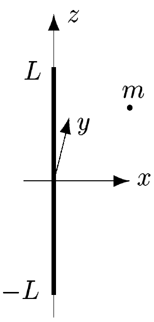
37) Reihenanfänge zur Resultat–Diskussion



Wenn wir ∞ viele Sterne (dM) auf der z–Achse zu einem dünnen Stab (Gesamtmasse M, Länge $2L$) zusammengefügen (könnten. Aber mit Ladungen läßt es sich gut machen!), dann addieren sich deren Potentiale zum *Gravitationspotential des Stabes*. Dessen Gradient liefert dann die Kraft auf eine Probemasse m bei $\vec{r}$. Das Resultat dieser Integration (bald können wir's) ist

$$V(\vec{r}) \;=\; \frac{\gamma m M}{2L} \ln\left(\frac{w_+ - z - L}{w_- - z + L}\right) \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{l} w_\pm := \sqrt{(L\pm z)^2+\varrho^2} \\ \text{und} \quad \varrho^2 := x^2+y^2 \quad . \end{array}$$

a) Wenn sich m weit weit vom Stab entfernt, kann es vermutlich nur noch das Potential $-\gamma m M/r$ einer Punktmasse M wahrnehmen. Wie kommt diese Groß–r–Asymptotik von $V(\vec{r})$ zustande ?

(b) Jetzt rücken wir nahe an den Stab heran, setzen $z=0$ und interessieren uns für den führenden Term von V bei $\varrho \to +0$. Mit welcher Potenz von ϱ nimmt also die Anziehungskraft $K(\varrho)$ nach außen ab ? $1.5 + 1.5 =$ 3

Die Physik nahe Ursprung kann die weit entfernten Stabenden „nicht mehr sehen". Wir haben also bei (b) das Gravitationspotential eines ∞–langen Stabes erhalten, dessen lineare Massendichte σ zu $\sigma = M/(2L)$ bekannt ist.

38) Störungsrechnung

Am DESY/Hamburg haben Bösewichter kurzzeitig den Teilchenstrahl nach oben gelenkt. Die Fluchtgeschwindigkeit ist weit überschritten, d.h. für alle x ist $E \gg V(x)$, oder auch: γ ist winzig . Später – die Erde ist längst $\approx$ punktförmig – wird ein solches Teilchen von einer Raumsonde registriert, nämlich zur Zeit $t_1 = a/v_0$ bei $x(t_1) = a$ mit $\dot{x}(t_1) = v_0$. Zur Ergreifung der Täter wird die Tatzeit t_0 benötigt.

Der Eindeutigkeitsrahmen für $x(t)$ enthält $\ddot{x} = -\gamma M/x^2$ und obengenannte t_1–Daten. Welche drei ER's für $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ entstehen bei Störungsrechnung nach γ ? Wir lösen die ersten beiden. Aus welcher Gleichung ist die Tatzeit zu ermitteln ? Welche zwei (der vier) Terme in $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$ kann man dabei vernachlässigen ?

Genug. Wer t_0 sogar explizit anzugeben vermag, verdient *challenge*–Zusatzpunkte. 5

39) Integral ist Fläche

Elementare Umformungen und geometrisch–anschauliche Überlegungen reichen aus, die Werte der folgenden acht Integrale zu ergründen :

$$J_1 = \int_0^4 dx\, \Big(3 - |x-2|\Big) \quad , \quad J_2 = \int_{-3}^4 dx\, \frac{2x + \mathrm{sh}^2(2x-1)}{\mathrm{ch}^2(2x-1)}$$

$$J_3 = \int_0^6 dx\, \left(\frac{2}{1+(x-5)^2} + \frac{x(x-2)}{x^2-2x+2}\right) \quad , \quad J_4 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{2\varepsilon} \int_0^{10\varepsilon} dx\, \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}$$

$$J_5 = \lim_{a\to\infty} \int_a^{a+4} dx\, \left(x\sqrt{2+x^2} - x^2\right) \; , \; J_6 = \int_0^3 dx\, \left[1 + \mathrm{Arsh}\Big(\frac{1}{x}\Big) + \ln\Big(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\Big)\right]$$

$$J_7 = T\,\partial_T \ln\left(\int_0^\infty dx\, \frac{x}{e^{x/T}+1}\right) \quad ,$$

$$J_8 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon dx\, \frac{1}{x} \left(\mathrm{ch}(2x) - \sqrt{1 + 2\sqrt{3\,x\,\mathrm{Arth}(x) - 3x^2}}\right)$$

$.5 + .5 + .5 + .5 + .5 + .5 + .5 + .5 =$ 4

♣ Hiermit endet das WS–Hausübungsprogramm. — Aber auch die Entzugserscheinungen gehen vorüber, nämlich am Montag , dem 7. April , 11[ct] Uhr im Bahlsen–Saal $\equiv$ F 303 . ♣