Welt am Faden

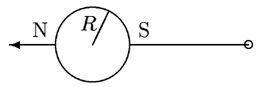
Manchmal ist alles ganz anders. So ein schneller kleiner Halbzeiler zum Energiesatz (ein Einpunkter) sollte es werden, mit Lösung

$$\frac{m}{2}v_0^2 - \frac{\gamma m M}{R} \stackrel{!}{=} 0 - \frac{\gamma m M}{R+\pi R} \quad \curvearrowright \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}\,\frac{\pi}{1+\pi}} \quad . \tag{1}$$

„Sollte“ — denn (1) ist f a l s c h ! Die Aufgabestellung selbst, hingegen, die kann ruhig so stehen bleiben :

Blatt 7, 21)

(c) Ein am Südpol befestigter Faden verläuft auf Meridian bis zum Nordpol. Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muß eine dort an ihm befestigte Masse m nach oben abgeschossen werden, damit sie die N–S–Achse ganz unten — gerade noch — erneut erreicht ?

„oben“  „unten“

Es ist ein F a d e n . Die Figur zeigt ihn ausgestreckt nach rechts (d.h. nach „unten“). Weshalb (1) falsch ist, macht sich der Analogrechner Mensch folgendermaßen klar. Wäre der Faden ein Glasfiberstab, biegsam aber longitudinal nicht komprimierbar, dann stünde er bei Geschwindigkeit Null auf der N–S–Achse dort still. Aber noch immer wird m von der Erdanziehung auf den Stab gedrückt. Aha, ohne longitudinale Steifigkeit würde er sich verkürzen. Ein Faden an seiner Stelle hätte schon lange vor Erreichen der Achse nicht mehr am m gezogen. Falsch in (1) ist also die Null auf der rechten Seite. Student D. Engelskirchen hat es vermeldet (Lob !), mindestens eine(r) also bemerkt, aber von den Korrektoren wohl keiner (oh).

Die anständige Lösung. Beim Durchgang durch Achse braucht m eine gewisse Geschwindigkeit v_1 . Die Masse m befindet sich dort (und zuvor) auf einer Kreisbahn mit Radius πR, hat also radiale Beschleunigung $v^2/(\pi R)$. Bei Achsendurchgang genügt Newton für Beträge ($F :=$ Fadenspannung) und besagt, daß

$$m\,\frac{v_1^2}{\pi R} = F + \frac{\gamma m M}{(R+\pi R)^2} \qquad \text{ist und daß} \qquad m v_1^2 = \frac{\gamma m M}{R}\,\frac{\pi}{(1+\pi)^2} \tag{2}$$

das kleinstmögliche v_1 gibt, denn jenes „ganz unten – gerade noch“ im Aufgabentext besagt, daß $F=0$ das tiefste der Gefühle ist. Der Energiesatz, aufgelöst nach kinetischer Energie bei Start, lautet nun

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}v_0^2 &= \frac{\gamma m M}{R} - \frac{\gamma m M}{R(1+\pi)} + \frac{m}{2}v_1^2 = \frac{\gamma m M}{R}\left(1 - \frac{1}{1+\pi} + \frac{\pi}{2(1+\pi)^2}\right) \\ &= \frac{\gamma m M}{R}\,\frac{\pi(3+2\pi)}{2(1+\pi)^2} \qquad \curvearrowright \qquad v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}\,\frac{\pi(3+2\pi)}{(1+\pi)^2}} \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

Hatte jemand diese Lösung auf dem Papier ? Es handelte sich ersichtlich um ein arg härteres Brot, als gedacht — sagen wir mal, um einen Dreipunkter.

Auch während der Viertelkreis–Bewegung bis Achse läßt sich die Fadenspannung F gut studieren. Die „Zwangskraft“ $\vec{F}$, deren Betrag F ist, zeigt von m zum Südpol und steht additiv in der Bew.gleichung. Deren Lösung $\vec{v}$ ist bekannt : Betrag v aus Energiesatz und Richtung tangential am Kreis. F folgt via skalarer Multiplikation der Bew.gleichung mit $\vec{e}_{m\to S} := \vec{F}/F$. Schließlich verrät eine kubische Gleichung, daß die Fadenspannung F ständig abnimmt bis zur Achse, wo sie Null wird.

Sollte er sogar auf diesem Blatt etwas vermurkst haben, der Schulz, dann kann er gleich selbst am Faden mit v_0 ...