Januar 00 , vorläufiges Sonderblatt
zum Theorie–Kurs Lehrer II

Drehimpuls–Algebra

$$\boldsymbol{\ell = 1,2,3 \quad , \quad J_\ell^\dagger = J_\ell \quad , \quad [\, J_1 \, , \, J_2 \,] = i\hbar J_3} \quad \text{und zyklisch} \tag{J.1}$$

weiter nichts ! $\curvearrowright$ zunächst, daß

$$[\, \vec{J}^{\,2} \, , \, J_3 \,] = J_1[\, J_1 \, , \, J_3 \,] + [\, J_1 \, , \, J_3 \,]J_1 + J_2[\, J_2 \, , \, J_3 \,] + [\, J_2 \, , \, J_3 \,]J_2 = 0$$

ist und folglich $\vec{J}^{\,2}$ und J_3 ein simultanes System $|\, \lambda, m \,\rangle$ von orthonormierten Eigenzuständen haben. Wegen Hermitezität sind die Zahlen λ und m reell :

$$\vec{J}^{\,2} \,|\, \lambda, m \,\rangle = \hbar^2 \lambda \,|\, \lambda, m \,\rangle \qquad , \qquad J_3 \,|\, \lambda, m \,\rangle = \hbar m \,|\, \lambda, m \,\rangle \quad . \tag{J.2}$$

Die linke Gleichung nehmen wir im Skalarprodukt mit $|\, \lambda, m \,\rangle$. Auf die rechte wenden wir zuvor J_3 an. Also ist $\hbar^2 \lambda = \langle\, \lambda, m \,|\, \vec{J}^{\,2} \,|\, \lambda, m \,\rangle = \langle\ \ |J_1^2|\ \ \rangle + \langle\ \ |J_2^2|\ \ \rangle + \langle\ \ |J_3^2|\ \ \rangle \geqslant 0$, und auch $\hbar^2 \left(\lambda - m^2\right) = \langle\, \lambda, m \,|\, \vec{J}^{\,2} - J_3^2 \,|\, \lambda, m \,\rangle = \langle\ \ |J_1^2|\ \ \rangle + \langle\ \ |J_2^2|\ \ \rangle \geqslant 0$. Ergo :

$$0 \leqslant \lambda \qquad , \qquad -\sqrt{\lambda} \leqslant m \leqslant \sqrt{\lambda} \quad . \tag{J.3}$$

Jetzt definieren wir zwei Operatoren J_+ und J_- , schreiben ihre (leicht verifizierbaren) Eigenschaften gleich daneben,

$$J_1 \pm iJ_2 =: J_\pm \qquad , \qquad \begin{array}{c} J_\pm^\dagger = J_\mp \ \ , \ \ [\, \vec{J}^{\,2} \, , \, J_\pm \,] = 0 \\ [\, J_3 \, , \, J_\pm \,] = \pm\hbar J_\pm \ \ , \ \ J_\mp J_\pm = J^2 - J_3^2 \mp \hbar J_3 \end{array} \quad , \tag{J.4}$$

und nennen sie sinnigerweise Auf– und Absteigeoperatoren, denn

$$J^2 \Big(\, J_\pm \,|\, \lambda, m \,\rangle \Big) \;=\; \hbar^2 \lambda \Big(\, J_\pm \,|\, \lambda, m \,\rangle \Big) \qquad \text{und} \tag{J.5}$$

$$J_3 \Big(\, J_\pm \,|\, \lambda, m \,\rangle \Big) \;=\; (\pm\hbar J_\pm + J_\pm \hbar m) \,|\, \lambda, m \,\rangle = \hbar(m \pm 1) \Big(\, J_\pm \,|\, \lambda, m \,\rangle \Big) \quad . \tag{J.6}$$

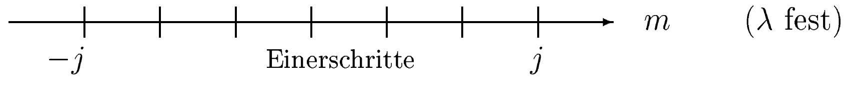
Der eingeklammerte Zustand ist also ein $|\, \lambda, m \pm 1 \,\rangle$ — bis auf Vorfaktor :

$$J_\pm \,|\, \lambda, m \,\rangle = \alpha_\pm \,|\, \lambda, m \pm 1 \,\rangle \ \ , \ \ |\alpha_\pm|^2 = \langle\, \lambda, m \,|\, J_\pm^\dagger J_\pm \,|\, \lambda, m \,\rangle = \hbar^2 \left(\, \lambda - m^2 \mp m \,\right) \ \ , \tag{J.7}$$

wobei die letzte Beziehung aus (J.4) von Nutzen war. Wenden wir wiederholt J_- an (λ fest), so muß — weil (J.3) beliebig tiefe m's verbietet — genau der Wert $\alpha_- = 0$ getroffen werden. Das minimale m, bei dem das passiert, nennen wir 'min'. Analog kann man J_+ wiederholt anwenden und muß $\alpha_+ = 0$ treffen. Das maximale m nennen wir j ,

$$\begin{array}{l} 0 = \lambda - \mathrm{min}^2 + \mathrm{min} \\ 0 = \lambda - j^2 - j \end{array} \qquad \curvearrowright \qquad j^2 + j - \mathrm{min}^2 + \mathrm{min} = 0 \quad , \tag{J.8}$$

mit den beiden Lösungen $j = \mathrm{min} - 1$ (unzutreffend) und $j = -\mathrm{min}$. Also müssen die m–Werte in ganzzahligen Schritten von $-j$ bis j laufen — egal ob dabei der Ursprung betreten oder übersprungen wird :



Aus den beiden linken Gleichungen (J.8) hatten wir λ eliminiert. Jetzt können wir es mittels der unteren durch j ausdrücken : $\lambda = j^2 + j = j(j+1)$. Das tiefstmögliche m_{max} ist $j = 0$ ($\curvearrowright$ $m = 0$). Nur zu $j = 0$ gilt in den Ungleichungen (J.3) das Gleichheitszeichen.

Fazit : jene Zahlen λ und m in den Eigenwerten $\hbar^2 \lambda$ (von $\vec{J}^{\,2}$) und $\hbar m$ (von J_3) nehmen die diskreten Werte

$$\lambda = j(j+1) \quad , \quad m = -j, \ldots\ldots, j-1, j \quad \text{mit} \quad j = 0\, , \frac{1}{2}\, , 1\, , \frac{3}{2}\, , 2\, , \ \ldots \tag{J.9}$$

an. Die Algebra hat m e h r Möglichkeiten (nämlich auch halbzahlige j–Werte) als der lahme Bahndrehimpuls $\vec{L}$. Ob wohl die Natur davon Gebrauch macht ? Spin !