Die BRST-Kohomologie des bosonischen und des N=2-Superstring

Michael Wessel[1]
Diplomarbeit am Institut für
Theoretische Physik (ITP) der
Universität Hannover

September 1995

[1]email: wessel@itp.uni-hannover.de

Für meine Eltern

Du sollst dich fürchten!
Am Tag sollst du dich besonders vor den Geisterplätzen, Geisterhöhlen, Geisterwassern, Geisterbäumen, Geisterfelsen und Geistertieren und überhaupt vor allem, was mit Geistern zusammenhängt, fürchten.
Noch viel mehr sollst du dich aber in der Nacht fürchten, wo die Geister umgehen.

Aus den Geboten der Papuas

Inhaltsverzeichnis

1 Abriß

Gegenstand der Arbeit ist die Diskussion der BRST-Kohomologie des bosonischen (N=0) sowie des N=2-Superstring. Die Arbeit ist strukturiert wie folgt: in Kap.3 wird kurz das theoretische Grundgerüst des bosonischen String dargestellt. Die verschiedenen Ansätze zur Quantisierung, sowohl kovariant (Gupta-Bleuler), als auch nicht-kovariant (Lichtkegelquantisierung), werden eingeführt. Kap.4 stellt den Zusammenhang zu der modernen Beschreibung von Strings durch eine konforme Feldtheorie her. Das Konzept des konformen Feldes wird erläutert, elementare Rechnungen und Techniken werden erklärt, sowie der Zusammenhang zur Fockraumdarstellung der String-Zustände dargestellt. Die für die Analyse des N=2-Superstring nötigen Techniken bzgl. *Vertexoperatoren* und *Bosonisierung* werden bereitgestellt. In Kap.5 wird die moderne Form der Quantisierung in der Stringtheorie eingeführt: die BRST-Quantisierung. Einige elementare Betrachtungen über den geisterweiterten Fockraum werden anhand der bosonischen Theorie angestellt. Am Ende dieses Kapitels steht eine vollständige BRST-Analyse des bosonischen String in der Sprache der konformen Felder. Kap.6 stellt den Übergang zur Superstringtheorie dar. Die Auswirkungen von einer bzw. zwei Supersymmetrien auf der Stringweltfläche werden aufgezeigt, anschließend wird der Fall N=2 näher untersucht. In Kap.7 wird die Kohomologie im Neveu-Schwarz-Sektor mit Hilfe einer Graduierung des Hilbertraums, die durch die bekannten, mit Q_{BRST} vertauschenden Operatoren inklusive der *Picture-Zahl-Operatoren* induziert wird, untersucht. Die Darstellung aller Felder erfolgt in einer holomorphen Basis; die N=2-Geistfelder werden in bekannter Form [1] bosonisiert. Nichttriviale BRST-Kohomologie wird im kanonischen, sowie in weiteren speziellen Bildern untersucht, *Picture-Changing* wird explizit durchgeführt. Für viele der komplexeren Rechnungen wurden die von Thielemans [2] und Fujitsu [3] entwickelten Mathematica-Pakete herangezogen, die die Handhabung konformer Felder in komplizierten Rechnungen stark vereinfachen.

2 Einleitung

Bereits bei der Analyse der Struktur des Zustandsraumes des *freien bosonischen String* findet man einen Quanteneffekt, der eine ursprünglich vorhandene Eichsymmetrie zerstört: die Anomalie. Untersucht man das Anregungsspektrum mit Hilfe von Erzeugern und Vernichtern, taucht die Anomalie in Form eines Störterms in der Algebra der Symmetrie-Generatoren (Virasoro-Operatoren) auf. Durch Einführung der Faddeev-Popov-Geistfelder, die sich aus der konformen Eichfixierung ergeben, läßt sich dieser c-Zahl-Term kompensieren, so daß man die gewünschte Struktur, d.h. die naive Form der Virasoro-Algebra, wiedererhält. Gleichzeitig wird der Zustandsraum erweitert: der neue Raum enthält auch unphysikalische Zustände. Die Symmetrie auf diesem neuen Raum drückt sich darin aus, daß die physikalischen Zustände gerade die BRST-invarianten modulo die BRST-trivialen Zustände sind, also $Q_{BRST}\,|phys\rangle = 0$ *und* $|phys\rangle \sim |phys'\rangle$, wenn $|phys\rangle - |phys'\rangle = Q_{BRST}\,|*\rangle$. Die Fockraumdarstellung ist geeignet, um physikalische Eigenschaften ausgewählter Zustände zu verdeutlichen. Für die Analyse von globalen Strukturen innerhalb der unendlichen Menge von Anregungszuständen können entweder zusätzlich zu der vorgegebenen Algebra der Erzeuger/Vernichter-Moden gruppentheoretische Hilfsmittel herangezogen werden, oder es kann der Übergang zu einer konformen Feldtheorie erfolgen. Die Ergebnisse der erstgenannten Methode sind für den Fall des BRST-quantisierten bosonischen String als No Ghost- und Kohomologie-Theoreme (z.B. bei Thorn [4]) zu finden. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich dagegen mit der letztgenannten Vorgehensweise. In der konformen Feldtheorie sind die maßgeblichen Relationen zwischen konformen Feldern die *Operatorproduktentwicklungen* (OPE), die per Konstruktion *alle* Moden enthalten und dadurch die Analyse vereinfachen können. Insbesondere bei der Analyse des physikalischen Spektrums des N=2-Superstring wird fast ausschließlich mit Hilfe konformer Felder argumentiert. So ist es auch ein Ziel dieser Arbeit, zu der Aufklärung der BRST-Strukturen dieser Theorie beizutragen.

3 Bosonische Stringtheorie

3.1 Wirkung, Symmetrien und Bewegungsgleichungen

Bereits in der bosonischen Stringtheorie sind die wesentlichen Ideen, die auch für die Entwicklung der Superstringtheorie wichtig sind, realisiert. Die Implementierung eines eindimensionalen Objektes als fundamentale Größe erfolgt durch die Einbettungsfunktion $X^\mu(\sigma,\tau)$, eine Abbildung von der zweidimensionalen String-Weltfläche in eine D-dimensionale Raumzeit. Von diesem Standpunkt aus analysiert die Stringtheorie die Menge solcher Abbildungen. Topologische und (differential-)geometrische Struktur von Weltfläche und Raumzeit (auch: "Target Space") legen die String-Propagation fest. Der Parameter σ mißt die räumliche Ausdehnung des String und ist daher beschränkt:

$$0 \leq \sigma \leq \pi \ .$$

Hierdurch wird τ als Zeitentwicklungsparameter festgelegt. Dies führt auf das anschauliche Bild der Stringpropagation. Den String "sieht" man durch Festhalten von τ, topologisch äquivalent zum Kreis (im geschlossenen Fall) oder zum Intervall (im offenen Fall). Die grundsätzliche Unterscheidung zwischen offenen und geschlossenenen Strings zeigt sich weiter unten in der Form der Randbedingungen für die Bewegungsgleichungen.

Die geometrischen Eigenschaften von Weltfläche und Raumzeit werden jeweils wiedergegeben durch eine Metrik, für die Weltfläche $h_{\alpha\beta}$, wobei $\alpha, \beta \in \{0,1\}$, und für die Raumzeit $g_{\mu\nu}(X)$, $\mu,\nu \in \{0,1,\cdots,D-1\}$. Im Falle einer flachen Raumzeit wählt man die Minkowski-Metrik, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, mit der Signatur $(-++\cdots+)$, womit sich in Analogie zum Punktteilchen die folgende Wirkung aufschreiben läßt:

$$S = -\frac{T}{2}\int d\sigma d\tau \sqrt{h} h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \eta_{\mu\nu}\partial_\beta X^\nu \ , \tag{3.1}$$

wobei h der Absolutwert der Determinante von $h^{\alpha\beta}$ ist. Der Vorfaktor T kann als "String-Spannung" bezeichnet werden, und damit $l = \sqrt{\frac{1}{\pi T}}$ als fundamentale Stringlänge. Die X^μ transformieren als Vektoren unter Poincaré-Transformationen in D Dimensionen und als Skalare unter Reparametrisierungen der Weltfläche. Die Wirkung S beschreibt D masselose, skalare Felder unter Kopplung an 2-dimensionale Gravitation. Sie besitzt als lokale Symmetrien die Reparametrisierungsinvarianz (Invarianz unter der Gruppe der Diffeomorphismen):

$$
\begin{aligned}
\delta X^\mu &= \zeta^\alpha \partial_\alpha X^\mu \\
\delta h^{\alpha\beta} &= \zeta^\alpha \partial_\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \zeta^\alpha h^{\gamma\beta} - \partial_\gamma \zeta^\beta h_{\alpha\gamma} \\
\delta(\sqrt{h}) &= \partial_\alpha(\zeta^\alpha \sqrt{h}) \ ,
\end{aligned}
\tag{3.2a}
$$

und die Weyl-Invarianz

$$
\delta h^{\alpha\beta} = \Lambda h^{\alpha\beta} \ . \tag{3.2b}
$$

Die Reparametrisierungsinvarianz kann benutzt werden, um eine orthogonale Eichung zu wählen:

$$
h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}\, e^\phi = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^\phi \ . \tag{3.3}
$$

Die Weyl-Invarianz erlaubt jedoch, auch den Faktor e^ϕ wegzueichen. Damit ist die *konforme Eichung* vorgenommen. Es bleibt die eichfixierte Wirkung, die nun eine freie Feldtheorie beschreibt: [2] [3]

$$
S = -\tfrac{T}{2} \int d\sigma d\tau \, \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu . \tag{3.4}
$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für X, die sich aus dem Variationsprinzip ergeben, sind:

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^\mu = 0. \tag{3.5}
$$

Das Verschwinden von bei der Variation auftretenden Randtermen erfordert

$$
\begin{aligned}
\partial_\sigma X^\mu(\sigma = 0, \pi) = 0 \quad &, \quad \partial_\tau X^\mu(\tau = 0, T) = 0 \quad (offen) \\
\partial_\sigma X^\mu(\sigma = 0) = \partial_\sigma X^\mu(\sigma = \pi) \quad &, \quad \partial_\tau X^\mu(\tau = 0, T) = 0 \quad (geschlossen)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

als Randbedingungen. Die Wirkung (3.1) enthält jedoch als weiteren Freiheitsgrad auch die Metrik $h^{\alpha\beta}$. Die Variation bzgl. h liefert Zwangsbedingungen, die "Constraints":

$$
T_{\alpha\beta} := -\frac{2\pi}{T\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \tfrac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} \partial_\gamma X^\mu \partial_\delta X_\mu = 0 \ . \tag{3.7}
$$

[2] Eine Feldtheorie im Sinne der "ersten Quantisierung" der Quantenmechanik. Die Felder sind die Stringkoordinaten X. Eine Theorie für Felder $\phi(X)$ ist eine *String-Feldtheorie*, die hier nicht behandelt wird.

[3] Weiter unten werden Produkte unter der Metrik η einfach als $A_\mu B^\mu$ oder noch kürzer als $A \cdot B$ geschrieben.

$T_{\alpha\beta}$ ist der Energie-Impuls-Tensor der Felder X^μ. Diese Gleichungen können benutzt werden, um die Äquivalenz der Wirkung (3.4) zur Nambu-Goto-Wirkung zu zeigen [5]. Wie in Kap.4 erläutert wird, bildet T andererseits die Grundlage für die Konstruktion einer konformen Feldtheorie (CFT), auf der die moderne Sichtweise der Stringtheorie basiert. Die Gleichung (3.5) ist eine massenlose Wellengleichung. Der allgemeine Ansatz zur Lösung ist gegeben durch

$$X^\mu(\sigma) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma) \ . \tag{3.8}$$

Die Koordinaten, in denen die beiden Anteile entkoppeln, ermöglichen eine vergleichsweise einfache Schreibweise der Gleichungen und Untersuchung des Teilcheninhalts der Theorie. Dieses sind die Lichtkegelkoordinaten

$$\begin{aligned} \sigma^\pm &= \tau \pm \sigma \\ X^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}) \\ \partial_\pm &= \tfrac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma) \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Wichtig ist, daß hiermit eine anti-diagonale Minkowski-Metrik eingeführt wurde:

$$\eta_{++} = \eta_{--} = 0 \quad , \quad \eta_{+-} = \eta_{-+} = -\tfrac{1}{2} \ , \tag{3.10}$$

und damit $A^+ = -2A_-$ bzw. $A^- = -2A_+$. Hiermit erhält man die Constraints in der Form

$$\begin{aligned} T_{+-} &= T_{-+} = 0 \\ T_{++} &= (\partial_+ X)^2 = (\partial_+ X^i)^2 - 2\,(\partial_+ X^+)\,(\partial_+ X^-) = 0 \\ T_{--} &= (\partial_- X)^2 = 0 = (\partial_- X^i)^2 - 2\,(\partial_- X^+)\,(\partial_- X^-) = 0 \ , \end{aligned} \tag{3.11}$$

ebenso wie die Bewegungsgleichung

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0 \ . \tag{3.12}$$

Die allgemeine Lösung durch obigen Ansatz erhält man in Form der Fourier-Reihen

$$\begin{aligned} X_R^\mu(\sigma^-) &= x^\mu + \tfrac{1}{2} p^\mu \sigma^- + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^-} \qquad ; n \in \mathbf{Z} \\ X_L^\mu(\sigma^+) &= x^\mu + \tfrac{1}{2} p^\mu \sigma^+ + i \sum_{n \neq 0} \frac{\widetilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^+} \qquad ; n \in \mathbf{Z} \ , \end{aligned} \tag{3.13}$$

wobei die Fourierkoeffizienten α_n^μ als Oszillatoren (Moden des Feldes) betrachtet werden. Die Energie-Impulserhaltung des Systems wird ausgedrückt via

$$\begin{aligned} \partial_- T_{++} + \partial_+ T_{-+} &= 0 \\ \partial_+ T_{--} + \partial_- T_{+-} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Constraints erzwingen damit, nach der ersten Zeile von (3.11),

$$\partial_- T_{++} = 0 \quad ; \quad \partial_+ T_{--} = 0 \ . \tag{3.15}$$

Damit gilt aber auch

$$\partial_- [T_{++} f(x^+)] = 0 \quad , \quad \partial_+ [T_{--} f(x^-)] = 0 \ , \tag{3.16}$$

für beliebige Funktionen f, was nichts anderes als ein Erhaltungssatz für unendlich viele Ströme ist. Dies ist Ausdruck einer residuellen (d.h. nach Eichung noch vorhandenen) Symmetrie. Sie wird erzeugt von den nicht verschwindenden Komponenten von T in (3.11) [4]. Erzeugende dieser Symmetrie auf dem Level der Moden erhält man durch die Entwicklungen [5]

$$\begin{aligned} T_{--} &= \sum_{m\in\mathbf{Z}} L_m \, e^{-im\sigma^-} \quad ; \quad L_m = \tfrac{1}{2} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n \\ T_{++} &= \sum_{m\in\mathbf{Z}} , \widetilde{L}_m \, e^{-im\sigma^+} \quad ; \quad \widetilde{L}_m = \tfrac{1}{2} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widetilde{\alpha}_{m-n} \cdot \widetilde{\alpha}_n \ , \end{aligned} \tag{3.17}$$

wobei

$$\alpha_0^\mu = \widetilde{\alpha}_0^\mu = \tfrac{1}{2} p^\mu \ . \tag{3.18}$$

3.2 Erzeuger-, Vernichter- und Virasoro-Algebra

Aus der Wirkung (3.4) lassen sich bereits die Poisson-Klammern für X und $\partial_\tau X$ für gleiche Zeiten τ ablesen:

$$\begin{aligned} &\{X^\mu(\sigma), \partial_\tau X^\nu(\sigma')\} = -\eta^{\mu\nu} \, \delta(\sigma - \sigma') \\ &\{X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')\} = 0 = \{\partial_\tau X^\mu(\sigma), \partial_\tau X^\nu(\sigma')\} \ . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Daraus lassen sich über (3.13) Poisson-Klammern für die Moden von X ableiten. Die Quantisierung der freien Feldtheorie wird, wie üblich, durch die Ersetzung $\{,\} \to i[,]$ erreicht. Man erhält für die Schwerpunktskoordinaten und -Impulse

$$[x^\mu, p^\mu] = i\eta^{\mu\nu} \tag{3.20}$$

und für die Moden

$$\begin{aligned} &[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\widetilde{\alpha}_m^\mu, \widetilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu} \\ &[\widetilde{\alpha}_m^\mu, \alpha_n^\nu] = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.21}$$

[4] Die Symmetrie ist vorhanden, da eine geeignete Kombination von Reparametrisierung und Weyl-Reskalierung nach (3.2) die konforme Eichung erhält. Das Auftreten einer residuellen Symmetrie ist von der Elektrodynamik her bekannt und tritt dort bei der Wahl der Eichung des elektromagnetischen Potentials A_μ auf.

[5] Vgl. die Beschreibung in Kap.4 aus der Sicht der CFT.

Zu einer Erzeuger/Vernichter-Algebra kommt man durch die Redefinition

$$\alpha_m^\mu = \sqrt{m}\, a_m^\mu \quad , \quad \alpha_{-m}^\mu = \sqrt{m}\, a_m^{\mu\dagger} \; . \tag{3.22}$$

α_0^μ wird als Vernichter aufgefaßt. Der Vakuumzustand $|0\rangle$ genügt somit

$$\alpha_m^\mu \,|0\rangle = 0, \quad m \geq 0 \; . \tag{3.23}$$

Für die in (3.17) definierten L_m ist nun die Normalordnung relevant. Es ergibt sich die Virasoro-Algebra

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \tfrac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n} \tag{3.24}$$

mit dem Ergänzungsterm, der auch als *zentraler Term* bezeichnet wird. Weiter unten wird berechnet: $c = D$. Physikalische Zustände sind dann gegeben durch [6]

$$\prod_a \alpha_{-m_a}^{\mu_a} \;\; |0\rangle = |\phi\rangle \, , \quad m_a > 0 \; , \tag{3.25}$$

die jedoch den Constraints

$$L_{m>0} \;\; |\phi\rangle = 0 \tag{3.26}$$

und

$$(L_0 - a) \;\; |\phi\rangle = 0 \tag{3.27}$$

unterliegen. Hier ist a eine c-Zahl-Ambiguität von L_0 aufgrund der Normalordnung. Ein geistfreies physikalisches Spektrum ergibt sich nur für ein bestimmtes Wertepaar (D, a). Die letzte Gleichung gibt Anlaß zu der Massenschalen-Beziehung

$$-\tfrac{1}{4}p^2 = \tfrac{1}{4}M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \;\alpha_{-n}\alpha_n - a \; . \tag{3.28}$$

Die residuelle Symmetrie des Systems läßt auch die Wahl einer *Lichtkegeleichung* zu. Hierbei zeichnet man eine Raumzeitdimension aus, die nicht durch Oszillatoren angeregt werden soll. In der in (3.9) angegebenen Basis ist dies

$$\alpha_{n\neq 0}^+ = 0 \; . \tag{3.29}$$

Hiermit ergibt sich

$$p^+\alpha_m^- = \frac{1}{2}\sum_{n,i} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : -a\delta_{m,0} \; . \tag{3.30}$$

So kommt man zu einer explizit unitären Darstellung der Zustände,

$$\prod_a \alpha_{-m_a}^{i_a} \;\; |0\rangle \, , \quad , m_a > 0 \; , \tag{3.31}$$

[6] Notiert werden hier und im folgenden nur die rechtslaufenden Oszillatoren.

die natürlich nicht mehr Lorentz-kovariant ist. Diese Darstellung vereinfacht nun aber eine schnelle Analyse des Teilcheninhalts der Theorie. Aus der Forderung nach Lorentz-Invarianz erhält man $a = 1$ und $D = 26$ (vgl. hierzu [5], S.98-100). Hiermit ergibt (3.28) für den Grundzustand

$$|0; p^\mu\rangle \to \tfrac{1}{4}M^2 = -\frac{1}{4}p^2 = -a = -1 \tag{3.32}$$

und für den ersten angeregten Zustand

$$\alpha^i_{-1}\, |0; p^\mu\rangle \to \tfrac{1}{4}M^2 = 1 - a = 0 \ . \tag{3.33}$$

Der Grundzustand beschreibt demnach ein Tachyon und der erste angeregte Zustand ist ein masseloses Vektor-Teilchen mit 24 unabhängigen transversalen Polarisationen.

Die Darstellung des vollen Fockraums, d.h. ohne die Einschränkung (3.29), führt auf D hermitesche Feldoperatoren X^μ, was jedoch, wegen der beiden Vorzeichen in der Minkowski-Metrik $\eta^{\mu\nu}$, Zustände negativer Norm zur Folge hat. Es sind also Bedingungen zu suchen, die einen physikalischen Unterraum, d.h. einen Unterraum mit nichtnegativer Norm, unter Erhaltung der Kovarianz festlegen. Die zuerst entwickelte Lösung dieses Problems ist die *Gupta-Bleuler-Quantisierung* [6], die den Fockraum direkt durch Constraints einschränkt. Der aus heutiger Sicht natürlichere Ansatz ist die im folgenden verwendete und in Kap.5 noch einmal dargestellte *BRST-Quantisierung* [5], die es ermöglicht, aufgrund einer Symmetrie in einem zunächst um zusätzliche Freiheitsgrade (Geister) erweiterten Zustandsraum die physikalischen Zustände von den unphysikalischen zu trennen.

4 Moden und konforme Felder

In diesem Kapitel werden zunächst kurz die theoretischen Grundlagen einer konformen Feldtheorie (CFT) dargestellt, um dann zu einigen konzeptionellen und technischen Details vorzustoßen, die für die Überlegungen und Rechnungen in dieser Arbeit wesentlich sind. Insbesondere wird auf einige Subtilitäten im Umgang mit konformen Feldern hingewiesen. Eine besondere Rolle spielt hierbei die Tatsache, daß stets *normalgeordnete* zusammengesetzte Felder (mit einer speziellen, ebenfalls erläuterten Definition der Normalordnung) auftreten. Sowohl in der bosonischen Theorie als auch in der in Kap.6 ff. behandelten Superstringtheorie treten Exponenten von konformen Feldern, die *Vertex-Operatoren* im ursprünglichen Sinn, auf. Auch der Handhabung dieser Objekte ist hier ein Abschnitt gewidmet. Sowohl bei der Konstruktion des Energie-Impuls-Tensors T als auch bei der Einführung von Vertex-Operatoren und bosonisierten Fermionen wird die Problematik der Hintergrundladung nicht dargestellt. Eine detaillierte aber dennoch stringente Darstellung der hier abgehandelten Themen findet sich auch in [7].

Den Abschluß dieses Kapitels bilden einige Bemerkungen zu den Berechnungen von Operatorprodukten mit Hilfe von Mathematica-Paketen.

4.1 Konstruktion einer konformen Feldtheorie (CFT)

Eine CFT ist festgelegt durch ein bestimmtes Transformationsverhalten ihrer Felder auf **C**. Konforme Transformationen sind gerade die *Diffeomorphismen*, die die Metrik bis auf einen Skalenfaktor unverändert lassen:

$$x \to x' \qquad \Longrightarrow \qquad g_{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \omega(x) g_{\mu\nu} \ . \tag{4.1.1}$$

Die Tranformationen bilden die konforme Gruppe. Die hier interessierenden Transformationen in zwei Dimensionen können geschrieben werden als die analytischen Koordinatentransformationen

$$z \to f(z) \ , \ \bar{z} \to \bar{f(\bar{z})} \qquad , \qquad \partial f(z) \neq 0 \ . \tag{4.1.2}$$

Für Integraltransformationen ist wichtig, wie sich das Linienelement transformiert:

$$ds^2 \to \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right) ds^2 \ . \tag{4.1.3}$$

Konstruiert man nun einen Integranden

$$\Phi(z, \bar{z}) dz^h dz^{\bar{h}} \tag{4.1.4}$$

und verlangt Invarianz unter obiger Transformation, so erhält man das neue Verhalten

$$\Phi(z,\bar{z}) \to \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{h_1} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}_2} \Phi(f(z),\bar{f}(\bar{z})) \tag{4.1.5}$$

mit reellen Zahlen h_1 und $\bar{h}_2$. Ein Feld Φ, welches (4.1.5) erfüllt, wird *primäres Feld der konformen Dimension* $(h_1,\bar{h}_2)$ genannt. Wie in jeder Feldtheorie läßt sich eine Symmetrie auf der Menge solcher Felder durch die Konstruktion eines Noether-Stroms j^μ, der mit einer erhaltenen Ladung assoziiert ist, ausdrücken. Solche Ladungen Q erzeugen Symmetrietransformationen der Form

$$Q = \int d^2x\, j_0(x) \qquad \delta_\epsilon A = \epsilon[Q,A]\ . \tag{4.1.6}$$

In CFT findet man, daß die analytischen Koordinatentransformationen (Reparametrisierungen) mit einer erhaltenen Ladung assoziiert sind. Diese Transformationen,

$$z \to z + f(z)\ ,$$

werden erzeugt vom *Energie-Impuls-Tensor* $T_{\mu\nu}$ der Theorie, einem spurlosen und divergenzfreien Tensor in zwei Dimensionen. Die Erzeugenden sind

$$T_f = \oint_C f(z)T(z) \qquad ; \qquad \bar{T}_{\bar{f}} = \oint_C \bar{f}(\bar{z})\bar{T}(\bar{z}) \tag{4.1.7a}$$

mit

$$T(z) = T_{11} - T_{22} - 2iT_{12} \qquad ; \qquad \bar{T}(\bar{z}) = T_{11} - T_{22} + 2iT_{12}\ . \tag{4.1.7b}$$

Die Spurlosigkeit von T liefert den Erhaltungssatz des assoziierten Dilatationsstroms $j_\mu = T_{\mu\nu}X^\nu$. Eine Reparametrisierung des konformen Feldes $\Phi_j(w,\bar{w})$ ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned}\delta_f\Phi_j(w,\bar{w}) = [T_f,\Phi_j(w,\bar{w})] &= \left[\oint_{C_{0w}}\frac{dz}{2\pi i} - \oint_{C_0}\frac{dz}{2\pi i}\right] f(z)\,\langle T(z)\Phi_j(w,\bar{w})\rangle \\ &= \oint_{C_w}\frac{dz}{2\pi i} f(z)\,\langle T(z)\Phi_j(w,\bar{w})\rangle\ ,\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

unter Benutzung der Deformation des Integrationsweges "$C_{0w} - C_0 \to C_w$". In der Korrelationsfunktion in (4.1.8) ist wegen des infinitesimalen Abstandes der Operatorposition vom Integrationsweg die Kurzdistanzentwicklung [7]

$$T(z)\,\Phi_j(w,\bar{w}) \sim \frac{h_j\,\Phi_j(w,\bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\Phi_j(w,\bar{w})}{z-w} + reg. \tag{4.1.9}$$

zulässig, welche für Primärfelder Φ_j aus (4.1.5) folgt.

[7]Am Ende dieses Kapitels werden nähere Erläuterungen zu den Operatorproduktentwicklungen gegeben.

Die Operatoren im Korrelator in (4.1.8) sind bereits als geordnet im Sinne der *Radialordnung* [8] zu verstehen:

$$
\begin{aligned}
R(A(z)B(w)) &= \ A(z)B(w), \quad |z| > |w| \\
R(A(z)B(w)) &= \epsilon B(w)A(z), \quad |z| < |w|
\end{aligned}
\tag{4.1.10}
$$

wobei ϵ die Statistik der Felder berücksichtigt: es ist $\epsilon = -1$, falls A und B fermionisch sind, in allen anderen Fällen ist $\epsilon = +1$. Dieses Verfahren wird auch als *Radiale Quantisierung* bezeichnet.

Die Gleichung (4.1.8) sagt aus, daß die Information, die ein quantenmechanischer Kommutator enthält, sich in CFT in einem Kontur-Integral über eine Operatorproduktentwicklung wiederfindet. (4.1.9) bedeutet, daß das konforme Feld T - etwas grob gesprochen - via OPE gerade die konforme Dimension h eines Feldes mißt. Eine CFT ist demnach durch die Angabe der konformen Dimensionen aller Primär-Felder sowie der Struktur von T festgelegt. [9] Die konformen Dimensionen h der fundamentalen Felder kann man direkt aus der (eichfixierten) Wirkung einer Theorie extrahieren. Betrachtet man z.B. die Wirkung des Materie-Anteils des fermionischen String

$$
\int d^2z \, (\bar{\partial} X \cdot \partial X - \psi \cdot \bar{\partial}\psi - \bar{\psi} \cdot \partial\bar{\psi}) \ , \tag{4.1.11}
$$

so erhält man zusammen mit der Forderung nach homogenem Transformationsverhalten, (4.1.5), daß die konforme Dimension des Integranden gleich 2 sein muß. Es ergeben sich so $h[\partial X] = 1$, $h[\psi] = \frac{1}{2}$ und $h[\partial\psi] = \frac{3}{2}$. Man sieht insbesondere, daß, schematisch betrachtet, $h[\partial] = 1$. Die Struktur von T erhält man, wie in Kap.3, ebenfalls direkt aus der Wirkung.

Zu Beginn dieses Kapitels wurden Transformationen definiert, die vom Energie-Impuls-Tensor T einer spezifischen CFT erzeugt werden. Die Gleichung (4.1.9) kodiert einerseits das Verhalten eines primären Feldes bei konformen Transformationen, andererseits beschreibt sie einfach das Kurzdistanzverhalten zweier spezieller Operatoren auf der komplexen Ebene. Allgemein sind die bei Annäherung zweier Operatoren auftretenden Singularitäten in einer Operatorproduktentwicklung (OPE) enthalten:

$$
A(z)B(w) \sim \sum_i C_i(z-w)\, O_i(w) \ , \tag{4.1.12}
$$

[8]Die Radialordnung der CFT ist äquivalent zur in der Quantenfeldtheorie üblichen Zeitordnung. Siehe hierzu auch Kap.4.2.

[9]Allerdings wird noch die Angabe der Statistik der Felder benötigt. Die Beschreibung z.B. von Fermionen erfordert die Einführung antikommutierender konformer Felder, welche auf dem Niveau von (4.1.8) eine sorgfältige Behandlung erfordert (siehe unten).

wobei die O_i einen vollständigen Satz lokaler Operatoren bilden und die C_i singuläre Terme in $(z-w)$ sind. Es kann gezeigt werden, daß in zweidimensionaler CFT immer eine solche Basis konstruiert werden kann. Normalordnen heißt in diesem Formalismus das Trennen des singulären Teils der OPE vom regulären: [10]

$$: A(z)B(w) : = [ope(A(z)B(w)) - sing(A(z)B(w))] \ . \tag{4.1.13}$$

Betrachtet man dies als nach der OPE aufgelöst, so findet man mit (4.1.9) den Propagators eines Feldes

$$\langle A(z)A(w)\rangle = \frac{1}{(z-w)^{2\,h[A]}} \ , \tag{4.1.14}$$

und, daß die Berechnung von OPE zwischen zusammengesetzten Feldern gerade der Ausführung von Wick-Kontrakionen entspricht. Details hierzu findet man z.B. in [8] und [2]. In Stringtheorie treten häufig OPE von *zusammengesetzten* normalgeordneten Feldern der Form

$$: \prod_{i=1}^{p} A_i^{\beta(i)} : (z) \ : \prod_{j=1}^{q} A_j^{\gamma(j)} : (w) \tag{4.1.15}$$

auf. Ein Propagator sei wie in (4.1.14) definiert, jeweils für ein Feld A_i. $\gamma(i)$ und $\beta(i)$ sind die Potenzen der Felder. Im Spezialfall $p = q = 1$ und $\beta(1) = n$, $\gamma(1) = m$ ergibt sich

$$A_1^n(z)B_1^m(w) = \sum_{k=0}^{min(n,m)} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right) k! \ : A^{n-k}\, B^{m-k} : \langle AB\rangle^k \ . \tag{4.1.16}$$

Dieses ist im allgemeinen Fall (4.1.15) für jedes i durchzuführen. Die hierbei in jedem entstehenden Summanden nicht kontrahierten Felder stammen im allgemeinen sowohl aus der linken als auch der rechten Seite von (4.1.15), d.h. um ein neues zusammengesetztes Feld an *einem* Punkt zu bekommen, muß eine Taylorentwicklung folgen, üblicherweise in z um w: sei $O(z)$ ein (zusammengesetzter!) Operator, der mit einem Kontaktionsterm in (4.1.16) multipliziert ist. Die Entwickung liefert

$$O(z) = O(w) + \partial O(w)(z-w) + \tfrac{1}{2}\partial^2 O(w)(z-w)^2 + \dots \ . \tag{4.1.17}$$

Man erkennt, daß man in einer OPE die Bildung von Kontraktionen und die Taylorentwicklung zusammenfassen kann. Die Erweiterung von (4.1.12) auf die vollständige OPE ist

$$A(z)B(w) \sim \frac{O_{i_{max}}}{(z-w)^{i_{max}}} + \dots + \frac{O_1}{(z-w)} + O_0 + O_{-1}(z-w) + \dots \ , \tag{4.1.18}$$

[10]Hier wird zur Verdeutlichung die Notation $ope(A,B)$ benutzt. Im folgenden bedeutet $A(z)B(w)$ immer die OPE von A und B.

wobei $O_0 =: AB : (w)$, $O_{-1} =: (\partial A)B : (w)$, etc. Erst in der Form (4.1.18) kann man nun einzelne Ordnungen auswerten, da durch die Taylor-Entwicklung Operatoren, die Pole höherer Ordnung multiplizieren, Beiträge zu Polen niedrigerer Ordnung liefern können. Man benötigt meistens die nullte Ordnung (Normalordnung) oder die einfache Singularität zur Auswertung von Residuen wie in (4.1.8) (z.B. zur Bestimmung von Ladungen, siehe unten), aber auch die Ordnung $(z-w)^{-2}$ zur Bestimmung der konformen Dimension. Einfache Beispiele findet man in unter anderem in [8]. Bei Berechnungen mit Vertex-Operatoren (siehe unten) sind die Gleichungen (4.1.16) und (4.1.17) mit besonderer Sorgfalt zu betrachten: die Normalordnung solcher Objekte kann verschwinden, d.h. die Entwicklung (4.1.18) enthält nur Terme der Ordnung $(z-w)^{n\geq 1}$. In OPE zusammengesetzter Felder tragen diese Terme aber oft durch die Kompensation von Singularitäten bei. Außerdem ist bei der Taylor-Entwicklung eines Exponenten zu beachten, daß sie aus zwei verschachtelten Entwicklungen besteht:

$$\begin{aligned} e^{A(z)} &= e^{A(w)}\, e^{(z-w)\partial A(w)+\frac{1}{2}(z-w)^2\partial^2 A(w)+\ldots} \\ &= e^{A(w)}\Big\{1+\Big((z-w)\partial A(w)+\tfrac{1}{2}(z-w)^2\partial^2 A(w)+\ldots\Big) \\ &+\tfrac{1}{2}\Big((z-w)\partial A(w)+\tfrac{1}{2}(z-w)^2\partial^2 A(w)+\ldots\Big)^2+\ldots\Big\}\ , \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

so daß es zu jeder Ordnung $(z-w)^n$ verschiedene Beiträge gibt, deren Koeffizienten nicht in geschlossener Form dargestellt werden können. Bis zur zweiten Ordnung erhält man

$$e^{A(z)} = e^{A(w)}\Big\{1+(z-w)\partial A(w)+(z-w)^2\tfrac{1}{2}\Big(\partial^2 A(w)+(\partial A(w))^2\Big)+\ldots\Big\}\ . \tag{4.1.20}$$

4.2 String-Weltfläche als Riemannsche Fläche

Durch die Abbildung

$$e^{i\sigma^-}\to z=e^{\tau-i\sigma}\quad\text{bzw.}\quad e^{i\sigma^+}\to \bar{z}=e^{\tau+i\sigma}\ , \tag{4.2.1}$$

mit $\tau\in\mathbf{R}$ und $0<\sigma\leq 2\pi$ unter zusätzlicher Rotation ins Euklidische (Wick-Rotation), $\tau\to -i\tau$, erhält man in (3.13)

$$X_R^\mu(\sigma^-)\to X_R^\mu(z)=x^\mu-i\alpha_0^\mu ln(z)+i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\frac{\alpha_n^\mu}{z^n}\ , \tag{4.2.2}$$

und damit

$$i\partial X_R^\mu(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\alpha_n^\mu z^{-n-1}\ , \tag{4.2.3}$$

und entsprechendes für die "Linksläufer". (4.2.1) kann interpretiert werden als die Abbildung der Stringpropagation von der Zylinder-Oberfläche auf die komplexe Ebene. Aus $|z| = e^\tau$ erkennt man, daß unendlich ferne Vergangenheit und unendlich ferne Zukunft auf die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ abgebildet werden. Die Zeitentwicklung erfolgt auf größer werdenden konzentrischen Kreisen der Ebene, während gleiche Orte auf radialen Strahlen liegen. Die Zeitentwicklung, $\tau \to \tau + \delta\tau$, erfolgt auf der Ebene gerade durch eine Dilatation: $z \to e^{\delta\tau} z = z + \delta\tau z + \ldots$, während räumliche Translationen, $\sigma \to \sigma + \delta\sigma$, die Rotationen im Komplexen sind: $z \to e^{i\delta\sigma} z$.

Erst diese Konstruktion ist es, die letztlich den Apparat der Funktionentheorie auf die bisher beschriebene Theorie anwendbar macht.

Die Laurent-Entwicklung für T,

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n z^{-n-2} \tag{4.2.4a}$$

läßt die Umkehrung

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1}\, T(z) \tag{4.2.4b}$$

zu. Mit der oben entwickelten Kommutatordarstellung (4.1.8) erhält man

$$\begin{aligned}[L_m, L_n] &= \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1}\, w^{m+1} T(z)\, T(w) \\ &= (m-n)\, L_{m+n} + \frac{1}{12} c(m^3 - m)\delta_{m+n,0}\ .\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Im CFT-Formalismus ist diese Algebra, die durch T realisiert wird, nach (4.1.8) und (4.1.9) gegeben durch die OPE

$$T(z)\, T(w) \sim \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2\, T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + T^2(w) + (z-w)(\partial T)T(w) + \ldots\ . \tag{4.2.6}$$

Die Zahl c ist die konforme Anomalie der CFT. Für $T = T_X$ findet man mit Hilfe von (4.2.6)

$$c_X := c(X) = D \tag{4.2.7}$$

mit der Dimension D der Raumzeit.

4.3 Darstellung von Zuständen durch konforme Felder

Wie in Kap.3 verdeutlicht wurde, kann ein einzelner Zustand der bosonischen Stringtheorie durch Anwendung eines Produktes von Erzeuger-Moden $a^\mu_{-n} = a^{\mu\,\dagger}_n$ auf das Vakuum erhalten werden, wobei μ die Komponenten der Raumzeit indiziert. Ein Grundzustand ist gekennzeichnet durch [11]

$$a_n^\mu \, |0,k\rangle = 0 \quad , \quad n > 0 \tag{4.3.1a}$$

und

$$p^\mu \, |0,k\rangle = k^\mu \, |0,k\rangle \ . \tag{4.3.1b}$$

Mit den Definitionen der L_n, (3.17), ist klar, daß auch ein Objekt der Form

$$\prod_n L_{-n}^{\lambda_n} \, |0\rangle \tag{4.3.2}$$

die Information eines Zustands enthält. Thorn [4] behandelt Objekte der Form

$$L_{-1}^{\lambda_1} \cdots L_{-n}^{\lambda_n} \, |DDF\rangle \ , \tag{4.3.3}$$

wobei $|DDF\rangle$ die explizit physikalischen, durch eine "Spektrum-erzeugende Algebra" konstruierten, transversalen Zustände sind ([5], S.100ff). Unter Kenntnis der Virasoro-Algebra (3.24) gelingt es, die Zustände, die den Physikalitätsbedingungen [12]

$$L_{n\geq 0} \, |phys\rangle = h \, \delta_{n,0} \, |phys\rangle \tag{4.3.4}$$

genügen, explizit von den restlichen zu trennen. Den von (4.3.3) aufgespannten Raum nennt man ein Verma-Modul. Eine gleichartige Basis wird auch für das Kohomologie-Theorem benutzt, welches die physikalischen Zustände im geisterweiterten Hilbertraum heraussondert. Hierbei wird (4.3.3) erweitert durch entsprechende Ausdrücke für die Geist-Moden, und L_n wird durch die Moden L_n^{tot} des geisterweiterten Energie-Impuls-Tensors, T_{tot}, ersetzt.

Versucht man obige Basis in die Sprache konformer Felder zu übersetzen, tauchen Probleme auf, die in Normalordnungsambiguitäten und in der nichttrivialen Assoziativität von Mehrfach-Operatorprodukten (n-Punkt-Korrelatoren) begründet sind. Ein Zustand höchsten Gewichts läßt sich schreiben als

$$|h\rangle = \phi(z \to 0) \, |0\rangle = \phi_{-h}(0) \tag{4.3.5}$$

mit einem primären Feld ϕ der konformen Dimension h. Dies folgt aus der Entwicklung des Feldes in Moden (Laurent-Reihe, s.o.):

$$\phi(z) = \sum_n z^{-n-h[\phi]} \, \phi_n \ . \tag{4.3.6}$$

[11] Die a_n^μ unterscheiden sich nur durch eine Normierungkonstante von den α_n^μ.

[12] Dies entspricht für $D = 26$ in der nicht BRST-quantisierten Theorie einfach der Bedingung nicht-negativer Norm. Zustände negativer Norm nennt man auch "Geister", Zustände mit verschwindender Norm auch "spurious states". Diese "Geister" haben jedoch nichts mit den Reparametrisierungsgeistern, die ab Kap.5 auftauchen, zu tun.

Wie ist nun die Wirkung von Virasoro-Operatoren auf einen gegebenen Zustand? Man erhält [13]

$$
\begin{aligned}
L_{-n}\phi\,|0\rangle &= \oint_w \frac{dz}{2\pi i}(z-w)^{1-n}T(z)\phi(w)\,|0\rangle \\
&= \oint_w \frac{dz}{2\pi i}(z-w)^{1-n}\sum_{k=-2}^{\infty}(z-w)^k O_k(w)\,|0\rangle \\
&= O_{n-2}(w)\,|0\rangle \ ,
\end{aligned}
\tag{4.3.7}
$$

wobei die Summe die OPE darstellt, die auf die Identifikationen für die O_n führt:

$$
\begin{aligned}
O_{-2} &= h\phi \\
O_{-1} &= \partial\phi \\
O_0 &= T\phi \\
O_1 &= \partial T\phi \\
&\dots
\end{aligned}
\tag{4.3.8}
$$

Die Anwendung von L_{-n} "destilliert" also eine bestimmte Entwicklungsordnung der OPE heraus. Für die gewünschte vollständige Basis des Zustandsraums benötigt man jedoch Mehrfach-Anwendungen der L_{-n}:

$$
\begin{aligned}
L_{-m}L_{-n}\phi(w) &= \oint_{0,w}\frac{dz}{2\pi i}\oint_0\frac{dw}{2\pi i}\,z^{-n+1}w^{-m+1}T(z)T(w)\phi(0) \\
&= \oint_0\frac{dz}{2\pi i}z^{-n+1}T(z) :\partial^{m-2}T\phi:(0) \\
&=: [\partial^{n-2}T :\partial^{m-2}T\phi:]:(0) \\
&=: [\partial^{n-2}T(\partial^{m-2}T\phi - sing(\partial^{m-2}T\phi))]:(0) \\
&= [:\partial^{n-2}T\partial^{m-2}T\phi: - :\partial^{n-2}T\,sing(\partial^{m-2}T\phi):](0)\ ,
\end{aligned}
\tag{4.3.9}
$$

wobei der erste Teil in der letzten Zeile regulär und der zweite divergent ist ($sing(AB)$ kennzeichne den singulären Teil der OPE). Dies führt auf das Schema

$$
L_{-n}(*) \leftrightarrow :\partial^{n-2}T(*): \tag{4.3.10}
$$

und damit auf die Basis

$$
\left(\prod_{i=1}^{N} L_{-n_i}\,\phi\right) \propto: (\partial^{n_1-2}T:(\partial^{n_2-2}T:(\partial^{n_3-2}T\dots:\partial^{n_N-2}T\phi:):):):\ , \tag{4.3.11}
$$

[13] Felder, die ohne Argument notiert werden, sind hier und im folgenden beim Argument $z=0$ zu nehmen.

die sehr unhandlich für die gewünschte Analyse des Zustandraums ist. Insbesondere kann keine Behandlung analog zu den konformen *Ward-Identitäten* erfolgen, wie z.B. bei Ginsparg [8]: wendet man nämlich einen konformen Operator auf einen "String" der Form (4.3.11), jedoch mit assoziativer Normalordnung, an, so erhält man, dargestellt am Beispiel der Erzeugung der konformen Transformationen

$$\oint_{w_1 \ldots w_n} \frac{dz}{2\pi i} T(z)\phi_1(w_1)\cdots\phi_n(w_n) \tag{4.3.12}$$

und durch Deformation des Integrationsweges

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_1(w_1)\cdots\left(\oint_{w_j} \frac{dz}{2\pi i} T(z)\phi_j(w_j)\right)\cdots\phi_n(w_n)\ . \tag{4.3.13}$$

Unter welchen Bedingungen die Assoziativität in n-Punkt-OPE, z.Bsp. n=3

$$\begin{aligned} :[A(y):A(z)A(w):]: &=: \left[A(y)\left(A(z)A(w)+\frac{1}{(z-w)^2}\right)\right]: \\ &=: A(y)A(z)A(w):+\frac{A(y)}{(z-w)^2} \end{aligned} \tag{4.3.14a}$$

bzw.

$$\begin{aligned} :[:A(y)A(z):A(w)]: &=: \left[\left(A(y)A(z)+\frac{1}{(y-z)^2}\right)A(w)\right]: \\ &=: A(y)A(z)A(w):+\frac{A(w)}{(y-z)^2} \end{aligned} \tag{4.3.14b}$$

erhalten bleibt, ist z.B. von Thielemans [2] untersucht worden.

4.4 Der Vertex-Operator $e^{ik\cdot X}$

Anschauliche Betrachtungen von String-Wechselwirkungen [5] führen auf die Feststellung, daß Masseneigenzustände des String der Emission bzw. Absorption von Punktteilchen entsprechen. Die Veränderung der String-Wellenfunktion soll durch die Wirkung eines lokalen Operators auf der String-Weltfläche beschrieben werden. Da die Betrachtung von Wechselwirkungen der Konstruktion dieser Operatoren zugrundeliegt, werden sie *Vertex-Operatoren* genannt (im allgemeinen mit der Notation V). Diese sind jedoch auch für die Betrachtung des nicht-wechselwirkenden String, d.h. die Analyse des Spektrums nützlich, wie im Laufe dieser Arbeit deutlich werden wird. Da die Wirkung von V auf einen Stringzustand eine Wechselwirkung beschreiben soll, sollten durch V physikalische Zustände auf (neue) physikalische Zustände abgebildet werden. Regt man zunächst keine Oberschwingungen des String an, sondern betrachtet nur den Schwerpunktsimpuls, so erhält man, wenn man zusätzlich das bereits über die niedrigsten Anregungszustände des String gesagte in Betracht zieht (siehe (3.32) und (3.33)), als einfachsten Vertex-Operator:

$$V^0 \;=\; e^{ik_\mu X^\mu} \; . \tag{4.4.1}$$

Rechnet man mit Hilfe der Reihendarstellung des Exponenten die OPE mit T_X aus, so erhält man

$$T_X(z)\, V^0(w) \sim \frac{\frac{1}{2}\, k^2\, e^{ik_\mu X^\mu}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial(e^{ik_\mu X^\mu}(w))}{(z-w)} \; . \tag{4.4.2}$$

Dies zeichnet V^0 als Primärfeld mit $h[V^0] = \frac{1}{2}k^2$ aus. Die Wirkung von ∂X auf einen Exponenten ist gegeben durch

$$\partial X^\mu(z)\, e^{a\cdot X}(w) \sim \frac{a^\mu}{z-w}\, e^{a\cdot X}(w) \; . \tag{4.4.3}$$

Weiter erkennt man, daß für bestimmte Werte von k^2 die Massenlevel der niedrigsten Anregungszustände des String reproduziert werden. So liefert z.B. $k^2 = 2$ den richtigen Vertex für die Emission des tachyonischen Grundzustandes mit $M^2 = -2$. Kompliziertere Vertex-Operatoren können durch Multiplikation von V^0 mit Polynomen in Ableitungen von X konstruiert werden. Dies läßt sich - etwas abstrakt - notieren als [9] [14]

$$V^\gamma(z) =: \epsilon \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (\partial^i X)^{\gamma_i}\, e^{ik\cdot X} \; : (z) \; , \tag{4.4.4}$$

wobei der Multiindex $\gamma := (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$ jeder Ableitungsordnung i eine Potenz zuordnet. Die OPE solcher Objekte mit T_X enthalten im allgemeinen (aufgrund von Mehrfach-Wick-Kontraktionen) auch Singularitäten höherer als zweiter Ordnung. Die Primäfeldeigenschaft fordert das Verschwinden dieser Terme, wodurch sich Anforderungen an die Tensoren ϵ ergeben, die *Polarisationsbedingungen*. Dies wird in Kap.5 im Detail erläutert.

4.5 Superkonforme Feldtheorie

Die bereits in Kap.3 und Kap.4.2 eingeführte Virarsoro-Algebra kann auf zwei verschiedene Arten durch eine Supersymmetrie erweitert werden. Diese Erweiterungen wurden von Ramond und Neveu-Schwarz 1971 entwickelt. Eine lokale Weltflächensupersymmetrie manifestiert sich in der Sprache der CFT durch einen erweiterten

[14] Alle Lorentz-Indizes seien kontrahiert mit einem Tensor der “richtigen” Stufe, der hier schematisch durch ϵ angedeutet wird.

Energie-Impuls-Tensor

$$T(z,\theta) = T_{z,\theta}(z) + \theta\, T_{zz}(z) \ , \tag{4.5.1}$$

der nun auf neu einzuführenden *Superfeldern* $\phi_j(z,\theta)$ [15] verallgemeinerte Koordinaten-Transformationen einschließlich Supersymmetrietransformationen durchführt. θ ist eine komplexe Grassmann-Koordinate, der Supersymmetrie-Partner der Weltflächen-Koordinate z. In dem durch (z,θ) parametrisierten *Superraum* definiert man die holomorphe Ableitung

$$D = \partial_\theta + \theta \partial_z \ , \tag{4.5.2}$$

so daß $D^2 = \partial_z$. Hiermit und mit den Verschiebungen im Superraum

$$\begin{aligned} z_{12} &= z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2 \\ \theta_{12} &= \theta_1 - \theta_2 \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

erreicht man, daß die Taylorentwicklung eines Operators die gewohnte Form bekommt:

$$f(z_1,\theta_1) = f(z_2,\theta_2) + \theta_{12} D_2 f(z_2,\theta_2) + z_{12}\partial_2 f(z_2,\theta_2) + \dots \ . \tag{4.5.4}$$

Auf Grassmann-Zahlen wirkt das Integral wie eine Ableitung:

$$\int d\theta\, \theta = 1 \quad , \quad \int d\theta\, 1 = 0 \ . \tag{4.5.5}$$

Dies ermöglicht das Auswerten von Residuen und damit auch das Erzeugen endlicher Transformationen analog zu (4.1.8). Das zu (4.1.9) analoge Ergebnis ist

$$T(z_1,\theta_1)\,\phi(z_2,\theta_2) \sim h[\phi]\, \frac{\theta_{12}}{z_{12}^2}\, \phi(z_2,\theta_2) + \frac{\frac{1}{2}}{z_{12}} D_2\phi + \frac{\theta_{12}}{z_{12}} \partial_2\phi \ . \tag{4.5.6}$$

Die durch $T(z,\theta)$ induzierte Algebra ist anomal. Aus den Modenentwicklungen

$$\begin{aligned} T(z,\theta) &= \sum_n z^{-n-\frac{3}{2}}\, \frac{1}{2}\, G_n + \theta \sum_n z^{-n-2}\, L_n \\ \phi(z,\theta) &= \sum_n z^{-n-h[\phi]}\, \phi_{0n} + \theta \sum_n z^{-n-h[\phi]-\frac{1}{2}}\, \phi_{1n} \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

erhält man zusätzlich zu der bekannten Form der Virasoro-Algebra

$$[L_m, L_n] = (m-n)\, L_{m+n} + \frac{1}{8}\hat{c}(m^3 - m)\delta_{m,-n} \tag{4.5.8}$$

die neuen Gleichungen

$$\begin{aligned} [G_m, G_n] &= 2\, L_{m+n} + \frac{1}{2}\hat{c}(m^2 - \frac{1}{4})\delta_{m,-n} \\ [L_m, G_n] &= (\frac{1}{2}m - n) G_{m+n} \ . \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

[15] Antiholomorpher Anteil hier und in den folgenden Betrachtungen wiederum unterdrückt.

Dies legt nahe, als fundamentales Superfeld der Stringtheorie zu definieren (für jede Raumzeit-Dimension):

$$X(z,\theta) = x(z) + \theta\Psi(z) \tag{4.5.10}$$

mit den Anomalien $c_X = 1$ und $c_\Psi = \frac{1}{2}$ und $\hat{c} = \frac{2}{3}c = \frac{2}{3}(c_X + c_\Psi) = 1$.

4.6 Chirale Bosonisierung und Kozykel-Faktoren

Zu Beginn dieses Kapitels wurde gezeigt, daß eine CFT durch die Angabe der konformen Dimension der Primär-Felder festgelegt ist. Umgekehrt jedoch gilt dies nicht. Man kann zeigen [5], daß sich für ein Paar freier Fermionen, wie z.B. die Reparametrisierungsgeister des bosonischen String, eine Quantenäquivalenz mit einem Boson herstellen läßt, durch die Darstellung der fermionischen Objekte durch Exponentiale:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= e^{\phi(z)} \\ \bar{\Psi}(z) &= e^{-\phi(z)} \ . \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Die OPE solcher Darstellungen ergeben sich direkt aus denen des freien Bosons

$$\phi(z)\,\phi(w) \sim +ln(z-w) \ . \tag{4.6.2}$$

Die Standardresultate, die man durch explizites Ausführen aller Wickkontraktionen erhält, sind

$$\partial\phi(z)\, e^{p\phi}(w) \sim \frac{p}{(z-w)}\, e^{p\phi}(w) \tag{4.6.3}$$

und

$$e^{p\phi}(z)\, e^{q\phi}(w) \sim (e^{\langle\phi\,\phi\rangle})^{pq}\ : e^{p\phi(z)+q\phi(w)} : \ . \tag{4.6.4}$$

Man überzeugt sich, daß die Bosonisierungsvorschriften (4.6.1) die richtige OPE-Struktur reproduzieren, wenn man Energie-Impuls-Tensor und Strom ebenfalls durch das freie Boson ausdrückt. Hierbei benötigt man unter anderem die Ableitung des Exponentials,

$$\partial_z\, e^{p\phi(z)} = p(\partial\phi(z))\, e^{p\phi(z)} \ . \tag{4.6.5}$$

Man erkennt leicht, daß Ψ und $\bar{\Psi}$ antikommutieren:

$$\begin{aligned} e^{-\phi(z)}\, e^{\phi(w)} &\sim (z-w)^{-1} e^{-\phi(z)+\phi(w)} \\ &= (z-w)^{-1}\, e^{-\partial\phi(w)(z-w)-\frac{1}{2}\partial^2\phi(w)(z-w)^2-\dots} \\ &= (z-w)^{-1} - \partial\phi - \tfrac{1}{2}(z-w)\partial^2\phi + \tfrac{1}{2}(z-w)(\partial\phi)^2 + \dots \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

und entsprechend

$$
\begin{aligned}
e^{\phi(w)}\, e^{-\phi(z)} &\sim -(z-w)^{-1} e^{\phi(w)-\phi(z)} \\
&= -(z-w)^{-1} e^{-\partial\phi(w)(z-w)-\frac{1}{2}\partial^2\phi(w)(z-w)^2-\ldots} \\
&= -(z-w)^{-1} + \partial\phi + \tfrac{1}{2}(z-w)\partial^2\phi - \tfrac{1}{2}(z-w)(\partial\phi)^2 + \ldots \ .
\end{aligned}
\tag{4.6.7}
$$

Entsprechendes gilt für alle OPE bosonisierter Darstellungen des gleichen Fermions. Bosonisierte Darstellungen *verschiedener* Fermionen kommutieren jedoch, was die Konstruktion der *Kozykel-Faktoren* nötig macht: in der Jordan-Wigner-Konstruktion wird durch Multiplizieren des Exponentials mit einem Faktor

$$c_i = (-1)^{[N^1+\ldots+N^{i-1}]} \tag{4.6.8}$$

die Antikommutator-Eigenschaft auch zwischen Fermionen mit regulärer OPE hergestellt. Hierbei ist N^i der Fermionenzahl-Operator, der die $U(1)$-Ladungen p_i des i-ten Fermions in einem geordneten Produkt von bosonisierten Fermionen zählt. Nach (4.6.3) ist klar, daß $N^i \sim \oint \partial\phi^i$.

Bosonisiert man die bekannten freien fermionischen Geister mit konformen Dimensionen $h[b]=\lambda$, $h[c]=1-\lambda$ via

$$
\begin{aligned}
b &= e^{-\sigma} \\
c &= e^{\sigma} \ ,
\end{aligned}
\tag{4.6.9}
$$

so ist der Energie-Impuls-Tensor T_{bc} neu zu berechnen durch

$$T_{bc} = (\lambda-1)c(\partial b) + \lambda(\partial c)b \tag{4.6.10}$$

unter Anwendung von (4.6.3) bzw. (4.6.4). Das Ergebnis ist

$$T_\sigma = (\lambda - \frac{1}{2})\partial^2\sigma + \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 \ , \tag{4.6.11}$$

womit man den führenden Term der Algebra bestätigt:

$$T_\sigma\, T_\sigma \sim (-6\lambda^2+6\lambda-1)\,\frac{1}{(z-w)^4} \tag{4.6.12}$$

mit der Anomalie des (b,c)-Systems: $c_{bc}=-26$ für $\lambda=2$. Die durch (4.6.1) eingeführte Äquivalenz zwischen einem freien Boson und zwei Majorana-Fermionen besteht nur in zwei Dimensionen und unter weiteren Randbedingungen. So ist der Wertebereich des Bosons eingegrenzt: $\phi=\phi+2\pi L$ mit einer Windungszahl L (kompaktes Boson). Unter diesen Bedingungen ist es aber möglich, die Theorie eines mit $2n$ Fermionen

Ψ^i "besetzten" String vollständig in eine bosonische Theorie umzuschreiben:

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma(\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu - i\bar{\Psi}^i\rho^\alpha\partial_\alpha\Psi^i) \\
&\qquad\qquad\downarrow \\
S &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma(\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu + \partial_\alpha\phi^i\partial^\alpha\phi^i)\ ,
\end{aligned}
\tag{4.6.13}
$$

wobei i die n benötigten Bosonen numeriert. Bereits an der erwähnten Einschränkung des Wertebereichs von ϕ, wie auch an der unterschiedlichen Symmetrie, die beiden Anteilen der Wirkung (4.6.13) zugrundeliegt, ist zu erkennen, daß die hier eingeführten Objekte nicht das gleiche darstellen wie die oben eingeführten Felder $e^{ik\cdot X}$ (obgleich sie auch Vertex-Operatoren sind). Das Exponential e^ϕ ist ein Spezialfall von

$$
O^\lambda(z) = e^{\lambda\cdot\phi}\ , \tag{4.6.14}
$$

welches den aus den Bosonen ϕ^i gebildeten Vektor als konjugierte Größe zu einem Vektor λ auf dem Gewichtsgitter einer Lie-Algebra auffaßt.

In der Superstringtheorie ist Bosonisierung essentiell, da nur in der bosonisierten Basis alle Bereiche des Zustandsraums untersucht werden können. Dies wird in Kap.6 dargestellt. Hierbei kommt beim Superstring für die superkonformen Geister β, γ eine spezielle Bosonisierungstechnik zum Tragen, bei der die Bosonen als Produkte zweier Fermionen geschrieben werden, die dann getrennt bosonisiert werden können ("Bosonisierung des Bosons"). Hierzu benötigt man insbesondere ein "falsches" Vorzeichen in (4.6.2):

$$
\phi(z)\,\phi(w) \sim -ln(z-w)\ . \tag{4.6.2b}
$$

Man beachte, daß dies identisch ist mit dem Verhalten des Materiefeldes X. Die Struktur ist in vollständig bosonisierter Form

$$
\begin{aligned}
\beta &= \partial\phi_1 e^{\phi_1-\phi_2} \\
\gamma &= e^{-\phi_1+\phi_2}
\end{aligned}
\tag{4.6.15}
$$

und in der in dieser Arbeit verwendeten Form [1]

$$
\begin{aligned}
\beta &= \partial\xi e^{-\varphi} \\
\gamma &= e^{\varphi}\eta\ ,
\end{aligned}
\tag{4.6.16}
$$

d.h. nur eines der beiden Fermionen wird bosonisiert. Eine vollständige Formelsammlung hierzu findet sich in Kap.6 bzw. Kap.7.

Tiefergehende Diskussionen der Bosonisierung finden sich z.B. bei Friedan et. al. [10], einschließlich der Kozykel-Faktoren bei Kostelecky et. al [11] und (inklusive einer Implementation in ein Mathematica-Modul) bei Fujitsu [3].

4.7 OPE-Berechnungen mit Mathematica

Kompliziertere Berechnungen von OPE zusammengesetzter Operatoren wurden mit Mathematica durchgeführt. Die konforme Feldtheorie eignet sich aufgrund ihrer Struktur besonders für den Einsatz von Computeralgebra-Systemen. Einerseits ist es möglich, nach der Implementierung einer Theorie durch Angabe der fundamentalen Felder und ihrer Singularitäten, bzw. einer bekannten Algebra, beliebige normalgeordnete zusammengesetzte Felder zu konstruieren und singuläre oder reguläre Teile der OPE zwischen solchen Feldern zu berechnen. Andererseits kann man auch eine Algebra "suchen", indem man zunächst die Ströme in einer allgemeinen Form mit freien Koeffizienten definiert, um diese durch OPE mit anderen Feldern der Theorie festzulegen. Es wurden die Pakete opedefs.m und vertex.m von Thielemans [2] und zusätzlich das Paket ope.math von Fujitsu [3] benutzt. Die zitierten Veröffentlichungen enthalten jeweils unter anderem die - recht unterschiedlichen - theoretischen Ansätze der Programme, sowie eine Art Bedienungsanleitung. Die Pakete selbst sind von den Autoren auf Anfrage erhältlich.

Für beide Pakete gilt, daß sie, nachdem die Definition der elementaren Felder erfolgt ist, durch eine Eingabe der Form $OPE[A, B]$ den singulären Teil der OPE zwischen A und B in einer nach Polen sortierten Form liefern. Hierbei führen die Pakete die Wick-Kontraktionen sowie die nötigen Taylor-Entwicklungen durch, über die die Kontraktionsterme mit Polen höherer Ordnung zu denen mit niedrigerer Ordnung beitragen können. Es können bosonische und fermionische Objekte definiert werden. Durch Festlegung einer Standard-Ordnung können auch antikommutierende Objekte konsistent behandelt werden. A und B können beliebig komplizierte zusammengesetzte Felder sein.

Die Berechnungen zum bosonischen String wurden unter *Mathematica 2.2 for IBM RS/6000* durchgeführt, während die Rechnungen zum $N=2$-String unter *Mathematica 2.2.3 for MS Windows* auf 486DX- und Pentium-Systemen liefen.

5 BRST-Quantisierung

In diesem Kapitel wird zum einen der Mechanismus der Quantisierung des bosonischen String dargestellt, zum anderen werden hier anhand der bosonischen Theorie einige Werkzeuge für die BRST-Analyse entwickelt, die weiter unten für den N=2-Superstring benötigt werden.

5.1 Geisterweitertes System

Ein natürlicher Ansatz für die Quantisierung des bosonischen String ist die Pfadintegralmethode. Im Prinzip ist das Funktional

$$Z = \int Dh(\xi)DX(\xi)e^{-S[h,X]} \tag{5.1.1}$$

mit $\xi = (\tau, \sigma)$ für die "ungeeichte" Wirkung (3.1) zu untersuchen. Die Reparametrisierungen der String-Weltfläche,

$$\sigma \to g(\sigma)\,, \quad \text{infinitesimal} : \sigma \to \sigma + \xi(\sigma)\ , \tag{5.1.2}$$

bilden eine Gruppe. Das Gruppenvolumen dieser Diffeomorphismen läßt sich aus dem Integrationsmaß Dh in (5.1.1) herausziehen. Sei $F(h) = 0$ die Wahl der Eichbedingung, dann ergibt sich mit Einfügen der Eichfixierung (3.3): [16] [17]

$$Z = \int Dg(\xi) \int Dh(\xi)DX(\xi)\, e^{-S[h,X]}\, \delta(F(h))\, det(\tfrac{\delta F}{\delta h})\ , \tag{5.1.3}$$

wobei für die konforme Eichung

$$\frac{\delta F}{\delta h} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \bar\partial & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{5.1.3b}$$

Die Determinante erlaubt aber nach der Regel

$$det(A) = \int db_i\, dc_i\, e^{A_{ij}b_ic_j}\ , \tag{5.1.4}$$

mit antikommutierenden Objekten (Grassmann-Zahlen) b_i, c_i, die Darstellung

$$det\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \bar\partial & 0 \end{pmatrix} = \int Db_{\bar z\bar z}\, Dc^{\bar z} e^{i\int d^2z\, b_{\bar z\bar z}\partial c^{\bar z}} \int Db_{zz} Dc^z e^{i\int d^2z\, b_{zz}\bar\partial c^z}\ . \tag{5.1.5}$$

[16] Auf eine detaillierte technische Beschreibung soll hier verzichtet werden.

[17] In der kritischen Dimension der Raumzeit wird damit die Integration über die Gruppenmannigfaltigkeit, $\int Dg(\sigma)$, trivial und kann als Faktor abgespalten werden.

Führt man dies in (5.1.3) ein, so erhält man, daß

$$S[X] \to S_{mat}[X] + S_{ghost}[b,c] \tag{5.1.6}$$

mit S_{mat} wie in (3.4) und

$$S_{ghost} = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\,[b_{zz}\partial_{\bar{z}}c^z + b_{\bar{z}\bar{z}}\partial_z c^{\bar{z}}] \ . \tag{5.1.7}$$

Diese Wirkung beschreibt die Propagation der *Faddeev-Popov-Geister* auf der Weltfläche in konformer Eichung. Man leitet schnell die Bewegungsgleichungen ab:

$$\partial_{\bar{z}}c^z = \partial_{\bar{z}}b_{zz} = 0 \ . \tag{5.1.8}$$

Hiermit erkennt man, daß das System (b,c) ebenfalls eine CFT bildet, die es erlaubt, holomorphen und antiholomorphen Teil der Felder getrennt zu behandeln. Der assoziierte holomorphe Anteil des Energie-Impuls-Tensors ergibt sich in Analogie zu (3.7) als

$$T_{bc} = c\partial b + 2(\partial c)b \ . \tag{5.1.9}$$

Die konformen Dimensionen der Felder sind $h[b] = 2$ und $h[c] = -1$, wie man aus der Wirkung abliest (siehe Kap.4) und durch die OPE $T_{bc}(z)b(w)$ bzw. $T_{bc}(z)c(w)$ bestätigt. Die Anomalie dieses Systems bestimmt sich aus (4.2.6) mit $T = T_{bc}$ zu $c_{bc} = -26$. Dies führt dazu, daß die Kombination von Materie- und Geist-CFT, beschrieben durch

$$T := T_{total} = T_X + T_{bc} \ , \tag{5.1.10}$$

laut (4.2.7) für $D = 26$ verschwindende konforme Anomalie besitzt. Die redefinierten Moden $L_n := L_n^{total}$ von T_{total} erfüllen die Algebra

$$[L_m, L_n] = (n-m)\,L_{m+n} \tag{5.1.11}$$

ohne zentralen Term, wie man sie für den klassischen bosonischen String in Kap.3 erhalten hat.

Die Entwicklung der Geistfelder

$$\begin{aligned}
b(z) &= \sum_n b_n z^{-n-2} = \ldots + b_{-3}z + b_{-2} + b_{-1}\frac{1}{z} + \ldots \\
c(z) &= \sum_n b_n z^{-n+1} = \ldots + c_0 z + c_1 + c_2\frac{1}{z} + \ldots \\
&\Longrightarrow \\
b(z \to 0) &= b_{-2} \\
c(z \to 0) &= c_1
\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

führt auf die Frage nach der Struktur des erweiterten Fockraums. Um die Zahl der in einem Zustand enthaltenen Anregungen durch Geistmoden zu messen, definiert man die *totale Geistzahl*

$$U = c^i b_i \ , \tag{5.1.12b}$$

so daß im folgenden ein Zustand mit Geistzahl u als $|u\rangle$ notiert wird. Analog zu den Moden des Materiefeldes muß auch hier eine Einteilung in Erzeuger und Vernichter vorgenommen werden. Eine natürliche Wahl des Vakuums der Theorie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} b_n \,|0\rangle &= 0 \quad ; \quad n \geq -1 \\ c_n \,|0\rangle &= 0 \quad ; \quad n \geq 2 \ . \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

Hiermit haben Zustände, die durch b_n und c_n auf $|0\rangle$ aufgebaut werden, den L_0-Eigenwert $-n$. Das Vakuum $|0\rangle$ ist dann kein Zustand des höchsten Gewichts bzgl. der von (b,c) gebildeten Algebra, da es nicht von c_1 vernichtet wird. Aus Kap.3 und Kap.4 ist klar, daß ein Zustand mit der Darstellung $\phi_h\,|0\rangle$ (ϕ_h primäres Feld der konformen Dimension h) die Energie h hat, die durch L_0 gemessen wird. Man erhält damit für den Zustand $c_1\,|0\rangle$ die niedrigste Energie des gesamten Systems (mit $|0\rangle := |0\rangle_{bc,X}$), da

$$L_0 c_1 \,|0\rangle = [L_0, c_1]\,|0\rangle = (-1) c_1 \,|0\rangle \ . \tag{5.1.14}$$

Das gleiche gilt für den Zustand $c_0 c_1\,|0\rangle$, der nur einen Entartungspartner (mit verschiedener Geistzahl) von oben genanntem Zustand darstellt. Die Antikommutator-Eigenschaft der Geister führt auf mögliche Redefinitionen des Vakuums

$$\begin{aligned} |1\rangle &:= c_1 \,|0\rangle \\ |2\rangle &:= c_0 c_1 \,|0\rangle \\ |3\rangle &:= c_{-1} c_0 c_1 \,|0\rangle \\ &\cdots , \end{aligned} \tag{5.1.15a}$$

bzw.

$$\begin{aligned} |-1\rangle &:= b_{-2} \,|0\rangle \\ |-2\rangle &:= b_{-3} b_{-2} \,|0\rangle \\ |-3\rangle &:= b_{-4} b_{-3} b_{-2} \,|0\rangle \\ &\cdots , \end{aligned} \tag{5.1.15b}$$

die verschiedenen Erzeuger-Vernichter-Konventionen entsprechen ($\rightarrow$ $Fermi-See$). Die Anomalien des Geiststroms, $T(z)U(w) \sim \frac{3}{(z-w)^3} + \ldots$, legt eine bestimmte Struktur für nichtverschwindende Amplituden fest, denn es ist hier

$$\langle 0|\,|0\rangle = 0 \ ,$$

aber zum Beispiel

$$\langle 0| \, c_{-1} c_0 c_1 \, |0\rangle = 1 \ . \tag{5.1.16}$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß es durchaus weitere Möglichkeiten gibt, eine anomaliefreie CFT für den bosonischen String herzustellen, entweder durch einen nicht-flachen Raumzeithintergrund oder durch Berücksichtigung des Liouville-Feldes außerhalb der kritischen Dimension.

5.2 Der BRST-Operator

Der Energie-Impuls-Tensor einer konformen Feldtheorie erzeugt Reparametrisierungen auf der Weltfläche. Der BRST-Operator erzeugt entsprechende Transformationen *nach Eichung* unter Berücksichtigung der in (5.1.7) eingeführten hinzuaddierten Wirkung des Geistsystems. Läßt sich die Eichsymmetrie einer Wirkung durch Symmetriegeneratoren G_i ausdrücken, so ist der assoziierte BRST-Operator gegeben durch

$$Q_{BRST} = c^i G_i + \tfrac{1}{2} f_{ij}^k c^i c^j b_k \ , \tag{5.2.1}$$

wobei f_{ij}^k die Strukturkonstanten der Symmetrie-Algebra

$$[G_i, G_j] = f_{ij}^k G_k \tag{5.2.2}$$

und b_k die zu c^i konjugierten Antigeister sind: $\{c^i, b_k\} = \delta_k^i$. Eine wesentliche Eigenschaft von Q_{BRST} ist, daß

$$Q_{BRST}^2 \ = \ 0 \ , \tag{5.2.3}$$

wie man durch konsequente Anwendung von (5.2.2) unter Kenntnis der Jakobi-Identität findet. Man findet außerdem, daß

$$[U, Q_{BRST}] = Q_{BRST} \ , \tag{5.2.4}$$

und damit für die Eigenwerte u von U:

$$U(Q_{BRST} \, |u\rangle) = (u+1)(Q_{BRST} \, |u\rangle) \ . \tag{5.2.5}$$

Die gewünschte Symmetrie ist nun durch die Virasoro-Algebra (3.24) gegeben. Die korrespondierenden Geister des BRST-Operators sind gerade die Moden der Faddeev-Popov-Geistfelder,

$$\begin{aligned} G_i &\to L_n^X \\ b_i &\to b_n \\ c_i &\to c_n \ . \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Man erhält dann

$$Q_{BRST} = \sum L^X_{-m}\, c_m - \frac{1}{2}\sum_{m,n}(m-n)c_{-m}c_{-n}b_{m+n} - ac_0 \ . \tag{5.2.7}$$

Hieraus, oder direkt aus dem assoziierten Energie-Impuls-Tensor des Geistsektors, kann man die Moden L^{bc}_m konstruieren:

$$L^{bc}_m = \sum_n (m-n)b_{m+n}c_{-n} \ . \tag{5.2.8}$$

Die aufgrund von Normalordnungsambiguitäten auftauchenden c-Zahl-Terme können in den Term $-ac_0$ absorbiert werden . Aus den Bewegungsgleichungen (5.1.8) und der Energie-Impuls-Erhaltung auf der Weltfläche zeigt man, daß Q_{BRST} die erhaltene Ladung eines Stroms j_{BRST} ist:

$$Q_{BRST} \ = \ \oint_0 \frac{dz}{2\pi i}\, j_{BRST}(z), \tag{5.2.9}$$

und man erhält die Wirkung von Q auf andere konforme Felder O als [18]

$$[Q_{BRST}, O] = \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\, j_{BRST}(z)\, O(w) \ , \tag{5.2.10}$$

wobei im Integranden die OPE zwischen beiden Feldern ausgenutzt werden kann. Die Definition (5.2.9) ist aber nicht sensitiv bzgl. Addition totaler Ableitungen nach z, so daß die Form von j_{BRST} nicht eindeutig festgelegt ist [19]. Man erhält nach obiger Konstruktion beim bosonischen String

$$\begin{aligned} j_{BRST} &= c(T^X + \tfrac{1}{2}T^{bc}) \\ &= -\tfrac{1}{2}c\partial X\partial X + bc\partial c \ . \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Die Nilpotenz übersetzt sich in die Aussage

$$j_{BRST}(z)\, j_{BRST}(w) \ = \ regul\ddot{a}r \ . \tag{5.2.12}$$

Man beachte, daß in der OPE eventuell auftretende Pole höherer Ordnung nach der Taylorentwicklung $z \to w$ immer einen Pol erster Ordnung erzeugen würden; dehalb müssen wirklich alle Pole verschwinden. Hieraus folgt insbesondere $D = 26$ und $a = 1$. Verlangt man, daß j_{BRST} ein primäres Feld der Theorie ist, so wird hierdurch die Form eindeutig festgelegt. Dann ergibt sich

$$j_{BRST} \ = cT_{mat} + bc\partial c + \tfrac{3}{2}\partial^2 c \ . \tag{5.2.13}$$

[18] Analog zur Kommutatorbeziehung $[T, O]$, die in Kap.4 erläutert wurde.

[19] Diese Tatsache gilt natürlich für alle hier auftretenden Ausdrücke, welche die Form von (5.2.9) haben.

Oben angeführte Motivation der BRST-Konstruktion legt bereits nahe, daß die Physikalitätsbedingungen in dem geisterweiterten Hilbertraum sich nun als

$$Q\,|phys\rangle = 0\ , \tag{5.2.14}$$

bzw. in Termen konformer Felder als

$$[Q_{BRST}, O_{phys}] = 0 \quad \leftrightarrow \quad j_{BRST}(z)\,O_{phys}(w) \sim reg. \tag{5.2.15}$$

schreiben lassen, wenn $|phys\rangle = O_{phys}(z \to 0)\,|0\rangle$.

5.3 Das Kohomologie-Problem

Zunächst seien hier noch einmal alle für konkrete Rechnungen benötigten konformen Felder und ihre Eigenschaften aufgelistet:

$$\begin{aligned} T = T_X + T_{bc} &= -\frac{1}{2}\partial X \cdot \partial X + c\partial b + 2\partial c b \\ j_{bc} &= cb \\ j_{BRST} &= cT_X + bc\partial c + \tfrac{3}{2}\partial^2 c \end{aligned} \tag{5.3.0}$$

T und j_{bc} führen eine Graduierung des Zustandsraums ein, da man jedem Vertexoperator eine konforme Dimension (gemessen durch T) und eine Geist-Ladung (gemessen durch j_{bc}) zuordnen kann. Einen Überblick über die Quantenzahlen der freien Felder gibt die folgende

Tabelle 5.1: Die freien konformen Felder des BRST-quantisierten bosonischen String mit den Eigenwerten u (Geistladung) und h (Konforme Dimension) der graduierenden Operatoren j_{bc} und T.

Feld	∂X	$e^{ik\cdot X}$	V^n	b	c
h	1	$\frac{1}{2}k^2$	$n+\frac{1}{2}k^2$	2	-1
u	0	0	0	-1	1

Es wird nun eine handliche Basis für die BRST-Analyse eingeführt. Wie oben erläutert, mißt die Geistzahl u das Auftreten von b und c in den zu untersuchenden Operatoren. Der volle Fockraum ist gegeben durch:

$$\bigoplus_{h,u,k^2} W_{u,h}^{k^2}\ ,$$

wobei $W^{k^2}_{u,h}$ einen Bereich mit fester Geistzahl u, konformer Dimension h, und festem Wert für k^2 darstellt, dessen Elemente sich zerlegen lassen in

$$\sum_{n=0}^{n_{max}} G^n_u \, V^n \ . \tag{5.3.1}$$

Hierin sind die Operatoren V^n die bereits vom geistfreien Zustandsraum des klassischen bosonischen String (Kap.3) bekannten Exponentiale des Materiefeldes X:

$$V^0 \ = \ e^{ik\cdot X} \ , \tag{5.3.2}$$

und Ableitungen hierauf:

$$\begin{aligned} V^1 \ &= \ \epsilon_\mu \partial X^\mu e^{ik\cdot X} \\ V^2 \ &= \ \{\beta_{\mu\nu}\partial X^\mu \partial X^\nu + \gamma_\mu \partial^2 X^\mu\} e^{ik\cdot X} \\ \ldots \ . \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Im folgenden wird aus Gründen der Übersicht immer abkürzend

$$V^0 \ = \ e^{ik\cdot X} \tag{5.3.4}$$

geschrieben. Festes $h = h[W]$ erfordert

$$h = h[V^n] + h[G^n] \tag{5.3.5}$$

mit

$$\begin{aligned} h[V^n] &= n + \frac{1}{2}k^2 \\ h[G^n] &= h - (n + \tfrac{1}{2}k^2) \ , \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

so daß der Operator G^n_u gegeben ist durch eine Linearkombination aller Geistoperatoren mit $U = u$ und $L_0 = h - (n + \frac{1}{2}k^2)$. [20] Der Laufbereich n_{max} ist dadurch festgelegt, daß es für festes k^2 nur endliche viele Operatoren nicht positiver konformer Dimension gibt.

Die Analyse läßt sich in zwei Schritte einteilen. Erstens ist für *alle Teilräume* W eines Sektors (u, h, k^2) die BRST-Invarianz zu testen: [21]

$$[Q, W] = 0 \qquad ? \tag{5.3.7}$$

Gl. (5.3.7) kann trivial oder nichttrivial erfüllt sein. Trivialität bedeutet, daß es ein Y gibt mit

$$W = [Q, Y] \ , \tag{5.3.8}$$

[20] Ein Geistoperator ist in diesem Sinne ein normalgeordnetes Produkt aus den elementaren Geistfeldern (b, c) und Ableitungen $\partial^k b$, $\partial^l c$.

[21] Ab hier soll abkürzend $Q := Q_{BRST}$ vorausgesetzt werden.

so daß W die Gleichung (5.3.7) lediglich wegen der Nilpotenz von Q erfüllt. Solche Repräsentanten nennt man trivial BRST-invariant [22]. Die Menge aller physikalischen Zustände kann daher auch geschrieben werden als

$$\{|phys\rangle\} = \frac{Kern(Q)}{Bild(Q)} \; . \tag{5.3.9}$$

Dies wird auch die *Kohomologie* von Q genannt. Gl. (5.3.8) ist der Spezialfall der allgemeineren Beziehung

$$O_1 = O_2 + [Q, Y] \tag{5.3.10}$$

mit $O_1 = W$ und $O_2 = 0$. Linke und rechte Seite von (5.3.10) enthalten die gleiche Information. Q etabliert folglich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Vertex-Operatoren. Vom algebraischen Standpunkt aus wird durch $Q^2 = 0$ eine Algebra definiert, die nur eine Singulett- und eine Dublettdarstellung besitzt ("$\rightarrow$" symbolisiert die Anwendung von Q):

$$\begin{aligned} O_a \rightarrow O_b \rightarrow 0 \qquad & \text{Dublett, triviale BRST-Klasse} \\ O_a \rightarrow 0 \qquad & \text{Singulett, nichttriviale BRST-Klasse} \; . \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Erfüllen zwei Vertex-Operatoren die Gleichung (5.3.10), so gehören sie zur selben BRST-Klasse des Systems, und man schreibt

$$O_1 \sim O_2 . \tag{5.3.12}$$

Operatoren W, die (5.3.8) erfüllen, sind in diesem Sinne äquivalent zur Null, man nennt die zugehörigen Zustände daher auch *Nullzustände*. Sie haben in der vorliegenden Quantisierung die Norm Null und bilden gewissermaßen die Grenze zwischen dem Bereich des Fockraums, der die Zustände negativer Norm enthält, und dem physikalischen Bereich [4]. Die Operatoren O_1 und O_2 beschreiben exakt die gleiche Physik. Bei der Darstellung von physikalischen Zuständen einer Theorie ist insbesondere der *Repräsentant* einer BRST-Klasse, der die einfachste Struktur hat, von Interesse. Man beachte, daß wegen (5.2.5) in (5.3.8) $u[W] = u[Y] + 1$ gilt. Dies legt die bereits oben eingeführte Einteilung des Fockraums in Geistzahlklassen als eine günstige Basis für eine Analyse nahe. In der Praxis zeigt man die Äquivalenz zweier Operatoren O_1 und O_2 aus dem *Geistsektor* $W_{u,h}$ durch

$$\alpha_1 O_1 + \alpha_2 O_2 = [Q, Y] \tag{5.3.13}$$

mit bestimmten Koeffizienten α_1 und α_2 und einem Operator Y aus $W_{u-1,h}$. Erfüllen zwei Operatoren obige Gleichung, so ist noch zu prüfen, ob sie zur beschriebenen "Nullklasse" gehören.

[22] Im folgenden abkürzend: "BRST-trivial".

Nichttriviale BRST-Kohomologie kann nur für $h = 0$ vorkommen. Dies begründet sich auf der Relation $L_0 = \{Q, b_0\}$, denn es gilt für einen Zustand $|h, u\rangle$ mit konformer Dimension h und Geistzahl u:

$$h\,|h,u\rangle = L_0\,|h,u\rangle = \{Q,b_0\}\,|h,u\rangle \ . \tag{5.3.14}$$

BRST-Invarianz bedeutet $Q\,|h,u\rangle = 0$ und damit

$$h\,|h,u\rangle = Qb_0\,|h,u\rangle \tag{5.3.15}$$

und somit, falls $h \neq 0$,

$$|h,u\rangle = Q(\tfrac{1}{h}b_0\,|h,u\rangle) \ . \tag{5.3.16}$$

Dies ist aber gerade die BRST-Trivialität von $|h,u\rangle$. Diese Einschränkung bewirkt im Fall des bosonischen String, daß für feste Masse $M^2 = -k^2$ nur endlich viele Zustände untersucht werden müssen.

5.4 Vertex-Operatoren und Geiststruktur

Im folgenden wird die Wirkung von Q auf einige elementare Felder der bosonischen Theorie angegeben:

$$\begin{aligned}
&[Q,X] = c\partial X \\
&\{Q,c\} = c\partial c \quad , \quad \{Q,\partial c\} = c\partial^2 c \quad , \quad \{Q,\partial^2 c\} = \partial c\partial^2 c + c\partial^3 c \quad \dots \\
&\{Q,b\} = T \quad , \quad \{Q,\partial b\} = \partial T \quad \dots \\
&\{Q,(\partial^r c)V\} = \partial^r(c\partial c)V - (\partial^r c)[Q,V] \ .
\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Die letzte Zeile trägt der Tatsache Rechnung, daß die "naive" Anwendung der Produktregel bei zusammengesetzten, normalgeordneten Feldern dann erlaubt ist, wenn die Normalordnung trivial ist, d.h. keine Kontraktionen abgezogen werden müssen, (Kap.4).

So findet man z.B. leicht, daß

$$\{Q, c\partial c\partial^2 c \dots\} = 0 \ . \tag{5.4.2}$$

Aus der letzten Zeile von (5.4.1) wird bereits deutlich, daß ein Operator mit einer aus dem (b,c)-System gebildeten Geiststruktur BRST-invariant sein kann aufgrund von Kompensationen verschiedener Terme, die durch die Produktregel erzeugt werden. Liefert $\{Q, A\}$ einen Term mit einer bestimmten Operatorstruktur aber nur *einmal*, so kann dieser Term nicht kompensiert werden. Dies führt auf ein Ausschlußprinzip. In einer genauen Analyse müssen die sich aus der Forderung nach BRST-Invarianz und Trivialität ergebenden Gleichungen auf konsistente Lösungen bzw. Nicht-Lösbarkeit untersucht werden.

Die Wirkung von Q auf die Operatoren (5.3.2) und (5.3.3) ist von entscheidender Bedeutung für die Bildung von BRST-Klassen, wie unten gezeigt wird. Es zeigt sich, daß die Raumzeit-Eigenschaften der Vertex-Operatoren, welche sich aus der Primärfeld-Forderung der CFT ergeben, in der BRST-quantisierten Theorie weiter ihre Bedeutung behalten. Dies ist aus der Struktur des geisterweiterten Energie-Impuls-Tensors T und der BRST-Ladung klar, denn es folgt aus

$$\begin{aligned} T(z)\, cV^n(w) &= \Big[-\frac{1}{2}\partial X\cdot\partial X + c\partial b + 2\partial c b\Big](z)\, cV^n(w) \\ &\sim -\frac{1}{2}c\left(\frac{h[V^n]V^n}{(z-w)^2}+\frac{\partial V^n}{z-w}\right) - \frac{cV^n}{(z-w)^2} + \frac{2\partial cV^n}{z-w} \\ &= \frac{(h[V^n]-1)cV^n}{(z-w)^2} + \frac{\partial(cV^n)}{z-w} \\ &= \frac{h[cV^n]\, cV^n}{(z-w)^2} + \frac{\partial(cV^n)}{z-w}\ , \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

daß Operatoren GV^n mit Geistanteil G nur dann primäre Felder der erweiterten Theorie (bzgl. $T = T_X + T_{bc}$) sein können, falls V^n ein primäres Feld bzgl. T_X ist (diese Bedingung wurde in der zweiten Zeile eingesetzt).

Außerdem wirkt nur der erste Anteil von Q auf Felder V^n; setzt man weiter V^n als ein primäres Feld voraus, so ist die OPE-Struktur bekannt:

$$\begin{aligned} [Q, V^n] = [cT_x, V^n] &= \oint cT_x(z)\, V^n(w) \\ &= \oint c(z)\left(\frac{h}{(z-w)^2}+\frac{\partial}{z-w}\right) V(w) \\ &= h(\partial c)V^n + c\partial V^n\ . \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Auswerten einer OPE von Q mit allgemeinen Funktionen $f(X, \partial X, \ldots)$ führt jedoch auf [23]

$$\begin{aligned} [Q, f] = &\sum_{l\geq 0}\frac{\partial f}{\partial(\partial^l X)}\,\partial^l(c\partial X) \\ &-\frac{1}{2}\sum_{l,m\geq 0}\frac{l!m!}{(l+m+1)!}\,\frac{\partial^2 f}{\partial(\partial^l X)\cdot\partial(\partial^m X)}\,\partial^{(l+m+1)}c\ . \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

[23]Die Formel gilt für skalare Funktionen f. In bestimmten Fällen erkennt man hier nicht, welche Raumzeitindizes kontrahiert sind; daher ist es sinnvoll, die jeweilige OPE unter Berücksichtigung der Raumzeit-Indizes des Materiefeldes genau zu berechnen.

Man erkennt hiermit, daß im Vergleich zu (5.4.4) zusätzliche Geiststrukturen erzeugt werden; z.B. enthält bereits $[Q, V^1]$ für ein nicht primäres V^1 einen $\partial^2 c$-Anteil.

Gleichung (5.4.5) genügt, um sich einen Überblick über die Operatorstrukturen, die durch Q erzeugt werden, zu verschaffen. Insbesondere kann man bereits hiermit das oben erwähnte Ausschlußprinzip ausnutzen. Bei genauen Rechnungen erhält man: [24]

$$
\begin{aligned}
[Q, V^0] &= \left[ick_\mu \partial X^\mu + \frac{1}{2}c' k^2\right] V^0 \\
[Q, V^1] &= \left[ic\epsilon_\mu \partial X^\mu k_\nu \partial X^\nu + \left(1 + \frac{1}{2}k^2\right) c' \epsilon_\mu \partial X^\mu + c\epsilon_\mu \partial^2 X^\mu - \frac{1}{2} ic'' \epsilon_\mu k^\mu\right] V^0 \\
[Q, V^2] &= [Q, \{\beta_{kl} \partial X^k \partial X^l + \gamma_\mu \partial^2 X^\mu\} V^0] \\
&= \Bigg[ick_\mu \partial X^\mu \beta_{kl} \partial X^k \partial X^l + \left(2 + \frac{1}{2}k^2\right) c' \beta_{kl} \partial X^k \partial X^l \\
&\quad - ic'' \beta_{kl} (\partial X^l k^k + \partial X^k k^l) - \frac{1}{6} c''' \beta^\mu_\mu + 2c\beta_{kl} \partial X^k \partial^2 X^l \\
&\quad + c'' \gamma_l \partial X^l - \frac{1}{3} ic''' \gamma_l k^l + ick_\mu \partial X^\mu \gamma_\nu \partial^2 X^\nu \\
&\quad + c' \left(2 + \frac{1}{2}k^2\right) \gamma_l \partial^2 X^l + c\gamma_l \partial^3 X^l\Bigg] V^0 \; .
\end{aligned}
\tag{5.4.6}
$$

Die oben genannten zusätzlichen Geiststrukturen verschwinden für

$$\beta_{kl} = \beta_{lk} \; , \tag{5.4.7a}$$

$$\beta^k_k = 0 \; , \tag{5.4.7b}$$

$$\gamma^k = 0 \; , \tag{5.4.7c}$$

$$\beta_{kl} k^k = 0 \; , \tag{5.4.7d}$$

und

$$\epsilon \cdot k = 0 \; , \tag{5.4.7e}$$

und hiermit lassen sich die Gleichungen (5.4.6) auf die Form (5.4.4) bringen.

Dies sind gerade die bekannten Eigenschaften der Vertex-Operatoren der ersten drei Anregungsniveaus des offenen bosonischen String, die Beschreibung von Tachyon, Photon und Spin-2-Teilchen. Die Kommutatorregel in (5.4.1) bedeutet, daß man auch bei komplizierteren Geiststrukturen, die nur $\partial^k c$-Anteile enthalten, die Primärfeldbedingungen stets in einem Teil der Rechnung zurückerhält und ausnutzen kann. Auf

[24] Ab hier wird zur Übersicht die Notation $A' := \partial A$ bzw. $A^{(n)} := \partial^n A$ benutzt, falls klar ist, nach welcher Variablen differenziert wird.

dem Niveau des Kohomologie-Problems entkoppeln Einschränkungen in der Geiststruktur von den Raumzeit-Eigenschaften der Materie (Primärfeld-Eigenschaften von V^n). Diese Tatsache wurde in den folgenden Betrachtungen verifiziert.

Es ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned}[Q, cV^1] &= -c[Q, V^1] + [Q, c]V^1 \\ &= -c\left(c'\left(1 + \frac{1}{2}k^2\right)\epsilon_\mu \partial X^\mu V^0 - \frac{1}{2}i\epsilon_\mu k^\mu c'' V^0\right) + cc'\epsilon_\mu \partial X^\mu V^0 \ .\end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Die Polarisationsbedingung führt so für $k^2 = 0$ auf die BRST-Invarianz von $c\epsilon_\mu \partial X^\mu V^0$. Auf anderen Massenlevels kann (5.4.8) nicht verschwinden.

5.5 Das Kohomologie-Problem für $k^2 = 0$ und $k^2 = -2$

Nun sind alle Daten zusammengestellt, um die BRST-Analyse des Zustandraums des bosonischen String konkret durchzuführen. Im folgenden werden die Massenschalen $k^2 = 0$ und $k^2 = -2$ betrachtet.

Die oben genannte Bedingung $h = 0$ legt sowohl den Bereich der zu betrachtenden Geistzahlsektoren, als auch ihre Größe fest. Es gilt:

$$h[V^n] = n + \tfrac{1}{2}\, k^2 \qquad \Longrightarrow \qquad h[G^n] + n + \tfrac{1}{2}\, k^2 \ = \ 0 \qquad ; \quad n = 0, 1, \ldots \ . \tag{5.5.1}$$

Hier wie auch bei den Feldern des N=2-String wird h in Abhängigkeit von den anderen Quantenzahlen (Geistzahl,Ladungen) berechnet. Die Lösungen der Gleichung $h = 0$ liefern dann eine (endliche oder unendliche) Liste von Operatoren, die BRST-invariant sein können ("Kandidatenliste"). G^n_u ist im vorliegenden Fall ein normalgeordnetes Produkt von m Feldern aus $\{c, \partial c, \partial^2 c, \ldots\}$ und l Feldern aus $\{b, \partial b, \partial^2 b, \ldots\}$, d.h. $u[G^n_u] = m - l$ ($l \geq 0$, $m \geq 0$). Das Abzählen der konformen Dimensionen ergibt für ein "minimales Produkt",

$$b(\partial b)(\partial^2 b) \ldots (\partial^{(l-1)} b) c(\partial c)(\partial^2 c) \ldots (\partial^{(m-1)} c) \ ,$$

die Formel

$$h[G_u] = l^2 + lu + \frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2}u \tag{5.5.1b}$$

und (5.5.1) wird damit zu

$$h[G_u] = l^2 + lu + \frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2}u = -(n + \tfrac{1}{2}\, k^2) \ . \tag{5.5.1c}$$

Beachtet man, daß $n = 0, 1, \ldots$, so erhält man daher für festes k^2 eine endliche Kandidatenliste. Insbesondere für $k^2 = 0$ und $k^2 = -2$ hat (5.5.1c) für kein erlaubtes n Lösungen in den Bereichen $u < 0$ und $u > 3$. Im Fall $k^2 = 0$ wird (5.5.1c) zu

$$l^2 + lu + \frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2}u = -n \; . \tag{5.5.2}$$

Für Geistzahl $u = 0$ erhält man $l^2 = -n$, was nur für $n = 0$ Lösungen hat, und zwar $l = 0$, d.h. W_0^0 enthält keine Geistfelder. Es ist

$$W_0^0 = V^0 \; . \tag{5.5.3}$$

Die Formel liefert allerdings nur den Bereich der zu untersuchenden Geistsektoren, nicht ihre Struktur, da sie ja aufgrund einer Festlegung auf eine bestimmte (nämlich die minimale) Geiststruktur gewonnen wurde. Es ergibt (5.5.2) z.B. für $u = 1$

$$l^2 + l - 1 = -n \; ,$$

was nur die Lösung $n = 1$, $l = 0$, d.h. $m = 1$ und damit den Operator cV^1 liefert. Der Geistsektor $u = 1$ enthält aber auch den Operator $c'V^0$, der nicht die oben angegebene Minimalstruktur hat. Innerhalb eines jeden Geistsektors ergibt sich die endliche Anzahl von Elementen aus der Begrenzung der konformen Dimension nach unten durch $h[G] \geq h[c] = -1$ und der Antikommutator-Eigenschaft der Geister

$$\partial^n c\, \partial^n c \;=\; 0 \qquad ; \qquad \partial^n b\, \partial^n b \;=\; 0 \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \; . \tag{5.5.4}$$

Es folgt eine Auflistung der zu untersuchenden Zustände für $k^2 = 0$ [25]. [26]

$$\begin{aligned} W_0^0 &= \alpha_0 V^0 \\ W_1^0 &= \alpha_1 c V^1 + \alpha_2 c' V^0 \\ W_2^0 &= \alpha_3 c c' V^1 + \alpha_4 c c'' V^0 \\ W_3^0 &= \alpha_5 c c' c'' V^0 \; . \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

Die Anwendung des Operators Q auf diese Strukturen,

$$j_{BRST}(z) \cdot W_u^{k^2}(w) \; , \tag{5.5.6}$$

[25] Von hier ab wird die für Rechnungen übersichtlichere Notation $\partial A =: A'$, $\partial^2 A =: A'' \ldots \quad \partial^n A =: A^{(n)}$ $(n > 3)$ benutzt.

[26] Die Parameter α_i können in die freien Polarisationstensoren absorbiert werden. Im folgenden werden die α_i daher nur dort aufgeschrieben, wo sie für die Überlegungen nötig sind.

führt auf ein Abbildungsschema, welches oben aufgeführte Sektoren miteinander verbindet und W_3^0 auf $W_4^0 = 0$ abbildet. Die sorgfältige Anwendung von (5.4.1) und (5.4.6) führt im einfachsten Fall auf

$$\begin{aligned} [Q, V^0] &= \left(ick_\mu \partial X^\mu + \frac{1}{2} c' k^2 \right) V^0 \\ &= ick_\mu \partial X^\mu V^0 \ . \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

Es folgt, daß dieser Operator nicht BRST-invariant sein kann.

Jedoch realisiert man für $k^2 = 2$ eine totale Ableitung, was die Konstruktion $\oint V^0$ als einen nicht-lokalen BRST-invarianten Operator zuläßt. $\oint V^0$ ist sogar nichttrivial, da es keinen Geistsektor auf dem betrachteten Massenlevel gibt, aus dem er durch Q erzeugt wird.

Für andere Werte von k^2, insbesondere für den betrachteten Fall, scheidet dieser Operator als Darstellung eines physikalischen Zustands aus.

In die folgenden Ergebnisse ist die Massenschalenbedingung $k^2 = 0$ bereits eingeführt worden:

W_1^0

$$\begin{aligned} [Q, c\epsilon_\mu \partial X^\mu V^0] &= \frac{1}{2} \epsilon_\mu k^\mu c c'' V^0 \\ [Q, c' V^0] &= ik_\mu \partial X^\mu c c' V^0 + c c'' V^0 \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

W_2^0

$$\begin{aligned} [Q, cc' \epsilon_\mu \partial X^\mu V^0] &= \frac{1}{2} i \epsilon_\mu k^\mu c c' c'' V^0 \\ [Q, c c'' V^0] &= 0 \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

W_3^0

$$[Q, c c' c'' V^0] = 0 \ . \tag{5.5.10}$$

Diese Gleichungen enthalten alle Information über nichttriviale Kohomologien des String. Zusammen aus (5.5.7) und (5.5.8) folgt, daß für $\epsilon \cdot k = 0$ der Operator $c\epsilon \cdot \partial X V^0$ BRST-invariant ist. Trivialität würde wegen (5.5.7) $k || \epsilon$ erfordern, was für $k^2 = 0$ keinen Widerspruch zur Polarisationsbedingung liefert, somit also ausgeschlossen werden muß. Daher repräsentiert $c\epsilon \cdot \partial X V^0$ mit $\epsilon \cdot k = 0$, $e \not\parallel k$ eine nichttriviale BRST-Klasse des Systems. Der Term $cc'' V^0$ im zweiten Teil von (5.5.8) trägt keinen Faktor $\epsilon \cdot k$; er wird vom zweiten Teil des BRST-Operators $bc\partial c$ erzeugt und verschwindet nicht, $c' V^0$ ist nicht BRST-invariant und damit nicht physikalisch. Im zweiten Teil von (5.5.8) wird mit $\epsilon_\mu = k_\mu$ der Sektor W_2 erzeugt. Jedoch lassen sich aufgrund der Koeffizientenstruktur nicht beliebige Linearkombinationen von den Summanden aus

W_2 erzeugen, außerdem benötigte man wiederum $\epsilon||k$. (5.5.8) etabliert also lediglich eine Äquivalenz

$$k_\mu \partial X^\mu cc'V^0 \sim cc''V^0 \tag{5.5.11}$$

zwischen den beiden BRST-invarianten Operatoren in W_2. Für $\epsilon \cdot k = 0$ wird demnach durch $cc'V^1$ eine zweite BRST-Klasse repräsentiert, die auch den Fall $\epsilon||k$ beinhaltet. Der Sektor W_3 wird nach (5.5.9) aus W_2 erzeugt und somit gibt es keine physikalischen Anregungen mit $u = 3$. Für $k = 0$ erfüllen auch W_0 und W_3 die angegebenen Bedingungen und bilden so zwei weitere, diskrete BRST-Klassen.

Es folgt eine entsprechende Analyse für den Fall $k^2 = -2$. Man beachte, daß hier $h[V^0] = -1$, und (5.5.1) wird zu

$$h[G] = -n + 1 \ . \tag{5.5.12}$$

Die Geistzahlklassen sind nun (hier zunächst ohne Koeffizienten notiert)

$$\begin{aligned}
W_0^{-2} &= bcV^0 + V^1 \\
W_1^{-2} &= cV^2 + c'V^1 + c''V^0 + bcc'V^0 \\
W_2^{-2} &= cc'V^2 + cc''V^1 + c'c''V^0 + cc'''V^0 \\
W_3^{-2} &= cc'c''V^1 + cc'c'''V^0 \ ,
\end{aligned} \tag{5.5.13}$$

mit $V^{0,1,2}$ wie oben eingeführt. $[Q, W_0^{-2}]$ ergibt

$$\begin{aligned}
[Q, bcV^0] &= -\frac{1}{2} c\partial X_\mu \partial X^\mu V^0 + \frac{3}{2} c''V^0 + ick_\mu \partial^2 X^\mu V^0 \\
[Q, \epsilon_\mu \partial X^\mu V^0] &= ic\epsilon_\mu \partial X^\mu k_\nu \partial X^\nu V^0 + c\epsilon_\mu \partial^2 X^\mu V^0 \ ,
\end{aligned} \tag{5.5.14}$$

was keine Möglichkeit für BRST-Invarianz läßt. Folglich gibt es keine Darstellung physikalischer Anregungen mit $u = 0$.

Anhand von cV^2 aus W_1^{-2} soll noch einmal kurz das oben über das Entkoppeln der Polarisationsbedingungen Gesagte angedeutet werden. Man berechnet $[Q, cV^2]$ - mit $k^2 = -2$ bereits eingeführt - zu

$$\begin{aligned}
[Q, \alpha_2 c\gamma_\mu \partial^2 X^\mu V^0] &= -\alpha_2 \gamma_\mu \partial X^\mu cc''V^0 + \alpha_2 \frac{1}{3} i\gamma_\mu k^\mu cc'''V^0 \\
[Q, \alpha_3 c\beta_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu V^0] &= \alpha_3 i\beta_{\mu\nu} k^\mu \partial X^\nu cc''V^0 + \alpha_3 \frac{1}{6} \beta^\mu_\mu cc'''V^0 \ .
\end{aligned} \tag{5.5.15}$$

Die eine entstehende Gleichung

$$0 = \alpha_2 \frac{1}{3} i\gamma_\mu k^\mu + \alpha_3 \frac{1}{6} \beta^\mu_\mu \tag{5.5.16}$$

spiegelt die reinen Polarisationsbedingungen und die Spurfreiheit von β wieder, während die zweite,

$$0 = -\alpha_2 \gamma_\nu + \alpha_3 i \beta_{\mu\nu} k^\mu \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \alpha_3 i \beta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \ , \tag{5.5.17}$$

die Kompensation der Geistterme herstellt. Vergleicht man (5.5.14) mit der Struktur von cV^2:

$$\alpha_2 c \gamma_\mu \partial^2 X^\mu + \alpha_3 c \beta_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu = \alpha_1 i c \epsilon_\mu \partial X^\mu k_\nu \partial X^\nu + \alpha_1 c \epsilon_\mu \partial^2 X^\mu \ , \tag{5.5.18}$$

so erhält man, daß beide Anteile von cV^2 parallel durch $[Q, V^1]$ erzeugt werden. Es folgt

$$c \gamma_\mu \partial^2 X^\mu \sim c \beta_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu \ , \tag{5.5.19}$$

so daß sich $c\gamma_\mu \partial^2 X^\mu$ als der Operator mit der einfacheren Struktur als Repräsentant analog zu cV^1 beim Fall $k^2 = 0$ wählen läßt. Die gefundene BRST-Klasse könnte größer sein, wenn sich weitere Operatoren aus W_1^{-2} in dieses Schema einfügen würden. Für die anderen Operatoren berechnet man

$$\begin{aligned}
[Q, \alpha_4 c' \epsilon_\mu \partial X^\mu V^0] &= \alpha_4 \alpha_\mu \partial X^\mu c c'' V^0 + \alpha_4 i k_\mu \partial X^\mu \epsilon_\nu \partial X^\nu c c' V^0 + \alpha_4 \epsilon_\mu \partial^2 X^\mu c c' V^0 \\
[Q, \alpha_5 c'' V^0] &= \alpha_5 i k_\mu \partial X^\mu c c'' V^0 + \alpha_5 c c''' V^0 \\
[Q, \alpha_6 b c c' V^0] &= -\alpha_6 \frac{3}{2} c' c'' V^0 + \alpha_6 \frac{2}{3} V^0 - \alpha_6 \partial X_\mu \partial X^\mu c c' V^0 + \alpha_6 i k_\mu \partial^2 X^\mu c c' V^0 \ .
\end{aligned} \tag{5.5.20}$$

Da in $[Q, cV^2]$ nach Einsetzen der Bedingungen (5.5.16) und (5.5.17) nur Terme mit der Struktur cc'' übrig bleiben, müssen andere Operatoren, die die BRST-Klasse erweitern, ebenfalls diesen Anteil haben. Andere Strukturen müssen sich innerhalb dieser weiteren Terme kompensieren. Aus (5.5.20) folgt, daß dies nicht möglich ist. In W_2^{-2} ergibt sich ein ähnliches Bild wie bei $u = 1$. Der Operator $cc'V^2$ enthält zwei Anteile, die sich völlig analog zu cV^2 verhalten, so daß auch

$$c c' \gamma_\mu \partial^2 X^\mu \sim c c' \beta_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu \tag{5.5.21}$$

eine BRST-Klasse bildet. Die komplexere c-Geiststruktur in W_2^{-2} und W_3^{-2} impliziert mehr BRST-invariante Operatoren als in niedrigeren Geistsektoren. Es gilt z.B.

$$[Q, c c'' V^0] = 0 = [Q, c c''' V^0] \ . \tag{5.5.22}$$

Die Tatsache jedoch, daß die beiden Anteile von cV^2 mit verschiedenen Koeffizienten zur Erzeugung von Termen in W_2^{-2} beitragen, führt dazu, daß die Gleichungen (5.5.15) und (5.5.20) durch Linearkombinationen erlauben, alle diese Operatoren zu erzeugen.

Die einzigen nichttrivialen Operatoren sind damit durch (5.5.19) und (5.5.21) gegeben. Diese Resultate sind in Übereinstimmung mit dem bekannten Ergebnis, (z.B. Thorn [4]), daß (für $k \neq 0$) alle nichttrivialen BRST-Klassen des bosonischen String in den Sektoren $u = 1$ und $u = 2$ vorkommen, mit möglichen Repräsentanten von der Geiststruktur cV^n bzw. $cc'V^n$, für beliebige Massenschalen[27].

[27] Diese Geiststruktur mit $h = -1$ wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit als *Standardgeiststruktur* bezeichnet und beim N=2-String um zwei weitere Komponenten erweitert.

6 Superstringtheorie

Im folgenden werden kurz einige mehr "historische" Anmerkungen zu den wesentlichen Ergebnissen der Superstringtheorie gemacht, um dann die Grundlagen für BRST-Betrachtungen des $N=2$-Superstring bereitzustellen. Die aktuelle physikalische Interpretation des $N=2$-String entstammt wesentlich der Arbeit von Ooguri und Vafa [12]. Dort, und in einer weiteren BRST-Analyse [13], wird deutlich, daß die physikalischen Anregungen dieser Theorie nur aus einem bosonischen Teilchen bestehen, nämlich aus einem selbst-dualen Graviton im geschlossenen und einem selbst-dualen Yang-Mills-Feld im offenen Fall. Die Analyse beinhaltete jedoch die Annahme, daß physikalische Zustände die bekannte Standard-Geiststruktur besitzen, während man eigentlich, wie vollständige BRST-Analysen der Theorien mit $N=0$ (siehe auch Kap.5) und $N=1$ zeigen, auch Anregungen der Geistmoden berücksichtigen muß. Dennoch erwartet man, daß via BRST-Äquivalenz nur "Kopien" des ursprünglich gefundenen Vertex-Operators für das Ooguri-Vafa-Boson existieren, d.h., daß sich für einen gegebenen Impuls k^μ alle Darstellungen der physikalischen Zustände in einer einzigen BRST-Klasse befinden. Die vollständige Analyse wird durch die Anwesenheit von Nullmoden der superkonformen Geister, die auf eine Entartung des Vakuums führen, erschwert. Eine Schlüsselfrage ist außerdem, inwieweit die Physik im Neveu-Schwarz-Sektor mit der im Ramond-Sektor der Theorie durch lokale Operatoren verbunden ist, bzw. getrennt behandelt werden kann (Spectral Flow [14] [15]).

Schließlich führt die Bosonisierung der superkonformen Geister (β, γ), wie bereits im Fall $N=1$, auf eine weitere Vergrößerung der Menge der Darstellungen für physikalische Zustände, die technisch durch das *Picture-Changing* bewältigt werden kann. Im folgenden (Kap.7) wird die BRST-Analyse weitergeführt. Die Physikalität der in [1] gefundenen Vertex-Operatoren im kanonischen Bild und in weiteren Bildern des NS-Sektors wird verifiziert. Weiter werden die Abbildungseigenschaften der Picture-Changing-Operatoren bestätigt. Vertex-Operatoren in Bildern mit höherer Picture-Zahl gehen aus dem kanonischen Bild hervor. Da das Picture-Changing nicht durch einen lokalen Operator invertiert werden kann [1], ist die Analyse in "subkanonischen" Bildern dagegen schwierig und wurde bisher noch nicht durchgeführt. In dieser Arbeit werden die Verhältnisse in Bildern mit niedrigeren Picture-Zahlen durch die explizite Aufstellung von Kandidatenlisten und Bestimmung der BRST-Klassen untersucht.

6.1 Der fermionische (N=1) String

In Kap.4 wurde eine kurzer Abriß der *Superkonformen Feldtheorie*, d.h. zweidimensionaler konformer Feldtheorie unter Einführung einer Supersymmetrie gegeben. Für das hieraus resultierende *NSR-Modell* kann man folgende Wirkung aufschreiben [1]:

$$S \;=\; -\frac{1}{2\pi}\int d^2\xi\,\sqrt{h}\left[h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\cdot\partial_\beta X + i\overline{\Psi}\cdot\rho^\alpha\partial_\alpha\Psi + (\partial_\alpha X + \overline{\Psi}\chi_\alpha)\cdot\overline{\chi}_\beta\rho^\alpha\rho^\beta\Psi\right]\;, \tag{6.1.1}$$

die nun D Supermultiplets (X^μ, Ψ^μ) enthält, die an 2-dimensionale Super-Gravitation gekoppelt sind. In Analogie zum bosonischen String kann man eine kovariante Eichfixierung durchführen. In der superkonformen Eichung lautet die Wirkung

$$S \;=\frac{1}{2\pi}\int d\tau d\sigma\,\left\{\partial_\alpha X\cdot\partial^\alpha X + \frac{i}{2}\overline{\Psi}\cdot\rho^\alpha\partial_\alpha\Psi\right\}\;, \tag{6.1.2}$$

mit den neuen Constraints

$$\begin{aligned} T(z) &= -\tfrac{1}{2}\partial X^\mu\partial X_\mu - \tfrac{1}{2}\Psi^\mu\partial\Psi_\mu \\ G(z) &= i\Psi^\mu\partial X_\mu \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

und den zugrundeliegenden Operatorprodukten der fundamentalen Felder

$$\begin{aligned} X^\mu(z)X^\nu(w) &\sim -\eta^{\mu\nu}\; ln(z-w) \\ \Psi^\mu(z)\Psi^\nu(w) &\sim \frac{-\eta^{\mu\nu}}{z-w}\;. \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Die Wirkung (6.1.2) repräsentiert eine freie Feldtheorie, die die folgende Supersymmetrie hat (siehe z.B. [5], S.188ff):

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar\epsilon\psi^\mu \\ \delta\psi^\mu &= -i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\epsilon\;, \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

mit einem konstanten, antikommutierenden Spinor ϵ.

Man vergewissert sich leicht, daß die zugehörige superkonforme Algebra gegeben ist durch die OPE [28]

$$\begin{aligned} T(z)\;T(w) &\sim \frac{c}{2}\frac{1}{(z-w)^4} \;+\; \frac{2\;T(w)}{(z-w)^2} \;+\; \frac{\partial T(w)}{z-w} \;+\;\dots \\ T(z)\;G(w) &\sim \frac{3}{2}\frac{G(w)}{(z-w)^2} \;+\; \frac{\partial G(w)}{z-w} \;+\;\dots \\ G(z)\;G(w) &\sim \frac{2}{3}c\frac{1}{(z-w)^3} \;+\; \frac{2\;T(w)}{z-w} \;+\;\dots\;. \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

[28] Diese Algebra entspricht natürlich der Modenalgebra (4.5.8) und (4.5.9), aus der man die folgenden Ergebnisse ebenfalls erhält.

Eine Algebra, die wie in (6.1.6) durch den Energie-Impuls-Tensor und zusätzliche holomorphe "Ströme" konformer Dimensionen $h = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ erzeugt wird, nennt man eine *erweiterte chirale Algebra*. Im hier beschriebenen Fall der N=1-Algebra ist $h[G] = \frac{3}{2}$ (aus der zweiten Gleichung), und die Anomalie ergibt sich zu

$$c_{N=1,mat} = D + \frac{D}{2} = \frac{3}{2}D \tag{6.1.7}$$

(durch Einsetzen von (6.1.3) in die erste Gleichung). Aus der dritten Gleichung (wie bereits aus (4.5.9)) liest man ab, daß der Kommutator zweier Supersymmetrie-Transformationen eine Translation auf der Weltfläche erzeugt.

Zusätzlich zu den Reparametrisierungsgeistern (b, c), gehen aus einer Fadeev-Popov-Determinante (s.Kap.5) nun bosonische Geistfelder (β, γ) hervor, und zwar mit $h[\beta] = \frac{3}{2}$ und $h[\gamma] = -\frac{1}{2}$ (siehe z.B. [5], Kap.4.4.1). Der Propagator ist wiederum

$$\beta(z)\gamma(w) \sim \frac{1}{z-w} \quad , \quad \gamma(z)\beta(w) \sim -\frac{1}{z-w} \; . \tag{6.1.8}$$

und weiter gilt

$$T_{N=1,ghost} = T_{bc} + T_{\beta\gamma} \tag{6.1.9}$$

mit

$$T_{\beta\gamma} = -\frac{3}{2}\beta\partial\gamma - \frac{1}{2}\partial\beta\gamma \; , \tag{6.1.10}$$

und T_{bc} wie in (5.1.9). Man konstruiert zusätzlich

$$G_{N=1,ghost} = -c\partial\beta - \frac{3}{2}\partial c\beta + 2\gamma b \; . \tag{6.1.11}$$

Auch hier erhält man durch Einsetzen in die Algebra die Anomalie dieser "Constraints". Das Ergebnis ist

$$c_{N=1,ghost} = -26 + 11 = -15 \; , \tag{6.1.12}$$

und dies legt die Raumzeit-Dimension für eine anomaliefreie Theorie via

$$c_{N=1,mat} + c_{N=1,ghost} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{3}{2}D - 15 = 0 \tag{6.1.13}$$

auf $D = 10$ fest. Auch für diese Theorie läßt sich ein BRST-Operator konstruieren, dessen Kohomologie wie im bosonischen Fall mit den physikalischen Zuständen identifiziert werden kann.

Die mit (6.1.1) eingeführte fermionische Komponente des Superfeldes ist mehrdeutig unter einer vollen Rotation im Komplexen:

$$\psi(e^{2\pi i}z) = \epsilon\psi(z) \tag{6.1.14}$$

mit $\epsilon = \pm$. Dies führt auf zwei Unterräume des Hilbertraums:

$$\begin{aligned} \epsilon = 1 &\to \text{Neveu} - \text{Schwarz} - \text{Sektor} \quad (\text{NS}) \\ \epsilon = -1 &\to \text{Ramond} - \text{Sektor} \quad (\text{R}) \ . \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

Deshalb gibt es auf einer Weltfläche mit flacher Metrik zwei mögliche Modenentwicklungen für das Fermion:

$$\begin{aligned} \psi^\mu(z) &= \sum_r \frac{b_r^\mu}{z^{r+\frac{1}{2}}} \quad , r \in \mathbf{Z} + \tfrac{1}{2} \quad (\text{NS}) \\ \psi^\mu(z) &= \sum_n \frac{d_n^\mu}{z^{n+\frac{1}{2}}} \quad , n \in \mathbf{Z} \quad (\text{R}) \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

Die kanonischen Antivertauschungsrelationen sind

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \delta_{r,-s}\eta^{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \{d_m^\mu, d_n^\nu\} = \delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu} \ . \tag{6.1.17}$$

Um sich das tiefliegende Spektrum physikalischer Zustände (im Modenformalismus) zu verdeutlichen, müßen die Kommutatoren aller Symmetriegeneratoren mit allen Moden der Geist- und Materiefelder aufgeschrieben werden. Diese werden, wie vorher, berechnet aus Kontur-Integralen der Operator-Produkte. Hier sollen jedoch nur die wichtigsten Ergebnisse dargestellt werden. Aus (6.1.17) ist klar, daß die Nullmoden d_0^μ die Dirac-Algebra [29] erfüllen:

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \ . \tag{6.1.18}$$

Daher sind Zustände im R-Sektor Raumzeit-Spinoren und im NS-Sektor Raumzeit-Tensoren. In der Lichtkegeleichung ist von der Lorentz-Algebra noch $SO(8)$ manifest, und es ergibt sich das folgende Bild: die Zustände niedrigster Energie sind im NS-Sektor

$$\begin{aligned} |0\rangle \quad &\text{mit} \quad \tfrac{1}{4}M^2 = -\tfrac{1}{2} \to \text{Tachyon} \\ b^i_{-\frac{1}{2}}\,|0\rangle \quad &\text{mit} \quad \tfrac{1}{4}M^2 = 0 \to \text{masseloserVektor} \ . \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

Die übrigen Zustände im NS-Sektor haben $M^2 > 0$. Im R-Sektor beginnt das Spektrum mit zwei masselosen Majorana-Weyl-Spinoren, auf denen die transversale Dirac-Algebra (6.1.18) ($\mu, \nu = 1, \ldots, 8$) durch Gamma-Matrizen dargestellt ist:

$$|\alpha\rangle\,, |\dot{\alpha}\rangle \quad \text{mit} \quad \tfrac{1}{4}M^2 = 0 \ . \tag{6.1.20}$$

Das eigentliche Vakuum der Theorie liegt also im NS-Sektor. Das masselose Boson besitzt in 10 Dimensionen acht transversale Polarisationsrichtungen, während die beiden transversalen Majorana-Weyl-Spinoren (6.1.20) je 8 Komponenten haben. Eine

[29] D.i. die Vertauschungsrelation der Raumzeit-Gamma-Matrizen γ^μ.

vollständige Auflistung der Modenalgebra und eine Darstellung der Grundzustände in *kovarianter* Eichung findet man z.B. in [16], S.162ff. Das gefundene Teilchen-Spektrum ist zunächst keineswegs supersymmetrisch. Es wurde gezeigt [17], daß eine systematische Einschränkung des Hilbertraums auf bestimmte Eigenzustände des Fermionenzahl-Operators $(-)_b^N$ (NS) bzw. $(-)_d^N$ (R) zu Raumzeit-Supersymmetrie führt. Die Bedingungen sind

$$\begin{aligned} (-)_b^N &= -1, \quad (NS) \\ (-)_d^N &= \gamma_{11}, \quad (R)\ . \end{aligned} \tag{6.1.21}$$

Die hierdurch auf allen Massenschalen hergestellte Supersymmetrie bleibt auch auf Wechselwirkungsniveau erhalten. Sie ist auch aus weiteren Gründen für eine konsistente Theorie notwendig: die neue Theorie enthält kein Tachyon, besitzt modulare Invarianz und eine lokale Vertex-Operator-Algebra. Die Einschränkung des fermionischen String mit N=1 Weltflächen-Supersymmetrie auf den *Superstring* mit Raumzeit-Supersymmetrie wird als *GSO-Projektion* bezeichnet.

6.2 N=2-Superstringtheorie

Die wichtigsten Änderungen auf dem Niveau der Wirkung gegenüber dem N=1-Fall sind die Komplexifizierung der String-(Super)koordinaten und des Gravitinos, sowie die Existenz des Graviphotons, welches als Eichfeld einer zusätzlichen $U(1)$-Symmetrie auftritt. Die Wirkung lautet hier

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{\pi}\int d^2\xi\, e\, \Big\{ &\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha Z^+ \cdot \partial_\beta Z^- + \frac{i}{2}\overline{\Psi}^+ \cdot \gamma^\alpha \overleftrightarrow{D}_\alpha \Psi^- + A_\alpha \overline{\Psi}^+ \cdot \gamma^\alpha \Psi^- \\ &+ \left[(\partial_\alpha Z^+ + \overline{\Psi}^+\chi_\alpha)\cdot \overline{\chi}^+_\beta \gamma^\alpha\gamma^\beta\Psi^- + h.c.\right]\Big\} \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

mit $h_{\alpha\beta} = e^a_\alpha e_{\beta a}$ und $e = det(e^a_{\alpha}.)$. Die erweiterte chirale Algebra auf der Weltfläche enthält nun zwei Supersymmetrie-Generatoren G^+, G^- der Dimension $\frac{3}{2}$ und einen $U(1)$-Strom J der Dimension 1.

Das erweiterte bosonische Materiefeld Z besteht aus D komplexen bzw. $2D$ reellen Komponenten. Man kann unterscheiden

$$Z^{\mu+} = Z^\mu \qquad und \qquad Z^{\mu-} = Z^{\mu*}, \quad \mu = 0,\ldots,D-1\ , \tag{6.2.2}$$

sowie entsprechendes für Ψ. Die lokalen Symmetrien von S können tabellarisch den Freiheitsgraden der Eichfelder und ihren physikalischen Eigenschaften zugeordnet werden [30]. Die folgende Tabelle enthält einen kurzen Überblick.

Tabelle 6.1: Eichfelder und Symmetrien in der N=2-Superstringtheorie. In Klammern steht die Zahl der mit dem jeweiligen Feld assoziierten Freiheitsgrade.

Eichfeld	Spin	N=2 Super-Reparametrisierung	N=2 Super-Weyl
$h^{\alpha\beta}$	2	Reparametrisierung (2)	Weyl (1)
$\chi^\pm_\alpha$	$\frac{3}{2}$	N=2-Supersymmetrie (4)	Super-Weyl (4)
A_α	1	vektorielle Phaseninvarianz (1)	axiale Phaseninvarianz (1)

Wählt man die naheliegende Eichung

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} \\ \chi^\pm_\alpha &= 0 \\ A_\alpha &= 0\ , \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

[30] Für eine vollständige Auflistung siehe z.B. [20]

so erhält man

$$S = \frac{1}{\pi}\int d^2\xi \Big\{\partial_+ Z^+ \cdot \partial_- Z^- + \partial_- Z^+ \cdot \partial_+ Z^- \\ + \Psi^+ \cdot \partial_- \Psi^- + \Psi^+ \cdot \partial_+ \Psi^- + \Psi^- \cdot \partial_- \Psi^+ + \Psi^- \cdot \partial_+ \Psi^+ \Big\} \ . \tag{6.2.4}$$

Im folgenden wird die CFT für den vorliegenden Fall genauer erläutert [31]. Hier wird vorweggenommen, daß die kritische Dimension $D = 2$ beträgt. Der Lorentz-Index μ in (6.2.2), über den in Skalarprodukten summiert wird, indiziert die Komponenten im Minkowski-Raum mit der Signatur $(-,+)$. Führt man auch hier wieder Lichtkegelkoordinaten ein, so ergeben sich die Kombinationen

$$Z^{a\pm} = Z^{a0} \pm Z^{a1} \quad , \qquad \Psi^{a\pm} = \Psi^{a0} \pm \Psi^{a1} \quad , \qquad a = \pm \ . \tag{6.2.5}$$

Die Unterscheidung zwischen internen und Lorentz-Indizes ist für die unten erfolgende BRST-Analyse nicht mehr wesentlich. In Berechnungen lassen sich alle Felder leicht in Komponenten aufschreiben; es müssen lediglich in Ergebnissen wieder Skalarprodukte erkannt und zusammengefaßt werden. In Skalarprodukten werden Lorentz-Indizes im allgemeinen unterdrückt, d.h. es gilt

$$A \cdot B \ \equiv\ \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \ =\ -A^0 B^0 + A^1 B^1 \ =\ -\tfrac{1}{2}\left(A^+ B^- + A^- B^+\right) \ . \tag{6.2.6}$$

Die Fadeev-Popov-Konstruktion für die beiden Supersymmetrien ergibt ein neues superkonformes Geistsystem: $(\beta^\mp, \gamma^\pm)$. In der aktuellen Behandlung der Theorie [1] werden diese Geister zusammengesetzt aus zwei kommutierenden Paaren von Fermionen auf der Weltfläche. Die oben erwähnte zusätzliche $U(1)$-Symmetrie der Theorie führt auf ein weiteres Geistsystem $(\tilde{b}, \tilde{c})$, welches sich bis auf andere konforme Dimensionen genauso verhält wie (b, c). Die konformen Anomalien der Felder sind

$$\begin{aligned} &c_Z = 2D \\ &c_\psi = D \\ &c_{(b,c)} = -26 \quad , \quad c_{(\beta,\gamma)} = 2 \cdot 11 = 22 \quad , \quad c_{(\tilde{b},\tilde{c})} = -2 \ , \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

so daß die Bilanz lautet

$$c_{total} = 2D + D - 26 + 22 - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad D = 2 \ . \tag{6.2.8}$$

Die Propagation des geeichten N=2-String erfordert also vier reelle oder zwei komplexe Dimensionen der Raumzeit, wobei die Signatur $(4,0)$ oder $(2,2)$, nicht jedoch $(1,3)$ möglich ist [18, 19].

[31] Die Notation ist weitgehend [1] entnommen.

Die singulären Teile der OPE der genannten Felder sind gegeben durch

$$\begin{aligned} Z^{\mp -}(z)\ Z^{\pm +}(w) &\sim 4\, ln(z-w) \\ \psi^{\pm +}(z)\ \psi^{\mp -}(w) &\sim \frac{4}{(z-w)} \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

und

$$\gamma^{\pm}(z)\ \beta^{\mp}(w) \sim \frac{2}{z-w}\ . \tag{6.2.10}$$

Im folgenden jedoch wird ein Schema zur chiralen Bosonisierung benutzt (siehe auch Kap.4): die Zuordnungen

$$\begin{aligned} \psi^{\pm +} &\to 2e^{+\phi^{\pm}}\ , \\ \psi^{\mp -} &\to 2e^{-\phi^{\pm}}\ , \\ \gamma^{\pm} &\to \eta^{\pm} e^{+\varphi^{\pm}}\ , \\ \beta^{\mp} &\to e^{-\varphi^{\pm}} \partial \xi^{\mp} \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

und die entsprechenden OPE für die Bosonisierungsfelder

$$\begin{aligned} \phi^{\pm}(z)\phi^{\pm}(w) &\sim +\ln(z-w)\ , \\ \varphi^{\pm}(z)\varphi^{\pm}(w) &\sim -\ln(z-w)\ , \\ \xi^{\mp}(z)\eta^{\pm}(w) &\sim \frac{2}{z-w} \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

reproduzieren die richtigen OPE und konformen Dimensionen, wenn man auch im Energie-Impuls-Tensor die entsprechenden Ersetzungen vornimmt und die Normalordnungen auswertet.

Die Geistsysteme (b, c) und $(\tilde{b}, \tilde{c})$ werden in nicht bosonisierter Form behandelt, da hier keine Erleichterung der Analyse der Kohomologie erfolgt.

6.3 Zusammengesetzte Operatoren und N=2-Algebra

Im folgenden werden die lokalen Symmetriegeneratoren als normalgeordnete, zusammengesetzte, konforme Felder geschrieben. Die zugehörigen Quantenzahlen erhält man jeweils durch Kenntnis der superkonformen Algebra, welche in den OPE zwischen $\{T, J, G\pm\}$ ihre Darstellung findet, d.h. durch Auswertung der Faktoren vor der entsprechenden Singularität in der OPE. Bei den Integral-Operatoren ist das Residuum zu nehmen. Aus Gründen der Übersicht werden daher in den weiter unten folgenden Berechnungen keine Integrale notiert. Für die Analyse des Zustandsraums werden - wie beim bosonischen String - eine Reihe von Operatoren konstruiert, die zwischen bestimmten Sektoren abbilden oder die charakteristischen Quantenzahlen messen. Diese letztgenannten, graduierenden Operatoren, durch die sich eine Einteilung des gesamten Zustandsraums vornehmen läßt, sind beim N=2-String:

- die Nullmode L_0 des Energie-Impuls-Tensors $T_{tot} = T_{mat} + T_{bc} + T_{\tilde{b}\tilde{c}} + T_{\beta\gamma}$
- die Nullmode J_0 des $U(1)$-Stroms $J_{tot} = J_{mat} + J_{\tilde{b}c} + J_{\beta\gamma}$
- die Geistladung $U = -\oint[bc + \tilde{b}\tilde{c} + \frac{1}{2}\beta^+\gamma^- + \frac{1}{2}\beta^-\gamma^+]$
- die Bildladungen $\Pi^\pm = -\frac{1}{2}\oint[\beta^\pm\gamma^\mp + \eta^\mp\xi^\pm]$

Diese bilden einen Satz jeweils miteinander kommutierender Operatoren. Es folgt eine vollständige Liste der verwendeten Operatoren und damit ein Überblick über alle Konventionen bzgl. Zahlenfaktoren und Vorzeichen. Zunächst die verschiedenen Anteile zu Energie-Impulstensor und Strom:

$$\begin{aligned}
T_{mat} &= -\tfrac{1}{2}\partial Z^+ \cdot \partial Z^- + \tfrac{1}{4}(\psi^+ \cdot \partial\psi^- + \psi^- \cdot \partial\psi^+) \\
T_{bc} &= -2b\partial c - (\partial b)c \\
T_{\tilde{b}\tilde{c}} &= -\tilde{b}\partial\tilde{c} \\
T_{\beta\gamma} &= -\tfrac{3}{4}(\beta^+\partial\gamma^- + \beta^-\partial\gamma^+) - \tfrac{1}{4}(\gamma^+\partial\beta^- + \gamma^-\partial\beta^+) \\
J_{mat} &= -\tfrac{1}{4}\psi^+ \cdot \psi^- \\
J_{\tilde{b}c} &= -\partial(\tilde{b}c) = -\partial\tilde{b}c - \tilde{b}\partial c \\
J_{\beta\gamma} &= \tfrac{1}{4}(\beta^+\gamma^- - \beta^-\gamma^+)
\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Die Erzeugenden der Supersymmetrie sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
G^+_{mat} &= \partial Z^- \cdot \psi^+ \\
G^-_{mat} &= \partial Z^+ \cdot \psi^- \ ,
\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

während man die geisterweiterten Operatoren $G^\pm := G^\pm_{tot}$ aus $G^\pm = \{Q, \beta^\pm\}$ erhält. Hiermit verifiziert man (für verschwindende Anomalie c) die N=2-superkonforme Algebra [32]:

$$\begin{aligned} T \cdot T &\sim \frac{2\,T}{(z-w)^2} + \frac{\partial T}{z-w} \\ T \cdot J &\sim \frac{J}{(z-w)^2} + \frac{\partial J}{z-w} \\ J \cdot J &\sim reg. \\ T \cdot G^\pm &\sim \frac{\frac{3}{2}\,G^\pm}{(z-w)^2} + \frac{\partial G^\pm}{z-w} \\ G^\pm \cdot G^\pm &\sim reg. \\ G^+ \cdot G^- &\sim \frac{8\,J}{(z-w)^2} + \frac{4\,\partial J}{(z-w)} + \frac{4\,T}{(z-w)} \\ J \cdot G^\pm &\sim \frac{\pm\frac{1}{2}\,G^\pm}{z-w} \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Aus diesen aufgeführten Größen werden außerdem mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \hat{T} &= T_{\text{tot}} - T_{bc} \\ \hat{J} &= J_{\text{tot}} - J_{\tilde{b}c} \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

der BRST-Strom

$$\begin{aligned} J_{BRST} = &c\hat{T} + bc\partial c + \tfrac{1}{2}(\gamma^- G^+ + \gamma^+ G^-) + \tilde{c}\hat{J} \\ &- \gamma^+\gamma^- b + (\gamma^-\partial\gamma^+ - \gamma^+\partial\gamma^-)\tilde{b} \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

und die Picture-Changing-Operatoren

$$\begin{aligned} X^+ &= c\partial\xi^+ + e^{\phi^-}\{G^+ + 2\partial\tilde{b}\gamma^+ + 4\tilde{b}\partial\gamma^+ - 2b\gamma^+\} \\ X^- &= c\partial\xi^- + e^{\phi^+}\{G^- - 2\partial\tilde{b}\gamma^- - 4\tilde{b}\partial\gamma^- - 2b\gamma^-\} \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

konstruiert.

[32] mit $T = T_{tot}$ und $J = J_{tot}$; der "$\cdot$" deutet hier die Berechnung des singulären Teils der OPE an. Man beachte, daß J nicht - wie T - eindeutig normiert ist. Daher können Zahlenfaktoren von anderer Literatur abweichen.

7 Die BRST-Kohomologie des N=2-Superstring

7.1 Allgemeine Betrachtungen

Die folgende Analyse erfolgt für den Neveu-Schwarz-Sektor der Theorie, d.h. die betrachtete CFT enthält nur die bekannten Superfelder und keine Spinfelder, die zwischen Neveu-Schwarz und Ramond-Sektor vermitteln. Untersucht werden Anregungen mit $M^2 = 0$. Außerdem werden keine Twists [20] behandelt.

Da einerseits

$$\begin{aligned} L_0^{\mathrm{tot}} &= \{Q_{\mathrm{BRST}}, b_0\} \\ J_0^{\mathrm{tot}} &= \{Q_{\mathrm{BRST}}, \tilde{b}_0\} \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

und andererseits

$$\{Q, L_0^{tot}\} = \{Q, J_0^{tot}\} = 0 \ , \tag{7.1.2}$$

findet man nichttriviale Kohomologie-Klassen nur für $h = e = 0$ in Analogie zu der Einschränkung $h = 0$ beim bosonischen String. Zusätzlich zu der weiterhin gültigen Beziehung $[Q, U] = -Q$ findet man die Kommutatorrelationen

$$[Q, \Pi^{\pm}] = 0 \tag{7.1.3}$$

und

$$\begin{aligned} [\Pi^{\pm}, X^{\mp}] &= 0 \\ [\Pi^{\pm}, X^{\pm}] &= X^{\pm} \ . \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

Letzteres etabliert die Wirkungsweise der Picture-Changing-Operatoren auf die Vertex-Operatoren der Theorie: X^+ erhöht π_+, den Eigenwert von Π^+, um 1 und X^- erhöht π_-, den Eigenwert von Π^-, um 1. Da außerdem die Picture-Changing-Operatoren mit dem BRST-Operator kommutieren,

$$[Q, X^{\pm}] = 0 \ , \tag{7.1.5}$$

sollte die Struktur der BRST-Klassen in allen Bildern identisch sein: die Picture-Changing-Operatoren bilden BRST-Klassen auf BRST-Klassen ab und erhöhen dabei stets die Picture-Zahlen.

Man kann daher zunächst die Betrachtungen auf ein Bild beschränken, welches eine einfache Struktur hat. Jedoch existieren keine (lokalen) inversen Operatoren zu $X^{\pm}$ [1], so daß via Picture-Changing nur Repräsentanten von BRST-Klassen in Bildern mit größeren Picture-Zahlen gefunden werden können. Im folgenden werden BRST-invariante Vertex-Operatoren in anderen Bildern als dem ausgewählten ("kanonischen") explizit konstruiert. In Rechnungen werden die fermionische Materie ψ

und die superkonformen Geister (β,γ) in bosonisierter Form behandelt. Dies erfordert, auch die graduierenden Operatoren aus (6.3.1) durch die kompakten Bosonen auszudrücken. Ihre Berechnung erfordert im wesentlichen eine sorgfältige Auswertung der Normalordnung zwischen Exponentialen. Es ergeben sich

$$\begin{aligned} J_\psi &= \tfrac{1}{2}(\partial\phi^+ - \partial\phi^-) \\ T_\psi &= \tfrac{1}{2}[(\partial\phi^+)^2 + (\partial\phi^-)^2] \\ J_{\beta\gamma} &= \tfrac{1}{2}[\partial\varphi^- - \partial\varphi^+] \\ T_{\beta\gamma} &= -(\partial^2\varphi^+ + \partial^2\varphi^-) - \tfrac{1}{2}[(\partial\varphi^+)^2 + (\partial\varphi^-)^2] + \tfrac{1}{2}(\partial\xi^+\eta^- + \partial\xi^-\eta^+). \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

Aus dieser Form der Energie-Impuls-Tensoren erhält man auch eine praktische Formel für die konforme Dimension eines Exponentials:

$$h[e^{a\phi^\pm}] = h[e^{a\varphi^\pm}] = -\tfrac{1}{2}(a^2 + 2a)\ . \tag{7.1.7}$$

Die folgende Tabelle enthält die Quantenzahlen der fundamentalen konformen Felder der Theorie.

Tabelle 7.1a: Konforme Dimension, Geistzahl, und Ladung der Materie-Felder des BRST-quantisierten N=2-String.

Feld	bos. Form	h	u	e
$\partial Z^{\pm\pm}$		1	0	0
$\partial Z^{\pm\mp}$		1	0	0
ψ^{++}	$2e^{+\phi^+}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
ψ^{-+}	$2e^{+\phi^-}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
ψ^{+-}	$2e^{-\phi^-}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
ψ^{--}	$2e^{-\phi^+}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Tabelle 7.1b: Konforme Dimension, Geistzahl, und Ladung der Geist-Felder des BRST-quantisierten N=2-String. Die bosonisierte Form ist nur angegeben, sofern sie in den Rechnungen verwendet wird.

Feld	bos. Form	h	u	e
b		2	-1	0
c		-1	1	0
$\tilde{b}$		1	-1	0
$\tilde{c}$		0	1	0
$\beta^{\pm}$	$e^{-\varphi^{\mp}}\partial\xi^{\pm}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\pm\frac{1}{2}$
$\gamma^{\pm}$	$\eta^{\pm}e^{\varphi^{\pm}}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\pm\frac{1}{2}$
$\eta^{\pm}$		1	0	0
$\xi^{\pm}$		0	0	0
	$e^{\varphi^{\pm}}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\pm\frac{1}{2}$
	$e^{-\varphi^{\pm}}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\mp\frac{1}{2}$
	$e^{-2\varphi^{\pm}}$	0	-2	∓ 1
	$e^{-3\varphi^{\pm}}$	$-\frac{3}{2}$	-3	$\mp\frac{3}{2}$
	$e^{-\varphi^{-}-\varphi^{+}}$	1	-2	0

Aufgrund der komplizierten Struktur ist es schwierig, direkt aus der Form des BRST-Operators auf invariante Operatoren zu schließen. Daher soll hier ein zu Kap.5 analoger Weg beschritten werden: die Bedingungen $h = e = 0$, sowie $k^{-} \cdot k^{+} = 0$ werden für die Aufstellung einer Liste von Operatoren, die BRST-invariant sein können, ausgenutzt. In den folgenden Betrachtungen der verschiedenen *Bilder* des Fockraums ist es praktischer, zur Graduierung die Linearkombination von Operatoren

$$V = U - \Pi^{+} - \Pi^{-} \tag{7.1.8}$$

zu benutzen, da der Eigenwert v invariant unter Picture-Changing ist. Ein weiterer Vorzug dieser Quantenzahl zeigt sich unten bei der Entwicklung der Kandidatenlisten. Die Graduierung zerlegt die BRST-Kohomologie in Eigenräume mit Eigenwerten (v, π_{+}, π_{-}). In Analogie zu den Sektoren fester Geistzahl u beim bosonischen String wird ein solches Objekt unten als “Sektor” bezeichnet. Für den BRST-Operator gilt damit

$$Q: \ (v, \pi_{+}, \pi_{-}) \to (v+1, \pi_{+}, \pi_{-}) \ , \tag{7.1.9}$$

und für die Picture-Changing-Operatoren

$$\begin{aligned} X^{+} &: (v, \pi_{+}, \pi_{-}) \to (v, \pi_{+}+1, \pi_{-}) \\ X^{-} &: (v, \pi_{+}, \pi_{-}) \to (v, \pi_{+}, \pi_{-}+1) \ . \end{aligned} \tag{7.1.10}$$

7.2 Die Bildung von Kandidatenlisten

Ein vollständiger N=2-Vertex-Operator W hat die Form

$$W = e^{l\varphi^- + k\varphi^+} \{\partial\xi, \eta\} \{c, b\} \{\tilde{c}, \tilde{b}\} \{Materie\} \; , \tag{7.2.1}$$

wobei $\{A\}$ beliebige normalgeordnete Produkte von Ableitungen des konformen Feldes A darstellt. Der Materie-Anteil wird aus den Feldern $(\partial Z^+, \partial Z^-)$, (ψ^+, ψ^-) und $V = e^{ik\cdot Z}$ gebildet. Letzterer wird stets unterdrückt, da er in allen auftretenden Operatoren enthalten ist und sich bei allen OPE reproduziert. Für den interessierenden Fall gilt außerdem mit $k^- \cdot k^+ = 0$ auch $h[V] = e[V] = u[V] = \pi_\pm[V] = 0$, so daß V keinen Einfluß auf die Zahl und Struktur der auftretenden Kandidaten hat. Aus der Struktur der Picture-Zahl-Operatoren extrahiert man die

Tabelle 7.2: Picture-Ladungen der Felder $\eta, \xi, e^{a\varphi^\pm}$

	η^+	ξ^+	η^-	ξ^-	$e^{a\varphi^-}$	$e^{a\varphi^+}$
π_+	0	1	-1	0	a	0
π_-	-1	0	0	1	0	a

Es ist ersichtlich, daß Felder, die sich vollständig durch β und γ ausdrücken lassen, keine Picture-Ladung tragen: $\pi_\pm(\beta^\pm) = \pi_\pm(\gamma^\pm) = 0$. Weiterhin ist klar, daß Operatoren mit festen Picture-Zahlen auf verschiedene Arten konstruiert werden können: eine Abweichung von l und k im Exponential $e^{l\varphi^- + k\varphi^+}$ von den Picture-Zahlen π_+ und π_- muß durch Multiplizieren mit $\{\eta, \xi\}$-Termen kompensiert werden. Hierbei ist zu beachten, daß nach der Definition des (β, γ)-Systems die Nullmoden von ξ in der gesuchten Kohomologie nicht enthalten sein können. Da $e[e^{l\varphi^- + k\varphi^+}] = \frac{1}{2}(k - l)$, sind Terme mit $k \neq l$ geladen. Solche Ladungen können nur mit Hilfe von Feldern ψ^+, ψ^- und Ableitungen hiervon kompensiert werden. Das folgende Beispiel verdeutlicht die vorzunehmende Fallunterscheidung: die Multiplikation eines vorgegebenen Terms $e^{l\varphi^- + k\varphi^+}$ bei

$$\pi_+ \geq l \; , \tag{$*$}$$

$$\pi_- \geq k \; , \tag{$**$}$$

und

$$l > k \tag{$***$}$$

mit Produkten der Form

$$\begin{aligned} &\partial\xi^+ \, \partial^2\xi^+ \ldots \quad ; (\pi_+ - l) \, \text{Felder} \\ &\partial\xi^- \, \partial^2\xi^- \ldots \quad ; (\pi_- - k) \, \text{Felder} \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

zur Erhöhung von $\pi_\pm$ und mit Produkten der Form

$$(\alpha_1^- \cdot \psi^+)(\alpha_2^- \cdot \partial\psi^+)\ldots \quad ; (l-k)\,\text{Faktoren} \tag{7.2.3}$$

zur Erhöhung von e, führt auf Operatoren mit $e = 0$ und $\pi_-[W] = \pi_-$ und $\pi_+[W] = \pi_+$. Entsprechendes gilt für alle Kombinationen anderer Fälle in den Ungleichungen (*) bis (***) unter Berücksichtigung der Felder $\{\eta\}$ zur Reduzierung von $\pi_\pm$ und ψ^- zur Reduzierung der $U(1)$-Ladung e. Man beachte, daß die Vektoren $\alpha_i^\pm$ sowohl freie Vektoren als auch Felder $\partial^n Z^\pm$ sein können.

Bleibt man bei dem in (*) bis (***) konstruierten Fall, so ergibt sich für einen Operator mit (π_-, π_+)

$$h[\{\partial\xi, \eta\}] = \tfrac{1}{2}(\pi_+ - l)(\pi_+ - l + 1) + \tfrac{1}{2}(\pi_- - k)(\pi_- - k + 1) \tag{7.2.4}$$

und

$$v[\{\partial\xi, \eta\}] = -(\pi_+ - l) - (\pi_- - k) = l + k - \pi_- - \pi_+ \ . \tag{7.2.5}$$

Man beachte, daß per Konstruktion $v[e^{l\varphi^- + k\varphi^+}] = 0$ für beliebige (l, k). Die Quantenzahlen h und v für einen vollständigen Operator W sind dann gegeben durch [33]

$$h[W] = h[e^{l\varphi^- + k\varphi^+}] + h[\{\xi\}] + h[\{\eta\}] + h[\{c, \tilde{c}, b, \tilde{b}\}] + h[\{Materie\}] \tag{7.2.6}$$

und

$$v[W] = u[\{c, \tilde{c}, b, \tilde{b}\}] + l + k - \pi_- - \pi_+ \ . \tag{7.2.7}$$

Die letzten beiden Gleichungen liefern Bedingungen, die die Zahl der Kandidaten mit festem v,π_+,π_- und $h = e = 0$ auf endlich viele beschränken. Es müssen alle Kandidaten eines hierdurch definierten Sektors bestimmt werden.

Minimales $h[W]$ bedeutet $h[\{Materie\}] = 0$ und $h[\{c, \tilde{c}, b, \tilde{b}\}] = h_{min}[\{c\}]$. Man findet, mit n_c als Zahl der in $\{c\}$ auftretenden Faktoren, und unter Benutzung der Formel (7.1.7):

$$h[\{c\}] = \tfrac{1}{2}n_c^2 - \tfrac{3}{2}n_c \tag{7.2.8}$$

und

$$h[e^{l\varphi^- + k\varphi^+}] = -\tfrac{1}{2}(l^2 + 2l) - \tfrac{1}{2}(k^2 + 2k) \ , \tag{7.2.9}$$

so daß die Bedingungen lauten:

$$v = n_c + l + k - \pi_- - \pi_+ \tag{7.2.10}$$

[33] Ab hier werden die Reparametrisierungsgeister (c, b) und die $U(1)$-Geister $(\tilde{c}, \tilde{b})$ zusammengefaßt dargestellt, da sie die gleiche "Struktur" von Quantenzahlen haben, d.h. sie tragen i.A. nichtverschwindendes u (und damit v) und konforme Dimension h, jedoch keine weiteren nichtverschwindenden Quantenzahlen.

und, wegen $0 = h \geq h_{min}$,

$$0 \geq -\tfrac{1}{2}(l^2 + 2l + k^2 + 2k) + \tfrac{1}{2}(\pi_+ - l)(\pi_+ - l + 1) + \tfrac{1}{2}(\pi_- - k)(\pi_- - k + 1) + \tfrac{1}{2}n_c^2 - \tfrac{3}{2}n_c \; . \tag{7.2.11}$$

Eliminiert man n_c in (7.2.11) mit Hilfe von (7.2.10), so erhält man die Form

$$Al^2 + Bk^2 + Cl + Dk + E \leq 0 \tag{7.2.12}$$

mit im vorliegenden Fall positiven Zahlen A, B, und damit endlich viele Kandidaten. Die anderen Fälle in (*) bis (***) sind völlig analog zu behandeln. Für $h[W] < 0$ müssen noch Ableitungen und/oder Materie-Felder hinzugefügt werden, bis $h[W] = 0$ erreicht ist. Dafür gibt es aber wegen der grundsätzlich durch $h[c] = -1$ nach unten beschränkten konformen Dimension der Felder nur endlich viele Möglichkeiten (vgl. Kap.5).

7.3 Das kanonische Bild $(-1, -1)$

Für $\pi_+ = \pi_- = -1$ reduziert sich (7.2.12) auf

$$0 = -\tfrac{1}{2}(l + k) + \tfrac{1}{2}(n_c^2 - 3n_c) \; . \tag{7.3.1}$$

Mit den oben dargestellten Fallunterscheidungen (vgl. z.B. (*) und (**)) verträgliche Lösungen gibt es nur für $l = k = -1$ und zwar: $n_c = 1$ und $n_c = 2$. Es gibt auch noch von der Minimalstruktur abweichende Lösungen, die sich ergeben, wenn man $n_{\tilde{c}} \neq 0$ ebenfalls behandelt. In diesem Fall wird (7.2.12) zu

$$0 = -\tfrac{1}{2}(l + k) + \tfrac{1}{2}(n_c^2 + n_{\tilde{c}}^2) - \tfrac{1}{2}n_{\tilde{c}} - \tfrac{3}{2}n_c \; . \tag{7.3.2}$$

Die zusätzlichen Lösungen sind gegeben durch (wiederum nur für $l = k = -1$) $(n_{\tilde{c}} = 1, n_c = 1)$ und $(n_{\tilde{c}} = 1, n_c = 2)$. Die Kandidatenliste im Bild $(-1, -1)$ enthält daher nur Operatoren

$$\mathcal{C}\, e^{-\varphi^- - \varphi^+} \tag{7.3.3}$$

mit den sich aus (7.3.1) ergebenden[34] $\mathcal{C} \in \{c, c\partial c\}$ (Standardgeiststruktur) und den zusätzlichen $\mathcal{C} \in \{\tilde{c}c, \tilde{c}c\partial c\}$. Dies stellt eine Erweiterung der Standardgeiststruktur

[34] Hier bezeichnet $\{A, B\}$ einfach die aus A und B bestehende Menge von Operatoren, im Unterschied zu der oben benutzten Notation.

$\{c, c\partial c\}$ der bosonischen Theorie dar. Insgesamt erhält man:

$$\begin{aligned} (1,-1,-1) &:= \; c\, e^{-\varphi^- - \varphi^+} \\ (2,-1,-1) &:= \; c\partial c\, e^{-\varphi^- - \varphi^+} \\ (2,-1,-1)' &:= \; \tilde{c}c\, e^{-\varphi^- - \varphi^+} \\ (3,-1,-1) &:= \; \tilde{c}c\partial c\, e^{-\varphi^- - \varphi^+} \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

Formal ergibt sich zusätzlich ein (nicht-lokaler) Repräsentant mit $v = 0$:

$$(0,-1,-1) := \int e^{-\varphi^- - \varphi^+} \ , \tag{7.3.5}$$

der hier jedoch nicht in Betracht gezogen werden soll.

Die Einschränkung, keine Nullmoden von $\xi^\pm$ (d.h. nicht das Feld $\xi^\pm$ selbst) in der Kohomologie zu haben, stellt sich bei der Untersuchung auf mögliche Repräsentanten als wesentlich heraus. Die Picture-Zahlen eines Operators mit einer vorgegebenen Struktur $e^{l\varphi^- + k\varphi^+}$ werden durch Multiplizieren mit $\xi^\pm$ verschoben, ohne daß sich hierbei die konforme Dimension ändert (insbesondere nicht erhöht). Schließt man den Nullmode $\xi^\pm$ nicht aus, kann ein Produkt aus $\{\xi\}$ mit dem Term nullter Ableitungsordnung beginnen. Dies würde auf unendlich viele Kandidaten in einem Sektor (v, π_+, π_-) führen.

Die Anwendung von Q auf obige Repräsentanten ergibt:

$$\begin{aligned} [Q, (1,-1,-1)] &= -\tfrac{1}{2}(k^- \cdot k^+) e^{-\varphi^+} e^{-\varphi^-} V c' c \\ [Q, (2,-1,-1)] &= 0 \\ [Q, (2,-1,-1)'] &= \tfrac{1}{2}(k^- \cdot k^+) e^{-\varphi^+} e^{-\varphi^-} V c' c \tilde{c} \\ [Q, (3,-1,-1)] &= 0 \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

Auf der Massenschale $k^- \cdot k^+ = 0$ sind diese Sektoren folglich BRST-invariant. Da dies, wie oben gezeigt, die einzigen in Frage kommenden Repräsentanten im Bild $(-1,-1)$ sind, und es daher insbesondere auch keinen Sektor $(0,-1,-1)$ gibt, sind diese Operatoren alle nicht BRST-trivial und repräsentieren daher die gesuchten BRST-Klassen.

In anderen Bildern ist die Analyse deutlich aufwendiger, da sich viel längere Kandidatenlisten ergeben. Die BRST-Kohomologie in den Bildern $(\pi_- \geq -1, \pi_+ \geq -1)$ ist jedoch durch Picture-Changing zu konstruieren und besteht dort ebenfalls aus vier Klassen mit $v \in \{1, 2, 2', 3\}$.

7.4 BRST-Klassen aus Picture-Changing

Es werden Vertex-Operatoren in den Bildern $(0,-1)$, $(-1,0)$ und $(0,0)$ durch Anwendung der Picture-Changing-Operatoren auf die Repräsentanten des oben konstruierten kanonischen Bildes $(-1,-1)$ berechnet. Die Picture-Changing-Operatoren wirken nun wie folgt: X^+ erhöht π_+ und X^- erhöht π_-. Will man durch Picture-Changing vom symmetrischen Bild $(-1,-1)$ in das symmetrische Bild $(0,0)$ gelangen, so kann dies also über zwei verschiedene asymmetrische intermediäre Bilder $(0,-1)$ und $(-1,0)$ erfolgen:

$$\begin{aligned}(v,0,0) &= X^-((v,0,-1)) = X^-(X^+((v,-1,-1))) =: X^{-+}((v,-1,-1))\\ (v,0,0) &= X^+((v,-1,0)) = X^+(X^-((v,-1,-1))) =: X^{+-}((v,-1,-1))\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Hiermit ergibt sich das Bild $(0,-1)$ zu

$$\begin{aligned}(1,0,-1) = &\quad -ie^{-\varphi^+}(k^-\cdot\psi^+)c\\ (2,0,-1) = &\quad 2\eta^+c + ie^{-\varphi^+}(k^-\cdot\psi^+)c'c\\ (2,0,-1)' = &\quad -2\eta^+c + ie^{-\varphi^+}(k^-\cdot\psi^+)c\tilde{c}\\ (3,0,-1) = &\quad 2\eta^+c\tilde{c} + 2\eta^+c'c + ie^{-\varphi^+}(k^-\cdot\psi^+)c'c\tilde{c}\ ,\end{aligned} \tag{7.4.2}$$

und $(-1,0)$ zu

$$\begin{aligned}(1,-1,0) = &\quad -ie^{-\varphi^-}(k^+\cdot\psi^-)c\\ (2,-1,0) = &\quad -2\eta^-c + ie^{-\varphi^-}(k^+\cdot\psi^-)c'c\\ (2,-1,0)' = &\quad 2\eta^-c + ie^{-\varphi^-}(k^+\cdot\psi^-)c\tilde{c}\\ (3,-1,0) = &\quad -2\eta^-c\tilde{c} - 2\eta^-c'c + ie^{-\varphi^-}(k^+\cdot\psi^-)c'c\tilde{c}\ .\end{aligned} \tag{7.4.3}$$

Auch dies ist - bis auf Vorzeichen - in Übereinstimmung mit [1]. Die BRST-Invarianz dieser Operatoren wurde hier ebenfalls explizit geprüft. Man findet z.B., daß $[Q, ie^{-\varphi^+}(k^-\cdot\psi^+)c]$ zusätzlich zu Termen, die auf der Massenschale verschwinden, einen Term der Form $e^{\varphi^-}(k^-\cdot\psi^+)\,\eta^-\eta^+c$ enthält, der aber von $-2[Q, c\eta^+]$ gerade kompensiert wird.

Im jeweils zweiten Schritt von (7.4.1) erhält man $(0,0)$. Es ergeben sich [35]

$$(1,0,0) = \Big\{2i(k^-\cdot\partial Z^+) + (k^-\cdot\psi^+)(k^+\cdot\psi^-)\Big\}\,c + 2i(k^-\cdot\psi^+)\gamma^-\ . \tag{7.4.4}$$

[35] In [1] wurde eine mehr symmetrische Form gewählt.

$$
\begin{aligned}
(2,0,0) = &- 2c''c + 2i(k^+ \cdot \partial Z^-)cc' - (k^- \cdot \psi^+)(k^+ \cdot \psi^-)cc' \\
&+ 4(\psi^+ \cdot \partial Z^-)\gamma^- c - 2i\partial[(k^- \cdot \psi^+)\gamma^-]c \\
&+ 2i(k^+ \cdot \psi^-)\partial(\gamma^+ c) + 4\gamma^-\gamma^+(bc + \tilde{b}'c) + 4\gamma^-\partial\gamma^+(1 + \tilde{b}c) \\
&- 2(k^+ \cdot \psi^-)\gamma^+\partial\varphi^- c \ ,
\end{aligned}
\tag{7.4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
(2,0,0)' = &- 2c''c + 2i(k^+ \cdot \partial Z^-)c\tilde{c} - (k^- \cdot \psi^+)(k^+ \cdot \psi^-)c\tilde{c} \\
&+ 4(\psi^+ \cdot \partial Z^-)\gamma^- c - 2i\partial[(k^- \cdot \psi^+)\gamma^-]c \\
&+ 2i(k^+ \cdot \psi^-)\{(\partial\gamma^+)c + \gamma^+\tilde{c}\} + 4\gamma^-\gamma^+(bc + \tilde{b}'c) + 4\gamma^-(\partial\gamma^+)(1 + \tilde{b}c) \\
&- 2(k^+ \cdot \psi^-)\gamma^+\partial\varphi^- c \ ,
\end{aligned}
\tag{7.4.6}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(3,0,0) = &-2i(k^+ \cdot \partial Z^-)c'c\tilde{c} + (k^- \cdot \psi^+)(k^+ \cdot \psi^-)c'c\tilde{c} \\
&+\Big\{4(\psi^+ \cdot \partial Z^-)\gamma^- - 2i(k^- \cdot \partial\psi^+)\gamma^- - 2(k^+ \cdot \psi^-)\gamma^+\partial\varphi^- \\
&+2i(k^+ \cdot \psi^-)\partial\gamma^+ - 2c''\Big\}(c\tilde{c} + c'c) \\
&-2i(k^+ \cdot \psi^-)\gamma^+(c'\tilde{c}) + 4\gamma^-\gamma^+(bc\tilde{c} + bc'c + c\tilde{b}'\tilde{c} - c'c\tilde{b}') \\
&+4\gamma^-\partial\gamma^+(\tilde{c} + 2c\tilde{b}\tilde{c} - 2c'c\tilde{b} - c') + 8\gamma^-(\partial^2\gamma^+)c + 8(\partial\gamma^-)(\partial\gamma^+)c \\
&-2i(k^- \cdot \psi^+)\partial\gamma^-(c\tilde{c} + c'c) \ .
\end{aligned}
\tag{7.4.7}
$$

Die BRST-Invarianz von $(1,0,0)$ wurde explizit geprüft.

Der Vergleich von (7.4.5) mit (7.4.6) liefert eine Feststellung, die für alle für diese Arbeit durchgeführten Rechnungen gültig bleibt: ersetzt man in einer Rechnung $[Q,O]$ bzw. $: X^{\pm}O :$ in O ein Feld c' durch $\tilde{c}$, so genügt es, in den Ergebnissen ebenfalls formal c' durch $\tilde{c}$ zu ersetzen.

7.5 Die Kohomologie in "subkanonischen" Bildern

Es wurde geklärt, wie die BRST-Kohomologie im kanonischen Bild $(-1,-1)$ aussieht, und es wurde gezeigt, wie durch Picture-Changing BRST-invariante Vertex-Operatoren in Bildern mit höheren Picture-Zahlen konstruiert werden können. Physikalische Vertex-Operatoren in ("subkanonischen") Bildern mit niedrigeren Picture-Zahlen müssen durch die Aufstellung von Kandidatenlisten und der expliziten Forderung nach BRST-Invarianz gefunden werden. Die Listen ergeben sich aus den obigen Betrachtungen, in denen die konforme Dimension eines Vertex-Operators als Funktion aller anderen Quantenzahlen dargestellt wurde, siehe Gln. (7.2.6) und (7.2.7). Die aufgelisteten Operatoren erfüllen daher alle die Bedingungen $h = e = 0$.

Es ist naheliegend, zunächst die Verhältnisse in den Bildern $(-2,-2)$, $(-1,-2)$ und $(-2,-1)$ zu untersuchen. Man erwartet, daß sich die gleiche Struktur von BRST-Klassen, wie in $(-1,-1)$ ergibt. Dies bedeutet aber, daß Picture-Changing BRST-Klassen in $(-1,-2)$, $(-2,-1)$ und $(-2,-2)$ mit denen in $(-1,-1)$ verknüpfen sollte: es dürfen nur in den Sektoren mit $v \in \{1,2,3\}$ nichttriviale physikalische Repräsentanten existieren (für je *eine* Klasse mit $v = 1,3$ und *zwei* Klassen mit $v = 2$). Wendet man die Picture-Changing-Operatoren auf die Operatoren der Kandidatenlisten mit $v = 1$ an,

$$\begin{aligned} &X^{+-}(1,-2,-2) \quad , \quad X^{-+}(1,-2,-2) \\ &X^{-}(1,-1,-2) \\ &X^{+}(1,-2,-1) \ , \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

so erhält man als ein erstes Ergebnis, daß die Abbildung nur auf $(1,-1,-1)$ oder auf Null führt. Die Abbildung auf Null wird im folgenden als *triviales Picture-Changing* bezeichnet.

Im Bild $(-2,-2)$ ist die vollständige Analyse, selbst wenn man sich auf $v = 1$ beschränkt, nur noch tabellarisch durchzuführen, da sich eine Vielzahl von Kandidaten ergibt (siehe unten).

Eine besondere Behandlung verdienen Operatoren, in denen Materiefelder mit (zunächst freien) Polarisations-Vektoren kontrahiert sind. Ein einfacher Operator dieser Art ist z.B. in $(1,-2,-2)$

$$O_1(\epsilon) = c\,(\epsilon^- \cdot \partial Z^+ + \epsilon^+ \cdot \partial Z^-) e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} \ . \tag{7.5.2}$$

Man berechnet

$$[Q, O_1(\epsilon)] = cc''\,(\epsilon^- \cdot k^+ + \epsilon^+ \cdot k^-) e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} \ . \tag{7.5.3}$$

und

$$X^{+-}(O_1(\epsilon)) = c\,(\epsilon^- \cdot k^+ + \epsilon^+ \cdot k^-)e^{-\varphi^- - \varphi^+} \tag{7.5.4}$$

Dies bedeutet, daß lediglich Operatoren $O_1(\epsilon = \alpha k)$ BRST-invariant sind (und zwar wegen der Massenschalenbedingung), jedoch auch triviales Picture-Changing zeigen. Solche Operatoren sollten keine physikalische Klasse bilden. Hieraus leitet man die Hypothese ab, daß es sich um BRST-triviale Operatoren handelt. Dies testet man durch Q-Anwendung auf $(0, -2, -2)$. Für $O_1(k)$ ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned}\Big[Q, \Big\{12e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} + cc'''\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+}\Big\}\Big] &= 6i\,(k^+ \cdot \partial Z^- + k^- \cdot \partial Z^+)ce^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} \\ &= 6i\,O_1(k)\ .\end{aligned} \tag{7.5.5}$$

Es gibt aber auch Operatoren $O'(\epsilon)$, die zur BRST-Invarianz die Massenschalenbedingung nicht benötigen, d.h. für $\epsilon \not\parallel k$ BRST-invariant sind. Für solche Operatoren ist die BRST-Trivialität sorgfältig zu prüfen, wie aus den folgenden Betrachtungen deutlich wird. Im Bild $(-2, -2)$ wurden die Kandidatenlisten aufgrund der Hypothese erstellt, daß hier *alle* Vertex-Operatoren $O(k)$ vom oben beschriebenen Typ sind, und daher auch in Linearkombinationen mit anderen Operatoren keine Invarianz durch Kompensationen "herstellen" können.

In den Bildern $(-1, -2)$ und $(-2, -1)$ ist die Analyse analog zu der Behandlung des bosonischen String (Kap.5) durchzuführen. Man erhält für den Sektor $(1, -1, -2)$ lediglich folgende Operatoren O_i mit $h = e = 0$:

$$\begin{aligned}O_1 &= c(\epsilon^- \cdot \psi^+)e^{-\varphi^- - 2\varphi^+} \\ O_2 &= c'c\partial\xi^+ e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} \\ O_3 &= \tilde{c}c\partial\xi^+ e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} \\ O_4 &= c'c\psi^{++}\psi^{+-}\partial\xi^- e^{-\varphi^- - 3\varphi^+} \\ O_5 &= \tilde{c}c\psi^{++}\psi^{+-}\partial\xi^- e^{-\varphi^- - 3\varphi^+} \\ O_6 &= c'c\tilde{c}(\epsilon^- \cdot \psi^+)\partial\xi^-\partial\xi^+ e^{-2\varphi^- - 3\varphi^+}\ ,\end{aligned} \tag{7.5.6}$$

wobei die Materieanteile in O_4 und O_5 sich aus der Auswertung von

$$(\epsilon^- \cdot \psi^+)(\delta^- \cdot \psi^+) = (\epsilon^{--}\delta^{-+} - \epsilon^{-+}\delta^{--})\,\psi^{++}\psi^{+-} \tag{7.5.7}$$

ergeben.[36] Zur Bestimmung des BRST-invarianten Unterraums ist es sinnvoll, die

[36] "Größere" Mehrfachprodukte dieser Art verschwinden natürlich, was die Zahl der Kandidaten hier einschränkt. Der skalare Faktor in (7.5.7) wird nicht notiert, da δ^- ein freier Vektor ist, der nur hier auftritt.

Q-Kommutatoren nun in Komponenten zu schreiben. Es ergeben sich

$$
\begin{aligned}
[Q, O_1] &= 0 \\
[Q, O_2] &= ie^{-\varphi^- -2\varphi^+}(k^{-+}\psi^{+-} + k^{--}\psi^{++})c'c \\
[Q, O_3] &= ie^{-\varphi^- -2\varphi^+}(k^{-+}\psi^{+-} + k^{--}\psi^{++})\tilde{c}c \\
[Q, O_4] &= 4ie^{-\varphi^- -2\varphi^+}(k^{++}\psi^{+-} + k^{+-}\psi^{++})c'c \\
[Q, O_5] &= 4ie^{-\varphi^- -2\varphi^+}(k^{++}\psi^{+-} + k^{+-}\psi^{++})\tilde{c}c \\
[Q, O_6] &= -4e^{-\varphi^- -2\varphi^+}\epsilon^{-+}\psi^{+-} + \epsilon^{--}\psi^{++}\tilde{c}c \\
&\quad - 4e^{-\varphi^- -2\varphi^+}\epsilon^{-+}\psi^{+-} + \epsilon^{--}\psi^{++}c'c \\
&\quad - ie^{-2\varphi^- -2\varphi^+}\epsilon^{-+}k^{+-}\partial\xi^+ c'c\tilde{c} \\
&\quad - ie^{-2\varphi^- -2\varphi^+}\epsilon^{--}k^{++}\partial\xi^+ c'c\tilde{c} \\
&\quad + ie^{-\varphi^- -3\varphi^+}\epsilon^{-+}k^{--}\psi^{++}\psi^{+-}\partial\xi^- c'c\tilde{c} \\
&\quad + ie^{-\varphi^- -3\varphi^+}\epsilon^{--}k^{-+}\psi^{++}\psi^{+-}\partial\xi^- c'c\tilde{c} \; .
\end{aligned}
\tag{7.5.8}
$$

Die Forderung nach BRST-Invarianz liefert einen Unterraum, der in jedem Fall O_1 enthält. In dem speziellen Fall

$$k^{--}k^{++} - k^{+-}k^{-+} = 0 \; , \tag{7.5.9}$$

was zusammen mit der Massenschalenbedingung bedeutet, daß

$$k^{--}k^{++} = 0 \quad \text{und} \quad k^{+-}k^{-+} = 0 \; , \tag{7.5.10}$$

sind zusätzlich die Linearkombinationen

$$
\begin{aligned}
&- 4O_2 + O_4 \\
&- 4O_3 + O_5
\end{aligned}
\tag{7.5.11}
$$

enthalten.

Man beachte, daß

$$\epsilon^{--}k^{++} + \epsilon^{-+}k^{+-} = 0 \tag{7.5.12}$$

zusammen mit der Massenschalenbedingung die letzten vier Zeilen in $[Q, O_6]$ verschwinden läßt. Jedoch ist nun $\epsilon \not\parallel k$, so daß aufgrund der Koeffizienten in den ersten beiden Zeilen von $[Q, O_6]$ der Operator O_6 wiederum nicht zum BRST-invarianten Unterraum gehört.

Die Kandidaten in $(0,-1,-2)$ sind:

$$\begin{aligned}
U_1 &= c\partial\xi^+ e^{-2\varphi^- -2\varphi^+} \\
U_2 &= c\psi^{++}\psi^{+-}\partial\xi^- e^{-\varphi^- -3\varphi^+} \\
U_3 &= c'c(\epsilon^- \cdot \psi^+)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-2\varphi^- -3\varphi^+} \\
U_4 &= \tilde{c}c(\epsilon^- \cdot \psi^+)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-2\varphi^- -3\varphi^+} \\
U_5 &= c'c\tilde{c}\partial\xi^+\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
U_6 &= c'c\tilde{c}\psi^{++}\psi^{+-}\partial\xi^+\partial\xi^-\partial^2\xi^- e^{-2\varphi^- -4\varphi^+}
\end{aligned} \tag{7.5.13}$$

Die Anwendung von Q auf dieses System und der anschließene Koeffizientenvergleich mit den gefundenen BRST-invarianten Operatoren O_1 und (7.5.11) müssen ebenfalls in Komponenten durchgeführt werden. Man findet, daß die zusätzlichen Lösungen (7.5.11) immer BRST-trivial sind, während O_1 für den Fall $\epsilon \not\parallel k$ nicht im Bild von $[Q,(0,-1,-2)]$ liegt, d.h. nichttrivial ist.

Dies ist konsistent mit der Picture-Changing-Abbildung von $(1,-1,-2)$ nach $(1,-1,-1)$:

$$\begin{aligned}
X^-(O_1) &= 2i(\epsilon^- \cdot \kappa^+)e^{-\varphi^- -\varphi^+} \\
X^-(O_2) &= -4e^{-\varphi^- -\varphi^+} \\
X^-(O_3) &= -4e^{-\varphi^- -\varphi^+} \\
X^-(O_4) &= 0 \\
X^-(O_5) &= 0 \\
X^-(O_6) &= 0
\end{aligned} \tag{7.5.14}$$

Außerdem erhält man $X^-(U_i) = 0 \quad ; i = 1,\ldots,6$, was darauf hindeutet, daß der Sektor $(0,-1,-2)$, wie man erwarten würde, keine Kohomologie enthält.

Diese Ergebnisse unterstützen die These, daß sich aufgrund von Symmetriebetrachtungen im Raum der Picture-Zahlen (Spiegelung an der $(-1,-1)$-Achse) BRST-Repräsentanten in subkanonischen Bildern aus ihren "superkanonischen Spiegelbildern" konstruieren lassen. Hier führt dies auf die Konstruktion der vollständigen Kohomologie in $(-1,-2)$ aus der Bildung von vier Vertex-Operatoren analog zu den im Bild $(0,-1)$ (Gl.7.4.2) gefundenen Repräsentanten:

$$\begin{aligned}
(1,-1,-2) &= c(\epsilon^- \cdot \psi^+)e^{-\varphi^- -2\varphi^+} \\
(2,-1,-2) &= cc'(\epsilon^- \cdot \psi^+)e^{-\varphi^- -2\varphi^+} \\
(2,-1,-2)' &= c\tilde{c}(\epsilon^- \cdot \psi^+)e^{-\varphi^- -2\varphi^+} \\
(3,-1,-2) &= \tilde{c}cc'(\epsilon^- \cdot \psi^+)e^{-\varphi^- -2\varphi^+} \quad ,
\end{aligned} \tag{7.5.15}$$

nun jedoch mit $\epsilon \not\parallel k$. Für dieses System wurde die BRST-Invarianz explizit gezeigt, ebenso wie die richtige Picture-Changing-Eigenschaft $X^-(v,-1,-2) = (v,-1,-1)$. Die BRST-Invarianz von $(v,-1,-2)$ beweist jedoch noch nicht die Nichttrivialität von $(v+1,-1,-2)$, da hier, anders als im kanonischen Bild, der Sektor mit $(v,-1,-2)$ mehr Operatoren enthält, als nur den gefundenen Repräsentanten. Setzt man allerdings an dieser Stelle voraus, daß Picture-Changing *nur* BRST-Klassen auf BRST-Klassen abbildet, so hat man hiermit die gewünschten Repräsentanten gefunden.

Betrachtet man das Bild $(-2,-2)$, so findet man, daß sehr viel mehr Operatoren aufgrund der "richtigen" Quantenzahlen die Physikalitätsbedingungen erfüllen können. Betrachtet man die Struktur von $X^{\pm}$, so erkennt man, daß die Abbildungen X^{+-} bzw. X^{-+} die Ladung q eines Operators $e^{q\varphi}$ nur um höchstens 2 verschieben können. Daher können nur Operatoren aus $(1,-2,-2)$, die $e^{-2\varphi^- -2\varphi^+}$, $e^{-3\varphi^- -2\varphi^+}$, $e^{-2\varphi^- -3\varphi^+}$ und $e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}$ enthalten, die BRST-Klasse in $(1,-1,-1)$ "erreichen". Wie oben bereits angedeutet, wurden hier keine Vertex-Operatoren mit freien Vektoren betrachtet, was die Länge der Kandidatenliste weiter einschränkt. Die vollständigen Listen für $(0,-2,-2)$ und $(1,-2,-2)$ sind zusammen mit den Ergebnissen der Rechnungen $X^{+-}(1,-2,-2)$ und $X^{-+}(1,-2,-2)$ im Anhang abgedruckt.

Wie man sich leicht überzeugt, gibt es hier Operatoren, die durch Picture-Changing mit der BRST-Klasse $(1,-1,-1)$ verknüpft werden, z.B. gilt

$$X^{+-}(c' e^{-2\varphi^- -2\varphi^+}) = -4 c e^{-\varphi^- -\varphi^+} \ . \tag{7.5.16}$$

Jedoch ist $c' e^{-2\varphi^- -2\varphi^+}$ nicht BRST-invariant. Man zeigt durch Berechnung der Q-Kommutatoren mit allen diesen Kandidaten, daß kein einzelnes Monom sowohl das "richtige" Picture-Changing-Verhalten besitzt, als auch BRST-invariant ist.

Gesucht wird ein BRST-invarianter Unterraum des von den Operatoren $O_i \in (1,-2,-2)$ aufgespannten Raums mit nichttrivialem Picture-Changing nach $(1,-1,-1)$. Dies führt auf ein lineares Problem, da jeder der N Operatoren O_i ein unabhängiges Basiselement für Linearkombinationen darstellt. Die Ergebnisse der Berechnungen $[Q,(1,-2,-2)]$ sind Linearkombinationen von Basis-Operatoren O'_i in $(2,-2,-2)$:

$$[Q,K] = [Q, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i O_i] = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i [Q,O_i] = \sum_{i,j} \lambda_i m_{ij} O'_j \ . \tag{7.5.17}$$

Die BRST-Invarianz wird wegen der Unabhängigkeit der O'_j damit zu

$$\sum_{i,j} \lambda_i m_{ij} = 0 \ , \tag{7.5.18}$$

d.h. der Nullraum m_0^T der Matrix $m^T = (m_{ji})$ ist zu bestimmen.

Die durch die Matrix m_0^T gegebene Basis des Nullraums enthält als Basisvektoren linear unabhängige BRST-invariante Kombinationen von Vertex-Operatoren im Sektor $(1,-2,-2)$. Nichttriviales Picture-Changing induziert die Einschränkung $X^{+-}(m_{0i}^T) + X^{-+}(m_{0i}^T) = (1,-1,-1)$, die mit der BRST-Nichttrivialität der i-ten Linearkombination zusammenfallen sollte. [37] Man benötigt demnach eine weitere Abbildungsmatrix u, welche die Abbildung Q vom Raum $(0,-2,-2)$ auf den Bildraum $(1,-2,-2)$ beschreibt. Die Matrix u kann außerdem dazu herangezogen werden, den Sektor $(0,-2,-2)$ auf BRST-invariante Strukturen zu untersuchen.
Die Analyse konnte für die vorliegende Arbeit nicht mehr vollständig durchgeführt werden. Es müßte hier eine noch sorgfältigere Auswertung der Q-Kommutatoren, einschließlich völlig konsistenter Behandlung von Vorzeichen und Zahlenfaktoren, erfolgen. Dies macht insbesondere die Einführung von Kozykel-Faktoren in die Berechnungen nötig.
Die bisherigen Ergebnisse zeigen jedoch unabhängig von den erwähnten Schwierigkeiten, daß nichttriviale Kohomologie mit nichttrivialem Picture-Changing-Verhalten im Sektor $(1,-2,-2)$ existiert. Es wurden vier nichttriviale Linearkombinationen gefunden, zwischen denen noch keine Äquivalenzrelation etabliert werden konnte. Der Operator mit der einfachsten Struktur in diesem Unterraum ist gegeben durch

$$\tilde{c}cc' e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} \left\{ (\partial Z^+ \cdot \partial Z^-) \partial\xi^+ \partial\xi^- + \frac{1}{3} \left(\partial\xi^+ \partial^3\xi^- + \partial^3\xi^+ \partial\xi^- \right) - \partial^2\xi^+ \partial^2\xi^- \right\} . \quad (7.5.19)$$

[37] Die Tabelle zeigt eine Asymmetrie zwischen den “Abbildungswegen” X^{+-} und X^{-+}. Eine konsistente Behandlung legt nahe, zwischen beiden Wegen zu symmetrisieren.

8 Resumée

Bei der BRST-Analyse des Hilbertraums des N=2-String auf der Basis von Vertex-Operatoren stellt sich die Theorie als eine "einfache" Erweiterung der konformen Feldtheorie des bosonischen String um zusätzliche Felder dar. Die Graduierung des Hilbertraums durch die mit Q vertauschenden Operatoren liefert gute Möglichkeiten zur Erfassung aller Darstellungen physikalischer Anregungen der Theorie. Die Konsistenz dieses Verfahrens wurde bei der Suche nach der Kohomologie in verschiedenen Bildern des Neveu-Schwarz-Sektors des Hilbertraums bestätigt. Nichttriviale physikalische Vertex-Operatoren können direkt oder durch Picture-Changing prinzipiell in allen Bildern konstruiert werden.

Die bekannten Vertex-Operatoren in den Bildern $(0,-1)$ und $(-1,0)$ wurden als physikalisch bestätigt und die Konsistenz mit Picture-Changing wurde gezeigt. Den bisher bekannten Vertex-Operatoren im Bild $(0,0)$ wurden die Repräsentanten der fehlenden Sektoren hinzugefügt.

Symmetriebetrachtungen im Raum der Picture-Zahlen können für weitere Analysen hilfreich sein; vielleicht sind sie die Basis für eine (zu entwickelnde) Abbildungs-Vorschrift, die die Funktion der fehlenden inversen Picture-Changing-Operatoren übernehmen kann.

In Physikalitätsbedingungen findet man beim N=2-String wie beim bosonischen String Einschränkungen an die Polarisationen wieder. Aufgrund des nur $(2+2)$-dimensionalen Zielraums gibt es hierfür nur zwei freie Richtungen, daher sind solche Bedingungen hier von besonders einfacher Struktur. Für weitere Analysen, z.B. für eine vollständige Analyse in $(-2,-2)$, könnte sich die Einführung einer geeigneten Basis, die diese Tatsache von vornherein berücksichtigt als günstig herausstellen. Die Rolle der verschiedenen physikalischen Polarisationen in verschiedenen Bildern ist jedoch noch genauer zu klären.

Weiter wäre zu prüfen, ob Einschränkungen, die man aus der vorgegebenen Struktur der nichtverschwindenden Wechselwirkungsamplituden erhält, eine Vereinfachung der Konstruktion physikalischer Operatoren bringen.

9 Anhang

9.1 Kandidatenliste für $(0, -2, -2)$

$$
\begin{gathered}
e^{-2\varphi^- -2\varphi^+} \\
\tilde{b}ce^{-2\varphi^- -2\varphi^+} \\
cc'''\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c'c''\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{c}''\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c'\tilde{c}'\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
\tilde{c}c''\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{b}c'\tilde{c}'\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{b}c''\tilde{c}\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{gathered} \qquad (A1)
$$

$$
\begin{gathered}
cc'(\partial Z^+ \cdot \partial Z^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{c}(\partial Z^+ \cdot \partial Z^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
cc'(\psi^- \cdot \partial\psi^+ + \partial\psi^- \cdot \psi^+)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{c}(\psi^- \cdot \partial\psi^+ + \partial\psi^- \cdot \psi^+)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
cc'(\psi^+ \cdot \psi^-)\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
cc'(\psi^+ \cdot \psi^-)\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{c}(\psi^+ \cdot \psi^-)\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{c}(\psi^+ \cdot \psi^-)\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
cc'\partial\varphi^+\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
cc'\partial\varphi^-\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
cc'\partial\varphi^-\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{c}\partial\varphi^+\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{c}\partial\varphi^-\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} \\
c\tilde{c}\partial\varphi^-\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{gathered} \qquad (A2)
$$

$$
\begin{aligned}
&c(\psi^+\cdot\partial Z^-)\partial\xi^- e^{-2\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c(\psi^-\cdot\partial Z^+)\partial\xi^+ e^{-3\varphi^- -2\varphi^+}\\
&\tilde{c}'\tilde{c}\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{b}c''c'c\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{b}c\tilde{c}'\tilde{c}\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{aligned}
\tag{A3}
$$

$$
\begin{aligned}
&cc''\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&cc''\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&cc''(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{c}c'\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{c}c'\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{c}c'(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{aligned}
\tag{A4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}'c\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{c}'c\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{c}'c(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{b}c'c\tilde{c}\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{b}c'c\tilde{c}\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{b}c'c\tilde{c}(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{aligned}
\tag{A5}
$$

$$
\begin{aligned}
&cc''\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&cc''\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{c}c'\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{c}c'\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{aligned}
\tag{A6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}'c\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{c}'c\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{b}c'c\tilde{c}\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&\tilde{b}c'c\tilde{c}\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{aligned}
\tag{A7}
$$

$$
\begin{aligned}
&cc'\partial^2\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c\tilde{c}\partial^2\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&cc'\partial\xi^+\partial^3\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&cc'\partial^3\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c\tilde{c}\partial\xi^+\partial^3\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c\tilde{c}\partial^3\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{aligned}
\tag{A8}
$$

$$
\begin{aligned}
&cc'\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&cc'\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&cc'(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c\tilde{c}\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c\tilde{c}\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c\tilde{c}(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{aligned}
\tag{A9}
$$

$$
\begin{aligned}
&cc'\partial\varphi^+\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&cc'\partial\varphi^-\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&cc'(\psi^+\cdot\psi^-)\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c\tilde{c}\partial\varphi^+\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c\tilde{c}\partial\varphi^-\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}\\
&c\tilde{c}(\psi^+\cdot\psi^-)\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+}
\end{aligned}
\tag{A10}
$$

9.2 Kandidatenliste für $(1,-2,-2)$

In der Liste bedeutet die Notation "$A \quad X:(a,b)$", daß für einen Operator A berechnet wurde:

$$X^{+-}(A) = a\,(1,-1,-1) = a\,c\,e^{-\varphi^- - \varphi^+}$$
$$X^{-+}(A) = b\,(1,-1,-1) = b\,c\,e^{-\varphi^- - \varphi^+}$$

mit komplexen Zahlenfaktoren (a,b).

$$\begin{aligned}
c' e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} &\quad X:(-4,-4)\\
c\tilde{c}\tilde{b} e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} &\quad X:(0,0)\\
c\partial\varphi^- e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} &\quad X:(0,0)\\
c\partial\varphi^+ e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} &\quad X:(0,0)\\
c(\psi^+\cdot\psi^-) e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} &\quad X:(0,0)\\
\tilde{c} e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} &\quad X:(-4,4)\\
c' c\tilde{b} e^{-2\varphi^- - 2\varphi^+} &\quad X:(0,0)
\end{aligned} \tag{A11}$$

$$\begin{aligned}
cc'\partial\xi^-(\psi^+\cdot\partial Z^-)e^{-2\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(32,0)\\
cc'\partial\xi^+(\psi^-\cdot\partial Z^+)e^{-3\varphi^- - 2\varphi^+} &\quad X:(0,32)\\
\tilde{c}c\partial\xi^-(\psi^+\cdot\partial Z^-)e^{-2\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(-32,0)\\
\tilde{c}c\partial\xi^+(\psi^-\cdot\partial Z^+)e^{-3\varphi^- - 2\varphi^+} &\quad X:(0,32)
\end{aligned} \tag{A12}$$

$$\begin{aligned}
cc'c'''\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(-96,96)\\
cc'c''\tilde{b}\tilde{c}\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(0,0)\\
cc'c''\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(32,-32)\\
cc'c''\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(32,-32)\\
cc'c''(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(0,0)\\
\tilde{c}\tilde{c}'c'\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(0,0)\\
\tilde{c}\tilde{c}'c\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(-32,0)\\
\tilde{c}\tilde{c}'c\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(0,32)\\
\tilde{c}\tilde{c}'c(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- - 3\varphi^+} &\quad X:(0,0)
\end{aligned} \tag{A13}$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}c'''\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(96,96)\\
&\tilde{c}c'c''\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&\tilde{c}'cc''\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&\tilde{c}''cc'\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(32,32)\\
&\tilde{c}c'\tilde{b}\tilde{c}'\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&\tilde{c}\tilde{c}''c\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(32,-32)
\end{aligned}
\tag{A14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}c'(\partial\psi^-\cdot\psi^+ + \psi^-\cdot\partial\psi^+)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&\tilde{c}c'(\partial Z^+\cdot\partial Z^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&\tilde{c}c'\partial\varphi^+\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,-128)\\
&\tilde{c}c'\partial\varphi^-\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-32,-64)\\
&\tilde{c}c'\partial\varphi^+\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-32,-32)\\
&\tilde{c}c'(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&\tilde{c}c'(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)
\end{aligned}
\tag{A15}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}c''(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&\tilde{c}c''\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-32,-32)\\
&\tilde{c}c''\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-32,-32)\\
&\tilde{c}'cc'(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&\tilde{c}'cc'\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,-32)\\
&\tilde{c}'cc'\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-32,0)
\end{aligned}
\tag{A16}
$$

$$
\begin{aligned}
&c''c'c\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,-64)\\
&c''c'c\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(64,0)\\
&c\tilde{c}'\tilde{c}\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,64)\\
&c\tilde{c}'\tilde{c}\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-64,0)\\
&c'c\tilde{c}'\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,-64)\\
&c'c\tilde{c}'\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-64,0)\\
&c''c\tilde{c}\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,-64)\\
&c''c\tilde{c}\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-64,0)
\end{aligned}
\tag{A17}
$$

$$
\begin{aligned}
&cc'\tilde{c}\partial\xi^+\partial^3\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,384)\\
&cc'\tilde{c}\partial^3\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(384,0)\\
&cc'\tilde{c}\partial^2\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&cc'\tilde{c}(\psi^+\cdot\psi^-)\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&cc'\tilde{c}(\psi^+\cdot\psi^-)\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,0)\\
&cc'\tilde{c}\partial\varphi^+\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,-128)\\
&cc'\tilde{c}\partial\varphi^+\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-64,0)\\
&cc'\tilde{c}\partial\varphi^-\partial\xi^+\partial^2\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,-64)\\
&cc'\tilde{c}\partial\varphi^-\partial^2\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(-128,0)\\
&cc'\tilde{c}\partial^2\varphi^+\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(0,-128)\\
&cc'\tilde{c}\partial^2\varphi^-\partial\xi^+\partial\xi^- e^{-3\varphi^- -3\varphi^+} && X:(64,-192)
\end{aligned}
\tag{A18}
$$

9.3 Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit eigenständig und ausschließlich unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

9.4 Danksagung

Ich danke Herrn Prof. O. Lechtenfeld für seine Freundlichkeit, seine unerschöpfliche Kondition und Geduld bei gemeinsamen Rechnungen und Überlegungen, sowie bei engagierten, lehrreichen Vorträgen und seine (im wahrsten Sinne des Wortes) stets offene Tür. Die Arbeit mit Herrn Lechtenfeld war geeignet, einen "Flavour" von der großen weiten Welt der theoretischen Physik zu bekommen. Einige weitere Menschen haben durch ihre Unterstützung dazu beigetragen, daß diese Arbeit zustandekommen konnte. Ihnen sei durch die folgenden Worte gedankt. Jan Bischoff, Sergei Ketov und viele weitere Mitarbeiter des ITP waren stets bereit, mir fachlichen Rat, aufmunternde Worte, Tee und vieles andere zukommen zu lassen. Akiro Fujitsu stellte mir freundlicherweise sein Mathematica-Paket "ope.math" zur Verfügung. Ebensolches tat Kris Thielemans mit seinen neuesten Versionen von "opedefs.m" und "vertex.m", bei ihm möchte ich mich besonders für das Interesse an meiner Aufgabenstellung und seine freundliche Beratung bedanken. Vielen Dank auch an die Mitarbeiter des RRZN Hannover, die mir bei der Benutzung von Uni-Datennetz und Internet geholfen haben. Mein größter Dank jedoch gilt meiner Freundin Friederike Holz, die ein Jahr lang alle menschlichen Höhen und Tiefen, welche mit dieser Arbeit verbunden waren, tapfer ertragen hat, und die unermüdlich war, wenn es darum ging, mein seelisches Gleichgewicht wiederherzustellen.

Literatur

[1] J. Bischoff, S. V. Ketov und O. Lechtenfeld, Nucl. Phys. **B438** (1995) 373

[2] K. Thielemans, *An Algorithmic Approach to Operator Product Expansions, W-Algebras and W-Strings*, Dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, (1994).

[3] A. Fujitsu, Computer Phys. Comm. **79** (1994) 78.

[4] C.B. Thorn, Nucl. Phys. **B286** (1987) 61.

[5] M.B Green, J.H. Schwarz und E. Witten, *Superstring Theory*, Bände 1 und 2, Cambridge University Press (1987).

[6] M. Kaku, *Introduction to Superstrings*, Springer (1988).

[7] S. V. Ketov, *Conformal Field Theory*, World Scientific (1995).

[8] P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*, Les Houches lectures 1988.

[9] H. Lasaar, Diplomarbeit am ITP, Uni Hannover, 1994.

[10] D. Friedan, E. Martinec und S. Shenker, Nucl. Phys. **B271** (1986) 93.

[11] V.A. Kostelecky, O. Lechtenfeld, W. Lerche, S. Samuel und S. Watamura, Nucl. Phys. **B288** (1987) 173.

[12] H. Ooguri, und C. Vafa, Nucl. Phys. **B361** (1991) 469.

[13] J. Bienkowska, Phys. Lett. **B281** (1992) 59.

[14] H.Lü und C.N. Pope *BRST-Quantisation of the N=2 String* hep-th/9411101

[15] S. V. Ketov und O. Lechtenfeld, Phys. Lett. **B353** (19() 1995) 463

[16] D. Friedan, *Notes on String Theory and Two Dimensional Conformal Field Theory* in *Unified String Theories*, M.B. Green und D.J. Gross (Herausg.), World Scientific (1986).

[17] F. Gliozzi, D. Olive and J. Scherk, Nucl. Phys. **B122** (1977) 253.

[18] E. S. Fradkin und A. A. Tseytlin, Phys. Lett. **B106** (1981) 63.

[19] A. D'Adda und F. Lizzi, Phys. Lett. **B191** (1987) 85.

[20] S. V. Ketov, O. Lechtenfeld und A. J. Parkes, Phys. Rev. **D51** (1995) 2872

[21] E. Witten, Nucl. Phys. **B202** (1982) 253.

[22] H. Ooguri und C. Vafa, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1389.

[23] O. Lechtenfeld, talk at the 28th Intern. Symposium on the Theory of Elementary Particles, Wendisch-Rietz (1994), hep-th/9412242

[24] N. Markus, *A Tour through N=2 Strings*, Tel-Aviv preprint TAUP-2002-92, November 1992, hep-th/9211059.

[25] P. Goddard und D. Olive, *Kac Moody and Virasoro Algebras.*

[26] J. Wess und J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press (1983).

[27] J. Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1992).

[28] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific (1986).

[29] W. Siegel, *Introduction to String Field Theory*, World Scientific (1988).

[30] M. Abell und J. Braselton *Mathematica by Example*, AP Professional (1993).

[31] N. Blachman, *Mathematica griffbereit: Version 2*, Vieweg (1993).

[32] S. Wolfram, *Mathematica, A System for doing Mathematics by Computer*, Addison Wesley (1992).

[33] J. H. Schwarz, Andrejewski-Vorlesungen, Vorträge in Berlin 1994, unveröffentlicht.

[34] J. Scherk, *An Introduction to the theory of dual models and strings*, Rev. Mod. Phys. Vol.47 (1975) 123.