX(z)} \qquad \text{offen-geschlossen}$$

geschlossen-geschlossen:

$$
\begin{aligned}
k_i^{\pm}\partial X^{\mp}(z)e^{ik_jX}(w) &\sim \frac{-ik_i^{\pm}k_j^{\mp}}{4(z-w)}e^{ik_jX(w)} \\
k_i^{\pm}\partial X^{\mp}(z)e^{ik_jX}(\overline{w}) &\sim \frac{-ik_i^{\pm}k_j^{\mp}}{4(z-\overline{w})}e^{ik_jX(\overline{w})} \\
k_i^{\pm}\partial X^{\mp}(\overline{z})e^{ik_jX}(w) &\sim \frac{-ik_i^{\pm}k_j^{\mp}}{4(\overline{z}-w)}e^{ik_jX(w)} \\
k_i^{\pm}\partial X^{\mp}(\overline{z})e^{ik_jX}(\overline{w}) &\sim \frac{-ik_i^{\pm}k_j^{\mp}}{4(\overline{z}-\overline{w})}e^{ik_jX(\overline{w})}
\end{aligned}
$$

D A_{oooc}

Es wird in einer ausführlichen Rechnung gezeigt, daß der kinematische Vorfaktor in (6.2) gleich Null ist.

$$
\begin{aligned}
&k^+_{14}k^+_{24}[(\overline{k^+_{23}} - k^+_{23})(k_{34})^2 - (k^+_{34} - \overline{k^+_{34}})k_{14}k_{34}] \\
&+ 2k^+_{13}k^+_{24}k^+_{34}(k_{14})^2 - 2k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}(k_{24})^2
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

Zunächst wird ausgenutzt, daß $k_{12} = k_{34}$ und $k_{23} = k_{14}$. Da zum Beispiel $k_{12} = \frac{1}{2}(k^+_{12} + \overline{k^+_{12}})$, erhält man 24 Terme, die ausgeschrieben lauten:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\{k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{23}}k^+_{12}k^+_{34} + k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{23}}k^+_{12}\overline{k^+_{34}} + k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{23}k^+_{12}}k^+_{34} + k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{23}k^+_{12}k^+_{34}} \\
&\quad - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{23}k^+_{12}k^+_{34} - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{23}k^+_{12}\overline{k^+_{34}} - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{23}\overline{k^+_{12}}k^+_{34} - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{23}\overline{k^+_{12}k^+_{34}} \\
&\quad - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{34}k^+_{23}k^+_{12} - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{34}k^+_{23}\overline{k^+_{12}} - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{34}\overline{k^+_{23}}k^+_{12} - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{34}\overline{k^+_{23}k^+_{12}} \\
&\quad + k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{34}}k^+_{23}k^+_{12} + k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{34}}k^+_{23}\overline{k^+_{12}} + k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{34}k^+_{23}}k^+_{12} + k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{34}k^+_{23}k^+_{12}}\} \\
&+\frac{1}{2}\{k^+_{13}k^+_{24}k^+_{34}k^+_{14}k^+_{23} + k^+_{13}k^+_{24}k^+_{34}k^+_{14}\overline{k^+_{23}} + k^+_{13}k^+_{24}k^+_{34}\overline{k^+_{14}}k^+_{23} + k^+_{13}k^+_{24}k^+_{34}\overline{k^+_{14}k^+_{23}} \\
&\quad - k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}k^+_{13}k^+_{14} - k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}k^+_{13}\overline{k^+_{14}} - k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}\overline{k^+_{13}}k^+_{14} - k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}\overline{k^+_{13}k^+_{14}}\}.
\end{aligned}
$$

In der ersten Klammer heben sich entweder je zwei Terme weg oder lassen sich zusammenfassen und auch in der zweiten Klammer kürzen sich zwei Summanden. Es verbleibt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\{k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{23}}k^+_{12}\overline{k^+_{34}} + k^+_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{23}k^+_{12}k^+_{34}} - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{23}k^+_{12}k^+_{34} - k^+_{14}k^+_{24}k^+_{23}\overline{k^+_{12}}k^+_{34} \\
&\quad + k^+_{13}k^+_{24}k^+_{34}k^+_{14}\overline{k^+_{23}} + k^+_{13}k^+_{24}k^+_{34}\overline{k^+_{14}}k^+_{23} + k^+_{13}k^+_{24}k^+_{34}\overline{k^+_{14}k^+_{23}} \\
&\quad - k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}\overline{k^+_{13}}k^+_{24} - k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}k^+_{13}\overline{k^+_{24}} - k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}\overline{k^+_{13}k^+_{24}}\}.
\end{aligned}
$$

Diesen Ausdruck kann man geschickter schreiben:

$$
\begin{aligned}
&k^+_{24}\Bigg\{k^+_{12}k^+_{14}\overline{k^+_{23}k^+_{34}} + \overline{k^+_{12}}k^+_{14}\overline{k^+_{23}k^+_{34}} - k^+_{12}k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34} \\
&\quad -\overline{k^+_{12}}k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34} + k^+_{13}k^+_{14}\overline{k^+_{23}}k^+_{34} + k^+_{13}\overline{k^+_{14}}k^+_{23}k^+_{34} \\
&\quad +k^+_{13}\overline{k^+_{14}k^+_{23}}k^+_{34} - \overline{k^+_{13}}k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}\Bigg\} \\
&-\overline{k^+_{24}}\Bigg\{k^+_{13}k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34} + \overline{k^+_{13}}k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{D.2}
$$

Aufgrund der Impulserhaltung und der Masselosigkeit gilt nun gerade:

$$\begin{aligned} \overline{k^+_{12}}k^+_{14}\overline{k^+_{23}k^+_{34}} + k^+_{13}\overline{k^+_{14}}k^+_{23}k^+_{34} &= -k^+_{14}\overline{k^+_{14}}k^+_{23}k^+_{34} \\ -\overline{k^+_{12}}k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34} - \overline{k^+_{13}}k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34} &= k^+_{14}\overline{k^+_{14}}k^+_{23}k^+_{34}. \end{aligned}$$

Diese Terme heben sich also weg.

Eine weitere Relation ist:

$$k^+_{24}k^+_{12}k^+_{14}\overline{k^+_{23}k^+_{34}} - \overline{k^+_{24}}k^+_{13}k^+_{14}k^+_{23}k^+_{34} = k^+_{14}k^+_{14}k^+_{23}\overline{k^+_{24}}k^+_{34}.$$

Damit reduziert sich (D.2) zu:

$$\begin{aligned} &k^+_{14}k^+_{14}k^+_{23}\overline{k^+_{24}}k^+_{34} - k^+_{12}k^+_{14}k^+_{23}k^+_{24}k^+_{34} + k^+_{13}k^+_{14}\overline{k^+_{23}}k^+_{24}k^+_{34} \\ &+k^+_{13}\overline{k^+_{14}k^+_{23}}k^+_{24}k^+_{34} - \overline{k^+_{13}}k^+_{14}k^+_{23}\overline{k^+_{24}}k^+_{34}. \end{aligned} \tag{D.3}$$

Um diesen Ausdruck weiter zu vereinfachen, benötigt man die Relation:

$$Im(k^+_{lm}k^+_{mn}k^+_{no}k^+_{ol}) = 0, \tag{D.4}$$

wobei die $l, m, n, o \in \{1, 2, 3, 4\}$ paarweise verschieden sind (zum Beweis siehe [16]). Damit heben sich die beiden letzten Terme gerade weg. Die ersten drei Terme lassen sich geschickter schreiben:

$$k^+_{14}k^+_{34}\left(k^+_{14}k^+_{23}\overline{k^+_{24}} - k^+_{12}k^+_{23}k^+_{24} + k^+_{13}\overline{k^+_{23}}k^+_{24}\right).$$

Der Ausdruck in der Klammer ergibt Null:

$$\begin{aligned} &k^+_{14}k^+_{23}\overline{k^+_{24}} - k^+_{12}k^+_{23}k^+_{24} + k^+_{13}\overline{k^+_{23}}k^+_{24} \\ &= -k^+_{24}k^+_{23}\overline{k^+_{24}} - k^+_{34}k^+_{23}\overline{k^+_{24}} + \overline{k^+_{23}}k^+_{23}k^+_{24} + \overline{k^+_{24}}k^+_{23}k^+_{24} - k^+_{23}\overline{k^+_{23}}k^+_{24} - \overline{k^+_{34}k^+_{23}}k^+_{24} \\ &= -k^+_{23}k^+_{34}\overline{k^+_{24}} - \overline{k^+_{23}k^+_{34}}k^+_{24} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß $Re(k^+_{23}k^+_{34}qk^+_{42}) = 0$ (vgl.[16]). Damit ist gezeigt, daß (D.1) verschwindet.

E A_{oocc}

Es wird ein Ansatz für die Lösung der Integrale (6.4) präsentiert (Abschnitt E.1). Danach werden die bosonischen und fermionischen Korrelatoren in zwei weiteren Fixierungen berechnet (Abschnitte E.2, E.3).

E.1 Die Fixierung $a' = \infty, z' = i$

Ziel ist es zunächst, die Integrale (6.4) auf eine einheitliche Form zu bringen. Dazu wird ein gemeinsamer Nenner ausgeklammert:

$$\int_{\mathbb{C}^+} d^2u \int_{-\infty}^{\infty} db \, \frac{|b-u|^{k_{23}}|b-i|^{k_{24}}|u-i|^{k_{34}/2}|u+i|^{k_{34}/2}}{(b^2+1)|b-u|^2|u-i|^2|u+i|^2} \times A$$

mit

$$\begin{aligned}
A =& (b^2+1)|b-u|^2\big\{k_{12}(k_{34}^+)^2 - k_{12}^+\overline{k_{12}^+}(k_{34}^+)^2\big\} \\
&+ b^2(b^2+1)\big\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{23}(k_{34}^+)^2\big\} \\
&+ b(u+\overline{u})(b^2+1)\big\{-\frac{1}{8}(c_{13}c_{23}-c_{12}c_{23})(k_{34}^+)^2 \\
&\qquad\qquad - k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+ + \frac{1}{2}c_{23}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ (u+\overline{u})^2(b^2+1)\big\{\frac{1}{16}c_{13}c_{23}(k_{34}^+)^2\big\} \\
&+ b^2|b-u|^2\big\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{24}(k_{34}^+)^2\big\} \\
&+ b(u+\overline{u})|b-u|^2\big\{-\frac{1}{8}c_{13}c_{24}(k_{34}^+)^2 + \frac{1}{2}c_{24}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+ \\
&\qquad\qquad + k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\big\} \\
&+ (|u|^2-1)(b^2+1)\big\{k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ (|u|^2-1)|b-u|^2\big\{-k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ b^2(|u|^2-1)\{-c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\}\\
&+ b(b^2-1)(u+\overline{u})\{\tfrac{1}{2}c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\}\\
&+ b(|u|^2-1)(u+\overline{u})\{-\tfrac{1}{2}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\}\\
&+ (b^2-1)(u+\overline{u})^2\{\tfrac{1}{4}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\}\\
&+ (u+\overline{u})^2(b^2+1)\{-\tfrac{1}{4}c_{23}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+\}\\
&+ |u-i|^2|u+i|^2\{k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\}.
\end{aligned}
$$

Als nächstes werden die einzelnen Terme ausmultipliziert. Mit $|b-u|^2 = b^2+|u|^2-b(u+\overline{u})$ verbleibt für die Amplitude der folgende Ausdruck:

$$
\int_{\mathbb{C}^+} d^2u \int_{-\infty}^{\infty} db\, \frac{|b-u|^{k_{23}}|b-i|^{k_{24}}|u-i|^{k_{34}/2}|u+i|^{k_{34}/2}}{|u-i|^2|u+i|^2|b-u|^2(b^2+1)} \times B,
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
B =\,& b^4\Big\{k_{12}(k_{34}^+)^2 - k_{12}^+\overline{k_{12}^+}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{4}c_{12}c_{23}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{4}c_{12}c_{24}(k_{34}^+)^2\Big\} && \text{(E.1)}\\
&+ b^2|u|^2\Big\{k_{12}(k_{34}^+)^2 - k_{12}^+\overline{k_{12}^+}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{4}c_{12}c_{24}(k_{34}^+)^2 + k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+\\
&\quad - k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+ - c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Big\} && \text{(E.2)}\\
&+ b^3(u+\overline{u})\Big\{-k_{12}(k_{34}^+)^2 + k_{12}^+\overline{k_{12}^+}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{8}(c_{13}c_{23}-c_{12}c_{23})(k_{34}^+)^2\\
&\quad - k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+ + \frac{1}{2}c_{23}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+ + \frac{1}{4}c_{12}c_{24}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{8}c_{13}c_{24}(k_{34}^+)^2\\
&\quad + \frac{1}{2}c_{24}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+ + k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+ + \frac{1}{2}c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Big\} && \text{(E.3)}\\
&+ b^2\Big\{k_{12}(k_{34}^+)^2 - k_{12}^+\overline{k_{12}^+}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{4}c_{12}c_{23}(k_{34}^+)^2 - k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+\\
&\quad + k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+ + c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Big\} && \text{(E.4)}\\
&+ |u|^2\Big\{k_{12}(k_{34}^+)^2 - k_{12}^+\overline{k_{12}^+}(k_{34}^+)^2 + k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+\\
&\quad + k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+ - 2k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\Big\} && \text{(E.5)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ b(u+\overline{u})\Big\{ - k_{12}(k_{34}^+)^2 + k_{12}^+\overline{k_{12}^+}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{8}(c_{13}c_{23} - c_{12}c_{23})(k_{34}^+)^2 \\
&\quad - k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+ + \frac{1}{2}c_{23}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+ - k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+ - \frac{1}{2}c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+ \\
&\quad + \frac{1}{2}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Big\} && \text{(E.6)} \\
&+ b^2(u+\overline{u})^2\Big\{ \frac{1}{16}c_{13}c_{23}(k_{34}^+)^2 + \frac{1}{8}c_{13}c_{24}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{2}c_{24}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+ \\
&\quad - k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+ + \frac{1}{4}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+ - \frac{1}{4}c_{23}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+\Big\} && \text{(E.7)} \\
&+ (u+\overline{u})^2\Big\{ \frac{1}{16}c_{13}c_{23}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{4}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+ && \text{(E.8)} \\
&\quad + \frac{1}{4}c_{23}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+ + k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\Big\} && \text{(E.9)} \\
&+ b|u|^2(u+\overline{u})\Big\{ - \frac{1}{8}c_{13}c_{24}(k_{34}^+)^2 + \frac{1}{2}c_{24}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+ + k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+ \\
&\quad + k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+ - \frac{1}{2}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\Big\} && \text{(E.10)} \\
&+ \Big\{ - k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+ + k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\Big\} && \text{(E.11)} \\
&+ |u|^4\Big\{ - k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+ + k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\Big\}. && \text{(E.12)}
\end{aligned}
$$

Der Lösungsweg, der hier vorgeschlagen wird, beruht auf der Integraldarstellung der Gammafunktion

$$\Gamma(a) = z^a \int_0^\infty ds\, s^{a-1} e^{-zs} \quad \big(Re(z) > 0, Re(a) > 0\big). \tag{E.13}$$

Diese Gleichung kann geschickt ausgenutzt werden:

$$|z|^{-2a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty ds\, s^{a-1} e^{-|z|^2 s}. \tag{E.14}$$

Zunächst liege das Augenmerk nur auf der u-Integration. Da die Integranden invariant unter Vertauschung von u und $\overline{u}$ sind, kann die Integration auf die gesamte komplexe Ebene ausgeweitet werden. Mit $u = x + iy$ ist das grundlegende Integral:

$$\begin{aligned}
&\int d^2u\, |b-u|^{-2\alpha}|u-i|^{-2\beta}|u+i|^{-2\beta} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)} \int_0^{\infty} d\lambda\, d\mu\, d\nu\, \lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\nu^{\beta-1} \\
&\quad \times \exp\{-|b-u|^2\lambda - |u-i|^2\mu - |u+i|^2\nu\}.
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Mit der Abkürzung $\eta := \lambda + \mu + \nu$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(E.15) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)} \int_0^{\infty} d\lambda\, d\mu\, d\nu\, \lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\nu^{\beta-1} \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, \exp\{-\eta x^2 + 2b\lambda x - \eta y^2 + (2\mu - 2\nu)y - \lambda b^2 - \mu - \nu\}.
\end{aligned}$$

Die Integration über x bzw. y läßt sich problemlos durchführen:

$$\begin{aligned}
(E.15) =& \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda\, d\mu\, d\nu}{\eta}\, \lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\nu^{\beta-1} \\
&\times \exp\{-\lambda b^2 - \mu - \nu + \frac{b^2\lambda^2}{\eta} + \frac{(\mu-\nu)^2}{\eta}\}.
\end{aligned} \tag{E.16}$$

Dies ist das grundlegende Ergebnis, von dem alle weiteren Überlegungen ausgehen. Durch geschickte Umformung und Substitutionen ist es vielleicht möglich, das Integral auf bekannte Integrale der Hypergeometrischen Funktionen zurückzuführen und die b-Integration durchzuführen.

Das Grundintegral wird mit unterschiedlichen Potenzen von b, $|u|^2$ und $u+\overline{u}$ multipliziert. Diese Integrale lassen sich mittels *Differentiation nach Parameter* ebenfalls auf die obige Form bringen. Dazu drückt man beispielsweise $|u|^2$ durch

$$|u|^2 = \partial_\rho e^{\rho|u|^2}\Big|_{\rho=0}$$

aus[2].

[2] In der Folge wird der explizite Hinweis $\big|_{\rho=0}$ unterdrückt.

Folglich ist

$$\begin{aligned}
&\int d^2u \, |b-u|^{-2\alpha}|u-i|^{-2\beta}|u+i|^{-2\beta}|u|^2 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, dy \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)} \int\limits_{0}^{\infty} d\lambda\, d\mu\, d\nu\, \lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\nu^{\beta-1} \\
&\quad \times \partial_\rho \exp\{-|b-u|^2\lambda - |u-i|^2\mu - |u+i|^2\nu + \rho|u|^2\}.
\end{aligned} \tag{E.17}$$

Die u-Integration läßt sich wieder als x, y-Integration schreiben:

$$\begin{aligned}
&\partial_\rho \int d^2u \, \exp\{-|b-u|^2\lambda - |u-i|^2\mu - |u+i|^2\nu + \rho|u|^2\} \\
&= \partial_\rho \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, \exp\{-x^2(\lambda+\mu+\nu-\rho) + 2b\lambda x - y^2(\lambda+\mu+\nu-\rho) \\
&\quad + 2(\mu-\nu)y - \lambda^2 b^2 - \mu - \nu\}.
\end{aligned} \tag{E.18}$$

Mit $\eta' := \lambda + \mu + \nu - \rho$ ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned}
(\text{E.18}) &= \partial_\rho \frac{\pi}{\eta'} \exp\{-\lambda b^2 - \mu - \nu + \frac{b^2\lambda^2 + (\mu-\nu)^2}{\eta'}\} \\
&= \pi \big(\frac{\eta + b^2\lambda^2 + (\mu-\nu)^2}{\eta^3}\big) \exp\{-\lambda b^2 + \frac{b^2\lambda^2 + (\mu-\nu)^2}{\eta^2}\}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
(\text{E.17}) &= \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)} \int\limits_{0}^{\infty} d\lambda\, d\mu\, d\nu\, \lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\nu^{\beta-1} \\
&\quad \times \big(\frac{\eta + b^2\lambda^2 + (\mu-\nu)^2}{\eta^3}\big) \exp\{-\lambda b^2 + \frac{b^2\lambda^2 + (\mu-\nu)^2}{\eta^2}\}.
\end{aligned} \tag{E.19}$$

(E.16) und (E.19) sind von ähnlicher Struktur und auch die anderen Integrale aus (E.1)-(E.12) lassen sich mittels des obigen Tricks in dieser Form schreiben. Ob es möglich ist, die b-Integration auf bekannte Integrale zurückzuführen, bedarf jedoch noch einer eingehenderen Untersuchung, die hier nicht mehr durchgeführt wird.

Eine andere Möglichkeit ist, die b-Integration über Gleichung (E.14) *direkt* mit in die obigen Rechnungen einzubeziehen. Das grundlegende Integral ist dann:

$$\begin{aligned}
&\int d^2u \int_{-\infty}^{\infty} db\, |b-u|^{-2\alpha}|u-i|^{-2\beta}|u+i|^{-2\beta}|b-i|^{-2\gamma} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, db \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} d\lambda\, d\mu\, d\nu\, d\kappa\, \lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\nu^{\beta-1}\kappa^{\gamma-1} \\
&\quad \times \exp\{-|b-u|^2\lambda - |u-i|^2\mu - |u+i|^2\nu - |b-i|^2\kappa\}. \qquad \text{(E.20)}
\end{aligned}$$

Die Integration über x, y und b ist wieder elementar durchführbar ($\xi := \lambda+\kappa$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, db\, \exp\{-\eta x^2 - \eta y^2 + 2(\mu-\nu)y - \xi b^2 + 2b\lambda x\} = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\eta^2\xi - \eta\lambda^2}}.$$

Damit wird schließlich

$$\begin{aligned}
\text{(E.20)} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} d\lambda\, d\mu\, d\nu\, d\kappa\, \lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\nu^{\beta-1}\kappa^{\gamma-1} \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\eta^2\xi - \eta\lambda^2}} \\
&\quad \times \exp\{-\mu-\nu-\kappa+\frac{(\mu-\nu)^2}{\eta}\}. \qquad \text{(E.21)}
\end{aligned}$$

Alle anderen Integrale aus (E.1)-(E.12) lassen sich durch Differenzieren nach Parameter (s.o.) auf eine vergleichbare Form bringen. Es sei hierzu noch folgendes Beispiel angegeben:

$$\int d^2u \int_{-\infty}^{\infty} db\, |b-u|^{-2\alpha}|u-i|^{-2\beta}|u+i|^{-2\beta}|b-i|^{-2\gamma} b(u+\overline{u}). \qquad \text{(E.22)}$$

Unter Verwendung von $b(u+\overline{u}) = \partial_\rho e^{\rho b}\partial_\sigma e^{\sigma(u+\overline{u})}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\text{(E.22)} &= \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma^2(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} d\lambda\, d\mu\, d\nu\, d\kappa\, \lambda^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}\nu^{\beta-1}\kappa^{\gamma-1} \\
&\quad \times \frac{\lambda}{\sqrt{\eta^4\omega^3}} \exp\{\frac{(\mu-\nu)^2}{\eta} - \kappa - \mu - \nu\}, \qquad \text{(E.23)}
\end{aligned}$$

wobei $\omega := \xi - \dfrac{\lambda^2}{\eta}$.

E.2 Die Fixierung $b' = 0, z' = i$

Der $e^{-\varphi^-}/e^{-\varphi^+}$-Korrelator gibt den Vorfaktor $\frac{1}{2i(u-\overline{u})}$, die Jacobideterminante dieser Fixierung ist $J = 1$.

Der Koba-Nielsen-Term geht über in

K.N. $= a^{k_{12}}|a-u|^{k_{13}}|a-i|^{k_{14}}|u|^{k_{23}}|u-i|^{k_{34}/2}|u+i|^{k_{34}/2}$.

Die vier Produkte der bosonischen und fermionischen Korrelatoren (vgl. Abschnitt 6.2) sind in dieser Fixierung gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} =& \frac{1}{4}\Bigg\{ -4c_{12}c_{12}\frac{1}{a^2} - 4c_{13}c_{12}\frac{1}{|a-u|^2} + 2c_{13}c_{12}\frac{(u+\overline{u})}{a|a-u|^2} - 4c_{14}c_{12}\frac{1}{|a-i|^2} \\
& + 2c_{12}c_{23}\frac{u+\overline{u}}{a|u|^2} + 2c_{13}c_{23}\frac{a(u+\overline{u})}{|u|^2|a-u|^2} - c_{13}c_{23}\frac{(u+\overline{u})^2}{|a-u|^2|u|^2} \\
& + 2c_{14}c_{23}\frac{a(u+\overline{u})}{|u|^2|a-i|^2} + \frac{16k_{12}}{a^2}\Bigg\} \\
& \times \frac{(k_{34}^+)^2}{4}\left[\frac{2i(u-\overline{u})}{|u+i|^2|u-i|^2}\right] \\
\mathrm{II} =& -\frac{1}{4}\left\{2c_{12}\frac{1}{a} + c_{13}\frac{2a-(u+\overline{u})}{|a-u|^2} + 2c_{14}\frac{a}{|a-i|^2}\right\}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+ \\
& \times \left[\frac{2i(u-\overline{u})(u+\overline{u})}{|u|^2|u-i|^2|u+i|^2}\right] \\
\mathrm{III} =& -\frac{1}{4}\left\{2c_{12}\frac{1}{a} - c_{23}\frac{u+\overline{u}}{|u|^2}\right\}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+ \\
& \times \left[\frac{4ia(u-\overline{u})(|u|^2-1)}{|a-u|^2|a-i|^2|u-i|^2|u+i|^2} - \frac{2i(u-\overline{u})(a^2-1)(u+\overline{u})}{|a-u|^2|a-i|^2|u-i|^2|u+i|^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IV} =& -k_{12}^+\overline{k_{12}^+}k_{34}^+k_{34}^+\frac{2i(u-\overline{u})}{a^2|u+i|^2|u-i|^2} \\
& - k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\left[\frac{2i(u-\overline{u})(|u|^2-1)}{|a-u|^2|u-i|^2|u+i|^2} + \frac{2i(u-\overline{u})(u+\overline{u})}{a|a-u|^2|u-i|^2|u+i|^2}\right] \\
& + k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+\left[\frac{2i(u-\overline{u})(|u|^2-1)}{|u|^2|a-i|^2|u-i|^2|u+i|^2} + \frac{2i(u-\overline{u})(u+\overline{u})}{a|u|^2|a-i|^2|u-i|^2|u+i|^2}\right] \\
& + k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}\frac{2i(u-\overline{u})a^2}{|a-u|^2|u|^2|a-i|^2}.
\end{aligned}
$$

Faßt man die Ausdrücke zusammen, ergibt sich folgendes Integral:

$$\int\limits_{\mathbb{C}^+} d^2u \int\limits_{-\infty}^{\infty} da\ K.N. \frac{A}{|u-i|^2|u+i|^2}$$

mit

$$\begin{aligned}
A =& \frac{1}{a^2}\big\{k_{12}(k_{34}^+)^2 - k_{12}^+\overline{k_{12}^+}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{4}c_{12}c_{12}(k_{34}^+)^2\big\} \\
&+ \frac{1}{|a-u|^2}\big\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{13}(k_{34}^+)^2\big\} \\
&+ \frac{(u+\overline{u})}{a|a-u|^2}\big\{+\frac{1}{8}c_{12}c_{13}(k_{34}^+)^2 - k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{1}{|a-i|^2}\big\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{14}(k_{34}^+)^2 + k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{u+\overline{u}}{a|u|^2}\big\{\frac{1}{8}c_{12}c_{23}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{2}c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{a(u+\overline{u})}{|u|^2|a-u|^2}\big\{\frac{1}{8}c_{13}c_{23}(k_{34}^+)^2 - \frac{1}{2}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{(u+\overline{u})^2}{|u|^2|a-u|^2}\big\{-\frac{1}{8}c_{13}c_{23}(k_{14}^+)^2 + \frac{1}{4}c_{13}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{a(u+\overline{u})}{|u|^2|a-i|^2}\big\{\frac{1}{8}c_{14}c_{23}k_{34}^+ - \frac{1}{2}c_{14}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{|u|^2-1}{|a-u|^2|a-i|^2}\big\{-c_{12}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{a(u+\overline{u})}{|a-i|^2|a-u|^2}\big\{\frac{1}{2}c_{23}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{(a^2-1)(u+\overline{u})}{a|a-u|^2|a-i|^2}\big\{\frac{1}{2}c_{12}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{(a^2-1)(u+\overline{u})^2}{|a-i|^2|a-u|^2|u|^2}\big\{-\frac{1}{4}c_{23}k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{|u|^2-1}{|a-u|^2}\big\{-k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{1}{|u|^2|a-i|^2}\big\{-k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{(u+\overline{u})}{a|u|^2|a-i|^2}\big\{k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+\big\} \\
&+ \frac{a^2|u-i|^2|u+i|^2}{|a-u|^2|u|^2|a-i|^2}\big\{k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}\big\}.
\end{aligned}$$

E.3 Die Fixierung $u' = i, z' = iy$

Die Jacobideterminante ist $J = 1 - y^2$ (vgl. Abschnitt 5.6), der $e^{-\varphi^-}/e^{-\varphi^+}$-Korrelator gibt den Vorfaktor $-\frac{1}{4y}$.

Der Koba-Nielsen-Term geht über in

K.N. $= (a-b)^{k_{12}}(a^2+1)^{k_{13}/2}(a^2+y^2)^{k_{14}/2}(b^2+1)^{k_{23}/2}(b^2+y^2)^{k_{24}/2}|1-y^2|^{k_{34}/2}$.

Die vier Produkte der bosonischen und fermionischen Korrelatoren (vgl. Abschnitt 6.2) sind in dieser Fixierung gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} = &- \Big\{ c_{12}c_{12}\frac{1}{(a-b)^2} + c_{12}c_{23}\frac{b}{(a-b)(b^2+1)} + c_{12}c_{24}\frac{b}{(a-b)(b^2+y^2)} \\
&+ c_{13}c_{12}\frac{a}{(a-b)(a^2+1)} + c_{13}c_{23}\frac{ab}{(a^2+1)(b^2+1)} \\
&+ c_{13}c_{24}\frac{ab}{(a^2+1)(b^2+y^2)} + c_{14}c_{12}\frac{a}{(a-b)(a^2+y^2)} \\
&+ c_{14}c_{23}\frac{ab}{(a^2+y^2)(b^2+1)} + c_{14}c_{24}\frac{ab}{(a^2+y^2)(b^2+y^2)} - 4k_{12}\frac{1}{(a-b)^2} \Big\} \\
&\times \frac{(k_{34}^+)^2}{4}\left[\frac{-4y}{(1-y^2)^2}\right] \\
\mathrm{II} = &\Big\{ c_{12}\frac{1}{a-b} + c_{13}\frac{a}{a^2+1} + c_{14}\frac{a}{a^2+y^2} \Big\} k_{24}^+\overline{k_{23}^+}k_{34}^+ \\
&\times \left[\frac{4yb}{(b^2+1)(b^2+y^2)(1-y^2)}\right] \\
\mathrm{III} = &\Big\{ c_{12}\frac{1}{a-b} + c_{23}\frac{b}{b^2+1} + c_{24}\frac{b}{b^2+y^2} \Big\} k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{34}^+ \\
&\times \left[\frac{4ya}{(a^2+1)(a^2+y^2)(1-y^2)}\right] \\
\mathrm{IV} = &+ k_{12}^+\overline{k_{12}^+}k_{34}^+k_{34}^+\frac{4y}{(a-b)^2(1-y^2)^2} \\
&+ k_{12}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+k_{34}^+\frac{4y(a+b)}{(a-b)(b^2+y^2)(1-y^2)(a^2+1)} \\
&- k_{14}^+\overline{k_{12}^+k_{23}^+}k_{34}^+\frac{4y(a+b)}{(a-b)(b^2+1)(1-y^2)(a^2+y^2)} \\
&- k_{14}^+\overline{k_{13}^+}k_{24}^+\overline{k_{23}^+}\frac{4y(a-b)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(a^2+y^2)(b^2+y^2)}.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich folgendes Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} da \int_{-\infty}^{\infty} db\; K.N. \times A,$$

$$
\begin{aligned}
A =& \frac{1}{(a-b)^2(1-y^2)}\{k_{12}(k^+_{34})^2 - k^+_{12}\overline{k^+_{12}}(k^+_{34})^2 - \frac{1}{4}c_{12}c_{12}(k^+_{34})^2\} \\
&+ \frac{b}{(a-b)(b^2+1)(1-y^2)}\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{23}(k^+_{34})^2\} \\
&+ \frac{b}{(a-b)(b^2+y^2)(1-y^2)}\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{24}(k^+_{34})^2\} \\
&+ \frac{a}{(a-b)(a^2+1)(1-y^2)}\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{13}(k^+_{34})^2\} \\
&+ \frac{ab}{(a^2+1)(b^2+1)(1-y^2)}\{-\frac{1}{4}c_{13}c_{23}(k^+_{34})^2\} \\
&+ \frac{ab}{(a^2+1)(b^2+y^2)(1-y^2)}\{-\frac{1}{4}c_{13}c_{24}(k^+_{34})^2\} \\
&+ \frac{a}{(a-b)(a^2+y^2)(1-y^2)}\{-\frac{1}{4}c_{12}c_{14}(k^+_{34})^2\} \\
&+ \frac{ab}{(a^2+y^2)(b^2+1)(1-y^2)}\{-\frac{1}{4}c_{14}c_{23}(k^+_{34})^2\} \\
&+ \frac{ab}{(a^2+y^2)(b^2+y^2)(1-y^2)}\{-\frac{1}{4}c_{14}c_{24}(k^+_{34})^2\} \\
&+ \frac{b}{(a-b)(b^2+1)(b^2+y^2)}\{-c_{12}k^+_{24}\overline{k^+_{23}}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{ab}{(a^2+1)(b^2+1)(b^2+y^2)}\{-c_{13}k^+_{24}\overline{k^+_{23}}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{ab}{(a^2+y^2)(b^2+1)(b^2+y^2)}\{-c_{14}k^+_{24}\overline{k^+_{23}}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{a}{(a-b)(a^2+1)(a^2+y^2)}\{-c_{12}k^+_{14}\overline{k^+_{13}}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{ab}{(a^2+1)(b^2+1)(a^2+y^2)}\{-c_{23}k^+_{14}\overline{k^+_{13}}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{ab}{(a^2+1)(b^2+y^2)(a^2+y^2)}\{-c_{24}k^+_{14}\overline{k^+_{13}}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{a}{(a-b)(a^2+1)(b^2+y^2)}\{-k^+_{12}\overline{k^+_{13}}k^+_{24}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{b}{(a-b)(a^2+1)(b^2+y^2)}\{-k^+_{12}\overline{k^+_{13}}k^+_{24}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{a}{(a-b)(b^2+1)(a^2+y^2)}\{k^+_{14}\overline{k^+_{12}k^+_{23}}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{b}{(a-b)(b^2+1)(a^2+y^2)}\{k^+_{14}\overline{k^+_{12}k^+_{23}}k^+_{34}\} \\
&+ \frac{(a-b)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(a^2+y^2)(b^2+y^2)}\{k^+_{14}\overline{k^+_{13}}k^+_{24}\overline{k^+_{23}}\}.
\end{aligned}
$$

Literatur

[1] N.Marcus: *The N=2 Open String*, Nucl.Phys. B 387 (1992) 263

[2] N.Marcus: *A Tour through N=2 String*, Tel-Aviv preprint TAUP 2002-92, Nov. 92, hep-th/9211059

[3] J.Bischoff, S.Ketov, O.Lechtenfeld: *The GSO Projection, BRST - cohomology and picture changing in N=2 String Theory*, Nucl.Phys. B 438 (1995) 373

[4] P.Ginsparg: *Applied Conformal Field Theory*, Les Houches, Session XLIX, 1988, Fields, Strings and Critical Phenomena

[5] S.Ketov: *Conformal Field Theory*, World Scientific, Singapore, 1995

[6] A.N. Schellekens: *Introduction to Conformal Field Theory*, NIKHEF/96-011

[7] M.Ademello et al.: *Supersymmetric String and Colour Confinement*, Phys. Lett. 62B (1976) 1

[8] M.Ademello et al.: *Dual Strings with U(1) Colour Symmetry*, Nucl.Phys. B 111 (1976) 77

[9] D'Adda, Lizzi: *Space Dimensions from Supersymmetry for the N=2 Spinning String: A Four Dimensional Model*, Phs. Lett. B191 (1987) 85

[10] L.Brink, J.H. Schwarz: *Local Complex Supersymmetry in Two Dimensions*, Nucl.Phys. B 121 (1977) 285

[11] J.Bischoff: *Moduli und Amplituden des N=2 Strings*, Diss. 1996, Institut für Theoretische Physik, Universität Hannover

[12] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten: *Superstring Theory Vol.2*, Cambridge University Press, 1987

[13] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten: *Superstring Theory Vol.1*, Cambridge University Press, 1987

[14] D.Friedan, E.Martinec, S.Shenker: *Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory*, Nucl.Phys. B 271 (1986) 93

[15] H.Ooguri, C.Vafa: *Geometry of N=2 Strings*, Nucl.Phys. B 361 (1991) 469

[16] R. Hippmann: *Tree-Level-Amplituden des N=2 Strings*, Diplomarbeit September 1997, Institut für Theoretische Physik, Universität Hannover

[17] J.W.Dettman: *Applied Complex Variables*, Dover Publications, Inc.(1984)

[18] J.U.Brytschkov, O.I.Maritschew, A.P.Prudnikov: *Tabellen unbestimmter Integrale*, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1992

[19] O.Lechtenfeld, W.Siegel: *N=2 Worldsheet Instantons Yield Cubic Self-Dual Yang-Mills*, hep-th/9704076

[20] C.Devchand, O.Lechtenfeld: *in Vorbereitung*

[21] G.Chalmers, W.Siegel: *The Self-Dual Sector of QCD Amplitudes*, hep-th/9606061

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld für die Vergabe und Betreuung meiner Diplomarbeit. Mein Dank gilt weiterhin Jürgen Schulze für die zahlreichen oft langen Diskussionen, meinem Mitkämpfer auf dem Gebiet der gemischten Amplituden Patrick Stroetmann, insbesondere für seine Unterstützung beim Erstellen der Graphiken unter XFIG und Helge Dennhardt für seine stoische Geduld bei der Einweisung in die kleinen und großen Wunder von LaTeX und MAPLE. Henrik Ehlers sei für die *Rundungen* an den mit TECHNOBOX CAD5 erstellten String-Graphen gedankt.

Etwaige orthographische Schnitzer bitte ich bei meinen Korrekturlesern Henrik Ehlers, Sonja Hinz, Bernd Niemeyer und Torsten Thumstädter anzumahnen, auch ihnen bin ich für die Übernahme dieser unangenehmen Aufgabe zu großem Dank verpflichtet.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meinem Verwandten- und Bekanntenkreis und insbesondere bei Sandra für die langjährige Unterstützung während meines Studiums bedanken.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Hannover, den 16. Juni 1998