Formelsammlung Quantenfeldtheorie

Norbert Dragon

1 Relativistische Quantenmechanik

Relativistisch ist Quantenmechanik, in deren Hilbertraum eine unitäre Darstellung der Überlagerung derjenigen Poincaré-Transformationen existiert, die stetig mit der Identität zusammenhängen. Dabei erzeugt der Hamiltonoperator $H = P^0$ die wechselwirkungsfreie Zeitentwicklung.

Poincaré- und Lorentztransformationen

Poincaré-Transformationen $T_{\Lambda,a}$ sind linear inhomogene Transformationen der Raumzeit

$$T_{\Lambda,a} : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ x & \mapsto & x' = \Lambda x + a \end{cases} . \tag{1}$$

Dabei lesen wir x', x und $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ als Spaltenvektoren, auch wenn wir sie im laufenden Text des Druckbilds wegen als Zeilenvektoren schreiben. Der Vierervektor a bewirkt eine Verschiebung oder Translation, die 4×4 Matrix Λ bezeichnet definitionsgemäß eine Lorentztransformation, also eine Transformation, die Skalarprodukte

$$u \cdot v = u^0 v^0 - u^1 v^1 - u^2 v^2 - u^3 v^3 \tag{2}$$

aller Vierervektoren u und v invariant läßt

$$(\Lambda u) \cdot (\Lambda v) = u \cdot v \ , \quad \forall\, u, v \ . \tag{3}$$

Weil das Skalarprodukt in Matrixschreibweise die Form

$$u \cdot v = u^T \eta v \tag{4}$$

hat, wobei η die Matrix

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ist, erfüllen Lorentztransformationen die Matrixgleichung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \ . \tag{6}$$

Zum Beispiel ist in einer Zerlegung in $(1+3) \times (1+3)$-Blöcken

$$L_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{\vec{v}^T}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} & \mathbf{1}_{3\times 3} + \frac{a(v)}{v^2}\vec{v}\vec{v}^T \end{pmatrix} \ , \quad \text{mit} \quad a(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \ . \tag{7}$$

die drehungsfreie Lorentztransformation, die die Weltlinie $\Gamma : s \mapsto x(s) = (s, 0, 0, 0)$ eines im Ursprung ruhenden Teilchens auf die Weltlinie $\Gamma' : s \mapsto x'(s) = \frac{s}{\sqrt{1-v^2}}(1, \vec{v})$ eines Teilchens abbildet, das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$, $\vec{v}^2 < 1$, bewegt.

Die drehungsfreie Lorentztransformation $L_{\vec{v}}$ bildet den Vektor $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ auf $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1, \vec{v})$ ab und läßt die Vektoren w invariant, die senkrecht auf e_0 und $L_{\vec{v}}\, e_0$ stehen, also nur einen räumlichen Anteil haben, der zudem senkrecht auf $\vec{v}$ steht.

Hier und im folgenden verwenden wir einfachheitshalber Maßsysteme mit $c = 1$.

2 Einteilchenzustände

Das Maß

$$\tilde{d}k = \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}} \tag{8}$$

im Skalarprodukt

$$\langle \psi \,|\, \phi \rangle = \sum_j \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2k^0}\, \psi_j^*(k)\, \phi_j(k) \ , \ k^0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \tag{9}$$

ist Lorentzinvariant,

$$\int \tilde{d}k\, f(k) = \int \tilde{d}k\, f(\Lambda\, k) \ . \tag{10}$$

Theorem von George Mackey: Jede unitäre, irreduzible Darstellung der Poincaré-Gruppe in d-Dimensionen ist unitär äquivalent zur Darstellung, die von einer irreduziblen Darstellung D der Fixpunktgruppe eines Vektors $\underline{p}$ auf seiner Massenschale $M_{m^2} \subset \mathbb{R}^d$ induziert wird. ($U(a) := U_{1,a}$, $U(\Lambda) := U_{\Lambda,0}$)

$$\big(U(a)\,\psi\big)_j(p) = e^{ip\cdot a}\,\psi_j(p) \ , \ U(a) = e^{i\,P\,a} \tag{11}$$

$m^2 > 0\, ,\ p^0 > 0 :\ M_{m^2} = \{p : p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}\} \sim \mathbb{R}^{d-1}$

$$\big(U(\Lambda)\,\psi\big)_j(\Lambda\, p) = \sum_k D_j{}^k(W(\Lambda, p))\, \psi_k(\Lambda^{-1}\, p) \tag{12}$$

Wigner-Rotation

$$W(\Lambda_2\Lambda_1, p) = W(\Lambda_2, \Lambda_1 p)\, W(\Lambda_1, p) \tag{13}$$

$$W(\Lambda, p) = L_{\Lambda p}^{-1}\, \Lambda\, L_p \tag{14}$$

$$L_p = \begin{pmatrix} \frac{p^0}{m} & \frac{\vec{p}^T}{m} \\ \frac{\vec{p}}{m} & 1 + \frac{\vec{p}\vec{p}^T}{m(p^0+m)} \end{pmatrix} \tag{15}$$

infinitesimale Transformation (antihermitesch)

$$l_{ij} = -(p^i \frac{\partial}{\partial p^j} - p^j \frac{\partial}{\partial p^i}) + \Gamma_{ij} \ , \ \Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji} = -(\Gamma_{ij})^\dagger \tag{16}$$

$$[\Gamma_{ij}, \Gamma_{kl}] = \delta_{ik}\Gamma_{jl} - \delta_{il}\Gamma_{jk} - \delta_{jk}\Gamma_{il} + \delta_{jk}\Gamma_{il} \tag{17}$$

$$l_{0i} = p^0 \frac{\partial}{\partial p^i} + \Gamma_{ik} \frac{p^k}{p^0 + m} \ \text{bis auf Äquivalenz eindeutig} \tag{18}$$

L_p ist die drehungsfreie Lorentztransformation, die den Viererimpuls $\underline{p} = (m, 0, 0, 0)$ des ruhenden, massiven Teilchens in $p = (\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \vec{p}), \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ transformiert.

Ortswellenfunktion eines skalaren Teilchens

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2k^0}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \tilde{\psi}(\vec{k}) \ , \ k^0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \tag{19}$$

$$\left(e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}}\psi\right)(\vec{x}) = \psi(\vec{x} - \vec{a}) \tag{20}$$

$$i\partial_t\psi = H\psi \tag{21}$$

$$\left(e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a} + iHa^0}\psi\right)(t, \vec{x}) = \left(e^{-\vec{a}\vec{\partial}_x - a^0\partial_t}\psi\right)(t, \vec{x}) = \psi(t - a^0, \vec{x} - \vec{a}) = \psi(x - a) \tag{22}$$

Freie Zeitentwicklung $\Psi(t) = e^{-i\,P^0 t}\Psi(0)$ nicht lokalisierbar, denn

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{x}) &= \int d^3y\, K(t, \vec{x} - \vec{y})\, \psi(0, \vec{y}) \ , \\ \text{mit } K(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i(k^0 t - \vec{k}\cdot\vec{x})} = 2i\partial_t\Delta_+(t, \vec{x}) \\ \Delta_+(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} e^{-i\,k\,x} \\ x \text{ raumartig}, x^2 < 0: \ \Delta_+(x) &= \frac{m}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} K_1(m\sqrt{-x^2}) \end{aligned} \tag{23}$$

K_1 Hankel-Funktion, fällt für große Argumente exponentiell ab.

3 Quantenfelder

Transformation von Feldern (wie Punkte, nicht wie Abbildungen)

$$\begin{aligned} U_{\Lambda,a}\phi_\alpha(x)U_{\Lambda,a}^{-1} &= \sum_\beta D^{-1}{}_\alpha{}^\beta(\Lambda)\, \phi_\beta(\Lambda x + a) \\ U_{\Lambda,a}\phi^\dagger_{\dot\alpha}(x)U_{\Lambda,a}^{-1} &= \sum_{\dot\beta} D^{*-1}{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}(\Lambda)\, \phi^\dagger_{\dot\beta}(\Lambda x + a) \end{aligned} \tag{24}$$

insbesondere

$$U_a \phi_\alpha(x) U_a^{-1} = \phi_\alpha(x+a) \tag{25}$$

Heisenbergsche Bewegungsgleichungen $\frac{\partial}{\partial a^m}\Big|_{a=0}$

$$[iP_m, \phi_\alpha(x)] = \partial_m \phi_\alpha(x) \ , \ [iP_m, \phi^\dagger_{\dot\alpha}(x)] = \partial_m \phi^\dagger_{\dot\alpha}(x) \tag{26}$$

Fourierdarstellung von Operatoren

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{i\,k\,x}\, \tilde\phi_\alpha(k) \\ \phi^\dagger_{\dot\alpha}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{i\,k\,x}\, (\tilde\phi)^\dagger_{\dot\alpha}(-k) \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} U_\Lambda \tilde\phi_\alpha(k) U_\Lambda^{-1} &= D^{-1}{}_\alpha{}^\beta(\Lambda)\tilde\phi_\beta(\Lambda k) \ , \\ U_\Lambda \tilde\phi^\dagger_{\dot\alpha}(k) U_\Lambda^{-1} &= D^{*-1}{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}(\Lambda)\tilde\phi^\dagger_{\dot\beta}(\Lambda k) \\ U_a \tilde\phi_\alpha(k) U_a^{-1} &= e^{i\,k\,a}\tilde\phi_\alpha(k) \ . \end{aligned} \tag{28}$$

$$[P_m, \tilde\phi_\alpha(k)] = k_m \tilde\phi_\alpha(k) \ , \ [P_m, (\tilde\phi)^\dagger_{\dot\alpha}(k)] = -k_m (\tilde\phi)^\dagger_{\dot\alpha}(k) \tag{29}$$

Poincaré-invariantes Vakuum Ω,

$$P^m\Omega = 0 \ , \ M^{mn}\Omega = 0 \ , \ U_\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega_{mn}M^{mn}} \ , \ \Lambda = e^{\omega\eta} \ , \ \omega_{mn} = -\omega_{nm} \ . \tag{30}$$

Die Fourieranteile von ϕ_α fügen dem Vakuum die Energie und den Impuls eines Teilchens hinzu und nehmen von Einteilchenzuständen die Energie und den Impuls weg: $\phi_\alpha = \phi^-_\alpha + \phi^+_\alpha$, Erzeuger $\tilde\phi^-_\alpha(k)$, negativer Frequenzanteil, und Vernichter $\tilde\phi^+_\alpha(k)$, positiver Frequenzanteil,

$$\phi_\alpha(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2k^0}\, e^{i\,k\,x}\tilde\phi^-_\alpha(k) + e^{-i\,k\,x}\tilde\phi^+_\alpha(k) \tag{31}$$

Diese Felder erfüllen die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)\phi_\alpha(x) = 0 \ . \tag{32}$$

Von den Fouriertransformierten werden (falls D die Selbstdarstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ ist) u- und v-Spinoren so abgespaltet, daß sie Basiszustände der induzierten Darstellung mit Spin-1/2 erzeugen.

$$\phi_\alpha(x) = \sum_\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2k^0}\, e^{i\,k\,x} v_{\alpha\sigma}(\vec k)\, d^\dagger_\sigma(\vec k) + e^{-i\,k\,x} u_{\alpha\sigma}(\vec k)\, b_\sigma(\vec k) \tag{33}$$

Aus (2.14) folgt ($\underline{p} = (m,0,0,0)$)

$$U_{L_p} \tilde\phi^-_\alpha(\underline{p}) U_{L_p}^{-1} = D_\alpha^{-1\,\beta}\,(L_p)\tilde\phi^-_\beta(p) \tag{34}$$

oder

$$\tilde{\phi}^-_\alpha(p) = D_\alpha{}^\beta(L_p)\,\sqrt{m}\,d^\dagger_\beta(p)\ ,\ \sqrt{m}\,d^\dagger_\alpha(p) = U_{L_p}\tilde{\phi}^-_\alpha(\underline{p})U^{-1}_{L_p} \tag{35}$$

wobei $d^\dagger_\alpha(p)$ einen Basiszustand der Wigner-Darstellung erzeugt. Der Normierungsfaktor $\sqrt{m}$ ist hier so abgespaltet, daß später die Notation nicht mehr verändert werden muß und der Grenzfall $m \to 0$ existiert.

$$v_{\alpha\sigma}(\vec{k}) \approx \sqrt{m}\,D_\alpha{}^\sigma(L_k) \qquad \text{bis auf Identifizierung der Spinbasis} \tag{36}$$

Insbesondere ist die zu L_p gehörige SL$(2,\mathbb{C})$-Matrix ($D(L_p)\,m\,D(L_p)^\dagger = p_n\sigma^n$)

$$D(L_p) = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0+m)}}(m + p^0 - \vec{p}\vec{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p^0)}}(m+\hat{p})\ ,\ \hat{p} = p_n\sigma^n\ . \tag{37}$$

Ebenso folgt

$$\tilde{\phi}^{+\,\dagger}_{\dot\alpha}(p) = D^{*}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}(L_p)\,\sqrt{m}\,b^\dagger_{\dot\beta}(p)\ ,\ \sqrt{m}\,b^\dagger_{\dot\alpha}(p) \approx U_{L_p}\tilde{\phi}^{+\,\dagger}_{\dot\alpha}(\underline{p})U^{-1}_{L_p} \tag{38}$$

$$u_{\alpha\sigma}(\vec{k}) \approx \sqrt{m}\,D_\alpha{}^\sigma(L_k) \qquad \text{bis auf Identifizierung der Spinbasis} \tag{39}$$

Drehimpulsoperatoren $\vec{J}$ erzeugen Drehungen, zum Beispiel eine Drehung R um Achse $\vec{n}$ und Winkel γ

$$U_R = e^{-i\gamma\vec{n}\vec{J}}\ ,\ U_R\tilde{\phi}_\alpha(p)U_R^{-1} = D^{-1\,\beta}_\alpha(R)\tilde{\phi}_\beta(Rp) \tag{40}$$

Da

$$D_\alpha{}^\beta(R) = \cos\frac{\gamma}{2} - i\sin\frac{\gamma}{2}\,\vec{n}\vec{\sigma} \tag{41}$$

folgt für $p = \underline{p}$ durch Differenzieren bei $\gamma = 0$

$$[-i\vec{n}\vec{J}, d^\dagger_\alpha] = \frac{i}{2}\vec{n}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}\,d^\dagger_\beta \tag{42}$$

also

$$[J^k, d^\dagger_\alpha] = -\frac{1}{2}\sigma^k_{\alpha\beta}\,d^\dagger_\beta\ ,\ [J^k, b_\alpha] = -\frac{1}{2}\sigma^k_{\alpha\beta}\,b_\beta \tag{43}$$

und durch hermitesche Adjunktion

$$[J^k, b^\dagger_{\dot\alpha}] = \frac{1}{2}\sigma^{k\,*}_{\dot\alpha\dot\beta}\,b^\dagger_{\dot\beta} \tag{44}$$

Es erzeugen also $d^\dagger_2(\underline{p})$ und $b^\dagger_1(\underline{p})$ aus dem Vakuum Teilchenzustände in Ruhe mit Spin in z-Richtung nach oben. Durch Absteigen erhält man die Erzeuger mit Spin nach unten

$$\begin{aligned} [J_-, d^\dagger_2] &= -\frac{1}{2}(\sigma^1 + i\sigma^2)_{2\beta}\,d^\dagger_\beta = -d^\dagger_1\ , \\ [J_-, b^\dagger_1] &= \frac{1}{2}(\sigma^{1\,*} + i\sigma^{2\,*})_{1\dot\beta}\,b^\dagger_{\dot\beta} = b^\dagger_2 \end{aligned} \tag{45}$$

Wählt man als als ersten Basiszustand den Zustand mit Spin nach oben und als zweiten Zustand denjenigen, den man durch Absteigen erhält, so gilt

$$v_{\alpha\sigma}(\vec{p}) = -\frac{\big((m+\hat{p})\epsilon\big)_{\alpha\sigma}}{\sqrt{2(p^0+m)}}\ ,\ u_{\alpha\sigma}(\vec{p}) = \frac{(m+\hat{p})_{\alpha\sigma}}{\sqrt{2(p^0+m)}}\ . \tag{46}$$

4 Dirac-Feld und Clifford-Algebra

Das zweikomponentige Feld $\phi_\alpha(x)$ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung. Sie kann durch Einführung des Feldes

$$\bar{\chi} = \frac{i}{m}\bar{\sigma}^m \partial_m \phi \tag{47}$$

als Differentialgleichungssystem erster Ableitungsordnung für den Dirac-Spinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \tag{48}$$

geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^m \partial_m \\ i\bar{\sigma}^m \partial_m & -m \end{pmatrix} \Psi = 0 \ . \tag{49}$$

Dies ist die Dirac-Gleichung

$$\left(i\gamma^m \partial_m - m\right)\Psi = 0 \ . \tag{50}$$

Die dabei auftretenden Matrizen $\bar{\sigma}^m$ hängen mit den Pauli-Matrizen durch Hochziehen der Indizes und Transponieren zusammen

$$(\bar{\sigma})^{m\,\dot{\alpha}\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \epsilon^{\beta\delta} \sigma^m_{\delta\dot{\gamma}} \tag{51}$$

$$\bar{\sigma}^0 = 1 \ , \ \bar{\sigma}^1 = -\sigma^1 \ , \ \bar{\sigma}^2 = -\sigma^2 \ , \ \bar{\sigma}^3 = -\sigma^3 \ . \tag{52}$$

und genügen den Relationen

$$\sigma^m \bar{\sigma}^n + \sigma^n \bar{\sigma}^m = 2\eta^{mn} \ , \bar{\sigma}^m \sigma^n + \bar{\sigma}^n \sigma^m = 2\eta^{mn} \ , \tag{53}$$

Daher erfüllen die Gamma-Matrizen

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & \end{pmatrix} \tag{54}$$

die Dirac-Algebra (Clifford-Algebra)

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = 2\,\eta^{mn}\,1 \tag{55}$$

wobei die geschweiften Klammern den Antikommutator bezeichnen $\{A, B\} = AB + BA$. Durch Basiswahl können die Gamma-Matrizen unitär gewählt werden. Je zwei irreduzible Darstellungen dieser Algebra sind in Raumzeiten mit gerader Dimension $d = 2k$ $(m, n \in \{0, 1 \ldots d-1\}$ einander äquivalent. Daher gibt es für jede Darstellung Matrizen A und C, sodaß

$$A\gamma^m A^{-1} = \gamma^{m\,\dagger} \ , \ C\gamma^m C^{-1} = -\gamma^{m\,T} \ , \tag{56}$$

und für jede Lorentztransformation Λ gibt es Matrizen $S(\Lambda)$, die

$$\Lambda^m{}_n \gamma^n = S(\Lambda)^{-1} \gamma^m S(\Lambda) \tag{57}$$

erfüllen, denn auch $\gamma^\dagger$, $-\gamma^T$ und $\Lambda^m{}_n\gamma^n$ stellen die Dirac-Algebra dar. Genauer gesagt ist Λ eine Darstellung der Spin-Gruppe, die aus Produkten von Matrizen der Form

$$S = e^{\frac{1}{8}[\gamma^m,\gamma^n]\omega_{mn}} \ , \ \omega_{mn} = -\omega_{nm} \in \mathbb{R} \ , \ \Lambda = e^{\omega\eta} \tag{58}$$

besteht. Die Spin-Gruppe wirkt reduzibel und läßt die Eigenräume von

$$\hat{\gamma} = (-i)^{\frac{d}{2}+1}\gamma^0\gamma^1\dots\gamma^{d-1} \ , \ \hat{\gamma}^2 = 1 \tag{59}$$

invariant. Eine ausführliche Liste der Eigenschaften der Gamma-Matrizen enthält [3]. Insbesondere heißt in $d = 4$-Dimensionen

$$\hat{\gamma} = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{60}$$

Da $\hat{\gamma}$ mit allen Gamma-Matrizen antivertauscht, ist jede Darstellung der $d = 2k$-Dirac-Algebra auch eine Darstellung für $d = 2k+1$ mit $\gamma^d = i\hat{\gamma}$ oder $\gamma^d = -i\hat{\gamma}$. Diese beiden Darstellungen sind inäquivalent.

In geraden Dimensionen $d = 2k$ verschwinden Spuren einer ungeraden Anzahl von Gamma-Matrizen

$$\operatorname{tr}\gamma^{m_1}\dots\gamma^{m_{2l+1}} = 0 \ , \tag{61}$$

denn $\hat{\gamma}$ hat ein Quadrat $\hat{\gamma}^2 = 1$ und antivertauscht mit jeder Gamma-Matrix im Produkt. Wegen der Zyklizität der Spur folgt dann

$$\operatorname{tr}\gamma^{m_1}\dots\gamma^{m_{2l+1}} = \operatorname{tr}\gamma^{m_1}\dots\gamma^{m_{2l+1}}\hat{\gamma}^2 = \operatorname{tr}\hat{\gamma}\gamma^{m_1}\dots\gamma^{m_{2l+1}}\hat{\gamma} = -\operatorname{tr}\gamma^{m_1}\dots\gamma^{m_{2l+1}}\hat{\gamma}\hat{\gamma} = 0 \tag{62}$$

Schreibweise $\not{p} = p_m\gamma^m$.

Für die Spur über eine gerade Anzahl von Gamma-Matrizen gilt

$$\operatorname{tr}\not{p}_1\dots\not{p}_{2n} = 4\sum_\pi \operatorname{sign}(\pi)\,(p_{i_1}\cdot p_{j_1})\,(p_{i_2}\cdot p_{j_2})\dots(p_{i_n}\cdot p_{j_n}) \tag{63}$$

wobei die Permutation $\pi(1,2,\dots,2n-1,2n) = (i_1,j_1,i_2,j_2\dots i_n,j_n)$ durch

$$i_1 < i_2 < \dots < i_n \ , \ \forall r: \ i_r < j_r \tag{64}$$

eingeschränkt ist.

Adjunktion

$$\Psi = \begin{pmatrix}\phi_\alpha\\ \bar{\chi}^{\dot\beta}\end{pmatrix} \ , \ \Psi^\dagger = \left(\bar{\phi}_{\dot\alpha}\ , \ \chi^\beta\right) \ , \ \bar{\Psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = \left(\chi^\alpha\ , \ \bar{\phi}_{\dot\beta}\right) \tag{65}$$

Invariante quadratische Form eines Dirac-Spinors

$$\bar{\Psi}\Psi = \chi^\alpha\,\phi_\alpha + \bar{\phi}_{\dot\beta}\bar{\chi}^{\dot\beta} \tag{66}$$

Produkte der u- und v-Spinoren

$$v_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2(m+p^0)}}\begin{pmatrix}-(m+\hat{p})\epsilon\\ (m+\bar{p})\epsilon\end{pmatrix}_\sigma \ , \ u_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2(m+p^0)}}\begin{pmatrix}(m+\hat{p})\\ (m+\bar{p})\end{pmatrix}_\sigma \ . \tag{67}$$

$$\bar{v}_\sigma v_{\sigma'} = -2m\,\delta_{\sigma\sigma'} \ , \ \bar{u}_\sigma u_{\sigma'} = 2m\,\delta_{\sigma\sigma'} \ , \ \bar{v}_\sigma u_{\sigma'} = 0 = \bar{u}_\sigma v_{\sigma'} \ . \tag{68}$$

Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_\sigma u_\sigma\bar{u}_\sigma = \not{p} + m \ , \ \sum_\sigma v_\sigma\bar{v}_\sigma = \not{p} - m \tag{69}$$

5 Lokale Felder

Bei kanonischen Vertauschungsrelationen der Erzeuger und Vernichter

$$\begin{aligned}
[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{k})] &= (2\pi)^3\, 2p^0\, \delta^3(\vec{p}-\vec{k})\ ,\\
\{b_\sigma(\vec{p}), b^\dagger_{\sigma'}(\vec{k})\} &= (2\pi)^3\, 2p^0\, \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta^3(\vec{p}-\vec{k})\ ,\\
\{d_\sigma(\vec{p}), d^\dagger_{\sigma'}(\vec{k})\} &= (2\pi)^3\, 2p^0\, \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta^3(\vec{p}-\vec{k})\ ,
\end{aligned} \tag{70}$$

sind Skalar-Felder ϕ und Dirac-Felder Ψ

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \tilde{d}p\, e^{ipx} a^\dagger(p) + e^{-ipx} a(p)\ ,\\
\Psi(x) &= \sum_\sigma \int \tilde{d}p\, e^{ipx} v_\sigma\, d^\dagger_\sigma(p) + e^{-ipx} u_\sigma\, b_\sigma(p)\ ,\\
\bar{\Psi}(x) &= \sum_\sigma \int \tilde{d}p\, e^{ipx} \bar{u}_\sigma\, b^\dagger_\sigma(p) + e^{-ipx} \bar{v}_\sigma\, d_\sigma(p)
\end{aligned} \tag{71}$$

lokale Felder, das heißt für zueinander raumartige x und y gilt

$$(x-y)^2 < 0\ :\ [\phi(x), \phi(y)] = 0 = \{\Psi(x), \Psi(y)\} = \{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\} = \{\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)\}\ . \tag{72}$$

Zeitordnung lokaler Operatoren: lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned}
T\big(\phi(x_1)\, \phi(x_2) \dots \phi(x_n)\big) &= \pm \phi(x_{\pi(1)}) \phi(x_{\pi(2)}) \dots \phi(x_{\pi(n)})\ ,\\
\text{wobei}\quad & x^0_{\pi(1)} \geq x^0_{\pi(2)} \dots \geq x^0_{\pi(n)}
\end{aligned} \tag{73}$$

Das negative Vorzeichen ist zu nehmen, wenn π eine ungerade Permutation von Fermionen ist. Die Argumente der Zeitordnung sind klassische, graduiert kommutative Felder, das Ergebnis ist ein Produkt von Operatoren.

Ebenso Normalordnung (Erzeuger nach links): lineare Abbildung mit

$$:\phi(x_1)\, \phi(x_2) \dots \phi(x_n) := \sum_{M_l} \pm \phi^-(u_1)\, \phi^-(u_2) \dots \phi^-(u_l)\, \phi^+(v_1) \phi^+(v_2) \dots \phi^+(v_{n-l}) \tag{74}$$

$M_l = \{u_1, u_2, \dots u_l\} \subset \{x_1, x_2, \dots x_n\}$, $V_{n-l} = \{v_1, \dots v_{n-l}\} = \{x_1, x_2 \dots x_n\} - M_l$

Propagator des Skalarfeldes

$$\begin{aligned}
\langle \Omega |\, T\, \phi(x)\, \phi(0) \Omega\rangle &= \begin{cases} \int \tilde{d}p\, e^{-i\,p\,x} & x^0 > 0\\ \int \tilde{d}p\, e^{i\,p\,x} & x^0 < 0 \end{cases}\\
&= \lim_{\epsilon \to 0+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i\,p\,x} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\,\epsilon}
\end{aligned} \tag{75}$$

$$-(\Box + m^2) \langle T\, \phi(x)\, \phi(0)\rangle = i\, \delta^4(x) \tag{76}$$

$$\langle T\, \frac{\delta W_{(2)}}{\delta \phi(x)} \phi(y)\rangle = i \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \langle \phi(y)\rangle = i\, \delta^4(x-y) \tag{77}$$

Wirkung des (klassischen) reellen Skalarfeldes

$$W[\phi] = \int d^4x \, \frac{1}{2} \, \partial_m \phi \, \partial^m \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{78}$$

Propagator des Dirac-Feldes

$$\begin{aligned} \langle T \, \Psi(x) \bar{\Psi}(0) \rangle &= (i\gamma^m \partial_m + m) \langle T \, \phi(x) \phi(0) \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \to 0+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i\,p\,x} \frac{-i(\not{p} - m)}{p^2 - m^2 + i\,\epsilon} \end{aligned} \tag{79}$$

Wirkung des Dirac-Feldes

$$W[\Psi, \bar{\Psi}] = \int d^4x \, \bar{\Psi} \big(i\gamma^m \partial_m - m \big) \Psi \tag{80}$$

$$\big(i\gamma^m \partial_m - m \big)_\alpha{}^\beta \langle T \, \Psi_\beta(x) \bar{\Psi}^\gamma(0) \rangle = \langle T \, \frac{\delta W}{\delta \bar{\Psi}^\alpha(x)} \bar{\Psi}^\gamma(0) \rangle = i \, \delta_\alpha{}^\gamma \, \delta^4(x) \tag{81}$$

6 Vektorfeld

Stückelberg-Lagrangefunktion des reellen Vektorfeldes

$$\mathscr{L}(A, \partial A) = -\frac{1}{4} (\partial_m A_n - \partial_n A_m)(\partial^m A^n - \partial^n A^m) - \frac{\lambda}{2} (\partial_m A^m)^2 + \frac{1}{2} m^2 \, A_m \, A^m \tag{82}$$

Bewegungsgleichungen

$$\Box A_m + (\lambda - 1) \partial^n (\partial_m \, A^m) + m^2 A^n = 0 \tag{83}$$

$$\begin{aligned} A_m(x) = &\int \tilde{d}k_{|_{k^0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}}} \sum_{i=1,2,3} e^{i\,k\,x} \, \epsilon^{*\,i}_m(k) \, a^\dagger_i(k) + \text{h.c.} \\ &+ \int \tilde{d}k_{|_{k^0 = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda} + \vec{k}^2}}} \, e^{i\,k\,x} \, \frac{k_m}{m} \, b^\dagger(k) + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{84}$$

Die Erzeuger $b^\dagger$ erzeugen Fockzustände negativer Norm,

$$[b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{k})] = -(2\pi)^3 \, 2p^0 \, \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \ . \tag{85}$$

7 S-Matrix und Wicksches Theorem

S-Matrix: Wechselwirkung

$$\Psi_{\text{out}} = S \, \Psi_{\text{in}} \tag{86}$$

Einschaltfunktion g:

$$S[g] = \sum_n \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \, \frac{1}{n!} \, g(x_1) \ldots g(x_n) \, S(x_1, \ldots x_n) \tag{87}$$

wobei $S[0] = 1$, $S[1] = S$, S unitär, Poincaré-kovariant, kausal und lokal

$$
\begin{gathered}
S[g] = T \exp i \int d^4x \ :\mathscr{L}_{\text{int}}(x): \ , \\
[\mathscr{L}_{\text{int}}(x), \mathscr{L}_{\text{int}}(y)] = 0 \text{ für } x \text{ raumartig zu } y
\end{gathered}
\tag{88}
$$

$\mathscr{L}_{\text{int}}(x) = f(g(x), \partial g(x), \dots \Phi(x), \partial\Phi(x), \dots)$ in jeder Loopordnung wählbares (Lorentz-skalares), lokales, bosonisches Feld

Wirkungsquerschnitt: auslaufende Stromdichte * r^2 / einlaufende Stromdichte

$$
\begin{aligned}
\sigma_{2\to n}(\Delta) = \frac{1}{4\, m_{\text{Target}} |\vec{p}_{\mathsf{Strahl}}|} \int_\Delta \tilde{d}p_3 \dots \tilde{d}p_{n+2} \left| \langle p_3, \dots p_{(n+2)} | \mathscr{T} | p_1, p_2 \rangle \right|^2 * \\
* \, (2\pi)^4 \, \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_{(n+2)})
\end{aligned}
\tag{89}
$$

Integration über Endzustände: Maß aus der Zerlegung der Eins mit kovariant normierten Impulseigenzuständen.

Reduzierte S-Matrix in Impulseigenzuständen

$$
\langle \text{out} | S | \text{in} \rangle = \langle \text{out} | \text{in} \rangle + i\,(2\pi)^4 \delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}}) \, \langle \text{out} | \mathscr{T} | \text{in} \rangle \tag{90}
$$

Berechnung der S-Matrix: Wicksches Theorem: Das zeitgeordnete Produkt freier Felder mit nicht zusammenfallenden Argumenten ist die Summe über alle Kontraktionen des normalgeordneten Produktes

$$
\begin{gathered}
T\big(\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)\big) = \sum_{M_n} \text{sign}_F \ :\Phi(x_{c_1}) \dots \Phi(x_{c_{n-2k}}): \, \Delta(x_{a_1}, x_{b_1}) \dots \Delta(x_{a_k}, x_{b_k}) \ , \\
\Delta(x, y) = \langle \Omega | T\Phi(x) \, \Phi(y) \, \Omega \rangle \ .
\end{gathered}
\tag{91}
$$

(sign$_F$ Vorzeichen für Vertauschung von fermionischen Variablen)

M_n Menge disjunkter Teilmengen $K_i = \{a_i, b_i\}$, $\cup_i K_i \subset \{1, \dots n\}$,
o.B.d.A. $a_1 < a_2 \dots < a_k$, $a_i < b_i$, $c_1 < c_2 \dots < c_{(n-2k)}$

Es gibt $n!/((n-2k)!\, k!\, 2^k)$ k-fache Kontraktionen von n Feldern

Erzeugendes Funktional

$$
Z[j] = \left\langle e^{i \int d^4x :\mathscr{L}_{\text{int}}: + \Phi(x)\, j(x)} \right\rangle = e^{W[j]} \tag{92}
$$

$Z[0] = 1$, $W[j]$ erzeugendes Funktional der zusammenhängenden n-Punktfunktionen.

8 Renormierbare Quantenfeldtheorien

Verhalten der Loop-Integrationen: Abschätzung des Propagators durch Euklidische Propagatoren ($\epsilon^2 < 2$)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \frac{1}{(p_0)^2 + \vec{p}^2 + m^2} &\le \left| \frac{1}{(p_0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\,\epsilon\,(\vec{p}^2 + m^2)} \right| \\
&\le \sqrt{1 + \frac{4}{\epsilon^2}} \frac{1}{(p_0)^2 + \vec{p}^2 + m^2}
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Abschätzung des Divergenzgrades D_Γ eines Diagramms Γ in $d = 4$ Dimensionen, (E_B (E_F) Zahl der äußeren Boson(Fermion)-Linien von Γ)

$$D_\Gamma \leq 4L - 2I_B - I_F + \sum_{\text{Vertizes}} n_\partial = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F - \sum_{\text{Vertizes}} (4 - n_B - \frac{3}{2}n_F - n_\partial) \qquad (94)$$

Dimension eines Vertexes: $D_V = n_B + \frac{3}{2}n_F + n_\partial$, n_B (n_F) Zahl der Bosonen (Fermionen), n_∂ Zahl der Ableitungen.

In $d = 4$ renormierbare Quantenfeldtheorie: Vertizes mit Dimension bis zu $D_V = 4$,

$$D_\Gamma \leq 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F \ . \qquad (95)$$

Pauli-Villars Regularisierung: Ersetze in $\mathscr{L}_{\text{int}}$ jedes Feld $\Phi(x)$ durch $\sum_i \Phi_i(x)$ mit freier Lagrangsfunktion

$$\mathscr{L}_{(2)} = \sum_i \frac{1}{c_i}\Big(\frac{1}{2}(\partial\Phi_i)^2 - \frac{1}{2}(m_i)^2\Phi_i^2\Big) \qquad (96)$$

$$\Big\langle T \sum_i \Phi_i(p) \sum_j \Phi_j(p') \Big\rangle = i\,(2\pi)^4\delta^4(p + p') \sum_i \frac{c_i}{p^2 - m_i^2 + i\epsilon} \qquad (97)$$

$$\sum_i \frac{c_i}{p^2 - m_i^2 + i\epsilon} = \frac{\sum_i c_i}{p^2} + \frac{\sum c_i m_i^2}{p^4} + O(\frac{1}{p^6}) \qquad (98)$$

Wähle c_i mit $\sum_i c_i = 0 = \sum_i c_i m_i^2$, dann sind alle Loopintegrationen endlich.

Geister: falsche Vorzeichen in $\mathscr{L}_{(2)}$ führen im Fockraum zu Zuständen mit negativer Norm. Ebenso führen höhere Ableitungen in $\mathscr{L}_{(2)}$ zu Geistern.

BPHZL-Renormierte Quantenfeldtheorien (Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann, Lowenstein): Alle Diagramme haben endliche Loop-Integrale. Ziehe dazu von den Integranden jedes einteilchenirreduziblen Feynman-Diagramms die Taylorreihe in den äußeren Impulsen bis zur Dimension $D_\Gamma = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F$ ab. Richtige Kombinatorik bei überlappenden Divergenzen: Zimmermanns Waldformel.

9 Spontane Symmetriebrechung

Bei spontaner Symmetriebrechung durch (reelle) Skalarfelder $\Phi = v + \phi$, $v = \langle\Phi\rangle$ ergibt $\frac{1}{2}D_m\Phi D^m\Phi$ eine Vektor-Skalar-Mischung, die in der R_ξ-Eichung von ’t Hooft durch einen Isospin-verletzenden Eichfixierungsterm kompensiert wird.

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4g^2}F^a_{mn}F^{mn\,a} + \frac{1}{2}D_m\Phi D^m\Phi - V(\Phi)\\ &+ i\,s\Big(\bar{C}^a\big(\partial_m A^{m\,a} - \frac{g^2}{2\lambda}B^a + \frac{g^2}{\lambda}\Phi^T T^a v\big)\Big)\end{aligned} \qquad (99)$$

Durch Wahl der Basis in der Lie-Algebra der Isospintransformationen kann

$$M^2_{ab} = (T^a v)^T (T^b v) = \text{diag}(\frac{m_1^2}{g^2}, \frac{m_2^2}{g^2} \dots \frac{m_k^2}{g^2}, 0 \dots 0) \tag{100}$$

diagonalisiert werden. Verwende im Raum der Skalarfelder eine Basis mit $e^i = \frac{g}{m_i} T^i v$, $i = 1, \dots k$ und ergänze sie zu einer Orthonormalbasis. Dann ist $(T^a v)_b = \frac{m_a}{g} \delta^a_b$ und der quadratische Teil der Lagrangefunktion erweist sich als Summe

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{(2)} =& \frac{1}{g^2}\Big(-\frac{1}{4}(\partial_m A^a_n - \partial_n A^a_m)(\partial^m A^{n\,a} - \partial^n A^{m\,a}) - \frac{\lambda}{2}(\partial_m A^{m\,a})^2 + \frac{1}{2}\, m_a^2\, A^a_m\, A^{m\,a}\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\partial_m \phi^a \partial^m \phi^a - \frac{1}{2}\frac{m_a^2}{\lambda}\,\phi^{a\,2} + \frac{1}{2}\partial_m h^i \partial^m h^i - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^i \partial \Phi^j}_{|_{\Phi=v}}\, h^i\, h^j \\
&- \mathrm{i}\, \bar{C}^a(\Box + \frac{m_a^2}{\lambda})C^a
\end{aligned} \tag{101}$$

Die Goldstone-Bosonen ϕ^a sind massiv (sie sind auch ohne die isospinbrechende Eichfixierung massiv, wenn man die quadratischenTerme einschließlich $A^m \partial_m \Phi$ diagonalisiert) und bilden mit dem skalaren Freiheitsgrad des zugehörigen Vektorfeldes A^a_m und den Geistern C^a und Antigeistern $\bar{C}^a$ auf der Massenschale m_a^2/λ zwei Doublets aus nichtinvarianten und trivialen Zuständen. Die Vektorfelder, die zu den gebrochenen Symmetrien gehören, erzeugen physikalische, massive Spin-1-Teilchen mit Massen m_a.

Die Eichkopplung g erscheint hier als Normierungsfaktor der Vektorfelder. Im Standardmodell zerfällt die Lie-Algebra in eine Summe von drei Lie-Algebren, die jede einen eigenen Normierungsfaktor hat.

Der Fermion-Inhalt des Standardmodells ist chiral, das heißt, es gibt keine U(1)×SU(2)×SU(3)-invariante Massenterme. Erst durch Yukawa-Kopplungen an die Skalarfelder entstehen bei spontaner Symmetriebrechung Fermionmassen. Die Fermionen koppeln daher an das Higgsfeld proportional zu ihrer Masse.

Literatur

[1] Friedemann Brandt, Supersymmetry algebra cohomology: I Definition and General Structure [arXiv:0911.2118]

[2] Steven Weinberg, The Quantum Theory of Fields Volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[3] Norbert Dragon, Geometrie der Relativitätstheorie, `http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon`

[4] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields, John Wiley, New York, 1959

[5] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York, 1965