28) Harmonische Schwingung in 2D .

Die Masse m in der Potentialmulde von Übung 26 erfährt die Kraft $\vec{K} = -\frac{1}{2}\kappa\, H\vec{r}$, $H = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — unter leicht veränderter Notation: $\kappa/2$ jetzt außerhalb H .

(a) Wir vermuten (von HT noch keine Ahnung), daß sich das Problem durch eine Drehung um die z–Achse vereinfacht. Also bilden wir $H' = DHD^T$ und zwar, 2×2–isch bleibend, mit $D = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$. Jetzt erst legen wir den Drehwinkel φ so fest, daß H' diagonal wird. Dabei wird D zu $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{+} & \sqrt{-} \\ -\sqrt{-} & \sqrt{+} \end{pmatrix}$, nämlich mit $\sqrt{\pm} :=$? Welche Diagonalelemente $H'_{11} =: \lambda_1$ und $H'_{22} =: \lambda_2$ ergeben sich ? Kommen sie auch per $\det(H - \lambda\, 1) = 0$ heraus ? Gelingen Spur– und Determinanten–Probe ?

(b) Um $\boxed{m\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{2}\kappa H\vec{r}\ ,\ \ \dot{\vec{r}}(0) = \vec{0}\ ,\ \ \vec{r}(0) = \vec{a}}$ mit $\vec{a} = a\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ zu lösen, übertragen wir das ganze Problem ins Hauptachsen–System : $\vec{r}\,'(t) = ?$

$2.5 + 1.5 =$ 4

29) Ein Trägheitstensor

Die vier gleichen Massen m eines Starren Körpers befinden sich an den Stellen

$$\vec{r}_1 = a\begin{pmatrix} 2\sqrt{10/3}+2 \\ 2\sqrt{10/3}-1 \\ \sqrt{10/3}-2 \end{pmatrix},\ \vec{r}_2 = a\begin{pmatrix} -2\sqrt{10/3}+2 \\ -2\sqrt{10/3}-1 \\ -\sqrt{10/3}-2 \end{pmatrix},\ \vec{r}_3 = a\begin{pmatrix} -2+\sqrt{2/3} \\ 1-2\sqrt{2/3} \\ 2+2\sqrt{2/3} \end{pmatrix},\ \vec{r}_4 = a\begin{pmatrix} -2-\sqrt{2/3} \\ 1+2\sqrt{2/3} \\ 2-2\sqrt{2/3} \end{pmatrix},$$

und sind mit masselosen Stangen untereinander sowie mit dem Ursprung verbunden.

(a) Wo liegt der Schwerpunkt des Körpers : $\vec{R} = ?$ Welche Komponenten hat sein Trägheitstensor I zur angegebenen Position ?

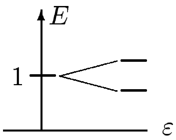
Nach Auseinandersetzungen mit dem Weihnachtsmann gab es Übereinkunft, daß nur I_{11} und I_{12} auszurechnen seien und daß auf dem Gabentisch (b) das volle Resultat zu liegen habe. Na gut :

(b) $I = 8\,m\,a^2\,H$ mit $H = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. Die Matrix H setzt nun das volle Programm der Hauptachsentransformation in Gang. Numerieren Sie die Schritte bitte mit I. bis VII. (das hilft bei der Korrektur). Dreht sich der Körper mit ω um die dritte Hauptachse, d.h. mit $\vec{\omega} = \frac{\omega}{3}(1, -2, 2)$, so hat er den Drehimpuls $\vec{L} = ?$

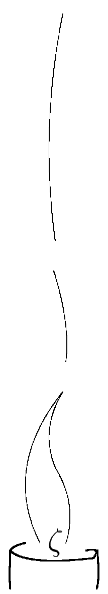
($\vec{L} \parallel \vec{\omega}$?! Wie in Relativistik : Qualitatives wird in jedem System als solches erkannt.)

$2.5 + 3.5 =$ 6

30) Störung hebt Entartung auf .



Die stationären Zustände $\vec{\psi}$ eines jeden Quantensystems werden aus $H\vec{\psi} = E\vec{\psi}$ ermittelt, wobei sich Energieniveaus E ergeben. Der Eigenvektor $\vec{\psi}_0$ zum tiefsten E ($=: E_0$) heißt Grundzustand. $\vec{\psi}$'s sind stets zu normieren. Bei einfacheren Problemen (Spin $\frac{1}{2}$) ist der Hamilton–Operator H nur eine 2×2–Matrix. Soso.



Wenn $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ der Hamilton–Operator eines Systems ist, so ist seine Grundzustandsenergie $E_0 = 1$ (in irgenwelchen Energie–Einheiten) ersichtlich zweifach entartet. Jedes zweikomponentige $\vec{\psi}$ ist Eigenzustand, und jedes $\vec{f}$–Zweibein ist wählbar. Das H_0–System erfahre nun auf zwei Weisen eine kleine Störung, einmal mit V , einmal mit W , so daß $H = H_0 + V$ mit $V = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\widetilde{H} = H_0 + W$ mit $W = \begin{pmatrix} 3\varepsilon & 4\varepsilon \\ 4\varepsilon & -3\varepsilon \end{pmatrix}$.

Welches Spektrum E_0 , E_1 und welche zugehörigen normierten Eigenzustände $\vec{\psi}_0$, $\vec{\psi}_1$ hat H ? Und welche hat $\widetilde{H}$?

2

Nicht wahr, wenn man nun mit ε nach Null geht, dann wandern die Energie–Eigenwerte wieder zusammen, aber die $\vec{\psi}$–Zweibeine bleiben wie sie sind, nämlich verschieden. Sie „wissen“ noch von der Störung, in der sie gelebt hatten. Störung schafft Ordnung im Entartungsunterraum.